Textos Académicos

Grupo GNOMON / Grupo ELIME

Geometría Interactiva

GRATIS DVD INTERACTIVO

ITM

Grupo GNOMON

Grupo de Investigación en didácticas matemáticas, básicas y aplicadas. Uno de los objetivos del grupo es el desarrollo de unidades didácticas a través de mediadores virtuales y el aprovechamiento de los recursos de la web 2.0. La implementación de las TIC desde las unidades didácticas diseñadas permite indagar sobre el posible mejoramiento en los procesos de enseñanza-aprendizaje y su aprovechamiento en las aulas de clase. En ese contexto, el grupo ha participado en la producción de escenas interactivas (incluidas en el DVD) que permitan representaciones más cercanas al entorno de nuestros estudiantes.

Carlos Restrepo, Juan Rivera,
Héctor Herrera, John Pérez,
Juan Arango, Nora Pino,
Elkin Castrillón, Lácides Ramírez,
John García, Graciela Villegas,
Mario Gama, Juan Sandoval

Grupo ELIME

Grupo de investigación adscrito al Centro de Estudios e Investigaciones Docentes (CEID) de ADIDA, cuya línea de investigación es la educación matemática. Uno de sus presupuestos es la construcción de metodologías problematizadoras y de estrategias que propicien el acercamiento a aquéllas en forma simétrica, es decir, desde procedimientos conceptuales y pragmáticos, en donde la lógica y lo simbólico aporten soluciones significativas y cercanas a la vida de los estudiantes.

Jorge Cardeño, Luis Restrepo,
Diego Herrera, Mercedes Arrubla,
Carlos Ospina, Fanny Guevara,
Hernán Ortiz, Diego Correa,
Diego Ceballos, John Mahecha

Geometría interactiva

Geometría interactiva

GNOMON

Carlos Mario Restrepo Restrepo
Juan Guillermo Rivera Berrío
Héctor Javier Herrera Mejía
John Alexander Pérez Sepúlveda
Juan Guillermo Arango Arango
Nora Eliana Pino Ramos
Elkin Alberto Castrillón Jiménez
Lácides Miguel Ramírez de la Ossa
John Jairo García Mora
Graciela Villegas
Mario Gama Díaz
Juan de Jesús Sandoval

ELIME. CEID-ADIDA

Jorge Cardeño Espinosa
Luis Gonzaga de J. Restrepo Ramírez
Diego Herrera Sepúlveda
Mercedes Arrubla Carmona
Carlos Humberto Ospina Noreña
Fanny Guevara Mena
Hernán Darío Ortiz Alzate
Diego León Correa Arango
Diego Antonio Ceballos Nieto
John Jairo Mahecha Bautista

ITM

TEXTOS ACADÉMICOS

INSTITUTO TECNOLÓGICO METROPOLITANO
Institución Universitaria

GEOMETRÍA INTERACTIVA

1a. Edición: Noviembre de 2009

ISBN: 978-958-8351-68-1

Dirección editorial
Fondo Editorial ITM

Corrección de textos
Lucía Inés Valencia

Diagramación y montaje
L. Vieco e Hijas Ltda.

Impreso y hecho en Medellín, Colombia

Instituto Tecnológico Metropolitano
Calle 73 No. 76A 354
Tel.: (574) 440 51 00
Fax: 440 51 01
www.itm.edu.co
Medellín - Colombia

CONTENIDO

PRESENTACIÓN

La Geometría como abstracción no puede definirse en una forma simplista desde sus raíces griegas (*Geo*: tierra – *metrón*: medida). Los griegos si bien matematizaban la realidad, *ésta* no sólo se limitaba a la realidad física, sino también a otras realidades como la moral, la estética y la política. Para Platón, por ejemplo, las Matemáticas tenían un carácter de necesidad divina: "*Dios siempre hace Geometría*" (frase atribuida a Platón por Plutarco). Por otra parte, la frase célebre a la entrada de la Academia "*No entre aquí quien no sepa geometría*", es un epígrafe que da cuenta de la importancia de la Geometría en el pensamiento y el espíritu platónicos. Desde Pitágoras hasta Platón los conceptos de la Matemática eran independientes de la experiencia, se les descubría; *es decir*, no se los inventaba o creaba. Platón afirmaba que los razonamientos que hacemos en Geometría no se refieren a las figuras concretas que dibujamos sino a las ideas absolutas que ellas representan (República, 510d-510e).

No obstante estos orígenes, en los siglos posteriores, la enseñanza de las matemáticas en general, y de la geometría en particular, ha sido objeto de múltiples avatares; entre ellos, la introducción de una alta componente algebraica, un interés centrado en poder inculcar la abstracción, y a partir de la generalización abordar la resolución de problemas como una aplicación o concreción de lo abstraído. Pero es posible que en ese proceso se pierda el desarrollo y práctica de la intuición y de la creatividad, de la localización de caminos eficaces, es decir, se obvie o aminore el aprendizaje de estrategias plausibles y eficientes. Los Números —la Aritmética— y la Geometría son las abstracciones más cercanas a nuestro mundo físico y consecuentemente, quizás, manteniéndonos en ese contexto sea posible abordar y alcanzar una adecuada formación intelectual, implementando actividades que fomenten la búsqueda de estrategias de resolución que sean intrínsecas a dichos ámbitos y no ajenas a ellos. Y una vez asimilado este proceso lógico, y como consecuencia de él, posiblemente se aborde de manera más natural la generalización.

De otro lado, en la actual sociedad de la información emergen nuevas generaciones llamadas digitales o del ordenador que demandan un cambio radical en las estrategias de enseñanza de la Geometría. Situación ya advertida por la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE) en 2006.

> *"Es importante no restringir el concepto de forma al de unas entidades estáticas. La forma, como entidad, puede transformarse, del mismo modo que las formas se modifican. En ocasiones, este tipo de cambios pueden visualizarse con gran elegancia mediante tecnologías informáticas. Los alumnos deberán ser capaces de identificar pautas y regularidades en el cambio de las formas".*

En este contexto, buscamos desarrollar en este libro algunas líneas de actuación concretas mediante el trabajo con algunas unidades didácticas interactivas. La intención es "abrir los ojos" para que la mente aborde adecuadas observaciones geométricas y a partir de ellas desarrolle estrategias de resolución eficientes. Por ejemplo, la descomposición geométrica de figuras en otras más sencillas, o su ubicación en un contexto mayor que lo contenga, pero que sea más simple, son pautas de razonamiento en las que la Geometría "abstrae al Álgebra" y simplifica el aparato matemático necesario, se simplifica el cálculo. Igualmente, el posicionamiento adecuado ante un objeto tridimensional o la percepción reflexiva de la ordenación lógica de sus elementos, su ubicación y relación, también requiere de una práctica y aprendizaje.

Las cuatro unidades didácticas que presentamos, como medio de trabajo o recurso didáctico, integran escenas interactivas bajo licencia *creative commons* (no constituyen costo alguno en esta obra) desarrolladas con los programas educativos GeoGebra y el *"núcleo interactivo para programas educativos"*, o nippe, denominado Descartes. Con el primero hemos diseñado la mayoría de las imágenes del texto y un gran número de escenas, que permita al estudiante construir los objetos geométricos presentados en cada unidad. Por otra parte, el nippe Descartes nos ha permitido crear escenas en las que el estudiante puede interactuar y recabar información, de manera que el cambio que realiza sobre determinados parámetros textuales o numéricos, o el desplazamiento que efectúa del ratón (*mouse*) hace que la imagen cambie y aporte nuevos datos o perspectivas ampliando la base de decisión, de reflexión y resolutiva que se busca fomentar. Adicionalmente, en estas escenas, se incorporan elementos aleatorios que hace que una misma escena pueda ser reutilizada por éste mismo para la adquisición de la competencia buscada, pues presenta una actividad con igual dificultad y desarrollo de habilidades, pero con diferente apariencia, introduciéndolo en un ámbito de continua reflexión y motivación, incentivando ese aprendizaje significativo, ya que provoca la extracción del concepto implícito existente, independientemente de la instancia presentada en cada momento. Ello se complementa con la evaluación de las respuestas aportadas por los usuarios, evaluación no sólo correctora, sumativa, sino que muchas veces busca ser orientadora y formativa.

La incorporación de más de 900 escenas interactivas hace que esta obra sea novedosa en nuestro medio y se constituya en un modelo por seguir en otros campos de las ciencias básicas, en tanto que, como lo advierte la OCDE, la interacción con entidades dinámicas mediante las tecnologías informáticas es más efectiva que con el uso de las metodologías estáticas tradicionales.

JUAN GUILLERMO RIVERA BERRÍO
ITM. Sede Robledo
Miembro del Grupo Descartes de España

ESTRUCTURA DIDÁCTICA

¿CÓMO ORIENTARSE EN ESTE LIBRO?

El presente texto se encuentra dividido en cuatro ejes temáticos: Geometría Plana (Geoplana), Geometría del espacio (Geoespacio), Geometría Analítica (Geoanalítica) y Geometría Vectorial (Geovectorial). Con base en estos ejes se desarrolla toda la temática, tanto conceptual como práctica del estudio de la geometría.

El texto tiene la siguiente estructura, la cual busca aproximarnos al estudiante y al deseo de este por la comprensión de los conceptos fundamentales de la Geometría, pues bien se sabe que es la base preliminar para la comprensión del álgebra, la trigonometría, el cálculo, entre otros. Se debe tener claro que por el hecho de establecer estas categorías didácticas, no se pierde el rigor y la profundidad necesaria en el conocimiento de esta rama de las Matemáticas.

TÍTULOS

Como se trata de producir un texto que sea diferente y que además posicione el Instituto Tecnológico Metropolitano ITM, aparece en el texto:

Geoplana
Geoespacio
Geoanalítica
Geovectorial

LOGROS

Son los cambios, modificaciones de actitudes, comportamientos, conductas o evolución intelectual que se observan en cualquier momento del proceso educativo (Tulio Manuel Angarita serrano, 1996).

Los logros hacen énfasis sobre los procesos, estructuras, relaciones estudiante-docente, aprendizajes, reflexión constante y visión integral entre otros. Mientras que los objetivos nos hablan de conductas terminales, obtención de resultados, relaciones profesor-alumno, enseñanza y acciones predecibles.

Es así como los logros apuntan hacia una concepción pedagógica de los procesos y diferencias individuales en términos de ritmos de aprendizaje. Se entiende la evaluación de los logros del estudiante como el desarrollo de sus capacidades, que guardan estrecha relación con el proceso docente educativo que se vive en las aulas o fuera de ellas.

Logros: alcances, avances y conquistas.

INDICADOR DE LOGRO (IDL)

Un IDL puede estar referido a un comportamiento observable si en la acción práctica el alumno construye, deconstruye o inclusive reconstruye el conocimiento.

Un IDL constituye señales o manifestaciones del sujeto.

COMPETENCIAS

Lo que se sabe técnicamente y se aplica para la vida.

Las competencias están estrechamente relacionadas con las aptitudes o capacidades.

En el contexto educativo, el término competencia se extiende a actividades para enfatizar el desarrollo de las potencialidades del sujeto, a partir de lo que aprende en la escuela y que va mas allá de la memorización (aprendizaje significativo).

Las competencias tratan de centrar la educación en el estudiante, en su aprendizaje y en el significado funcional de dicho proceso, esas competencias son: Pensar y razonar, Argumentar, Comunicar, Modelar, Plantear y resolver problemas, Representar y Utilizar el lenguaje simbólico, formal, técnico y las operaciones.

Competencias cognitivas de carácter general:

Pensar y razonar
Argumentar
Comunicar

Competencias matemáticas específicas:
Relacionadas con algún tipo de análisis conceptual.

Modelar
Plantear y resolver problemas
Representar
Utilizar el lenguaje simbólico, formal, técnico y las operaciones
Utilizar herramientas de apoyo (por ejemplo, TIC).

CONOCIMIENTOS PREVIOS

Hace referencia a lo que debe saber el estudiante antes de iniciar cada eje temático, es decir los pre-conceptos que se requieren para una mayor comprensión.

Estado inicial de los estudiantes que incide en su proceso de enseñanza-aprendizaje.

ESTÁNDARES (CONTENIDO-MAPA CONCEPTUAL)

Criterios que especifican lo que todos los estudiantes deben saber y ser capaces de hacer en cada área y en cada grado.

Formulaciones claras, universales, precisas y breves.

Describen conocimientos y habilidades que los estudiantes deben lograr.

RESEÑA HISTÓRICA

Se trata de retomar elementos de tipo histórico relacionados con el eje temático principal y que busquen dar respuesta al origen de un determinado concepto de las Matemáticas.

Ejemplo: La Geometría Analítica y los aportes de René Descartes.

SITUACIÓN PROBLEMA O PROBLEMA

Se puede construir en el eje temático respectivo uno de los dos, se trata eso sí de buscar que los estudiantes no posean una respuesta directa, sin el conocimiento del contenido propuesto.

Se trata de formular y resolver problemas relacionados con su entorno, en nuestro caso Medellín o las mismas instalaciones universitarias para que puedan ver estructuras matemáticas relacionadas con su propia vida.

La situación problema es una vía fundamental para la conceptualización.

HERRAMIENTAS

Son las definiciones o conceptos que se aluden en el eje temático.

AYUDAS

Hace referencia a los ejercicios resueltos.

RETOS

Son los ejercicios o problemas que se plantean en el eje temático.

DESAFÍOS

Son las actividades que se plantean en el CD, como aplicación del contenido mediante los programas de Geogebra y Descartes.

JORGE CARDEÑO ESPINOSA
Director L.I. "Educación Matemática"
ELIME. CEID-ADIDA

CARLOS MARIO RESTREPO RESTREPO
Director GNOMON. ITM.

Símbolo	Significado	Ejemplo	En palabras
Δ	Triángulo	ΔABC tiene 3 lados iguales	*El triángulo ABC tiene tres lados iguales*
$\angle$	Ángulo	$\angle$ABC mide 45°	*El ángulo formado por ABC mide 45 grados.*
$\perp$	Perpendicular	AB$\perp$CD	*La línea AB es perpendicular a la línea CD*
$\parallel$	Paralela	EF$\parallel$GH	*La línea EF es paralela a la línea GH*
°	Grados	360° es un círculo completo	
⦜	Ángulo recto (90°)	⦜mide 90°	*Un ángulo recto mide 90 grados*
$\overline{AB}$	Segmento de línea "AB"	$\overline{AB}$	*La línea entre A y B*
$\overleftrightarrow{AB}$	Recta "AB"	$\overleftrightarrow{AB}$	*La recta infinita que pasa por A y B*
$\overrightarrow{AB}$	Semirrecta "AB"	$\overrightarrow{AB}$	*La semirrecta que empieza en A, pasa por B y continúa*
$\cong$	Congruente (mismo tamaño y forma)	ΔABC $\cong\Delta$DEF	*El triángulo ABC es congruente con el triángulo DEF*
$\approx$	Semejante (misma forma, distinto tamaño)	ΔDEF$\approx$ ΔMNO	*El triángulo DEF es semejante con el triángulo MNO*
$\therefore$	Por tanto o de donde		
$\widehat{AB}$	Arco AB		

GEOPLANA

1. EJE TEMÁTICO: GEOPLANA

1.1 LOGRO

Reconocer y aplicar los conceptos básicos de la Geometría Plana, como punto de partida de la comprensión del desarrollo histórico y estructural de las Matemáticas.

1.2 INDICADORES DE LOGRO

- Identifica puntos, líneas y planos como componentes de una figura plana.
- Clasifica una línea por su dirección o por su posición con respecto a otras líneas.

1.3 COMPETENCIA

Aplicar las nociones de forma y medida a las figuras geométricas planas para la interpretación, análisis y construcción de modelos idealizados del mundo físico, o de fenómenos que acontecen en el mundo real, en la solución de problemas.

1.4 CONOCIMIENTOS PREVIOS

Para estudiar la Geo-Plana:

Debes saber: Algunos conceptos básicos de axiomas, postulados, teoremas y corolarios.

- Operaciones básicas con números reales
- Ecuaciones de primer grado y de segundo grado
- Sistemas de ecuaciones lineales
- Ángulos y clases de ángulos
- Figuras planas y sus elementos
- Perímetros y áreas
- Conversión del lenguaje usual al lenguaje matemático
- Aplicaciones a la solución de problemas

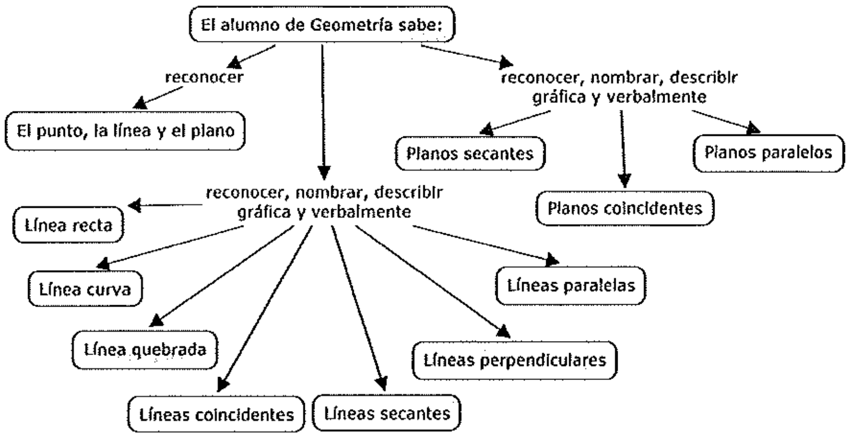
Para recordar los conocimientos previos, contesta las preguntas de manera intuitiva y después realiza una consulta en algún texto que trate del tema.

1. ¿Consideras que los axiomas son verdades evidentes?
2. ¿Cuándo recurres a la geometría lo haces para hacer un dibujo o una construcción geométrica?
3. ¿Cuál de los dos términos anteriores estructuraría a la geometría en un esquema axiomático deductivo relacionado con nuestra percepción espacial?

1.5 ESTÁNDARES

Analizar características y propiedades de conceptos intuitivos y preliminares de la geometría plana de una y de dos dimensiones.

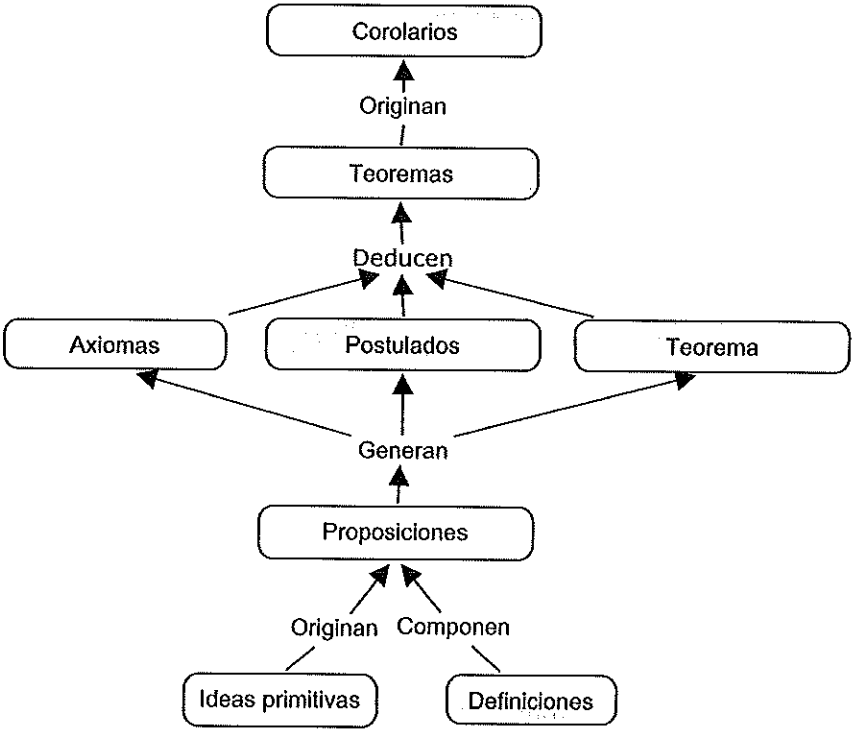
1.6 ESQUEMA TEMÁTICO



1.7 RED DE CONCEPTOS

- Punto, líneas y planos
- Posiciones relativas entre líneas
- Líneas paralelas y transversales
- Posiciones relativas entre un punto y una recta (perpendicularidad)
- Posiciones relativas entre una recta y una curva… Secante a… Tangente a…
- Segmento, semirrecta y recta
- Longitud. Concepto de medida

1.8 SISTEMA AXIOMÁTICO O DEDUCTIVO



1.9 RESEÑA HISTÓRICA

Tomado de: http://www.euclides.org/menu/articles/historiadelageometria.htm; 3 de mayo de 2009. Ampliar información.

1.10 HISTORIA DE LA GEOMETRÍA

GEOMETRÍA ANTES DE LOS GRIEGOS

El origen de la Geometría coincide con el origen de la humanidad. El pensamiento precientífico apoyado sobre el monoteísmo naturalista de Amenhotep IV funda en el siglo XIV a. C. culto a la nueva imagen del dios Ra representado con un *círculo* dorado.

La abstracción del pensamiento mágico representa el primer acercamiento –informal e intuitivo– a la Geometría. Anteriormente, en el siglo XXVII a. C., el emperador chino Hoang-Ti mandó construir un observatorio astronómico con el fin principal de corregir el calendario.

Las primeras civilizaciones mediterráneas adquieren poco a poco conocimientos geométricos de carácter muy práctico basados en fórmulas –mejor dicho, algoritmos expresados en forma de recetario–, para calcular áreas y longitudes. La finalidad era práctica al pretender con ello calcular la producción proporcional de las parcelas de tierra para determinar los impuestos, o reconstruir las parcelas de tierra después de las inundaciones. El conocimiento geométrico tanto de egipcios como de las culturas mesopotámicas pasa íntegramente a la cultura griega a través de Tales de Mileto, la *secta* de los pitagóricos, y esencialmente de Euclides.

La Geometría antes de Euclides

Tales visita Egipto una larga temporada y aprende de los sacerdotes y escribas egipcios lo referente a sus conocimientos en general. Impresiona ahora –tanto como a los egipcios– que fuera capaz de razonar y medir entonces la altura de la pirámide de Keops y de predecir un eclipse solar con asombrosa precisión.

La Geometría griega es la primera en ser *formal*. Parte de los conocimientos concretos y prácticos de las civilizaciones egipcia y mesopotámicas, y da un paso de abstracción al considerar los objetos como entes ideales –un *cuadrado* cualquiera, en lugar de una pared cuadrada concreta, un *círculo* en lugar del ojo de un pozo...– que pueden ser manipulados mentalmente, con la sola ayuda de la regla y el compás. Aparece por primera vez la demostración como justificación de la veracidad de un conocimiento, aunque en un primer momento fueran más justificaciones intuitivas que verdaderas demostraciones formales.

La figura de Pitágoras y de la secta de seguidores pitagóricos tiene un papel central, pues eleva a la categoría de elemento primigenio el concepto de *número*, arrastrando a la Geometría al centro de su doctrina –en este momento inicial de la historia de la Matemática aún no existe distinción clara entre Geometría y Aritmética–, y asienta definitivamente el concepto de demostración formal como única vía de establecimiento de la verdad en Geometría.

Esta actitud permitió la medición de la tierra por Eratóstenes, así como la medición de la distancia a la luna, y la invención de la palanca por Arquímedes, varios siglos después.

En el seno de los pitagóricos surge la primera crisis de la Matemática: la aparición de los inconmensurables, aunque esta *crisis* es de carácter más filosófico y aritmético que geométrico.

Surge entonces un problema a nivel lógico: una demostración parte de una o varias hipótesis para obtener una tesis. La veracidad de la tesis dependerá de la validez del razonamiento con el que se ha extraído (esto será estudiado por Aristóteles al crear la *Lógica*) y de la veracidad de las hipótesis. Pero entonces debemos partir de hipótesis ciertas para poder afirmar con rotundidad la tesis. Para poder determinar la veracidad de las hipótesis, habrá que considerar cada una como tesis de otro razonamiento, cuyas hipótesis deberemos también comprobar. Se entra aparentemente en un proceso sin fin en el que, indefinidamente, las hipótesis se convierten en tesis a probar.

Los tres problemas de la Antigüedad

La Geometría griega es incapaz de resolver tres famosos problemas que heredarán los matemáticos posteriores. Los tres problemas debían ser resueltos entonces utilizando regla y compás, únicos instrumentos aceptados en la Geometría de Euclides. Añadido a estos tres problemas, la demostración de si el V postulado es o no es un *teorema* deducible de los cuatro anteriores se considera además de otro problema clásico de la Geometría helenística el hilo conductor hasta las Geometrías No Euclidianas del siglo XIX. Los tres otros problemas son:

- La duplicación del cubo
- La trisección del ángulo
- La cuadratura del círculo

1.11 PROBLEMAS

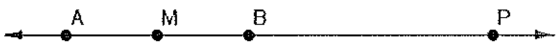
1. 

FIGURA 1-1

Hipótesis: $\overline{AM} = \overline{BM}$

Tesis: $\overline{PM} = \frac{\overline{PA}+\overline{PB}}{2}$

2. 

FIGURA 1-2

Hipótesis: $\overline{BC} = \overline{DC}$

$\overline{AB} = \text{a}$

$\overline{AC} = \text{m}$

$\overline{AD} = \text{b}$

Tesis: $\text{m} = \sqrt{ab + \frac{(b-a)^2}{4}}$

1.12 RETOS

SELECCIÓN MÚLTIPLE CON ÚNICA RESPUESTA

1. Un axioma es:
   a. Una proposición muy complicada y difícil de demostrar.
   b. Una proposición tan sencilla y evidente que es aceptada por todos sin demostración.
   c. Una proposición que puede demostrarse.

d. Una proposición que se deduce a partir de un teorema.
e. Una proposición absurda.

2. El símbolo λ se llama:
   a. Igualdad
   b. Kapa
   c. Lambda
   d. Gama
   e. Vita

3. El símbolo ⊥ significa:
   a. Es perpendicular a
   b. De donde
   c. Perpendicular
   d. Semejante
   e. Segmento

4. La expresión: "Todos los ángulos rectos son iguales", es:

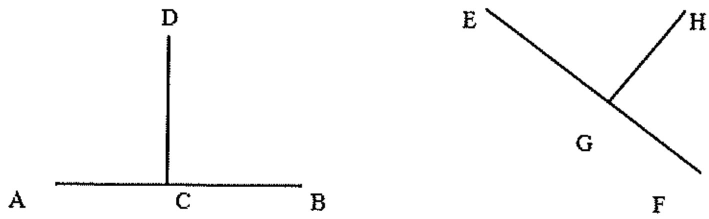


FIGURA 1-3

   a. Corolario
   b. Teorema
   c. Lema
   d. Postulado
   e. Axioma

5. Se afirma que una proposición por medio de la cual, partiendo de un supuesto (hipótesis), se afirma una verdad (tesis) que no es evidente por sí misma es:
   a. Conjetura
   b. Hipótesis
   c. Teorema
   d. Axioma
   e. Proposición

6. Se define como un espacio geométrico, que sólo posee dos dimensiones y que contiene infinitos puntos y rectas:
   a. Recta
   b. Plano
   c. Segmento
   d. Recíproco
   e. Lema

7. El teorema del cateto establece que: "en un triángulo rectángulo, cada uno de los catetos es media proporcional entre la hipotenusa y su proyección sobre ella". Por lo tanto, su teorema recíproco sería:

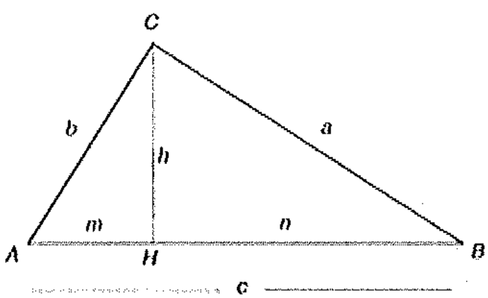


FIGURA 1-4

   a. Si en un triángulo rectángulo cada uno de los catetos es media proporcional entre su proyección y su hipotenusa.

b. Si en un triángulo rectángulo, cada uno de los catetos es media entre la hipotenusa proporcional y su proyección sobre ella.
c. Si cada uno de los catetos de un triángulo es media proporcional entre la hipotenusa y su proyección sobre ella, entonces el triángulo es rectángulo.
d. Si la media proporcional entre la hipotenusa y la proyección de un cateto sobre ella, resulta un triángulo rectángulo.
e. Todo triángulo rectángulo tiene media proporcional entre la hipotenusa y su cateto opuesto.

1.13 SECCIÓN UNO

1.13.1 Conceptos básicos

POSTULADO, AXIOMA, TEOREMA, COROLARIO

La estructura global de la demostración debe descansar sobre (o comenzar por) algunas proposiciones de tipo general que se aceptan sin demostración y se denominan los supuestos. Se trata de proposiciones que voluntariamente debemos suponer o aceptar como verdaderas a fin de poder deducir de ellas, otras proposiciones.

Los supuestos son axiomas o postulados.

1.13.1.1 Axioma

La palabra axioma proviene del griego αξιωμα (axioma), que significa "lo que parece justo" o aquello que es considerado evidente y sin necesidad de demostración. La palabra viene del griego αξιοειν (axioein) que significa "valorar", que a su vez procede de αξιος (axios) que significa "valuable" o "digno". Entre los antiguos filósofos griegos, un axioma era aquello que parecía ser verdadero sin ninguna necesidad de prueba.

En *Los Elementos de* ***Euclides*** se establecen nueve axiomas (lo valioso en griego) para la Geometría:

1. Las cosas que son iguales a la misma cosa son iguales entre sí.
2. Si se suma lo mismo a cantidades iguales los totales son iguales.
3. Si se quita lo mismo a cantidades iguales los restos son iguales.
4. Si a cosas desiguales se añaden cosas iguales, los totales serán desiguales.
5. Los dobles de una misma cosa son iguales entre sí.
6. Las unidades de una misma cosa son iguales entre sí.
7. Las cosas que se superponen una a la otra son iguales entre sí.
8. El todo es mayor que las partes.
9. Dos rectas no comprenden un espacio.

1.13.1.2 Postulado

Es un supuesto que se puede aplicar en una rama particular de la matemática, digamos en geometría. Por ejemplo, como la proposición: "dos rectas se pueden cortar solo en un punto", se aplica específicamente a las figuras geométricas.

En la matemática clásica estos dos conceptos son sinónimos.

Se llaman postulados a aquellas propiedades que satisfacen los elementos geométricos que se aceptan sin demostrar y que surgen de la simple observación.

- Existen infinitos puntos, infinitas rectas e infinitos planos.
- Todo objeto es igual a sí mismo.
- La suma de dos números es única.

En *Los Elementos de* ***Euclides*** se establecen cinco postulados:

1. Desde cualquier punto se puede trazar una recta a cualquier otro punto.
2. Toda recta se puede prolongar indefinidamente.
3. Con cualquier centro y cualquier distancia se puede trazar un círculo.

4. Todos los ángulos rectos son iguales.
5. Si una recta, cortando a otras dos, forma los ángulos internos a una misma parte menores que dos rectos, las dos rectas prolongadas indefinidamente se encontrarán de la parte en que los dos ángulos son menores que dos rectos.

1.13.1.3 Teorema

Es una proposición cuya validez debe ser demostrada.

El teorema es una verdad no evidente, pero demostrable. Son ejemplos de teoremas:

- Si un número termina en cero o en cinco es divisible por cinco.
- Si un número divide a otros varios divide también a su suma.

Tanto el teorema como el postulado tienen una parte condicional (hipótesis) y una conclusión (tesis) que se supone se cumple en caso de tener validez la hipótesis.

1.13.1.4 Lema, corolario, proposición, conjetura

En matemática una afirmación debe ser interesante o importante dentro de la comunidad matemática para ser considerada un teorema. Las afirmaciones menos importantes se denominan:

- **Lema**: una afirmación que forma parte de un teorema más largo. Por supuesto, la distinción entre teoremas y lemas es arbitraria. El Lema de Gauss y el Lema de Zorn, por ejemplo, son considerados demasiado importantes *per se* para algunos autores, por lo cual consideran que la denominación lema no es adecuada. Es un teorema que debe anteponerse a otro por ser necesario para la demostración de este último.

- **Corolario**: es una consecuencia inmediata de un teorema ya demostrado. Una proposición A es un corolario de una proposición o teorema B, si A puede ser deducida sencillamente de B.

- **Proposición:** un resultado no asociado a ningún teorema en particular.

Una afirmación matemática que se cree verdadera pero no ha sido demostrada se denomina conjetura o hipótesis. Por ejemplo: la conjetura de *Goldbach* o la *hipótesis de Riemann.*

1.13.1.5 Recíproco

Recíproco de un teorema es otro teorema cuya hipótesis es la tesis del primero (llamado teorema directo) y cuya tesis es la hipótesis del directo.

Ejemplo

Teorema directo: Si un número termina en cero o en cinco (hipótesis), será divisible por cinco (tesis).

Teorema recíproco: Si un número es divisible por cinco (hipótesis), tiene que terminar en cero o en cinco (tesis). No siempre los recíprocos son ciertos; para que sean ciertos tienen que cumplir determinadas condiciones.

1.13.1.6 Puntos, líneas y planos

Un vistazo a nuestro entorno nos permite comprobar que en su mayoría los objetos que nos rodean tienen formas de triángulos, cuadrados, círculos, paralelogramos, etc. Tales formas las reconocemos de manera intuitiva como formas planas o bidimensionales, es decir, formas que se extienden en dos direcciones: derecha-izquierda, arriba-abajo o derecha-izquierda, adelante-atrás. Por ejemplo, el frente de un edificio puede ser un rectángulo, o un rectángulo con un triángulo encima, o un cuadrado con media circunferencia encima, en fin, podría ser en general una combinación de un cierto número de figuras que reconocemos como planas.

¿Qué es un punto? Se piensa en un punto como una posición en el espacio. El espacio tiene un número infinito de puntos. Cada una de las diferentes posiciones en el espacio corresponde a un único punto.

Se representa con los símbolos +, *x* ó *o*, que hacen referencia a la intersección de dos rectas y al centro de una circunferencia, respectivamente. Se identifican con letras mayúsculas o números. Existe una serie de puntos que cumplen una función u ocupan una posición que los diferencia de los demás puntos. Los vértices, centros, puntos medios y otros, son ejemplos de estos puntos que se conocen como puntos notables.

¿Cómo es de grande un punto? Se dice que un punto es infinitesimal. Esto significa que no tiene ningún tamaño.

Una **línea** es una sucesión continua de puntos.

La línea se puede considerar como un punto en movimiento continuo. Tiene sólo una dimensión, la longitud, que es el espacio recorrido por el punto.

Las líneas pueden ser:

- **Rectas:** cuando todos los puntos se encuentran alineados en una misma dirección.
- **Curvas:** cuando los puntos no se encuentran alineados en una misma dirección; aunque, al menos durante cierta distancia, el cambio de dirección responda a un criterio de continuidad.

1.13.1.7 La línea recta, la semirrecta, el segmento de recta

Las líneas rectas se designan con una letra minúscula, siguiendo el orden del abecedario:

Figura 1-5

Definiciones y postulados de Euclides relacionados con la recta:

Euclides, en su tratado denominado *Los Elementos,* establece varias definiciones relacionadas con la línea y la línea recta:

- Una línea es una longitud sin anchura (Libro I, definición 2).
- Los extremos de una línea son puntos (Libro I, definición 3).
- Una línea recta es aquella que yace por igual, respecto de los puntos que están en ella (Libro I, definición 4).
- También estableció dos postulados relacionados con la línea recta:
- Por dos puntos diferentes sólo pasa una línea recta (Libro I, postulado 1).
- Si una recta secante corta a dos rectas formando a un lado ángulos interiores, la suma de los cuales es menor que dos ángulos rectos: las dos rectas, suficientemente alargadas, se cortarán en el mismo lado (Libro I, postulado 5).

Cuando se desea delimitar una recta, se marca sobre ella un punto, al cual se llama origen. También por un motivo convencional, en geometría todo punto se individualiza con una letra mayúscula, siguiendo el orden alfabético.

Cuando en una recta se encuentra marcado un *origen,* O, cada uno de los tramos a partir del origen, constituye una semirrecta:

FIGURA 1-6

Se denota por: $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$

Cuando en una recta se marcan sobre ella dos puntos, a los cuales se llama extremos, el tramo de recta comprendido entre esos dos puntos constituye un segmento de recta, que se individualiza mencionando sus extremos, como el *segmento A, B*:

FIGURA 1-7

Las líneas se clasifican según su forma, su posición en el espacio y la relación que guardan entre sí.

Según su forma

Línea recta: Son todas aquellas líneas en que todos sus puntos van en una misma dirección.

Línea curva: Son las líneas que están constituidas en forma curva, pero a su vez sus puntos van en direcciones diferentes.

Línea quebrada: Esta línea está formada por diferentes rectas a su vez que se cortan entre sí y llevan direcciones diferentes.

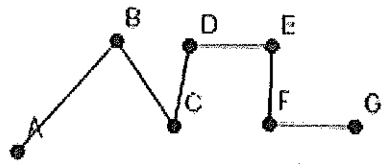


FIGURA 1-8

Línea mixta: Está formada por líneas rectas y curvas que a su vez llevan direcciones diferentes.

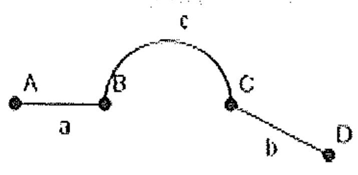


FIGURA 1-9

Clases de líneas rectas en el espacio

Atendiendo a la posición que una recta asume en el espacio, en relación a la fuerza de gravedad o atracción terrestre, las rectas pueden ser:

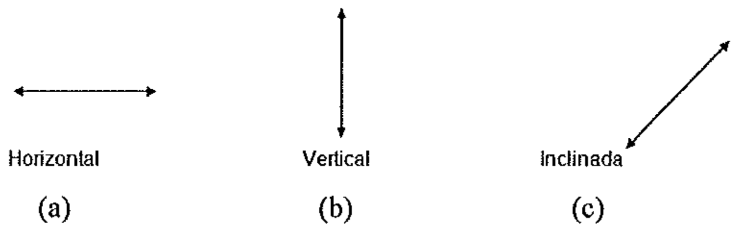


FIGURA 1-10

Clases de rectas en un plano

Dos rectas o más pueden encontrarse entre sí en distintas posiciones posibles. Dos rectas ubicadas en el mismo plano se denominan paralelas cuando todos los puntos de ambas se encuentran a la misma distancia.

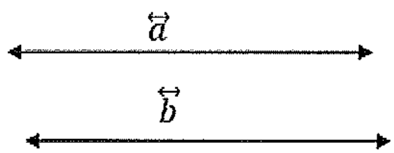


FIGURA 1-11

Dos rectas ubicadas en el mismo plano se denominan divergentes cuando los puntos de ambas van aumentando su distancia.

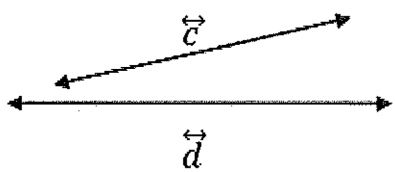


FIGURA 1-12

Dos rectas ubicadas en el mismo plano se denominan convergentes cuando los puntos de ambas van disminuyendo su distancia, y eventualmente ambas rectas se cruzan en un punto.

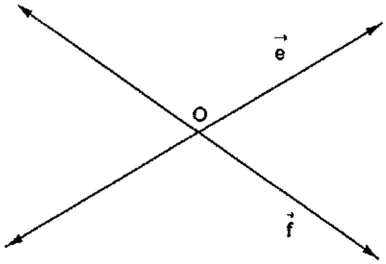


FIGURA 1-13

Es fácil advertir que en los dos últimos casos, en realidad se está haciendo referencia a semirrectas; por cuanto las divergentes resultan convergentes si se invierte el sentido de la comparación de sus distancias, y las convergentes, luego de cruzarse, se tornan divergentes.

Clases de rectas convergentes

Las rectas convergentes pueden ser:

- **Perpendiculares:** cuando dividen el plano en cuatro partes iguales; es decir, cuando al cruzarse ninguna resulta estar inclinada respecto de la otra, o sea, formando cuatro ángulos rectos, se llaman rectas perpendiculares.

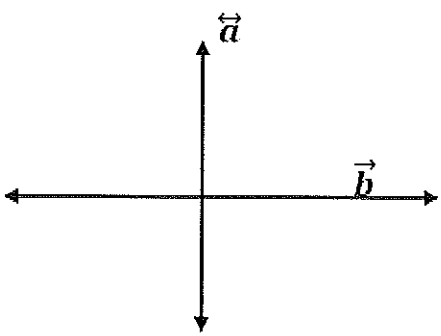


FIGURA 1-14

- **Oblicuas:** cuando se cruzan en forma inclinada entre ellas, y por lo tanto dividen el plano en cuatro sectores de los cuales dos son iguales, pero distintos de los otros dos que a su vez son iguales entre sí.

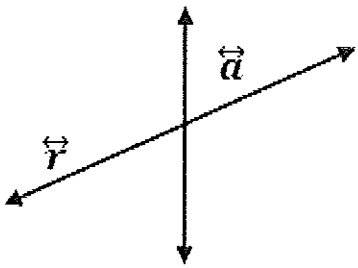
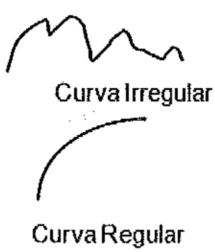


FIGURA 1-15

Líneas curvas



Las líneas curvas son, en sentido general, todas las que no son rectas; pero en geometría las líneas curvas tienen de todos modos alguna regularidad en su desarrollo, de manera que evolucionan en cierta continuidad.

FIGURA 1-16

Clases de líneas curvas regulares

Las líneas curvas regulares pueden clasificarse de conformidad con el factor que constituye la determinante de su forma, que en algunos casos resulta bastante complejo.

La circunferencia: es una curva regular cerrada, que se caracteriza porque todos sus puntos están a igual distancia de un mismo punto, llamado centro. Por consiguiente, todos los segmentos determinados por la unión del centro con cualquiera de los puntos de la circunferencia son iguales.

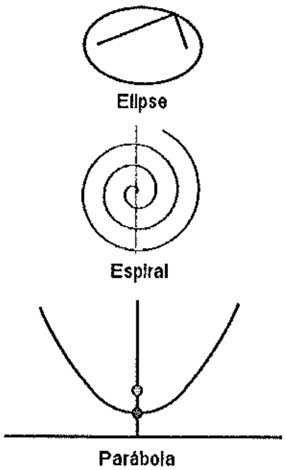


FIGURA 1-17

La elipse: es una curva regular cerrada, que se caracteriza porque la suma de la distancia de cada uno de sus puntos respecto de dos puntos situados en su interior, llamados focos, es siempre igual.

La espiral: es una curva regular abierta, que se caracteriza porque gira sobre sí misma, de manera que la distancia mínima entre cada uno de los puntos de las vueltas siguiente y anterior, es siempre igual.

La parábola: es una curva regular abierta, que se caracteriza porque cada uno de sus puntos está a una distancia siempre igual, determinada la suma de su distancia a un punto de una recta llamada directriz, más su distancia a un punto situado sobre la perpendicular a la directriz, llamado foco.

POSTULADO

Existe un conjunto infinito de elementos llamados puntos que se denominan **ESPACIO**. Sus subconjuntos se llaman figuras.

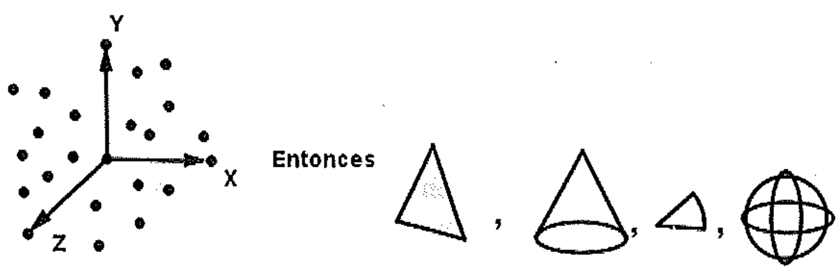


FIGURA 1-18

POSTULADO

Dos puntos diferentes determinan una y solo una recta que pasa por ellos.

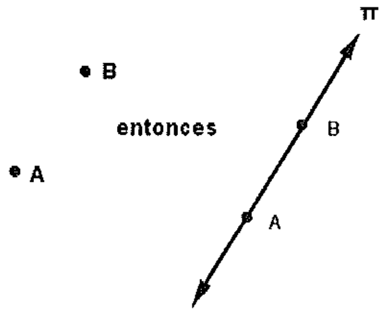


FIGURA 1-19

Se puede nombrar por dos de sus puntos sobre ella, por ejemplo: recta AB, o con el símbolo ↔ encima así $\overleftrightarrow{AB}$ o una letra minúscula; ejemplo: recta r.

FIGURA 1-20

HERRAMIENTAS

Los puntos de un conjunto son **colineales** o están alineados, si existe una recta que los contiene a todos.

Líneas rectas secantes: si su intersección es un punto y están contenidas en un único plano.

Líneas rectas paralelas: si no tienen puntos comunes y están contenidas en un mismo plano.

Líneas rectas cruzadas: si no tienen puntos comunes y están contenidas en planos diferentes (no coplanarias).

HERRAMIENTAS

Si B es un punto de una línea recta, entonces se llama semirrecta de origen B al conjunto formado por el punto B y cada uno de los conjuntos en que él divide a la recta, es decir:

B y todos los puntos de la línea recta que le preceden.

B y todos los puntos de la línea recta que le siguen.

El punto dado se llama origen y siempre da lugar a dos semirrectas opuestas entre sí.

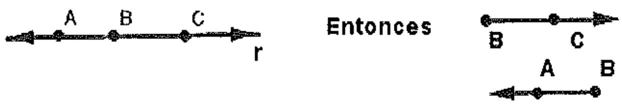


FIGURA 1-21

Se tienen dos semirrectas que se denominan por el punto de origen B y un punto cualquiera de ella. En la figura anterior se tiene las semirrectas BA y BC.

Simbólicamente: $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$.

HERRAMIENTAS

Se llama **segmento** al conjunto formado por dos puntos diferentes dados en una recta y los puntos situados entre ellos. Los puntos dados se llaman extremos del segmento y se utilizan para nombrarlo con un trazo encima. Por ejemplo, si se tienen dos puntos A y B sobre una recta:

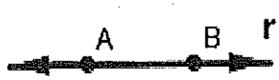


FIGURA 1-22

Estos puntos determinan el segmento AB que se denota por $\overline{AB}$.

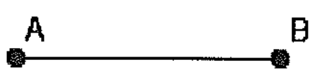


FIGURA 1-23

El segmento de recta es un subconjunto de la línea recta, y la podemos medir en una sola dimensión (su longitud).

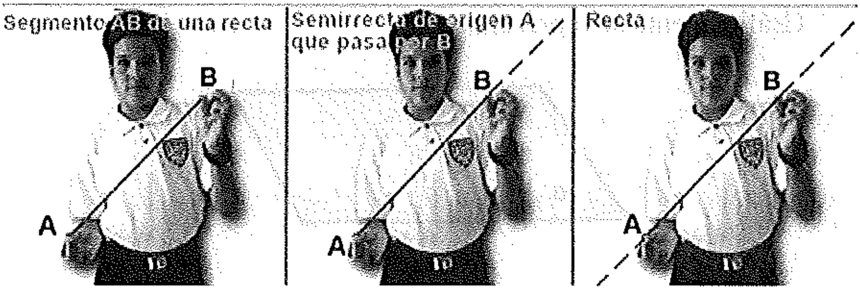


Imagen tomada de www.fpolar.org.ve/matematica/fasciculo3.pdf

FIGURA 1-24

AYUDA 0

Practica en el DVD en el apartado GeoPlana. Conceptos básicos. Escenas de Antolina Muñoz Huertas (proporcionalidad) y del grupo GNOMON (20 escenas interactivas).

1.13.1.8 EL PLANO

Podemos conceptualizar un plano como una hoja de papel plana, muy delgada que se extiende indefinidamente a lo largo y a lo ancho; un plano será una superficie ilimitada.

La hoja de papel sería un subconjunto de un plano y tiene dos dimensiones que se pueden medir (largo y ancho).

El plano, en geometría, es uno de los entes geométricos fundamentales, junto con la recta y el punto. Solamente puede ser definido o descrito, en relación a otros elementos geométricos similares. Un plano queda definido por los siguientes elementos geométricos:

- Tres puntos no alineados
- Una recta y un punto exterior a ella
- Dos rectas paralelas
- Dos rectas que se cortan

POSTULADO

Tres puntos diferentes no alineados determinan un plano y solo uno.

Gráficamente se representa así:

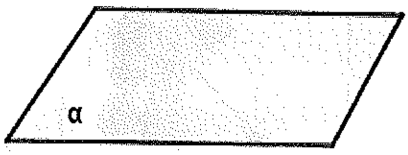


FIGURA 1-25

Los planos se nombran con una letra griega, de esta forma, se tiene el plano α.

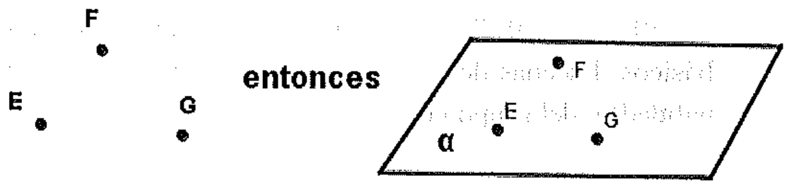


FIGURA 1-26

AXIOMAS

Los puntos de un conjunto son coplanares, si existe un plano que los contiene a todos.

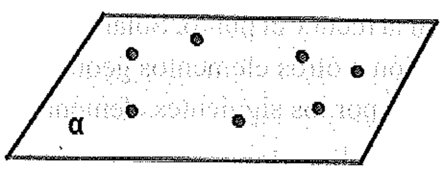


FIGURA 1-27

Planos secantes: si su intersección es una recta.

Planos paralelos: si no tienen puntos comunes.

Una recta y un punto exterior a ella están contenidos en un plano único.

Dos líneas rectas secantes están contenidas en un plano único.

Una línea recta y un plano son secantes si se cortan en un punto y una línea recta y un plano son paralelos si no tienen puntos comunes.

Axioma

Toda línea recta **t** en un plano α determina sobre él dos regiones llamadas semiplanos.

La línea recta "t" recibe el nombre de frontera de los semiplanos. Los semiplanos se nombran por medio de la línea recta y un punto arbitrario sobre la región.

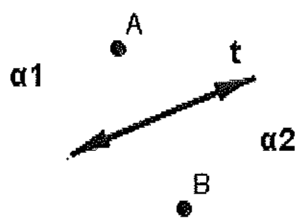


Figura 1-28

1.13.1.9 Congruencia de segmentos

Se denominan figuras congruentes a las que tienen la misma forma y el mismo tamaño, diferenciándose a lo sumo en su posición en el espacio, es decir, si una puede convertirse en la otra mediante un movimiento, se puede decir que una es la copia exacta de la otra u otras. Tales figuras se pueden hacer coincidir de modo que sus partes correspondientes coincidan mutuamente.

Esta definición en términos de movimiento, lo supone rígido, es decir, conservando las distancias. Si una figura F es congruente a una figura F' se escribe: F $\cong$ F' y se lee "F es congruente a F' ".

HERRAMIENTAS

Dos segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son congruentes sí y solo sí tienen la misma medida, esto es $\overline{AB} \cong \overline{CD} \Leftrightarrow m(\overline{AB}) = m(\overline{CD}) \Leftrightarrow AB = CD$.

La congruencia se refiere, por lo tanto, a las figuras geométricas

HERRAMIENTAS

Cada segmento tiene exactamente un punto medio. C es un punto medio de $\overline{AB}$ sí y solo sí $\overline{AC} \cong \overline{CB}$. Por lo tanto, se dice que el punto medio C biseca el segmento $\overline{AB}$.

FIGURA 1-29

Convención: Cuando no haya lugar a confusión en lugar de $\overline{AB}$ usaremos AB y en lugar de $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ usaremos AB = CD.

Segmentos adyacente: Son dos segmentos de extremos colineales y que tienen un extremo común situado entre los extremos no comunes.

$\overline{AC}$ y $\overline{CB}$ son segmentos adyacentes.

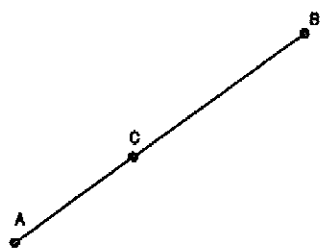


FIGURA 1-30

Operaciones con segmentos

El número que expresa a qué distancia se encuentra A de B se llama medida o longitud de $\overline{AB} = AB = m\,AB$.

Consiste en encontrar un segmento de longitud igual a la suma de las longitudes de los segmentos dados.

FIGURA 1-31

m PQ = mPA + mAB + mBQ
m AP = mPB – mAB
mAB = mPQ – mPA – mBQ

AYUDA 1

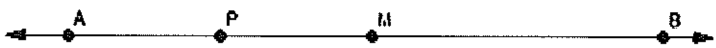


FIGURA 1-32

Hipótesis: AM = MB

Tesis: $\overline{PM} = \frac{\overline{PB}-\overline{PA}}{2}$

Solución: PM = BP – MB
<u>PM = -PA + MA</u>
2PM = BP – PA

$$PM = \frac{BP-PA}{2}$$

AYUDA 2

Sobre un recta se toman los puntos A, B, C, D, E, F, consecutivamente, de modo que BE = $\frac{5}{8}$ AF. Calcular AF sabiendo que: AC + BD + CE + DF = 39u.

FIGURA 1-33

Hipótesis: $BE = \frac{55}{88} AF$

$AC + BD + CE + DF = 39u$

$AC + BD + CE + DE + EF = 39u$

Tesis: $AF = ?$

Solución: $AF + BD + DE = 39u$

$AF + BE = 39u$

$AF + \frac{5}{8} AF = 39u$

$\frac{13}{8} AF = 39u$

$AF = 24$

AYUDA 3

FIGURA 1-34

Hipótesis: $MB = MC$

$AB = AM - BM$

Tesis: $AB^2 + AC^2 = 2(AM^2 + BM^2)$

Solución: $AC = AM + MC$

$AB^2 = (AM - BM)^2$

$AC^2 = (AM + MC)^2$

$$AB^2 = AM^2 - 2AM.BM + BM^2$$
$$AC^2 = AM^2 + 2AM.MC + MC^2$$
$$AB^2 + AC^2 = 2AM^2 + 2BM^2$$
$$AB^2 + AC^2 = 2(AM^2 + BM^2)$$

1.14 SECCIÓN DOS

1.14.1 ÁNGULOS

1.14.1.1 LOGRO

Resolver problemas de aplicación sobre los diferentes tipos de ángulos que facilite la comprensión de la resolución, congruencia y semejanza de triángulos.

1.14.1.2 INDICADORES DE LOGRO

- Relaciona y diferencia los elementos que componen un ángulo.
- Reconoce e identifica los tipos de ángulos.
- Describe las relaciones de los ángulos formados cuando una transversal corta a dos o más paralelas.
- Traduce del lenguaje usual al lenguaje matemático problemas sobre ángulos.

1.14.1.3 COMPETENCIA

Diferenciar los tipos de ángulos que existen y resolver problemas de aplicación que impliquen la traducción del lenguaje usual al lenguaje matemático.

1.14.1.4 CONOCIMIENTOS PREVIOS

Para estudiar el tema siguiente.

Debes saber: Algunos conceptos básicos como por ejemplo: punto, línea, plano y sus relaciones entre ellos.

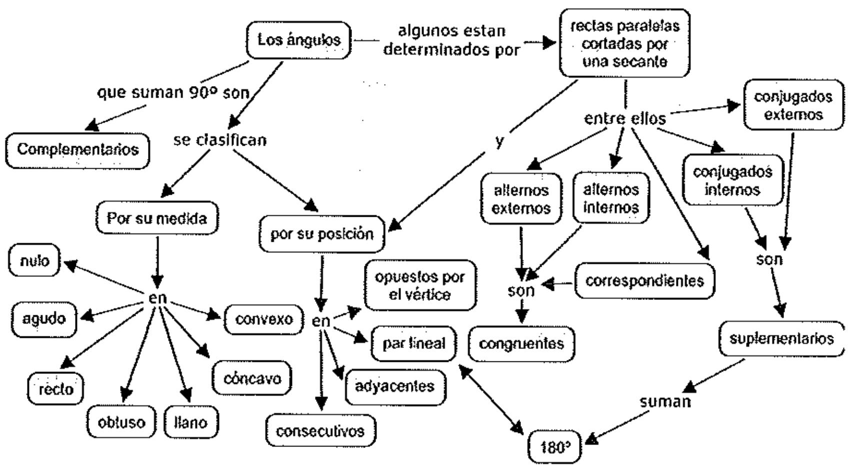
Para recordar los conceptos previos, contesta a la pregunta de manera intuitiva y después realiza una consulta en algún texto que trate del tema.

1. ¿Sabes qué tipo de objetos estudia la geometría plana?
2. ¿Sabes qué es un punto y cómo representar un punto?
3. ¿Sabes qué es una recta y cómo representar una recta?
4. ¿Sabes qué es un plano y cómo representar un plano?
5. ¿Sabes qué es una semirrecta y cómo se representa?

1.14.1.5 Estándares

Identificar el concepto de ángulo y clasificarlos dada una figura de análisis.

1.14.1.6 Esquema temático



1.14.1.7 Red de conceptos

- Ángulo. Concepto y sistemas de medición (grados sexagesimal, radianes), conversión de unidades.
- Clasificación de ángulos (según su medida y según su posición)

- Ángulos. Formados entre paralelas y una transversal (aplicaciones).
- Problemas de aplicación.

1.14.1.8 Reseña histórica

TALES DE MILETO (624 a. C. - 546 a. C.)

Foto tomada de: http://www.biografiasyvidas.com/biografia/t/tales.htm
Tomado de: http://www.portalplanetasedna.com.ar/matematico1.htm.
3 de mayo de 2009. Ampliar información.

Nació y murió en la ciudad de Mileto. Sus padres fueron Examyes y Cleobuline. Fue maestro de Anaximandro. Ninguno de sus escritos sobrevivieron , por lo que es difícil saber exactamente cuáles fueron sus descubrimientos matemáticos. Probablemente se le atribuyan descubrimientos que no le corresponden. Lo que sabemos de Tales proviene de Aristóteles. Primero fue a Egipto y desde allí introdujo en Grecia los estudios sobre Geometría.

La opinión antigua es unánime al considerar a Tales como un hombre excepcionalmente inteligente y como el primer filósofo griego, científico y matemático, pero actuaba como un ingeniero. Es considerado el primero de los Siete Sabios Griegos. El hecho concreto que más aseguró su reputación fue la predicción de un eclipse de sol en 585 a.C., que tuvo lugar exactamente el 28 de mayo del año que él había predicho. Igualmente fue el primero en mantener que la luna brilla por el reflejo del sol.

Según Proclo, primero fue a Egipto donde entró en contacto con la Geometría que luego introdujo a Grecia.

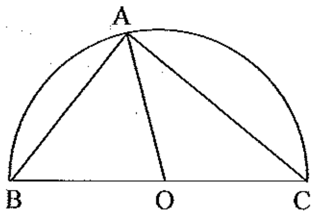
Tomó prestada la Geometría de los egipcios y dio en ella un avance fundamental, ya que fue el primero en emprender la tarea de demostrar exposiciones matemáticas mediante series regulares de argumentos. En otras palabras, inventó la matemática deductiva. Se le asignan entre otros los siguientes teoremas:

1. Un ángulo inscripto en una semicircunferencia es un ángulo recto.
2. Todo círculo queda dividido en dos partes iguales por un diámetro.
3. Los ángulos básicos en un triángulo isósceles son iguales.
4. Los ángulos opuestos por el vértice que se forman al cortarse dos rectas, son iguales.
5. Si dos triángulos son tales que dos ángulos y un lado de uno de ellos son respectivamente iguales a dos ángulos y un lado del otro, entonces los dos triángulos son iguales.

Midió la altura de las pirámides midiendo la altura de sus sombras en el momento en el cual la sombra de una persona es igual a su altura. Este razonamiento no parece surgir de conocimientos geométricos sino más bien de una observación empírica. Creyó que en el momento en que la sombra de un objeto coincide con su altura, también eso es válido para cualquier objeto, por ejemplo, la pirámide.

Luego utilizó conceptos similares al de la semejanza de triángulos. También calculó la distancia a un barco en el mar, para lo cual habría utilizado el teorema 3.

La demostración que aparece en la proposición 32 del Libro III de Los Elementos de Euclides del teorema 1, es la siguiente:



Como OA y OB son iguales, Los ángulos ABO y BOA también son iguales y como OA y OC son iguales, tos ángulos OAC y OCA son iguales. Por tanto, BAC es la suma de ABC y ACB, teniendo en cuenta que la suena de los tres ángulos de un triángulo BAC debe ser recto.

Creía que la Tierra era un disco plano que flotaba sobre agua y que todas las cosas venian del agua. Explicaba los terremotos por el hecho de que la Tierra flote sobre agua. Fue el primero en tratar de explicar estos fenómenos en forma racional y no por medios sobrenaturales.

Hay dos anécdotas vinculadas a Tales. Una la cuenta Aristóteles, y dice que Tales usaba sus habilidades para deducir que la cosecha de aceitunas de la siguiente temporada sería muy buena. Entonces compraba todas las prensas de aceitunas, con lo cual podía hacer fortunas cuando la abundante cosecha llegaba.

Platón cuenta la otra anécdota: una noche Tales estaba observando el cielo y tropezó. Una sirviente lo levantó y le dijo: cómo pretendes entender lo que pasa en el cielo, si no puedes ver lo que está a tus pies.

Es difícil escribir sobre Tales, como sobre otros personajes de esa época, porque era común acreditarles a hombres famosos descubrimientos que no hicieron. Por ejemplo, no hay constancia histórica de que Tales haya enunciado el teorema que conocemos como Teorema de Tales, aunque sí es cierto que Tales trabajó sobre la proporcionalidad de segmentos al calcular alturas midiendo las sombras.

En el momento de morir pronunció las siguientes palabras: "Te alabo, ¡oh Zeus!, porque me acercas a ti. Por haber envejecido, no podía ya ver las estrellas desde la Tierra."

1.14.1.9 Problemas

1. Desde un punto P se trazan las perpendiculares a las prolongaciones de los lados SD y SQ del $\triangle SDQ$. Si el ángulo en Q mide $80°$ y el ángulo en D mide $60°$, entonces el ángulo x mide:

A. 80°
B. 100°
C. 140°
D. 120°

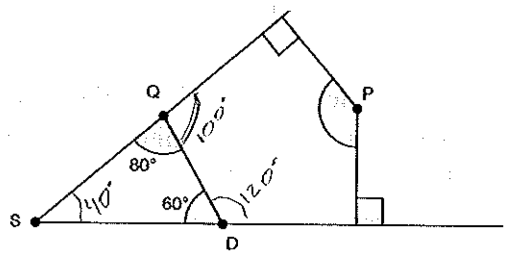


Figura 1-35

2. En la figura adjunta se tiene $\omega = 120°$ y $\varepsilon = 110°$. Entonces, σ es igual a:

A. 230°
B. 110°
C. 115°
D. 55°

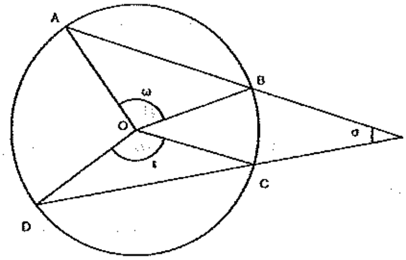


Figura 1-36

E. No se puede calcular sin conocer algún otro dato.

1.14.1.10 DEFINICIÓN DE ÁNGULOS

HERRAMIENTAS

Recibe el nombre de **ángulo** la abertura entre dos semirrectas que parten del mismo origen.

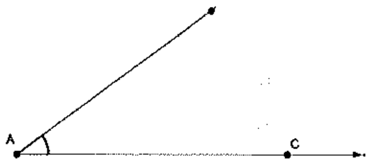


FIGURA 1-37

En la figura se tiene el ángulo BAC, simbólicamente se expresa como $\overline{BAC}$ ó $\angle$BAC formado por las semirrectas $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ que se llaman lados del ángulo. El punto de origen común de las dos semirrectas en A, recibe el nombre de vértice del ángulo.

Si no existe confusión, el ángulo se puede nombrar por la letra del vértice. Así, este se llama ángulo A o Â, o también $\angle$A.

AYUDA 0

Practica en el DVD en el apartado GeoPlana. Ángulos. Escenas del grupo GNOMON y unidades didácticas de Rita Jiménez Igea y Fabián Martín Herce (23 escenas interactivas).

AXIOMA

Cuando dos rectas se cortan, forman 4 regiones llamadas ángulos. Cada ángulo está limitado por dos lados y un vértice.

Sistema sexagesimal

La unidad estándar en sexagesimal es el grado. Una circunferencia se divide en 360 grados. Las divisiones sucesivas del grado dan lugar a los minutos de arco (1/60 de grado) y segundos de arco (1/60 de minuto).

Radián

Un radián es la medida de un ángulo central que intercepta un arco de circunferencia cuya longitud es igual al radio de la circunferencia.

En toda circunferencia hay aproximadamente 2π radianes; es decir, 6.28 radianes. ¿Por qué? Analiza a continuación que:

L_c= Longitud de la circunferencia
R= Radio
D= Diámetro
D=2r

$$\frac{L_c}{D} = Constante = \pi = 3{,}1416 \ aproximadamente.$$

Longitud de la circunferencia

$$\frac{L_c}{D} = \pi \ \therefore \ L_c = D.\pi$$

$$L_c = 2R\pi$$

$$L_c = 2\pi R$$

Para saber cuántos radianes hay en una circunferencia de longitud L_c, basta con determinar cuántos radios caben en L_c, es decir:

$$\text{Radianes de una circunferencia} = \frac{L_c}{r}$$

$$= \frac{2\pi r}{r}$$

$$= 2\pi$$

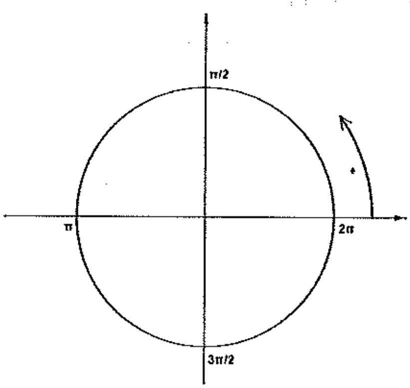


FIGURA 1-38

Nomenclatura:

Grado $\rightarrow$ ° Minuto $\rightarrow$ ' Segundos $\rightarrow$ "

$1° = 60'$; $1' = 60''$; $360° = 2\pi$ radianes $\rightarrow 180° = \pi$ radianes. $(\pi \approx 3{,}14)$

$\downarrow$ $\downarrow$

Sistema sexagesimal Sistema circular o cíclico

AYUDA 1

1. Expresa en radianes un ángulo de 90°.

   Solución: $90° = 90° * \frac{\pi rad}{180°} = \frac{\pi}{2} rad.$

2. Expresa 45° en minutos

   Solución: $45° = 45° * \frac{60'}{1°} = 2\,700'$

3. Convierte 43,63° a grados, minutos y segundos.

   Solución: $43{,}63° = 43° + 0{,}63° * \frac{60'}{1°} = 43° + 37{,}8'$

   $43{,}63° = 43° + 0{,}63° * \frac{60'}{1°} = 43° + 37{,}8'$

   $43° + 37' + 0{,}8' = 43° + 37' + 0{,}8' * \frac{60''}{1'} = 43° + 37' + 48'' \rightarrow 43°37'48''$

4. Convierte 47° 32' 42" en grados.

Solución

$$47°32'42'' = 47°32'42'' * \frac{1'}{60''} = 47°32'0{,}7' = 47°32{,}7'$$

$$47°32'42'' = 47°32'42'' * \frac{1'}{60''} = 47°32'0{,}7' = 47°32{,}7'$$

$$47°32{,}7' * \frac{1°}{60'} = 47°0{,}545° \rightarrow 47{,}545°$$

Clases de ángulos

Ángulo recto: es el que mide 90°. Está formado por el cruce de dos semirrectas perpendiculares.

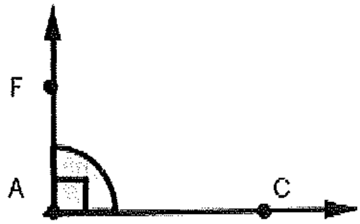


FIGURA 1-39

Ángulo agudo: es el que mide menos de 90°.

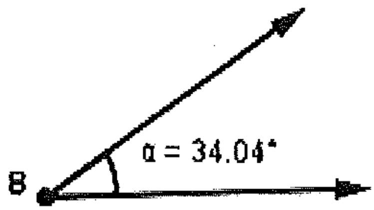


FIGURA 1-40

Ángulo obtuso: es el que mide más de 90° y menos de 180°.

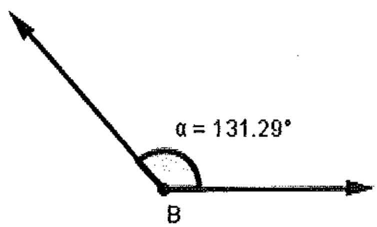
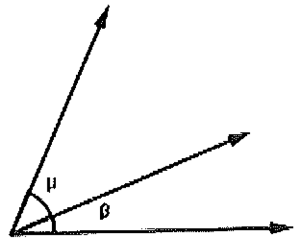


FIGURA 1-41

DESAFÍOS P2.1, P2.2, P2.3

Ángulos adyacentes: son dos ángulos coplanares que tienen un vértice y un lado común; y el lado común separa los dos ángulos.

μ y β son adyacentes



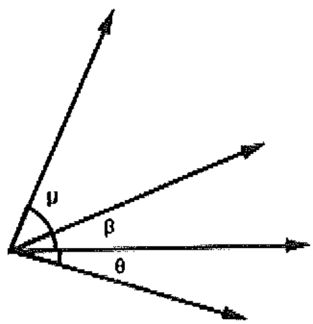
(a)

μ y β, β y θ,

$(\mu+\beta)$ y θ,

μ y $(\beta+\theta)$

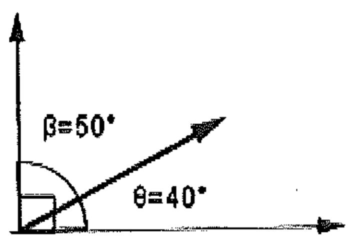
son adyacentes



(b)

FIGURA 1-42

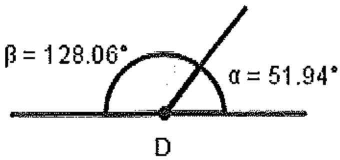
Ángulos complementarios: son dos ángulos adyacentes cuya suma de medidas es 90°.



$\beta + \theta = 90°$; por lo tanto β y θ son complementarios

FIGURA 1-43

Ángulos suplementarios: son dos ángulos adyacentes cuya suma de medidas es 180º.



α+β=180°; por lo tanto α y β son suplementarios

FIGURA 1-44

Ángulo óncavo: Mide más de 180° y menos de 360°.

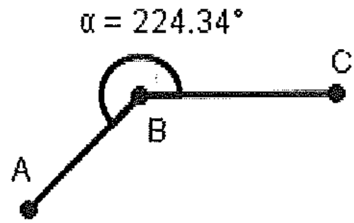


FIGURA 1-45

DESAFÍOS P2.4

AYUDA 2

Halla el complemento de 23° 43' 28"

Solución: 90º - 23° 43' 28" → 90º →

$$\begin{array}{rrr} 89^\circ & 59' & 60'' \\ -\,23^\circ & 43' & 28'' \\ \hline 66^\circ & 6' & 32'' \end{array}$$

AYUDA 3

$\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$ están en relación 4:5 y ambos son suplementarios. Halla:

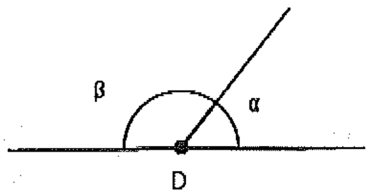


Figura 1-46

Solución

$\hat{\alpha} + \hat{\beta} = 180° \rightarrow 4x + 5x = 180° \rightarrow 9x = 180° \rightarrow x = 20° \rightarrow$
$\hat{\alpha} = 4x = 4(20°) = 80°; \Longrightarrow \hat{\beta} = 5x = 5(20°) = 100°$

1.14.1.11 Bisectriz de un ángulo

Es la semirrecta interior que divide al ángulo en dos ángulos congruentes. Sea D un punto interior de un $\angle ABC$. Decimos que $\overrightarrow{BD}$ es la bisectriz de $\angle ABC$ sí y solo sí $\angle ABD \cong \angle DBC$.

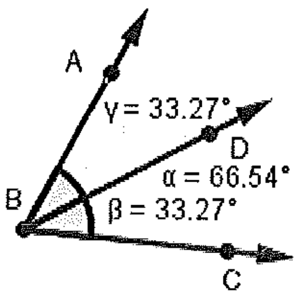


Figura 1-47

1.14.1.12 Mediatriz de un segmento

Se llama mediatriz de un segmento, a la recta, perpendicular al segmento que pasa por el punto medio de dicho segmento. "t" es mediatriz de $\overline{AB}$ sí y solo sí: $t \perp \overline{AB}$ y $\overline{AC} = \overline{CB}$.

$\overleftrightarrow{ML}$ es mediatriz de $\overline{AB}$

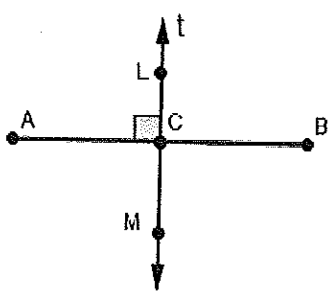


Figura 1-48

TEOREMA 1

En dos líneas secantes, los ángulos opuestos por el vértice son iguales. $\angle\gamma = \angle\alpha$ y $\angle\beta = \angle\delta$ por opuestos por el vértice.

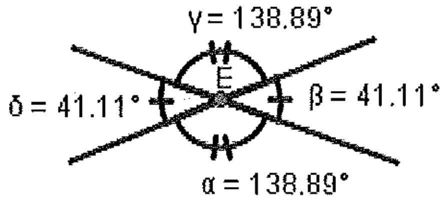


FIGURA 1-49

1.14.1.13 PARALELISMO Y PERPENDICULARIDAD

HERRAMIENTA

Dos rectas son *perpendiculares* si son secantes y uno de los ángulos que forman –y por consiguiente los cuatro– es recto.

Dada una recta ***r*** y un punto **P** contenidos en un plano α, existe una única recta perpendicular a r que pasa por P y está contenida en α.

HERRAMIENTA

Cuando hablamos de distancia de un punto a una línea, siempre será un segmento perpendicular trazado desde dicho punto a la línea.

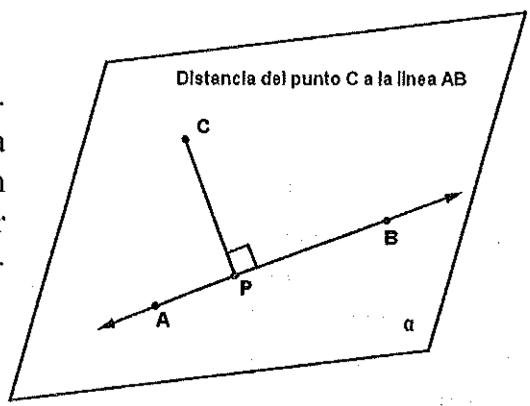


FIGURA 1-50

HERRAMIENTA

- Dos líneas son paralelas si están siempre a una misma distancia.
- Dos líneas son perpendiculares si forman un ángulo recto.

COROLARIO 1

Dos líneas paralelas a una tercera son paralelas entre sí.

Si una línea es perpendicular a otra, es también perpendicular a toda paralela a esta otra.

Si dos rectas son paralelas, podemos también hablar de paralelismo entre segmentos de ellas.

Ángulos formados por dos líneas cortadas por una tercera (transversal)

Ángulos internos: son los ángulos situados en la parte común de los semiplanos determinados por cada una de las rectas que contienen a la otra; son $\angle 4$, $\angle 3$, $\angle 5$, $\angle 6$. (Véase figura 1-51)

Ángulos externos: son los ángulos situados en el semiplano determinado por cada una de las rectas que no contienen a la otra; son $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 7$, $\angle 8$.

Ángulos alternos: son dos ángulos, ambos internos o externos, situados en semiplanos opuestos respecto a la secante.

Ángulos alternos internos: $\angle 4$ y $\angle 6$; $\angle 3$ y $\angle 5$.

Ángulos alternos externos: $\angle 1$ y $\angle 7$; $\angle 2$ y $\angle 8$.

Ángulos correspondientes: son dos ángulos, uno interno y otro externo, situados en un mismo semiplano respecto a la secante; son $\angle 1$ y $\angle 5$; $\angle 2$ y $\angle 6$; $\angle 4$ y $\angle 8$; $\angle 3$ y $\angle 7$.

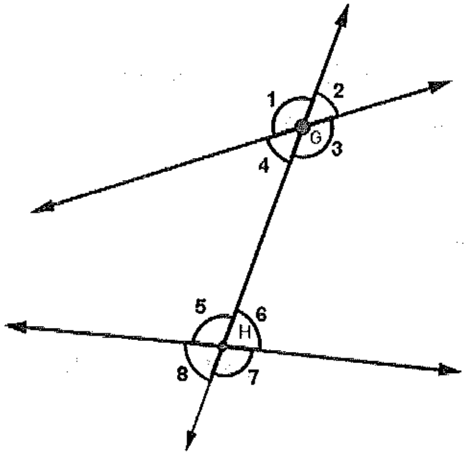


FIGURA 1-51

Cuando tenemos un **par de rectas paralelas cortadas por una transversal**, obtenemos:

$\angle 1 = \angle 5$; $\angle 4 = \angle 8$; $\angle 2 = \angle 6$; $\angle 3 = \angle 7$ (por correspondientes entre paralelas).

$\angle 4 = \angle 6$; $\angle 3 = \angle 5$ (por alternos internos entre paralelas).

$\angle 1 = \angle 7$; $\angle 2 = \angle 8$ (por alternos externos entre paralelas).

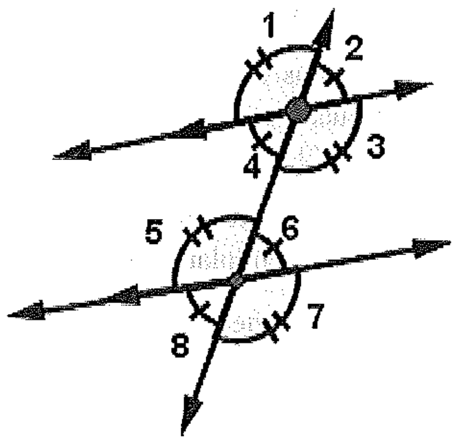


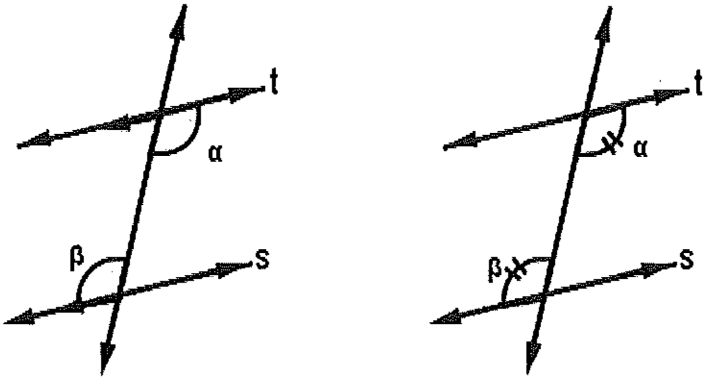
FIGURA 1-52

Además:

$\angle 1 = \angle 3$; $\angle 2 = \angle 4$; $\angle 5 = \angle 7$; $\angle 6 = \angle 8$ (por opuestos por el vértice).

$\angle 1 + \angle 2 = 180°$; $\angle 2 + \angle 3 = 180°$; $\angle 3 + \angle 4 = 180°$; $\angle 4 + \angle 1 = 180°$; $\angle 5 + \angle 6 = 180°$; $\angle 6 + \angle 7 = 180°$; $\angle 7 + \angle 8 = 180°$; $\angle 8 + \angle 5 = 180°$ (por suplementarios).

Se nos pueden presentar dos tipos de problemas:



(a) (b)

FIGURA 1-53

Si $t \parallel s$, entonces $\angle\alpha = \angle\beta$ (por alternos internos entre paralelas)

Si $\angle\alpha = \angle\beta$ y son alternos internos, entonces $t \parallel s$.

DESAFÍOS P2.5, P2.6, P2.7, P2.8, P2.9

AYUDA 4

Si $\overleftrightarrow{MN} \parallel \overleftrightarrow{PQ}$ y $\overleftarrow{SS'}$ es una transversal, y $\angle 7 = \frac{\angle 8}{2}$. Halla los valores de todos los ángulos.

Solución: $\angle 7 + \angle 8 = 180°$ (suplementarios)

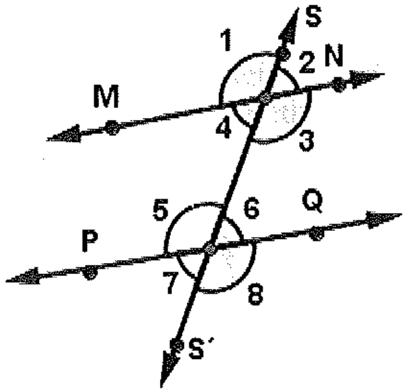


FIGURA 1-54

$\frac{\angle 8}{2} + \angle 8 = 180°$ (sustitución); $\Rightarrow \frac{\angle 8 + 2\angle 8}{2} = 180°$;

$\Rightarrow 3\angle 8 = 180°2$;

$\therefore \angle 8 = 360°/3 = 120°$;

Ahora: $\angle 7 = \frac{\angle 8}{2} = \frac{120°}{2} = 60°$

$\angle 7 = \angle 6 = 60°$ (opuestos por el vértice)

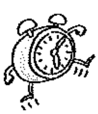
$\angle 8 = \angle 5 = 120°$ (opuestos en el vértice)

$\angle 6 = \angle 2 = 60°$ (correspondientes entre paralelas)

$\angle 5 = \angle 1 = 120°$ (correspondientes entre paralelas)

$\angle 7 = \angle 4 = 60°$ (correspondientes entre paralelas)

$\angle 8 = \angle 3 = 120°$ (correspondientes entre paralelas)



AYUDA 5

Si $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$, $\overleftrightarrow{EF} \parallel \overleftrightarrow{GH}$ y $\angle EMB = 60°$, halla $\angle HPD$.

Solución: $\angle$EMN= $\angle\beta$ = 60° (alternos internos entre paralelas).

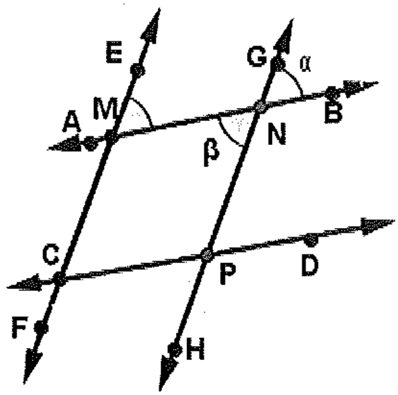


FIGURA 1-55

$\angle\beta$ + $\angle$BNP = 180° (suplementarios);
$\Rightarrow$ 60° + $\angle$BNP = 180° (sustitución)
$\Rightarrow\angle$BNP = 120°;
$\rightarrow\angle$BNP = $\angle$HPD = 120° (correspondientes entre paralelas)

AYUDA 6

Si tres ángulos suman 322°, y el mayor es el triple del menor menos 70°, y el del medio es el doble del menor menos 10°, ¿cuánto mide cada ángulo?

Solución: Ángulo menor: x	(x) + (2x – 10) + (3x – 70) = 322
Ángulo del medio: 2x–10	6x = 322 + 10 + 70$\rightarrow$x = 402/6$\rightarrow$ x = 67
Ángulo mayor: 3x–70	2x – 10 = 124; 3x – 70 = 131

AYUDA 7

Si tres ángulos suman 260°, y el mayor mide 3 veces lo que mide el menor, y el menor es la mitad de lo que mide el del medio, ¿cuánto mide cada ángulo?

Solución: Ángulo menor: x	$(x) + (2x) + (3x) = 260$
Ángulo del medio: 2x	$6x = 260 \rightarrow x = 260/6 \rightarrow x = 43.33$
Ángulo mayor: 3x	$2x = 86.67; 3x = 130$

AYUDA 8

Si tres ángulos suman 190°, y el mayor mide el doble del ángulo del medio más 30°, el menor mide el triple del ángulo del medio menos 90°, ¿cuánto mide cada ángulo?

Solución: Ángulo del medio: x	$(3x\text{-}90) + (x) + (2x+30) = 190$
Ángulo menor: $3x - 90$	$6x=190\text{-}30\text{+}90 \rightarrow x=250/6 \rightarrow x = 41.66$
Ángulo mayor: $2x + 30$	$3x - 90 = 35; 2x + 30 = 113.33$

1.14.2 Retos

1. Determina el complemento de 72°.
2. ¿Cuál es el suplemento de 139°?
3. ¿Cuál es el suplemento de $(a - 12)°$?
4. Determina el complemento del suplemento de 143°.
5. Si 36° es el complemento del suplemento de *x*, ¿cuántos grados mide *x*?
6. ¿Cuál es el suplemento del complemento de $(a - 10)°$?
7. ¿Cuántos grados resultan si al complemento de 37° se le suma el suplemento de 93°?
8. Determina la diferencia entre el suplemento de $(a - 15)°$ y el complemento de $(a - 45)°$
9. Un ángulo y su suplemento están en razón 7:2. ¿Cuánto mide el ángulo menor?
10. Un ángulo y su complemento están en razón 2:1. ¿Cuánto mide el suplemento del ángulo mayor?
11. Determina el ángulo que es el triple de su complemento.
12. Determina el ángulo que es la cuarta parte de su suplemento.
13. Dos ángulos son complementarios y el mayor es 5 veces el menor. ¿Cuánto mide el ángulo menor?

260 43.33 20
83 3 2
7 129.99 40

14. Si x y y son ángulos adyacentes y x tiene 27° más que y, ¿cuánto mide x?
15. Un ángulo tiene 35° menos que otro ángulo cuyo complemento es 12°. ¿Cuánto resulta de sumar dichos ángulos?
16. Dos ángulos que suman 50° están en la razón de 2:3. ¿En qué razón están los complementos respectivos de estos ángulos?
17. El complemento y el suplemento de un ángulo son entre sí como 1:5. ¿Cuánto mide el ángulo?
18. Determina el complemento de 42°18'.
19. Determina el suplemento de 154°27'42".
20. Si el suplemento de un ángulo es 113°26'14", determina dicho ángulo.
21. Si m = 92°35'14" y n = 27°47'32", ¿cuánto es m + n?
22. Un ángulo recto se divide en razón 1:2:3. ¿Cuál es la diferencia entre el ángulo mayor y el ángulo menor de esta división?
23. Dos ángulos opuestos por el vértice miden $(20-a)°$ y $(a-74)°$. ¿Cuánto vale a?
24. El complemento de un ángulo de 47° es (ß - 30)°. ¿Cuánto vale ß?
25. Si la diferencia entre dos ángulos complementarios es 22°, ¿cuál es la diferencia entre sus complementos respectivos?
26. A la cuarta parte de un ángulo se le suma su tercera parte resultando 7°. ¿Cuánto mide el ángulo?
27. El doble de un ángulo es la cuarta parte de su complemento. ¿Cuánto mide el ángulo?

3.3.3 Retos

1. Los ángulos α, β y ϕ están en razón de 1:2:3. Halla sus valores.

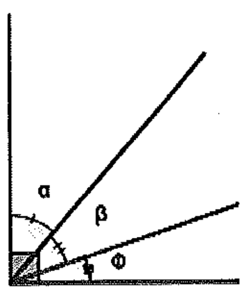


Figura 1-56

2. Dos ángulos consecutivos suman 100°. ¿Qué ángulo forman sus bisectrices?
3. Si tres ángulos suman 220°, y el menor es la tercera parte del mayor, y el mayor es el doble que el del medio, ¿cuánto mide cada ángulo?
4. Demuestra que la suma de las medidas de los ángulos $\angle 1 + \angle 4$ es igual a 180°.
5. Demuestra que la suma de las medidas de los ángulos $\angle 2 + \angle 5 + \angle 6$ es igual a 180°.
6. En la figura: $\angle 1 = \angle 2$; $\angle 2 = 2\angle 3$, halla el valor del ángulo $\angle 7$.

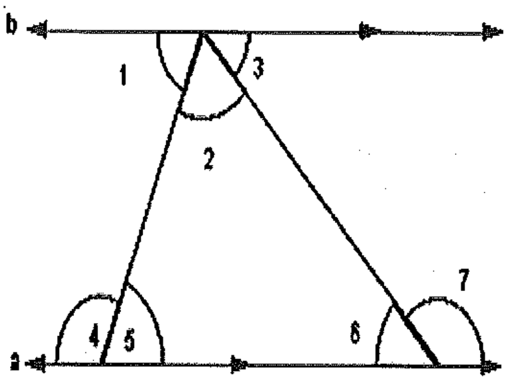


FIGURA 1-57

7. Si un ángulo excede en 20° al triple de otro, y su suma son 140°, halla sus medidas.
8. En tres ángulos que forman un ángulo llano, uno de ellos es la mitad del segundo y la tercera parte del tercero. Halla sus medidas.
9. Señala cuáles ángulos son alternos internos entre paralelas, alternos externos entre paralelas, correspondientes entre paralelas y suplementarios.

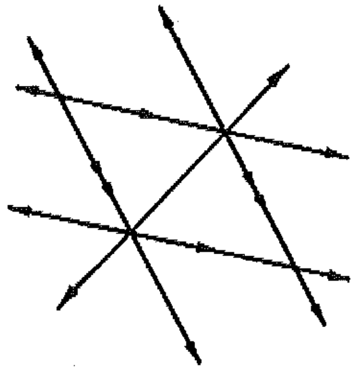


FIGURA 1-58

10. Si tres ángulos suman 300°, y el mayor es el doble del menor menos 20°, y el del medio es el triple del menor menos 100°, ¿cuánto mide cada ángulo?
11. Si tres ángulos suman 160°, y el mayor mide 5 veces lo que mide el menor, y el menor es la mitad de lo que mide el del medio, ¿cuánto mide cada ángulo?
12. Si tres ángulos suman 290°, y el mayor mide el triple del menor más 50°, y el del medio mide el doble que el menor, ¿cuánto mide cada ángulo?

1.15 SECCIÓN TRES

1.15.1 TRIÁNGULOS

1.15.1.1 LOGROS

Estudiar y recordar los aspectos más básicos de los triángulos, sus elementos, clasificación, puntos y líneas notables, congruencia y semejanza en la solución de problemas de tipo geométrico y aritmético.

Construir y definir las funciones trigonométricas en circunferencias de radio igual a la unidad, radio distinto de uno y en el triángulo rectángulo, para aplicarlas en la solución de triángulos.

Enunciar y demostrar la Ley de los Senos y la Ley de los Cosenos y aplicarlas en la solución de problemas que originan triángulos oblicuángulos.

1.15.1.2 Indicadores de logro

- Relaciona y diferencia los elementos que componen un triángulo.
- Identifica las líneas notables en un triángulo.
- Reconoce e identifica cada tipo de triángulo según las longitudes de sus lados y las medidas de sus ángulos.
- Aplica los criterios de congruencia en la solución de problemas geométricos.
- Aplica los criterios de semejanza en la solución de problemas geométricos.
- Aplica el teorema de Pitágoras en la solución de problemas geométricos.
- Utiliza las razones trigonométricas y los teoremas del seno y coseno para resolver problemas en contexto.

1.15.1.3 Competencia

Traducir del lenguaje usual al lenguaje matemático, problemas o situaciones problema que impliquen el uso de la congruencia, la semejanza, las razones trigonométricas o la ley de los senos y los cosenos.

1.15.1.4 Conocimientos previos

Para estudiar el tema siguiente.

Debes saber: algunos conceptos básicos como, por ejemplo: ángulo, vértice, lado, bisectriz y mediatriz.

Para recordar los conceptos previos, contesta a la pregunta de manera intuitiva y después realiza una consulta en algún texto que trate del tema.

1. ¿Sabes qué es un ángulo y cómo representar un ángulo?
2. ¿Sabes qué son ángulos complementarios?
3. ¿Sabes qué son ángulos suplementarios?
4. ¿Sabes qué son ángulos alternos externos, alternos internos y correspondientes?

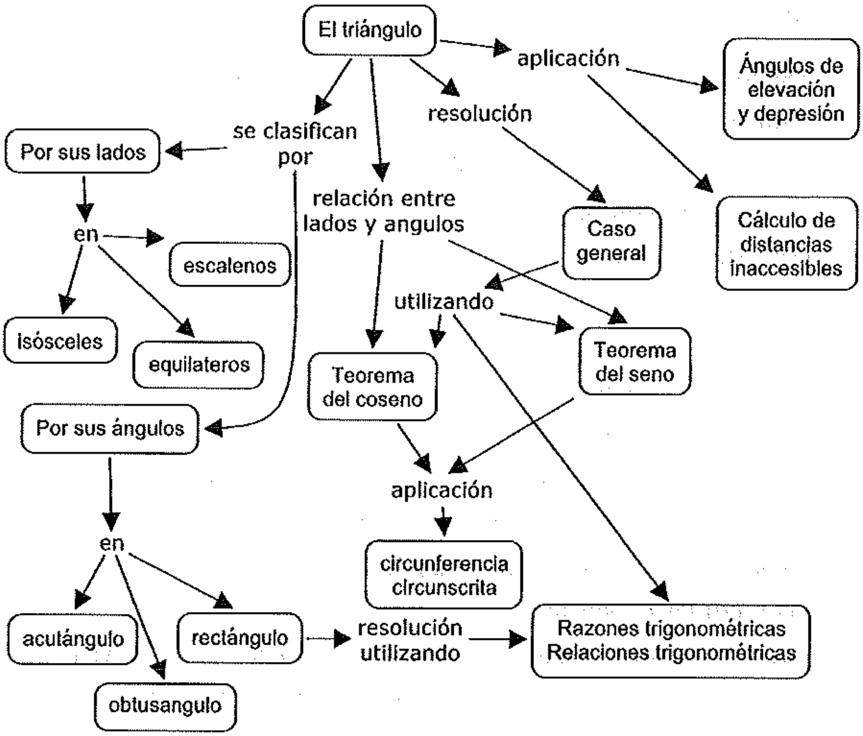
1.15.1.5 Red de conceptos

- Triángulo. Concepto.
- Elementos (lados, vértices y ángulos).
- Rectas notables (altura, mediana, mediatriz, bisectriz), puntos notables (ortocentro, baricentro, incentro, circuncentro).
- Clasificación de triángulos (según las longitudes de sus lados y las medidas de sus ángulos).
- Criterios de congruencia de triángulos (ALA – LLL – LAL).
- Criterios de semejanza de triángulos (AA – LLL – LAL).
- Triángulo rectángulo, teorema de Pitágoras.
- Razones trigonométricas, teorema del seno y del coseno.
- Problemas de aplicación.

1.15.1.6 Estándares

Resolver triángulos rectángulos y oblicuángulos, mediante la aplicación de las funciones trigonométricas y la ley de los senos y los cosenos.

1.15.1.7 Esquema temático



1.15.1.8 Definición de triángulos

Dados tres puntos A, B, C no alineados, los segmentos $\overline{AC}$, $\overline{AB}$, y $\overline{BC}$ determinan una figura geométrica denominada **triángulo.**

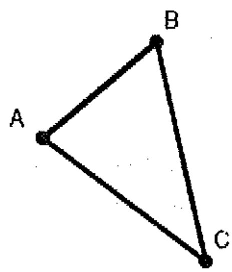


Figura 1-59

Cada uno de los puntos no alineados es un vértice del triángulo. Cada uno de los segmentos recibe el nombre de lado del triángulo. Los ángulos ABC, BCA y CAB asociados al triángulo se denominan ángulos interiores del triángulo. El triángulo de vértices A, B, C se denota por ΔABC.

En un triángulo se distinguen seis elementos principales: tres lados y tres ángulos.

Clasificación de los triángulos según sus lados

ISÓSCELES: Si tiene por lo menos un par de lados congruentes. Si $\overline{AC} = \overline{CB}$, entonces se dice que el ΔABC es isósceles de base AB; además los ángulos adyacentes a la base son iguales (esto último habría que demostrarlo) $\angle A = \angle B$.

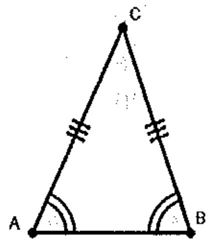


FIGURA 1-60

EQUILÁTERO: Tiene sus tres lados iguales. Cada uno de sus tres ángulos mide 60° (esto último habría que demostrarlo).

$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AC}$

$\angle A = \angle B = \angle C = 60°$

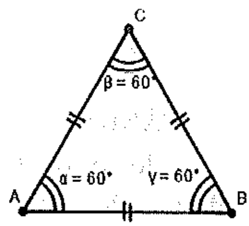


FIGURA 1-61

ESCALENO: Tiene sus tres lados y ángulos desiguales.

$\overline{AB} \neq \overline{BC} \neq \overline{CA}$

$\angle A \neq \angle B \neq \angle C$

FIGURA 1-62

Clasificación de los triángulos según sus ángulos

ACUTÁNGULO: Tiene sus tres ángulos agudos $A < 90°$, $B < 90°$ y $C < 90°$.

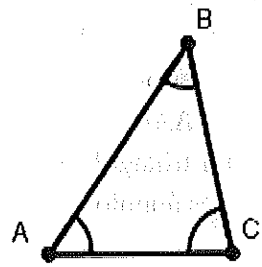


FIGURA 1-63

OBTUSÁNGULO: Tiene un ángulo obtuso, y los otros dos agudos. $B < 90°$, $A < 90°$; $C > 90°$

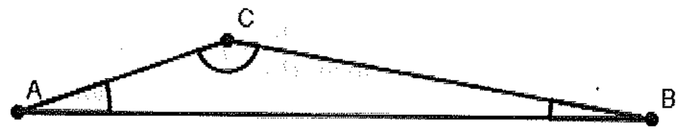


FIGURA 1-64

RECTÁNGULO: Tiene un ángulo recto, y los otros dos son agudos. $A = 90°$; $C < 90°$. $B < 90°$.

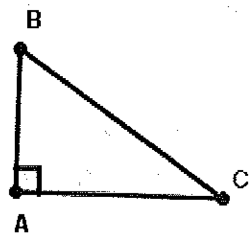


FIGURA 1-65

EQUIÁNGULO: Si tiene los tres ángulos congruentes.

1.15.1.9 LÍNEAS Y PUNTOS NOTABLES EN EL TRIÁNGULO

Mediana:
Es el segmento trazado desde un vértice hasta el punto medio del lado opuesto.
Todo triángulo tiene tres medianas.
El punto de corte de éstas se denomina **Baricentro (B).**

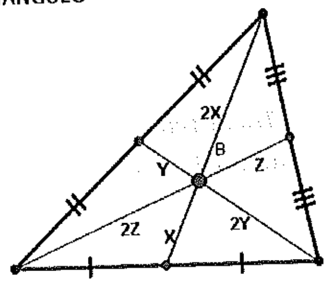
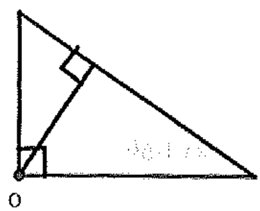


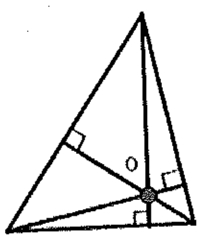
FIGURA 1-66

DESAFÍO P3.1

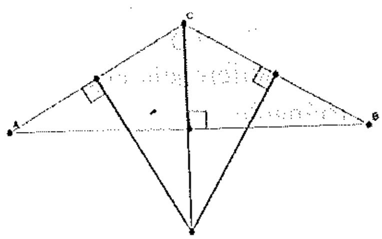
Altura:
Es la perpendicular trazada desde un vértice al lado opuesto o su prolongación. El punto donde se cortan se llama **Ortocentro.**



Rectángulo
(a)



Acutángulo
(b)



Obtusángulo
(c)

FIGURA 1-67

DESAFÍO P3.2.1, P3.2.2

Bisectriz: Es la línea que corta un ángulo interior del triángulo en dos ángulos iguales. El punto donde se cortan las bisectrices se llama **Incentro,** y es el centro de una circunferencia inscrita en el triángulo.

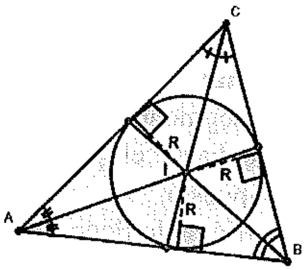


FIGURA 1-68

DESAFÍO P3.3

Mediatriz: Es la perpendicular en el punto medio de cada lado. El punto donde se cortan las mediatrices se llama **Circuncentro,** y es el centro de una circunferencia circunscrita al triángulo.

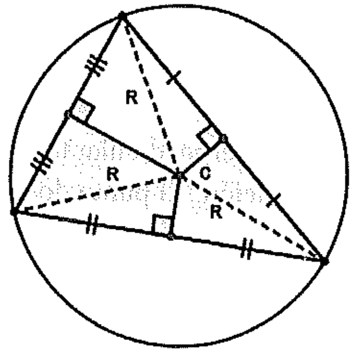


FIGURA 1-69

DESAFÍO P3.4

Recta de Euler: En un triángulo, el ortocentro, el baricentro y el circuncentro son puntos colineales.

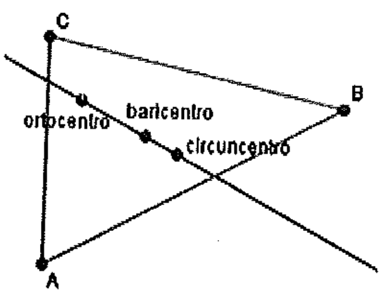


FIGURA 1-70

DESAFÍO P3.5

1.15.1.10 CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS

HERRAMIENTAS

Congruencia: La palabra congruencia hace referencia a igual forma y tamaño. Se utiliza $\cong$ como símbolo para congruencia.

Figuras congruentes: Dos o más figuras son congruentes si tienen el mismo tamaño y forma; para dos figuras se dice que son congruentes si una es el duplicado de la otra. Las figuras pueden hacerse coincidir de tal forma que sus partes correspondientes ajusten entre sí.

Triángulos congruentes: Teniendo en cuenta las ideas anteriores, dos o más triángulos son congruentes cuando tienen la misma forma y tamaño.

Si dos triángulos son congruentes, sus lados y ángulos correspondientes deben ser congruentes.

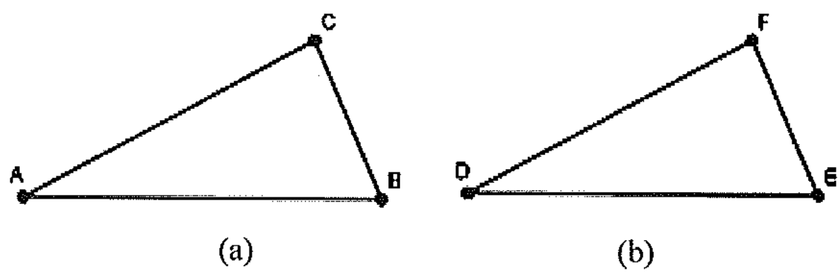


FIGURA 1-71

Si los dos triángulos de la figura 1-71 (a) y (b) son congruentes, escribimos:

$\Delta ABC \cong \Delta DEF$ y se lee: El triángulo ABC es congruente con el triángulo DEF.

Si denotamos por: $\angle A$ o $\hat{A}$ como el ángulo interno asociado al vértice A del triángulo ABC (o también como el ángulo interno asociado al vértice B del triángulo ABC) y así similarmente para los demás vértices.

Para referirnos a las medidas de los ángulos respectivos, escribimos: m(A), m(B), m(C) y se leen medida del ángulo A, medida del ángulo B y medida del ángulo C.

Similarmente los lados de los triángulos son respectivamente a, b y c (para el triángulo ABC) y d, e y f (para el triángulo DEF).

Se puede escribir:

m(a) o m $(\overline{BC})$ para referirse a la medida de la longitud del lado a o a la medida del segmento BC, que para este caso se refiere al mismo elemento del triángulo ABC, similarmente para los demás elementos en ambos triángulos.

Por lo tanto:

Si $\Delta ABC \cong \Delta DEF$, entonces para las medidas de los ángulos:

$m(\hat{A}) \cong m(\hat{D})$

$m(\hat{B}) \cong m(\hat{E})$

$m(\hat{C}) \cong m(\hat{F})$ y para las medidas de los lados:

$m(\overline{AB}) \cong m\,(\overline{DE})$

$m(\overline{BC}) \cong m\,(\overline{EF})$

$m(\overline{AC}) \cong m\,(\overline{DF})$, equivalente a escribir:

$m(c) \cong m(f)$

$m(a) \cong m(d)$

$m(b) \cong m(e)$

Se ve, entonces, que la congruencia entre dos triángulos depende de las congruencias entre lados y ángulos correspondientes.

Entonces surge la siguiente pregunta: ¿Cuál es el número mínimo de partes correspondientes de dos triángulos, que deben ser congruentes, para asegurar que los dos triángulos lo sean? La respuesta a esta pregunta es tres. Pero no tres al azar. Por ejemplo, si los tres pares de ángulos correspondientes de dos triángulos son congruentes, no necesariamente son congruentes los dos triángulos. En un caso particular puede cumplirse. Para resolver este problema, existen los llamados "Criterios de congruencia entre triángulos", por medio de los cuales podemos saber cuáles tres parejas de partes correspondientes de dos triángulos deben ser congruentes.

Los elementos correspondientes de dos triángulos congruentes se llaman "elementos homólogos".

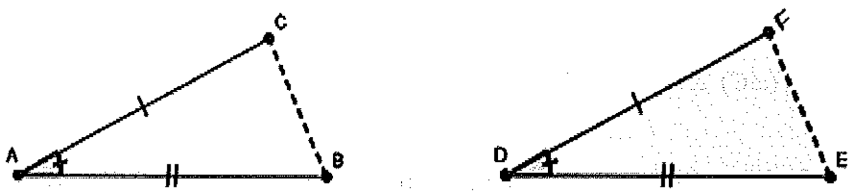
AYUDA 0. Practica en el DVD en el apartado GeoPlana. Triángulos. Tres unidades didácticas de Miguel García Reyes, Ángela Núñez Castaín y el compañero del grupo ELIME Hernán Darío Ortiz (24 escenas interactivas).

DESAFÍO P3.6

1.15.1.11 CRITERIOS DE CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS

Criterio de congruencia L-A-L (Lado – Ángulo - Lado)

Dos triángulos son congruentes si la medida de dos de sus lados son respectivamente iguales y la medida del ángulo comprendido entre ellos también es igual (véase figura 1-72).



(a) (b)

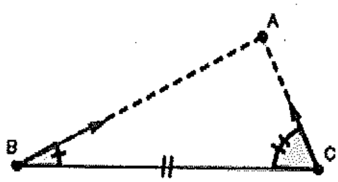
FIGURA 1-72

Tal que: $m(\overline{AB}) \cong m(\overline{DE})$ L
$m(\angle A) \cong m(\angle D)$ A entonces $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ (L-A-L)
$m(\overline{AC}) \cong m(\overline{DF})$ L

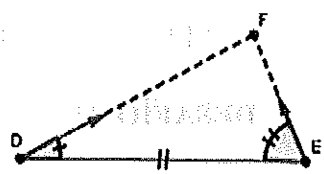
DESAFÍO P3.7.1, DESAFÍO P3.7.2

Criterio de congruencia A-L-A (Ángulo - Lado - Ángulo)

Dos triángulos son congruentes si las medidas de dos de sus ángulos son respectivamente iguales y la medida del lado comprendido entre ellos también es igual (véase figura 1-73).



(a)



(b)

FIGURA 1-73

$m(\angle B) \cong m(\angle D)$ A
$m(\overline{BC}) \cong m(\overline{ED})$ L entonces $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ (A-L-A)
$m(\angle C) \cong m(\angle F)$ A

NOTA: Siempre que veamos un criterio L-A-A, también ocurrirá A-L-A-A, por lo tanto A-L-A.

DESAFÍO P3.8

Criterio de congruencia L-L-L (Lado – Lado - Lado)

Dos triángulos son congruentes si las medidas de sus tres lados son respectivamente iguales (véase figura 1-74).

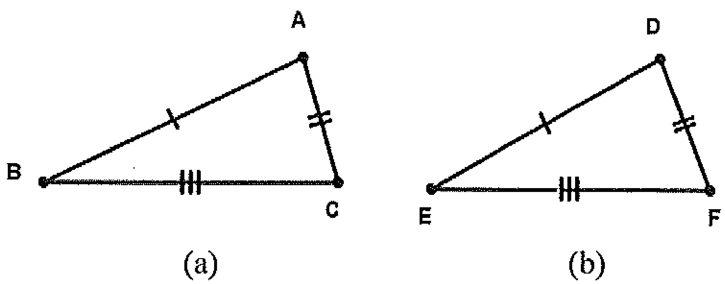


FIGURA 1-74

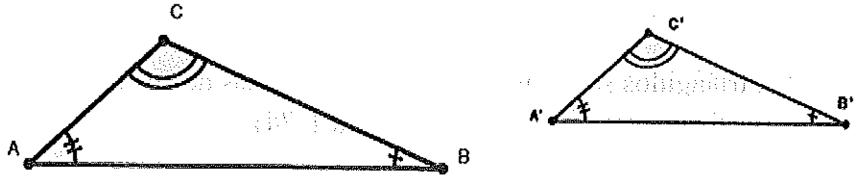
$$\left.\begin{array}{ll} m(\overline{AB}) \cong m(\overline{DE}) & \text{L} \\ m(\overline{BC}) \cong m(\overline{EF}) & \text{L} \\ m(\overline{AC}) \cong m(\overline{DF}) & \text{L} \end{array}\right\} \text{ entonces } \Delta ABC \cong \Delta EDF \text{ (L-L-L)}$$

DESAFÍO P3.9

NOTA: En congruencia de triángulos se nos pueden presentar dos tipos de problemas:

1. Si me dicen que dos triángulos son congruentes, se puede afirmar que las medidas de sus seis elementos son respectivamente iguales (sus tres ángulos y sus tres lados).
2. Si me piden o necesito demostrar que dos triángulos son congruentes, debo aplicar los criterios de congruencia de triángulos.

Por lo que acabamos de leer, los criterios A-A-A y L-L-A no son criterios de congruencia de triángulos. Miremos por qué:



(a) (b)

FIGURA 1-75

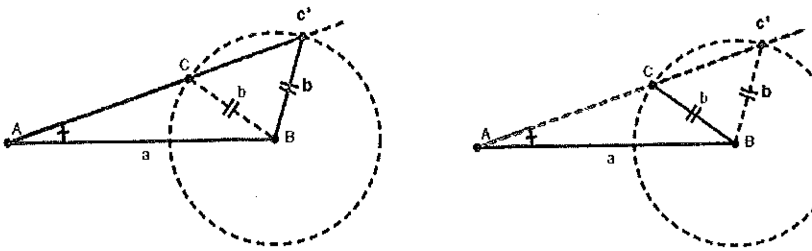
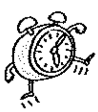


FIGURA 1-76



AYUDA 1

1. Si $\overline{BD} \perp \overline{AC}$, $\angle 1 = \angle 2$. Demuestra que $\Delta ABD \cong \Delta CBD$.

Demostración:

$\angle ABD = \angle DBC = 90°$ (definición de perpendicularidad).

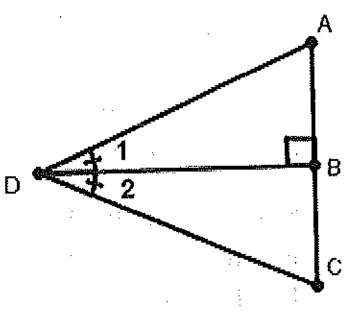


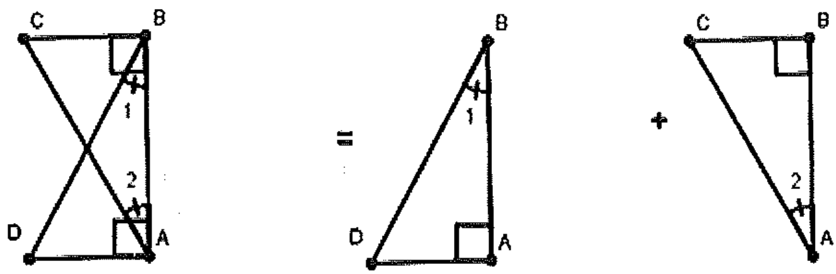
FIGURA 1-77

$\overline{BD} = \overline{BD}$ (lado común); $\angle 1 = \angle 2$ (dado) $\angle$ $\Delta ABD \cong \Delta CBD$ (A-L-A).

2. Sea $DA \perp AB$; $CB \perp AB$; y $\angle 1 = \angle 2$. Teniendo en cuenta la figura 1-78, demuestra que $\Delta ABD \cong \Delta ABC$

Demostración: $\angle DAB = \angle CBA = 90°$ (definición de $\perp$); $\overline{AB} = \overline{AB}$ (lado común).

$\angle 1 = \angle 2$ (dado) $\Rightarrow$ $\Delta ABD \cong \Delta ABC$ (A-L-A). Esto se ilustra en la figura 1.78.



(a) (b) (c)

FIGURA 1-78

3. Si AC = AD y $\angle 1 = \angle 2$
   Demuestra que $\angle C = \angle D$

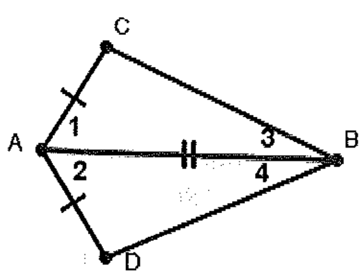


FIGURA 1-79

Solución

$\overline{AC} = \overline{AD}$	(dado)
$\angle 1 = \angle 2$	(dado)
AB = AB	(Lado común)
$\Delta ABC \cong \Delta ABD$	(L-A-L)
$\rightarrow$ $\angle C = \angle D$	(e.c Δ s. $\cong$ s)

TEOREMA 2

Si un triángulo es isósceles, entonces la medida de los ángulos adyacentes al supuesto "lado desigual" son congruentes (véase figura 1-80).

Hipótesis: ΔABC isósceles; $\overline{AB} = \overline{AC}$

Tesis: $\angle B = \angle C$

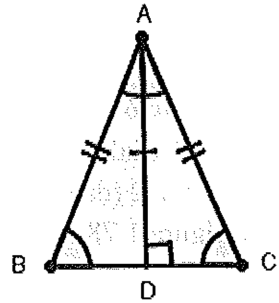


FIGURA 1-80

TEOREMA 3

En todo triángulo isósceles, la medida de la altura correspondiente al supuesto "lado desigual", será también mediana, bisectriz y mediatriz.

Hipótesis: ΔABC isósceles; $\overline{AB} = \overline{AC}$;

$\overline{AD}$ Altura

Tesis: $\overline{AD} \rightarrow$ mediana, mediatriz, bisectriz

DESAFÍO P3.10

TEOREMA 4

En cualquier triángulo la suma de las medidas de los ángulos interiores es 180°.

Hipótesis: ΔABC cualquiera

Tesis: $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$

DEFINICIÓN

En un polígono convexo, un ángulo exterior está formado por la prolongación de un lado y su lado adyacente (véase figura 1-81).

L1,.........L5	Ángulos exteriores
I1 .... I5	Ángulos interiores

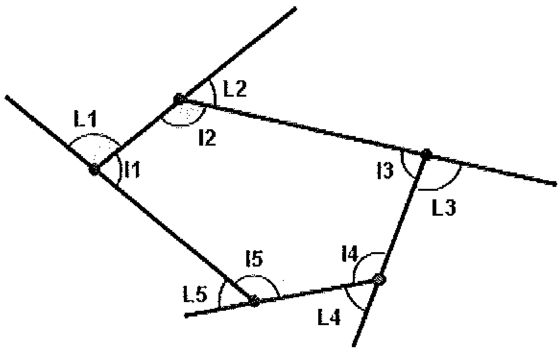


FIGURA 1-81

TEOREMA 5

La suma de las medidas de los ángulos exteriores en cualquier triángulo es 360° (véase figura 1-82).

Hipótesis: ΔABC cualquiera. $\angle A'$, $\angle B'$, $\angle C'$ son ángulos exteriores adyacentes a $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$, respectivamente.

Tesis: $\angle A' + \angle B' + \angle C' = 360°$

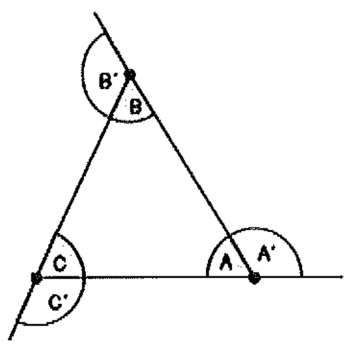


FIGURA 1-82

TEOREMA 6

En cualquier triángulo, la medida de un ángulo exterior es igual a la suma de las medidas de los dos ángulos interiores no adyacentes.

Hipótesis: Δ ABC cualquiera. $\angle$A' es ángulo exterior adyacente a $\angle$A.
Tesis: $\angle A' = \angle B + \angle C$

DESAFÍO P3.11.1, P3.11.2, P3.11.3, P3.11.4

AYUDA 2

Para cada una de las siguientes representaciones de triángulos, di qué triángulos son congruentes, indicando el criterio (véase figura 1-83).

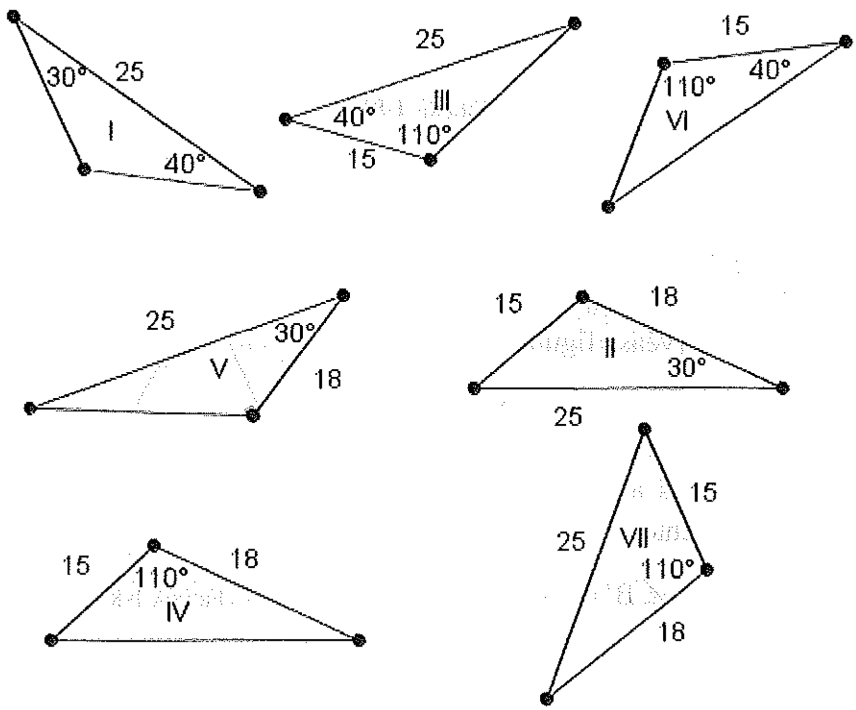


FIGURA 1-83

NOTA: Las medidas de los lados están expresadas en centímetros.

Solución

$\Delta I \Rightarrow 30^\circ + 40^\circ + \theta = 180^\circ$ (suma de ángulos interiores en un triángulo).

θ es el otro ángulo.

$\Rightarrow \theta = 180^\circ - 30^\circ - 40^\circ \Rightarrow \theta = 110^\circ$

$$\left.\begin{array}{ll} \Rightarrow \Delta I \cong \Delta III & \begin{array}{c}(A-L-A)\\ 40^\circ\ 25\ 110^\circ\end{array} \\ \Delta II \cong \Delta V & \begin{array}{c}(L-A-L)\\ 18\ 30^\circ\ 25\end{array} \\ \Delta III \cong \Delta \mathrm{VI} & \begin{array}{c}(A-L-A)\\ 40^\circ\ 13.3\ 110^\circ\end{array} \\ \Delta \mathrm{IV} \cong \Delta \mathrm{VII} & \begin{array}{c}(L-A-L)\\ 13.3\ 110^\circ\ 17.1\end{array} \\ \Delta \mathrm{II} \cong \Delta \mathrm{VII} & \begin{array}{c}(L-L-L)\\ 13.3\ 17.1\ 25\end{array} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c}\Delta I \cong \Delta III \cong \Delta VI\\ \Delta II \cong \Delta V \cong \Delta VII \cong \Delta IV\end{array} \quad \text{(Ley transitiva)}$$

Si $\Delta I \cong \Delta VI \Rightarrow$

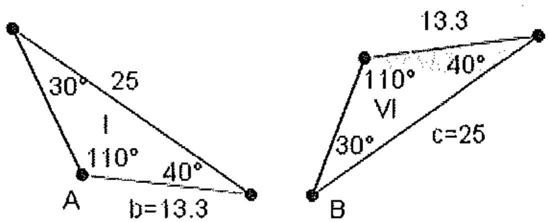


FIGURA 1-84

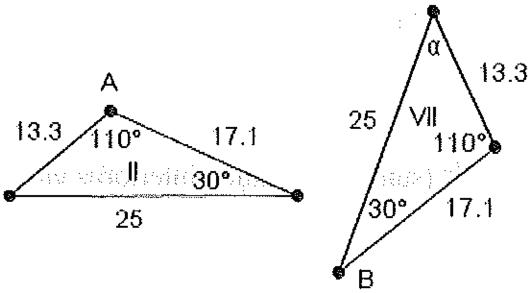
$\angle A = 110^\circ = 11^\circ$

$c = 25 = 25$

$b = 13.3 = 13.3$

$\angle B = 30^\circ = 30^\circ$

Si $\Delta II \cong \Delta VII \Rightarrow$



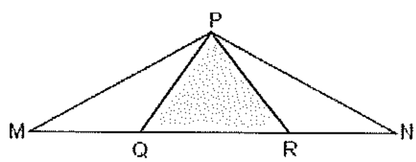
$\alpha + 30° + 110° = 180°$ (Suma de las medidas de los ángulos interiores en un triángulo).
$\Rightarrow \alpha = 40°$.

FIGURA 1-85 $\qquad \Rightarrow \Delta VI \cong \Delta VII$ *(L-S-L)*

$\angle A = 110° = 110°$
$\angle B = 30° = 30°$

$\Rightarrow \Delta I \cong \Delta II \cong \Delta III \cong \ldots \Delta VII$ (Ley transitiva)

AYUDA 3



(a)

Hipótesis: $\overline{MQ} = \overline{PQ} = \overline{PR} = \overline{NR}$

Tesis: ΔMNP es isósceles

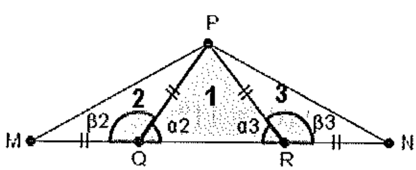
Solución

$\overline{PQ} = \overline{PR}$ (hipótesis)

$\Rightarrow \Delta 1$ isósceles

$\Rightarrow \hat{\alpha}_2 = \hat{\alpha}_3$

$\Rightarrow \hat{\beta}_2 = \hat{\beta}_3$ (suplementos de ángulos iguales)



(b)

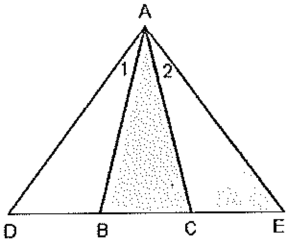
FIGURA 1-86

$\overline{MQ} = \overline{RN}$ (hipótesis); $\Rightarrow \Delta 2 \cong \Delta 3$ (L-A-L) $\Rightarrow \angle M = \angle N$ (Elementos correspondientes en triángulos congruentes (e.c. $\Delta s \cong s$)); $\Rightarrow \Delta\, MNP$ isósceles.

AYUDA 4

Hipótesis: $\overline{AB} = \overline{AC}$; $\angle A$ es trisecado

Tesis: $\overline{AD} = \overline{AE}$



(a)

Solución

$\hat{1} = \hat{2}$ (por trisecación)

$\overline{AB} = \overline{AC}$ (hipótesis)

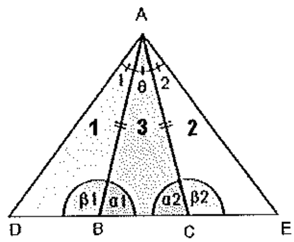
$\Rightarrow$ $\Delta 3$ isósceles

$\Rightarrow$ $\hat{\alpha}_1 = \hat{\alpha}_2$

$\Rightarrow$ $\hat{\beta}_1 = \hat{\beta}_2$ (suplementos de ángulos iguales).

$\Rightarrow$ $\Delta 1 \cong \Delta 2$ (A-L-A)

$\Rightarrow$ $\overline{AD} = \overline{AE}$ (elementos correspondientes en triángulos congruentes).



(b)

AYUDA 5

De acuerdo con la figura, donde $\overline{AE}$ y $\overline{CD}$ son alturas del triángulo ΔBAC, y $\overline{AD} = \overline{CE}$, demuestra que $\overline{AF} = \overline{CF}$.

$\theta_1 = \theta_2 = 90°$	(Definición de altura)
$\overline{AD} = \overline{EC}$	(Dado)
$\hat{\alpha}_1 = \hat{\alpha}_2$	(Opuestos por vértice)
$\Rightarrow \Delta 1 \cong \Delta 2$	(A-A-L)
$\Rightarrow \overline{AF} = \overline{CF}$	(Elementos correspondientes en triángulos congruentes)

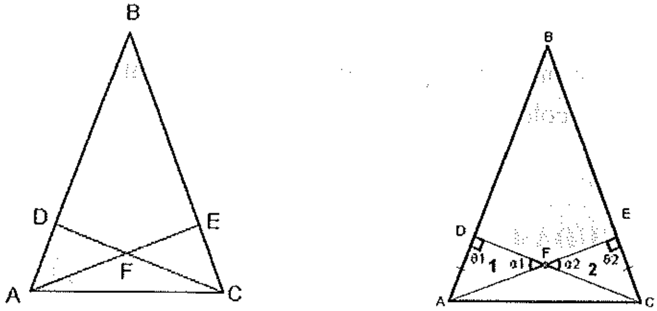


FIGURA 1-88

AYUDA 6

En las figuras 1-89 a y b: $\overline{AC} = \overline{BC}$ y $\overline{DC} = \overline{EC}$. Demuestra que $\overline{AE} = \overline{DB}$.

Solución

$\overline{DC} = \overline{EC}$	(Dado)
$\angle C = \angle C$	(Ángulo común)
$\overline{AC} = \overline{CB}$	(Dado) $\Rightarrow$ $\Delta 1 \cong \Delta 2$ (L-A-L) $\Rightarrow$
$\overline{AE} = \overline{BD}$	(Elementos correspondientes en triángulos congruentes).

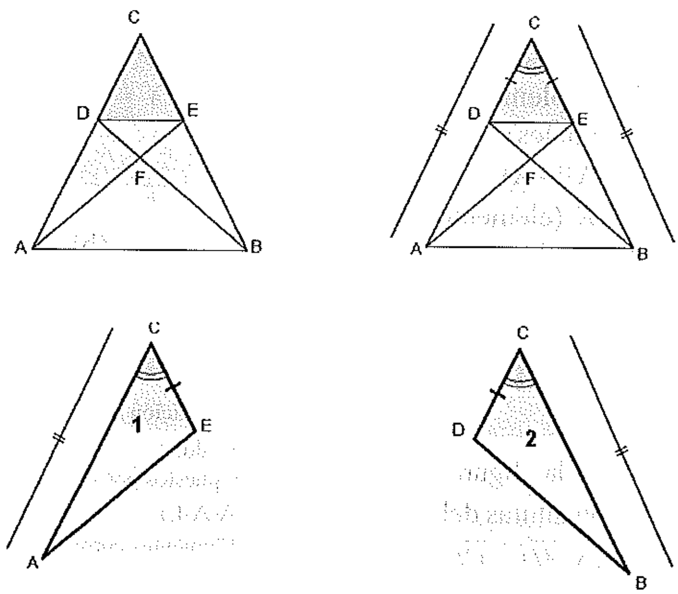


FIGURA 1-89

AYUDA 7

En la figura 1-90(a), $\overline{AC} = \overline{BC}$ y $\angle CDE$ Demostremos que $\overline{AE} = \overline{DB}$.

Solución

$\hat{\alpha}_1 = \hat{\alpha}_2$ (Dado) $\Rightarrow$ $\Delta 1$ isósceles $\Rightarrow$ $\overline{DC} = \overline{CE}$

$\hat{C} = \hat{C}$ (Ángulo común)

$\overline{AC} = \overline{BC}$ (dado)

$\Delta AEC \cong \Delta CDB$ (L-A-L)

$\Rightarrow \overline{AE} = \overline{DB}$ (Elementos correspondientes en triángulos congruentes).

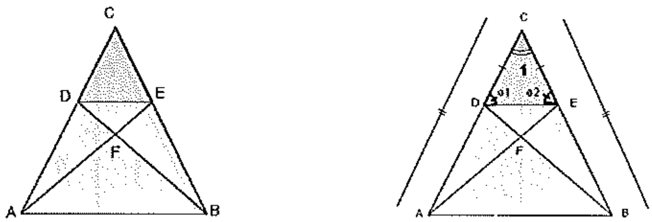


FIGURA 1.90

AYUDA 8

Hipótesis

AE biseca a *BD; DE* $\perp$ *BD; AB* $\perp$ *BD.*

Tesis: $\angle E = \angle A$

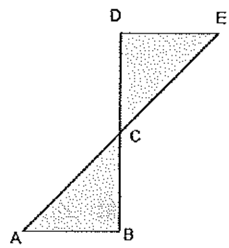


FIGURA 1.91

Solución

$\theta_1 = \theta_2 = 90°$ (Definición de perpendicularidad)

$\overline{DC} = \overline{BC}$ (Biseca a)

$\hat{\alpha}_1 = \hat{\alpha}_2$ (Opuestos por el vértice)

$\Delta 1 \cong \Delta 2$ (A-L-A)

$\hat{A} = \hat{E}$ (Elementos correspondientes en triángulos congruentes).

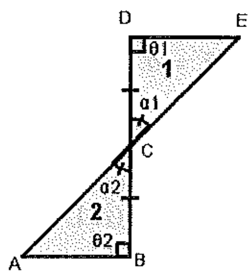


FIGURA 1.92

AYUDA 9

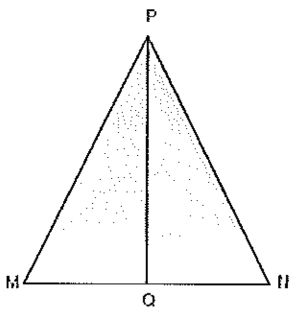
Hipótesis

PQ bisectriz; $PQ \perp MN$

Tesis: $\angle M = \angle N$

Solución

$\hat{\alpha}_1 = \hat{\alpha}_2$	($\overline{PQ}$ bisectriz)
$\theta_1 = \theta_2$	(Perpendicularidad)
$\overline{PQ} = \overline{PQ}$	(Lado común)
$\Delta 1 \cong \Delta 2$	(A-L-A)
$\angle M = \angle N$	(Elementos correspondiente: en triángulos congruentes)



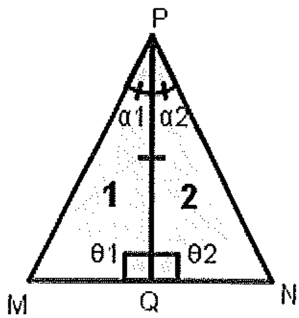
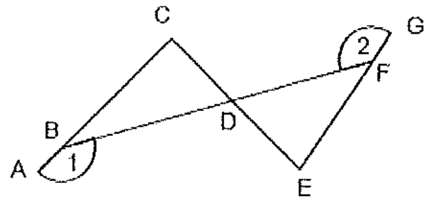


FIGURA 1-93

AYUDA 10

Hipótesis: $\angle 1 = \angle 2$;
$\overline{CE}$ biseca $\overline{BF}$

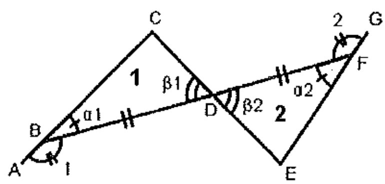
Tesis: $\angle C = \angle E$



(a)

Solución

$\hat{1} = \hat{2}$	(Hipótesis)
$\Rightarrow \hat{\alpha}_1 = \hat{\alpha}_2$	(Suplementos de ángulos iguales)
$\hat{\beta}_1 = \hat{\beta}_2$	(Opuestos por el vértice)
$\overline{BD} = \overline{DF}$	($\overline{CE}$ biseca a $\overline{BF}$)
$\Delta 1 \cong \Delta 2$	(A-L-A)
$\hat{C} = \hat{E}$	(Elementos correspondientes en triángulos congruentes)



(b)

FIGURA 1-94

1.15.1.12 Semejanza

Razones y proporciones

HERRAMIENTAS

La razón de una cantidad a otra cantidad es el cociente entre ellas. Es decir, la **razón** es un cociente de medidas de cantidades de la misma clase. Podemos, por ejemplo, hallar la razón de la medida de un segmento a la medida de un segundo segmento. Si la medida del primer segmento es 20 cm y la medida del segundo es 30 cm, la razón será: $\frac{20\,cm}{30\,cm}=\frac{2}{3}$.

Si en vez de tomar la unidad en centímetros, se utiliza metros, se tiene que la medida del primer segmento es 0,20 m y la del segundo 0,30 m y su razón es $\frac{0{,}20\,cm}{0{,}30\,cm}=\frac{2}{3}$. O sea que no importa la unidad de longitud que se use para medir los dos segmentos, la razón de sus medidas es el mismo número, siempre que se use la misma unidad para los dos.

En forma equivalente se pueden hallar las razones entre las medidas de otras clases: ángulos, volúmenes, áreas, etc. Como una razón es una fracción, todas las reglas que gobiernan las fracciones se aplican a las razones. Simbólicamente, la razón "x" a "y" se expresa $\frac{x}{y}$, $x \div y$, x : y (":" este símbolo se lee "a"). "x" y "y" se llaman términos de la razón.

Una razón siempre es un número abstracto, es decir, no tiene unidades. En general, las razones se expresan en forma más simplificada.

Una **proporción** es una expresión de la igualdad de dos razones o más. Por ejemplo, las razones $\frac{1}{3}$ y $\frac{4}{12}$ tiene el mismo valor y su igualdad forma la proporción $\frac{1}{3}=\frac{4}{12}$, ó $1{:}3 = 4{:}12$.

En general, si las razones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son iguales, entonces $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ es una proporción. Se lee *"a* es a *b* como *c* es a *d"*, o también *"a* y *b* son proporcionales a *c* y *d"*.

Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, se dice que $\underline{a}$ es el primer término de la proporción, $\underline{b}$ el segundo, $\underline{c}$ el tercero y $\underline{d}$ el cuarto. También se utiliza llamar a $\underline{a}$ y $\underline{d}$ los extremos y a $\underline{b}$ y $\underline{c}$ los medios de la proporción.

Semejanza de figuras geométricas

En términos corrientes, dos figuras geométricas son semejantes si tienen exactamente la misma forma, pero no necesariamente el mismo tamaño.

HERRAMIENTA

Dos polígonos P_1 y P_2 son semejantes, si sus ángulos correspondientes son congruentes y los lados correspondientes son proporcionales. Así:

Si $\angle A \cong \angle E, \angle B \cong \angle F, \angle C \cong \angle G, \angle D \cong \angle H$ y $\frac{AB}{EF} = \frac{BC}{FG} = \frac{CD}{GH} = \frac{AD}{EH}$

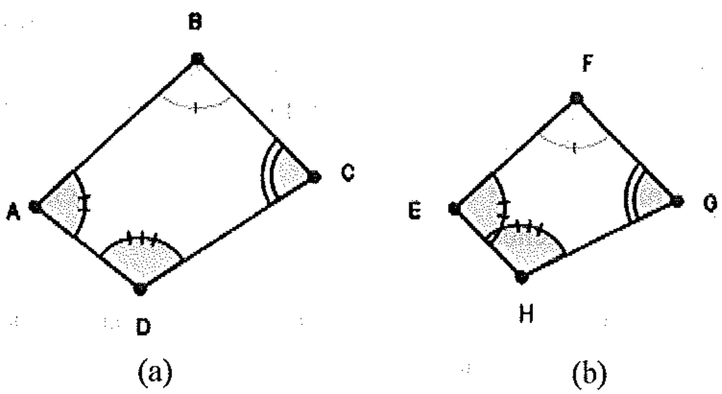
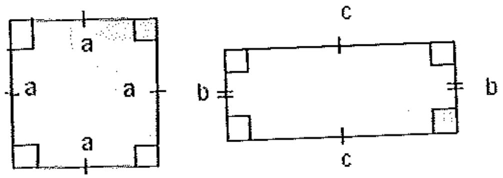


FIGURA 1-95

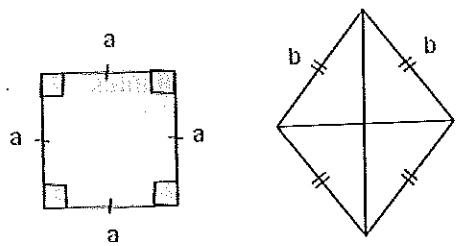
Entonces P_1 es semejante a P_2. El símbolo "es semejante a" es "≈".

AYUDA 1:



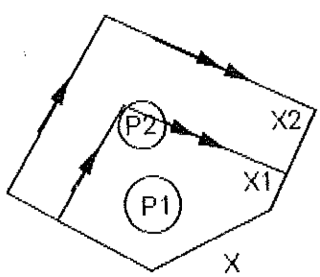
(a)

Sus ángulos son respectivamente iguales, pero sus lados no son proporcionales.
(a/b = a/b ≠ a/c = a/c)
⇒ El cuadrado no es semejante al rectángulo.



(b)

a/b = a/b = a/b = a/b.
Tienen sus lados proporcionales, pero sus ángulos no son necesariamente iguales.
⇒ El cuadrado no es semejante al rombo.



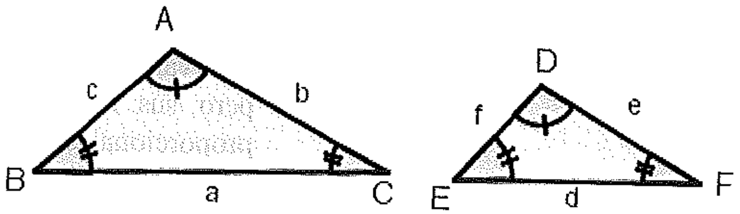
(c)

Los dos polígonos tienen sus ángulos respectivamente iguales, pero sus lados no son proporcionales:

$(x/x \neq x_1/(x_2+x_1))$

⇒ *Los dos polígonos no son semejantes.*

DESAFÍO P3.12.1, P3.12.2



(d) Entre dos triángulos

FIGURA 1-96

Si $\angle A \cong \angle D$, $\angle B \cong \angle E$, $\angle C \cong \angle F$; y $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{DF} = \dfrac{BC}{EF}$ ó $\dfrac{c}{f} = \dfrac{b}{e} = \dfrac{a}{d}$.

Entonces decimos que los dos triángulos son semejantes.

DESAFÍO P3.13.1, P3.13.2, P3.13.3

Criterios de semejanza de triángulos

Dos triángulos son semejantes si cumplen cualquiera de las siguientes condiciones o criterios:

i) Si tienen dos pares de ángulos respectivamente iguales (A-A).

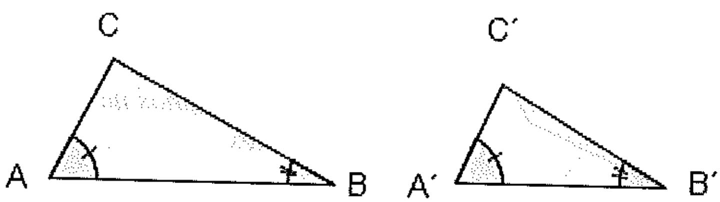


FIGURA 1-97

Si $\angle A = \angle A'$ y $\angle B = \angle B'$ $\Rightarrow \Delta ABC \approx \Delta A'B'C'$ (A-A).

DESAFÍO P3.14

ii) Si tienen un ángulo igual comprendido entre lados proporcionales (L-A-L).

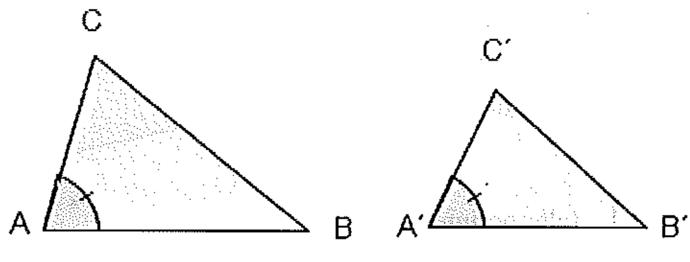


FIGURA 1-98

Si $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$ y $\angle A = \angle A' \Rightarrow \Delta ABC \approx \Delta A'B'C'$ (L-A-L).

DESAFÍO P3.15

iii) Si tienen sus tres lados proporcionales (L-L-L).

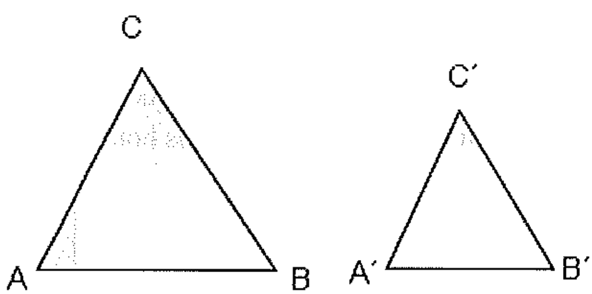


FIGURA 1-99

Si $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'} \Rightarrow \Delta ABC \approx \Delta A'B'C'$

DESAFÍO P3.16.1, P3.16.2

AYUDA 2

En la figura, AB || CD. Establece la proporcionalidad entre los lados homólogos en los dos triángulos de la figura, y halla el valor de x.

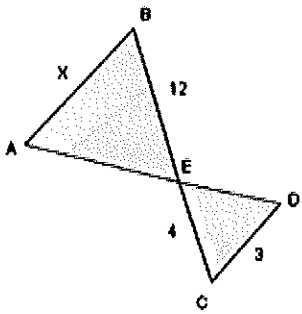


FIGURA 1-100

Solución

$$\left.\begin{array}{l}\angle A = \angle D \\ \angle B = \angle C\end{array}\right\} \text{(alterno internos entre paralelas)}$$

$$\Downarrow$$

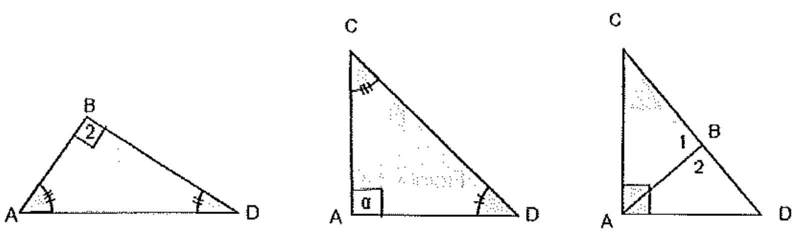
$$\Delta AEB \approx \Delta ECD \text{ (A-A)}$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{CD} = \frac{AE}{ED} = \frac{BE}{EC};$$ Se estableció una proporcionalidad entre sus lados homólogos

$$\frac{X}{3} = \frac{12}{4} \Rightarrow X = \frac{3\times 12}{4} \Rightarrow X = 9$$

AYUDA 3

Si CA ⊥ AD y AB ⊥ CD; demuestra que ΔABD ≈ ΔACD y establece la proporcionalidad entre los lados homólogos.



(a) (b) (c)

FIGURA 1-101

Solución

$\angle 2 = \angle \alpha = 90°$

(definición de perpendicularidad)

$\angle D = \angle D$ (ángulo común)

Entonces $\Delta ABD \approx \Delta ACD$ (A-A)

$\Rightarrow \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{BD}{AD} = \dfrac{AD}{CD}$

AYUDA 4

En la figura $BA \perp CA$, $DE \perp BC$, demuestra que $\dfrac{AB}{ED} = \dfrac{BC}{CD}$

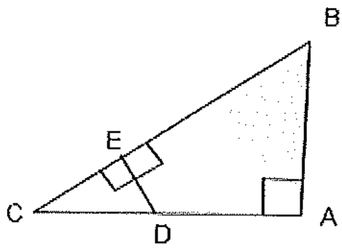


FIGURA 1-102

Solución

$\angle C = \angle C$ (Ángulo común)

$\angle CED = \angle CAB = 90°$ (Definición de perpendicularidad)

$\Rightarrow \Delta CED \approx \Delta CAB$ (A-A) $\Rightarrow$ $\underbrace{\dfrac{CD}{CB} = \dfrac{ED}{AB}} = \dfrac{CE}{AC}$

$\dfrac{AB}{ED} = \dfrac{BC}{CD}$

1.15.1.13 TEOREMA DE TALES

HERRAMIENTAS

TEOREMA 7 (de Tales)

Si varias paralelas cortan a dos transversales, determinan en ellas segmentos correspondientes proporcionales.

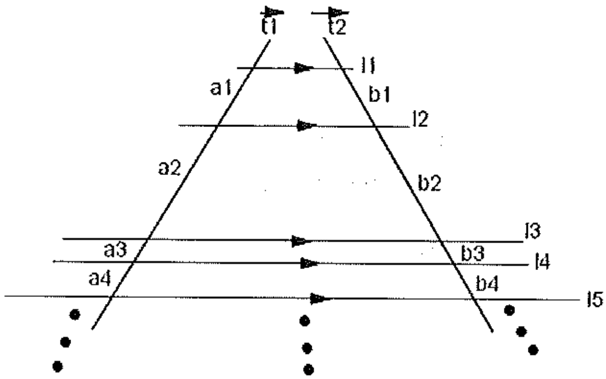


FIGURA 1-103

$$\Rightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \frac{a_4}{b_4} = \ldots$$

APLICACIONES AL TEOREMA DE TALES

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \frac{a_4}{b_4} = \frac{a_5}{b_5} = \frac{a_6}{b_6}$$

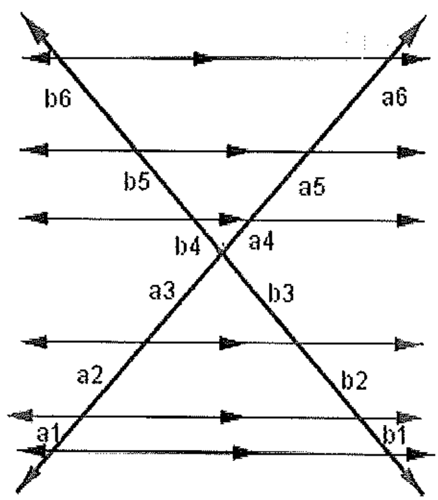


FIGURA 1-104

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$$

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_1 + a_2}{b_1 + b_2}$$

$$\frac{a_2}{b_2} = \frac{a_2 + a_1}{b_2 + b_1}$$

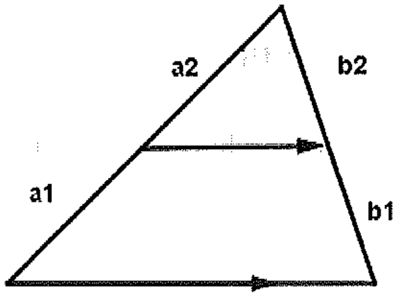


FIGURA 1-105

DESAFÍO P3.17

1.15.1.14 TEOREMA DE PITÁGORAS

TEOREMA 8

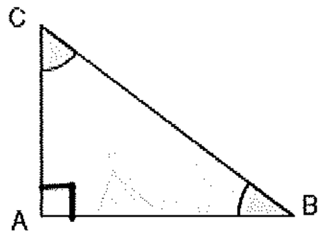


FIGURA 1-106

HERRAMIENTAS

Hipotenusa: En un triángulo rectángulo la hipotenusa corresponde al lado opuesto del ángulo recto o al lado de mayor longitud del triángulo rectángulo.

Catetos: En un triángulo rectángulo los catetos corresponden a los lados que conforman el ángulo recto.

TEOREMA

En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

Hipótesis: ΔABC rectángulo, $\angle$ A recto.

Tesis: $\overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2$. Demuéstralo.

AYUDA 5

Halla los valores pedidos, justificando todos los pasos:

1.

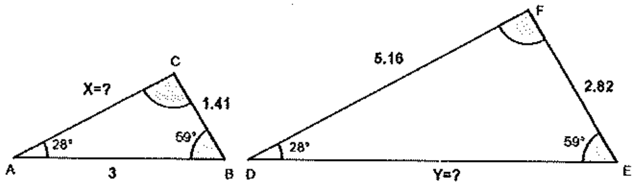


FIGURA 1-107

2.

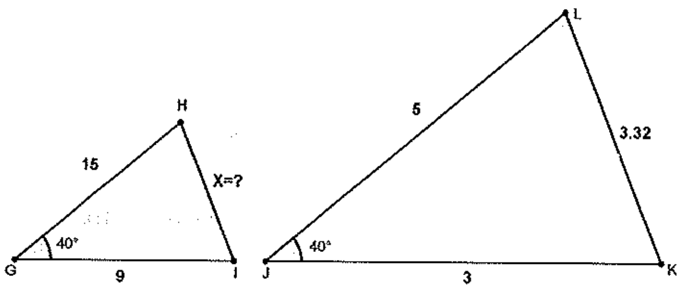


FIGURA 1-108

3.

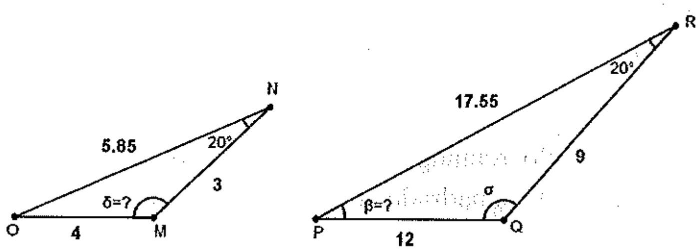
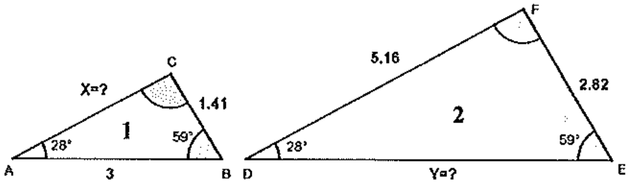


FIGURA 1-109

Solución

1.



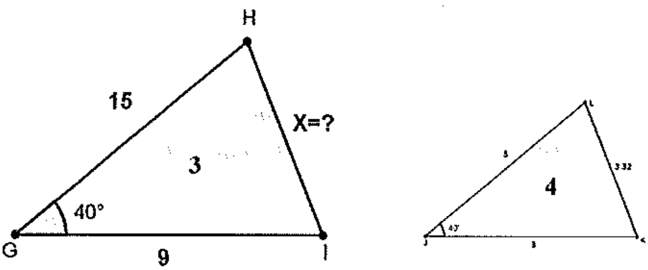
$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}=\hat{D}=28^{\circ}\\ \hat{B}=\hat{E}=59^{\circ}\end{array}\right\}\Rightarrow \Delta 1\approx\Delta 2 \quad (A-A)$$

$\Rightarrow \dfrac{x}{5.16}=\dfrac{1.41}{2.82}=\dfrac{3}{y}$ Estableciendo proporcionalidad entre sus lados homólogos.

$$\Rightarrow \frac{x}{5.16}=\frac{1.41}{2.82} \quad\Rightarrow\quad x=\frac{1.41\times 5.16}{2.82} \quad\Rightarrow\quad x=2.58$$

$$\frac{1.41}{2.82}=\frac{3}{y} \quad\Rightarrow\quad y=2.82\times 3/1.41 \quad\Rightarrow\quad y=6$$

2.

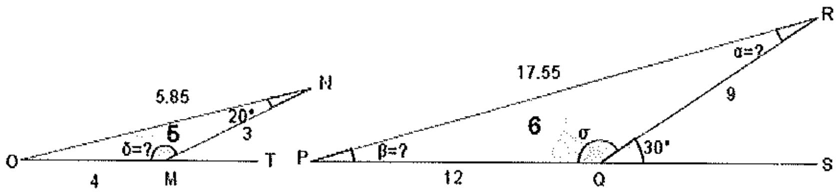


$\dfrac{15}{5}=\dfrac{9}{3}$ porque $\dfrac{3}{1}=\dfrac{3}{1}$ (están en una misma razón de 3 a 1)

$\hat{G}=\hat{J}=40^{\circ}\Rightarrow \Delta 3\approx\Delta 4$ (L-A-L)

$$\left.\Rightarrow \underbrace{\frac{15}{5}=\frac{x}{3.32}}=\frac{9}{3}\right\} \quad\Rightarrow \frac{\overset{3}{15}}{\underset{1}{5}}\times 3.32=x \quad\Rightarrow\quad x=9.96$$

3.



$\sigma + 30° = 180°$ (Suplementarios); $\sigma = 180° - 30°$; $\sigma = 150°$

$$\frac{\overbrace{3}^{1}}{\underbrace{9}} = \frac{\overbrace{4}^{1}}{\underbrace{12}} = \frac{\overbrace{5.85}^{1}}{\underbrace{17.55}} \quad \Rightarrow \Delta 5 \approx \Delta 6 \quad \text{(L-L-L)}$$

Obsérvese que se colocaron arriba los lados del triángulo 5 organizados en forma creciente; por lo tanto, abajo se colocaron los lados del triángulo 6 también en orden creciente; y al simplificar quedan en una misma razón de 1 a 3. También se pudieron haber organizado en orden creciente de valores, por lo tanto:

$\alpha = 20°$ *y* $\sigma = \delta = 150°$

en $\Delta 6 \rightarrow \underbrace{\beta}_{\downarrow} + \underbrace{\alpha}_{\downarrow} + \underbrace{\sigma}_{\downarrow} = 180°$ (*suma de ángulos interiores en un triángulo*)

$\beta + 20° + 150° = 180°$ (*Sustitución*)

$\Rightarrow \beta = 180° - 20° - 150°$; *por lo tanto* $\beta = 10°$

AYUDA 6

Halla la altura (h) de un triángulo equilátero, sabiendo que el lado (L) vale 12 cm.

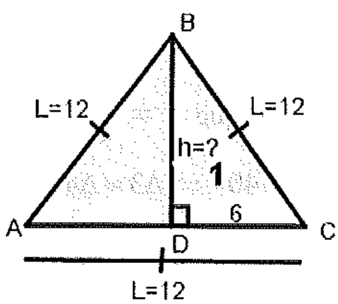


FIGURA 1-110

Solución

Como es triángulo equilátero sus tres lados miden lo mismo. Si el triángulo es equilátero, es isósceles; por lo tanto la altura llega a la mitad del lado opuesto: $\Rightarrow\ \overline{DC} = 6.$

Pitágoras en $\Delta\mathrm{I} \to 12^2 = 6^2 + h^2 \Rightarrow 144 = 36 + h^2$

$144 - 36 = h^2 \Rightarrow 108 = h^2 \Rightarrow \sqrt{108} = h$

$\sqrt{2^2 \times 3^2 \times 3} = h$

$2 \times 3\sqrt{3} = h$

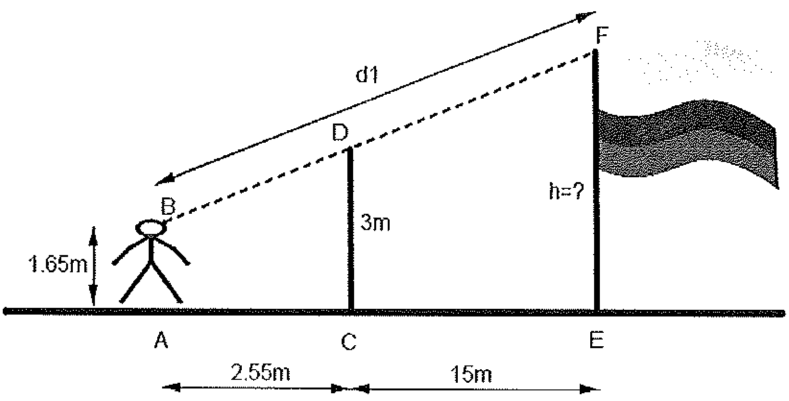
$6\sqrt{3}\ cm = h$

$$\left.\begin{array}{r|l} 108 & 2 \\ 54 & 2 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}\right\} 108 = 2^2 \times 3^2 \times 3$$

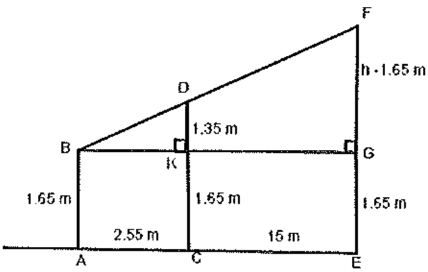
AYUDA 7

Para hallar la altura de un asta de bandera, un muchacho, cuyos ojos se encuentran a 1.65 metros del suelo, coloca una vara de 3 metros de largo clavada en el piso a 15 metros de distancia del asta. Entonces retrocediendo 2.55 metros encuentra que donde va la punta del asta está alineada con la punta de la vara. ¿Cuál es la altura del asta?

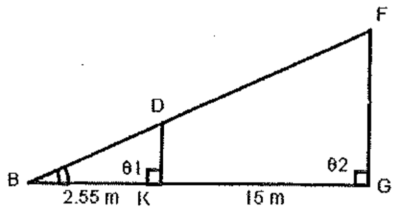
Solución



(a)



(b)



(c)

FIGURA 1-111

$\theta_1 = \theta_2 = 90$ (Perpendicularidad)

$\hat{\beta} = \hat{\beta}$ (Ángulo común)

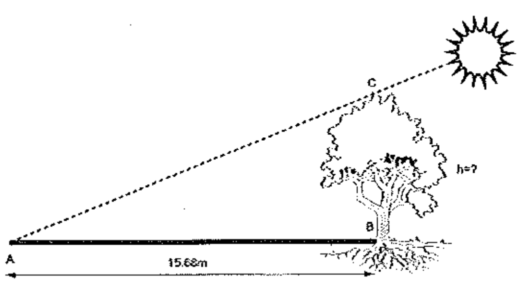
$$\Rightarrow \Delta 1 \approx \Delta 2 \text{ (A-A)} \Rightarrow \frac{\overline{BG}}{\overline{BK}} = \frac{\overline{FG}}{\overline{DK}} \Rightarrow \frac{15+2.55}{2.55} = \frac{h-1.65}{1.35} \Rightarrow$$

$$\frac{17.55 \times 1.35}{2.55} + 1.65 = h \Rightarrow 10.94\,m = h$$

AYUDA 8

Un muchacho observa que la sombra de un árbol tiene 15.68 metros de largo cuando su sombra es de 1.95 metros. Si la altura del muchacho es de 1.73 metros, ¿cuál es la altura del árbol? (Nota: supóngase que los rayos del sol son paralelos).

Solución



(a)

$\hat{B} = \hat{E} =$ 90º (tanto el árbol como el muchacho se superponen derechos *(forman ∠ recto)*

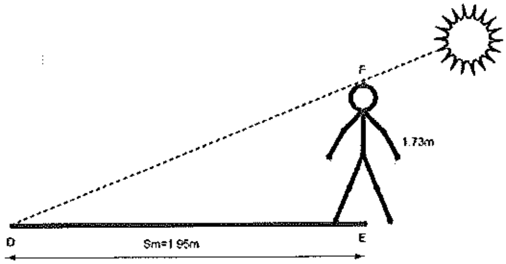
$\hat{A} = \hat{D}$ (ángulo entre dos paralelas).

$$\Rightarrow \Delta 1 \approx \Delta 2 \quad \text{(A-A)} \Longrightarrow$$

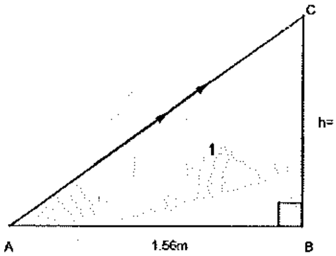
$$\frac{h}{1.73} = \frac{15.6}{1.95}$$

$$\Rightarrow h = \frac{15.6 \times 1.73}{1.95} \Rightarrow$$

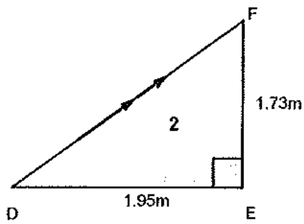
$$h = 13.84 \ m$$



(b)



(c)

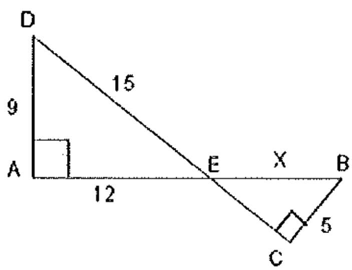


(d)

FIGURA 1-112

AYUDA 9

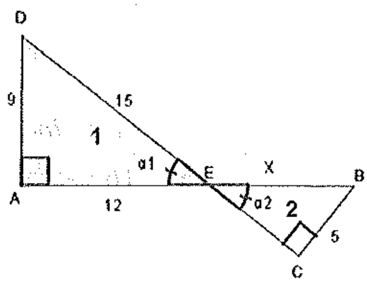
Halla el valor de x



(a)

FIGURA 1-113

Solución



(b)

$\hat{A} = \hat{C} = 90°$ (por perpendicularidad)

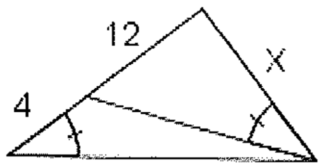
$\hat{\alpha}_1 = \hat{\alpha}_2$ (opuestos por el vértice)

$\Rightarrow \Delta 1 \approx \Delta 2$ (A-A)

$$\Rightarrow \frac{x}{} = \frac{5}{9} \Rightarrow x = \frac{15 \times 5}{9} \Rightarrow x = \frac{25}{3}$$

AYUDA 10

Halla el valor de x



(a)

$\Delta DAC = \Delta 1$
$\Delta BAC = \Delta 2$

Solución

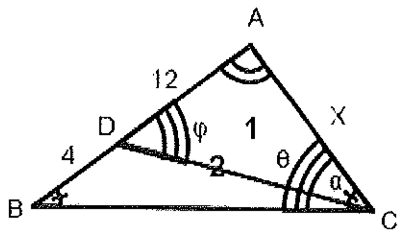
$\hat{\alpha} = \hat{B}$ (dado)

$\hat{A} = \hat{A}$ $(\angle\ \textit{común}) \Rightarrow \Delta 1 \approx \Delta 2$ (A-A)

$\Rightarrow \dfrac{12}{x} = \dfrac{x}{16} \Rightarrow 12 \times 16 = x^2 \Rightarrow$

$x = \sqrt{12 \times 16}$

por lo tanto: $x = 8\sqrt{3}$



(b)

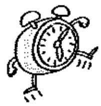
FIGURA 1-114

Obsérvese que si dos ángulos son respectivamente iguales en dos triángulos, los terceros ángulos son iguales y $\hat{\theta} = \hat{\varphi}$.

Cuando decimos $\dfrac{12}{x} = \dfrac{x}{16} \begin{matrix} \leftarrow \textit{lados del } \Delta 1 \\ \leftarrow \textit{lados del } \Delta 2 \end{matrix}$

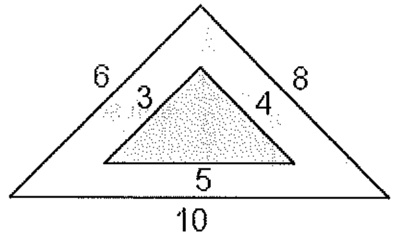
y $\left. \begin{matrix} 12 \rightarrow \textit{va de } \hat{A} \textit{ a } \hat{\varphi} \\ x \rightarrow \textit{va de } \hat{A} \textit{ a } \hat{\theta} \end{matrix} \right\}$ y $\hat{A} = \hat{A}$; $\hat{\varphi} = \hat{\theta}$

y $\left. \begin{matrix} x \rightarrow \textit{va de } \hat{A} \textit{ a } \hat{\alpha} \\ 16 \rightarrow \textit{va de } \hat{A} \textit{ a } \hat{B} \end{matrix} \right\}$ y $\hat{A} = \hat{A}$; $\hat{\alpha} = \hat{B}$

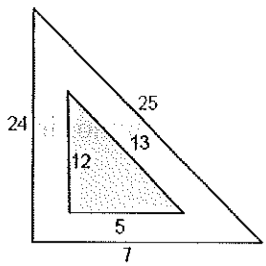


AYUDA 11

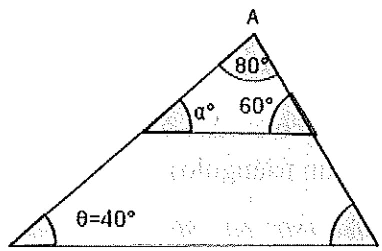
En las siguientes figuras se presentan 7 pares de triángulos. En cada caso, indica si los triángulos son semejantes. Si lo son, nombra el criterio en que esto se base.



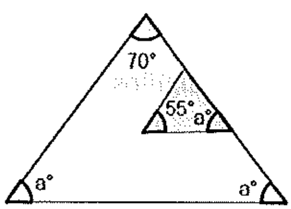
(a)



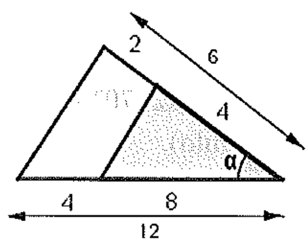
(b)



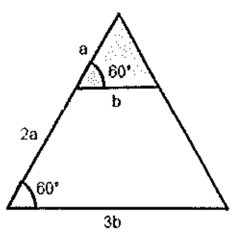
(c)



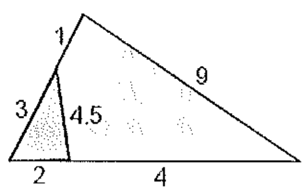
(d)



(e)



(f)



(g)

Figura 1-115

Solución

(a) $\dfrac{\overbrace{10}^{2}}{\underbrace{5}_{1}} = \dfrac{\overbrace{8}^{2}}{\underbrace{4}_{1}} = \dfrac{\overbrace{6}^{2}}{\underbrace{3}_{1}}$ son semejantes por (L-L-L)

Obsérvese que en el numerador se pone la medida de los lados de un triángulo y en el denominador la medida de los lados del otro triángulo, pero en orden decreciente de valores.

(b) $\dfrac{25}{13} \neq \dfrac{\overbrace{24}^{2}}{\underbrace{12}} \neq \dfrac{7}{5} \Rightarrow$ no son semejantes.

(c) Gráfico en $\Delta 1$: $\hat{a} + 60° + 80° = 180°$ (suma de ángulos interiores en un triángulo).

$$\hat{\alpha} = 180 - 60 - 80$$
$$\hat{\alpha} = 40°$$
$$\left.\begin{array}{l}\hat{\alpha} = \hat{\theta} = 40° \\ \hat{A} = \hat{A} = 80° \ (\angle \ común)\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta 1 \approx \Delta 2 \ (A - A)$$

(d) Gráfico en $\Delta 2$: $70° + 2a° = 180°$ (suma de ángulos interiores en un triángulo).

$$\Rightarrow a° = \frac{180° - 70°}{2}$$
$$\Rightarrow a° = 55° \Rightarrow \Delta 1 \approx \Delta 2 \quad (A - A)$$

(e) Gráfico $\left.\begin{array}{l}\dfrac{4}{6} = \dfrac{8}{12} \\ \hat{\alpha} = \hat{\alpha} \ (\angle \ común)\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c}\Delta 1 \approx \Delta 2 \\ (L - A - L)\end{array}$

(f) Gráfico $\left.\begin{array}{l}\dfrac{a}{3a} = \dfrac{b}{3b} \\ \hat{\beta} = \hat{\beta} = 60° \ (\angle \ común)\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta 1 \approx \Delta 2 \ (L - A - L)$

(g) $\frac{9}{4.5} = \frac{6}{3} = \frac{4}{2} \Rightarrow$ hay semejanza por L – L – L.

AYUDA 12

En la figura $\angle B \cong \angle D$ y $CD = 4AB$, demuestra que $BD = 5BL$.

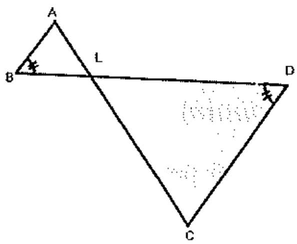


FIGURA 1-116

Solución

Gráficos

$\hat{\alpha}_1 = \hat{\alpha}_2$ (opuestos por el vértice)

$\hat{B} = \hat{D}$ (dado)

$\Rightarrow \Delta 1 \approx \Delta 2$ (A-A)

$\frac{x}{4x} = \frac{y}{\overline{DL}} \Rightarrow \overline{DL} = 4y$

$\overline{BD} = \overline{BL} + \overline{LD}$

$\overline{BD} = y + 4y$

$\overline{BD} = 5y$

AYUDA 13

Encuentra el valor de x.

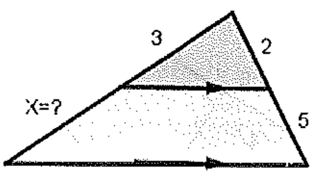


FIGURA 1-117

Solución

$\frac{3}{2} = \frac{x}{5}$ (Teorema de Tales)

$\frac{3 \times 5}{2} = x \Rightarrow \frac{15}{2} = x$

AYUDA 14

Dada la figura 1-118, halla el valor de x.

Solución

$\hat{A} = \hat{A}$ ángulo común

$\hat{\alpha}_1 = \hat{\alpha}_2$ ángulos correspondientes entre paralelas

$\Delta 1 \approx \Delta 2 \ (A - A) \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{4}{1} \Rightarrow x = 8$

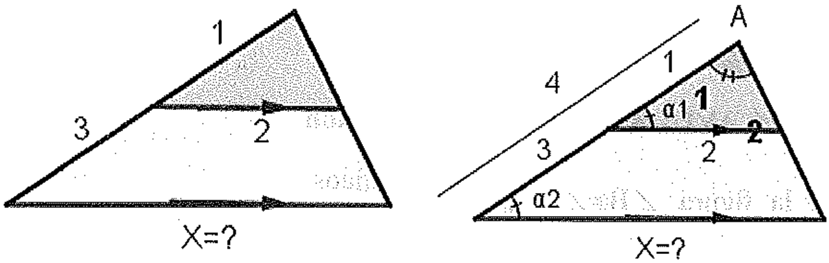
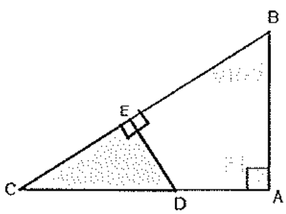


Figura 1.118

AYUDA 15

En la figura BA ⊥ CA, DE ⊥ BC, demuestra que $\frac{AB}{ED}=\frac{BC}{CD}$



(a)

Figura 1-119

$\hat{C}=\hat{C}$ ($\angle$ *común*)

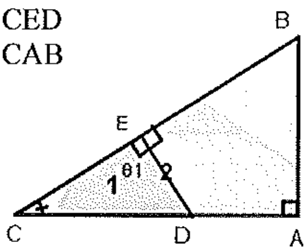
$\hat{\theta}_1=\hat{A}=90°$ por perpendicularidad

$\Delta 1 \approx \Delta 2$ (A - A)

Lados del $\Delta 1 \rightarrow \frac{CE}{CA}=\frac{ED}{AB}=\frac{CD}{CB}$

Lados del $\Delta 2 \rightarrow \frac{CB}{CD}=\frac{AB}{ED}$

$\Delta 1$ = CED
$\Delta 2$ = CAB



(b)

AYUDA 16

En la figura dada, ¿será posible que MN ǁ KL?

Solución

$\frac{16}{24}=\frac{20}{30}$ Se cumple el Teorema de Tales, por lo tanto, por reciprocidad $\overline{MN} \parallel \overline{KL}$.

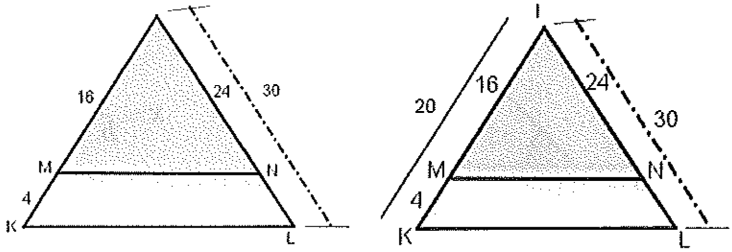


FIGURA 1.120

AYUDA 17

Determina todos los valores de x para los cuales será DE // AB.

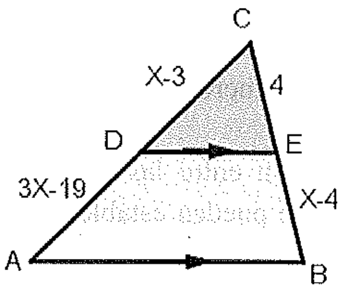


FIGURA 1.121

Solución

Como $\overline{DE} // \overline{AB} \Rightarrow \dfrac{x-3}{4} = \dfrac{3x-19}{x-4}$

(Teorema de Tales)

$(x-4)(x-3) = 4(3x-19)$

$x^2 - 7x + 12 = 12x - 76 \;\Rightarrow\; x^2 - 7x - 12x + 12 + 76 = 0$

$x^2 - 19x + 88 = 0 \;\Rightarrow\; (x-11)(x-8) = 0$

$x = 11 \vee x = 8$

AYUDA 18

Expresa x en términos de *a*, *b* y *c*.

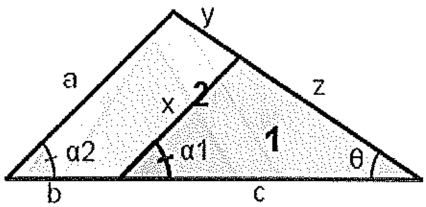
Solución

$\hat{\alpha}_1 = \hat{\alpha}_2$ (Dado)

$\hat{\theta} = \hat{\theta}$ (Ángulo común)

$\Delta 1 \approx \Delta 2$ (A – A)

lados del $\Delta 1 \rightarrow$
lados del $\Delta 2 \rightarrow$ $\dfrac{x}{a} = \dfrac{c}{b+c}$



$$x = \frac{ac}{b+c}$$

FIGURA 1-22

1.15.1.15 Resolución de triángulos

Razones trigonométricas

HERRAMIENTAS

Desde la geometría, la razón tiene que ver con la operación de la división, en este sentido, se trataría del número de veces que un número contiene a otro.

Una razón trigonométrica es una razón entre las longitudes de dos lados de un triángulo rectángulo, se pueden establecer seis razones:

Los griegos, que nos legaron la Trigonometría, nos proporcionaron también los nombres con que designamos los lados del triángulo rectángulo: la hipotenusa (HYPOTÉINUSA, participio del verbo HYPOTÉINO, 'sujetar fuertemente', 'tensar', a su vez formado por la preposición HYPÓ y el verbo TÉINO, 'tender', 'estirar') y los catetos (KÁTHETOS, 'perpendicular', del verbo KATHÍEMAI 'dejar caer', derivado de ÍEMAI, 'echar', 'lanzar'). El cambio en la acentuación es debido a que ambas palabras nos han llegado a través del latín.

Hipotenusa: es la recta que une el punto trigonométrico y el origen de las coordenadas. Es el lado que se opone al ángulo recto en un triángulo rectángulo.

Cateto opuesto: segmento de recta perpendicular que une el punto trigonométrico y el eje de las x.

Cateto adyacente: segmento de recta perpendicular que une el cateto opuesto y el origen de coordenadas.

Dada una circunferencia de radio r = 1 (circunferencia unitaria), si tomamos un arco AP, donde A es un punto del semieje positivo de las x y P(x, y), el punto del extremo, se definen las razones trigonométricas del ángulo en la forma:

Como $r = 1$, $\text{Sen}\alpha = \dfrac{y}{r} = \dfrac{y}{1}$, entonces $\text{sen}\alpha = y$
Además $\text{Cos}\alpha = \dfrac{x}{r} = \dfrac{x}{1} = x$, entonces $\text{Cos}\alpha = x$

- **Seno:** $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{ordenada}{radio} = \dfrac{y}{r}$
- **Coseno:** $\cos\alpha = \dfrac{abscisa}{radio} = \dfrac{x}{r}$
- **Tangente:** $\tan\alpha = \dfrac{ordenada}{abscisa} = \dfrac{seno}{\cos eno} = \dfrac{y}{x}$; $x \neq 0$
- **Cotangente:** $\cot\alpha = \dfrac{abscisa}{ordenada} = \dfrac{\cos eno}{seno} = \dfrac{x}{y}$; $y \neq 0$
- **Secante:** $\sec\alpha = \dfrac{radio}{abscisa} = \dfrac{1}{\cos eno} = \dfrac{r}{x}$; $x \neq 0$
- **Cosecante:** $\csc\alpha = \dfrac{radio}{ordenada} = \dfrac{1}{y} = \dfrac{r}{y}$; $y \neq 0$

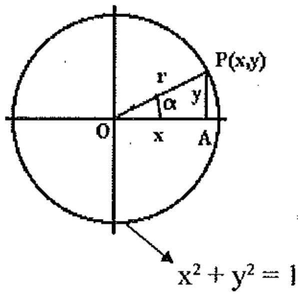


FIGURA 1-123

NOTA: Como en el círculo unitario a cada ángulo le corresponde uno y solo un punto trigonométrico, se dice también que estas razones son funciones trigonométricas.

De igual forma, si calculamos las razones trigonométricas entre los lados de un triángulo rectángulo, pero exterior a la circunferencia, concluimos que:

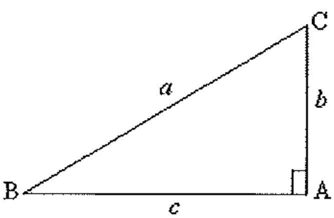


FIGURA 1-124

$\triangle ABC$, rectángulo en A
$\angle B$ y $\angle C$: ángulos agudos
a: hipotenusa
b: cateto, opuesto al $\angle B$ y adyacente al $\angle C$
c: cateto, opuesto al $\angle C$ y adyacente al $\angle B$

$$Sen\ B = \frac{Cateto\ opuesto}{Hipotenusa} = \frac{b}{a} \qquad Sen\ C = \frac{Cateto\ opuesto}{Hipotenusa} = \frac{c}{a}$$

$$Cos\ B = \frac{Cateto\ adyacente}{Hipotenusa} = \frac{c}{a} \qquad Cos\ C = \frac{Cateto\ adyacente}{Hipotenusa} = \frac{b}{a}$$

$$Tan\ B = \frac{Cateto\ opuesto}{Cateto\ adyacente} = \frac{b}{c} \qquad Tan\ C = \frac{Cateto\ opuesto}{Cateto\ adyacente} = \frac{c}{b}$$

$$Cot\ B = \frac{Cateto\ adyacente}{Cateto\ opuesto} = \frac{c}{b} \qquad Cot\ C = \frac{Cateto\ adyacente}{Cateto\ opuesto} = \frac{b}{c}$$

$$Sec\,B = \frac{Hipotenusa}{Cateto\ adyacente} = \frac{a}{c} \qquad Sec\,C = \frac{Hipotenusa}{Cateto\ adyacente} = \frac{a}{b}$$

$$Csc\,B = \frac{Hipotenusa}{Cateto\ opuesto} = \frac{a}{b} \qquad Csc\,C = \frac{Hipotenusa}{Cateto\ opuesto} = \frac{a}{c}$$

AYUDA 1

Si α es un ángulo agudo y $cos\alpha = \frac{3}{4}$, encuentra los valores de todas los funciones trigonométricas de α.

Solución

Pitágoras $\rightarrow 4^2 = 3^2 + C_2{}^2 \rightarrow C_2 = \sqrt{16-9} = \sqrt{7}$

$$\cos\alpha = \frac{C.A.}{h} = \frac{3}{4} \rightarrow sen\alpha = \frac{\sqrt{7}}{4};$$

$$\cot\alpha = \frac{3}{\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{7}}{7}; \quad \sec\alpha = \frac{4}{3};$$

$$\tan\alpha = \frac{\sqrt{7}}{3}; \quad \csc\alpha = \frac{4}{\sqrt{7}} = \frac{4\sqrt{7}}{7}$$

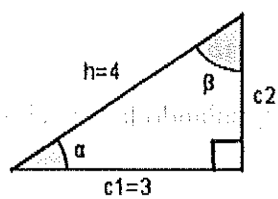


FIGURA 1-125

Teorema del seno y teorema del coseno

Un triángulo oblicuángulo es aquel que no contiene un ángulo recto. Teniendo ciertos datos de un triángulo, se pueden hallar los otros datos faltantes por medio de las leyes de seno y coseno.

Teorema del seno

En todo triángulo se cumple que las longitudes de los lados son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos.

Hipótesis: Sea ABC un triángulo oblicuángulo:

Tesis: $\frac{a}{Sen\ a} = \frac{b}{Sen\ B} = \frac{c}{Sen\ C}$

DEMOSTRACIÓN

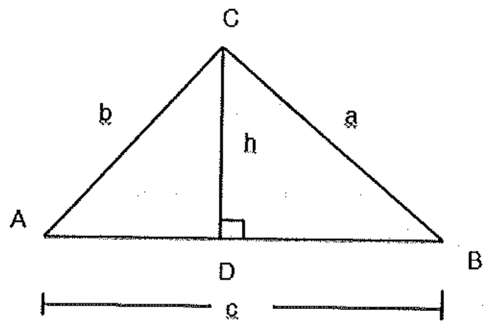


FIGURA 1-126

$senA = senA = \frac{h}{b} \therefore h = b.senA$ (1)

$senB = \frac{h}{a} \therefore h = a.senB$ (2)

Igualando la ecuación uno con la dos se obtiene:

$$\frac{a}{Sen\ a} = \frac{b}{Sen\ B} \quad (3)$$

Si se traza la altura desde el vértice C, se obtiene la altura $\overline{BE}$, de donde se obtiene que:

$$\frac{b}{Sen\ B} = \frac{c}{Sen\ C} \quad (4)$$

Igualando la ecuación número tres y cuatro se obtiene que:

$$\frac{a}{Sen\ a} = \frac{b}{Sen\ B} = \frac{c}{Sen\ C}$$

La ley de los senos se aplica cuando los datos que se conocen son:

1. Dos ángulos y un lado (A-L-A)

   Se halla la medida de tercer ángulo aplicando el teorema de la suma de los ángulos internos de un triángulo y los datos que faltan aplicando la ley de los senos.

2. Dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos (L-L-A).

   Se utiliza la ley de senos para encontrar uno de los dos ángulos que faltan y determinar si tiene una, dos o ninguna solución.

DESAFÍOS: P3.18, P3.19, P3.20, P3.21

Ángulo de elevación y ángulo de depresión

Se debe tener en cuenta que cuando se habla de un ángulo de elevación, se refiere a la abertura que se forma entre la línea imaginaria horizontal y la línea visual y en el sentido contrario a la rotación de las manecillas del reloj; mientras que el ángulo de depresión es un ángulo con respecto a la horizontal y en el mismo sentido de rotación de las manecillas del reloj.

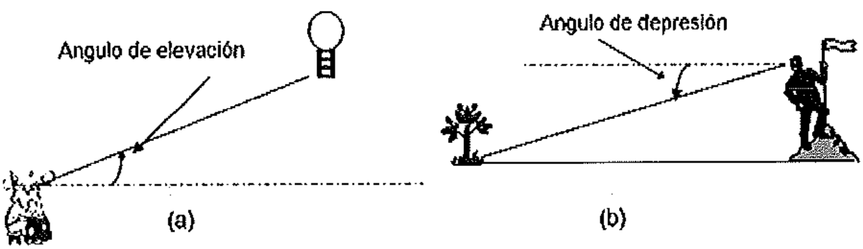
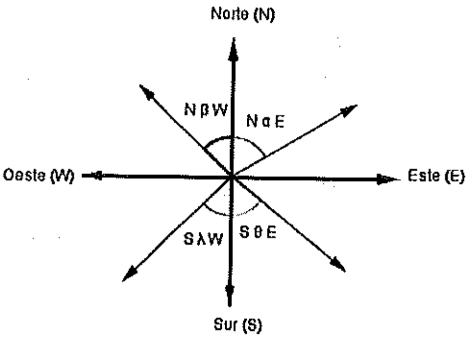


FIGURA 1-127

En la navegación se utiliza muchas veces las direcciones con respecto al Norte o con respecto al Sur.



Se leen:

N β°W: Norte β grados Oeste

N α°E: Norte α grados Este

S θ°E: Sur θ grados Este

S λ° W: Sur λ° grados Oeste

Figura 1-128

AYUDA 2

Resuelve el triángulo ABC con $\angle A = 75°$, $\angle B = 33°$, $b = 10.3\ cm.$

Solución

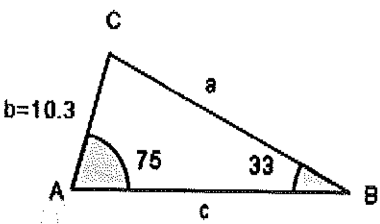


Figura 1-129

$$\angle C = 180° - 33° - 75° = 72°$$

$$\frac{a}{senA} = \frac{b}{senB} = \frac{c}{senC}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{a}{\text{sen } 75°} = \frac{10.3}{\text{sen } 33°} = \frac{c}{\text{sen } 72°}}$$

$$a = \frac{10.3 \text{ sen } 75°}{\text{sen } 33°}; \quad c = \frac{10.3 \text{ sen } 72°}{\text{sen } 33°}$$

$$a = 18{,}3 ; \ c = 18$$

AYUDA 3

Resuelve el triángulo ABC con $\angle A = 20°$, $a = 14$ *cm* y $b = 18$ *cm.*

Solución

Se ve claramente que hay dos posibilidades.

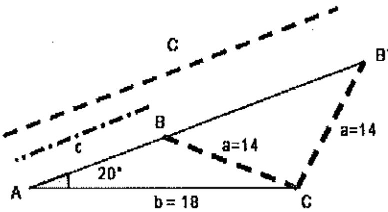


FIGURA 1-130

$$\frac{senB}{b} = \frac{sen20°}{a} \Rightarrow \frac{senB}{18} = \frac{sen20°}{14} \Rightarrow$$

$$senB = \frac{18sen20°}{14} = 0.44$$

$$\angle B = sen^{-1}(0.44) \Rightarrow \angle B = 26° \ y \ 154°$$

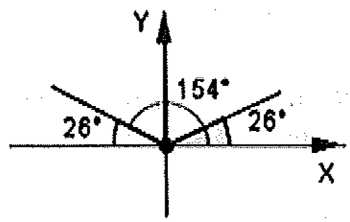


FIGURA 1-131

$$\angle C = 180°-20°-26° = 134° = \angle C \Rightarrow 180°-20°-154° = 6° = \angle C$$

$$\frac{C}{\text{sen}\,6°} = \frac{14}{\text{sen}\,20°} \Rightarrow C = \frac{14sen6°}{sen20°} = 4.3$$

$$\frac{c}{\text{sen}\,134°} = \frac{14}{\text{sen}\,20°} \Rightarrow c = \frac{18sen134°}{sen20°} = 29.4$$

AYUDA 4

Resuelve el triángulo ABC, con $c = 7$ *cm,* $a = 4$ *cm* y $b = 5$ *cm.*

Solución

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \Rightarrow$$
$$4^2 = 5^2 + 7^2 - 2\times 5\times 7\times \cos A$$
$$\frac{16-25-49}{-70} = \cos A \Rightarrow$$
$$0.829 = \cos A \Rightarrow \angle A = 34^\circ$$

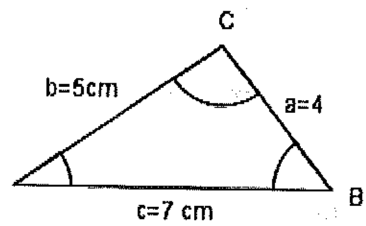


FIGURA 1-132

$$\frac{senB}{b} = \frac{senA}{a} \Rightarrow \frac{senB}{5} = \frac{sen34^\circ}{4} \Leftrightarrow senB = \frac{5sen34^\circ}{4} = 0.7 \Rightarrow \angle B = 44.3^\circ$$

$$\angle C = 180^\circ - 34^\circ - 44.3^\circ = 101.7^\circ = \angle C$$

AYUDA 5

Resuelva el triángulo ABC, si $a = 2\ cm$, y $b = 3{,}7\ cm$ y $\angle C = 100^\circ$.

Solución

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C \Rightarrow$$

$$c = \sqrt{2^2 + 3.7^2 - 223.7\ \cos 100^\circ} = 4{,}50^\circ$$

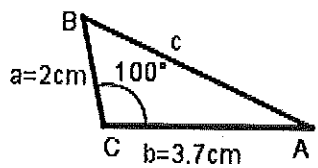


FIGURA 1-133

$$\frac{senB}{b = 3{,}7} = \frac{sen100^\circ}{c = 4{,}50} \Rightarrow senB = \frac{3.7\,sen100^\circ}{4{,}50} \Rightarrow sen\,B = 0{,}8097 \Rightarrow$$

$$\hat{B} = 54{,}06^\circ\ \hat{A} = 180^\circ - \underbrace{54{,}06^\circ}_{B} - \underbrace{100^\circ}_{C} \Rightarrow \hat{A} = 25{,}94^\circ$$

AYUDA 6

Cuando el ángulo de elevación del Sol es de 64°, un poste telefónico que está inclinado un ángulo de 9°, según la figura, hace una sombra de 21 pies de longitud sobre el piso. Determina la longitud del poste.

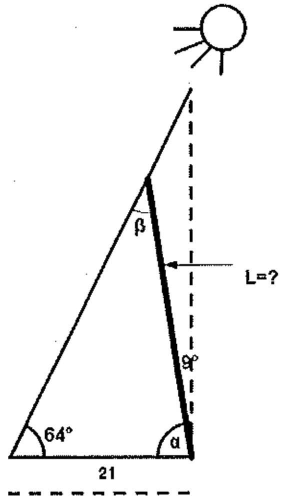


FIGURA 1-134

Solución

$\hat{\alpha} = 90° - 9° = 81; \quad \hat{\beta} = 180° - 64° - 81° = 35°;$

$$\frac{L}{sen64^\circ} = \frac{21}{sen35^\circ}$$

$$\Rightarrow L = \frac{21sen64^\circ}{sen35^\circ} = 32{,}9^\circ \quad \Rightarrow L = 32{,}9 \; pies$$

AYUDA 7

Un punto P, al nivel del piso, se encuentra 3 km al norte de un punto Q. Un corredor se dirige en la dirección $N25°E$ de Q hacia un punto R y de ahí a P en la dirección $S70°W$. Aproxima la distancia recorrida.

Solución

$P + q = ?$

$\hat{\alpha} = 70°$ (correspondientes entre paralelas)

$\hat{\alpha} + \hat{\theta} = 180°$ (suplementarios)

$\hat{\theta} = 180° - \alpha = 180° - 70° = 110°$

$\hat{\theta} = 110°$

$\hat{Q} + \hat{\theta} + \hat{\beta} = 180°$ (suma de ángulos interiores en el triángulo)

$\Rightarrow 25° + 110° + \hat{\beta} = 180° \Rightarrow \hat{\beta} = 45°$

$\dfrac{q}{senQ} = \dfrac{\overline{QP}}{sen\beta} \Rightarrow \dfrac{q}{sen25°} = \dfrac{3}{sen45°} \Rightarrow q = 1{,}79Km$

$\dfrac{p}{sen\theta} = \dfrac{\overline{PQ}}{sen\beta} \Rightarrow \dfrac{p}{sen110°} = \dfrac{3}{sen45°} \Rightarrow p = 3{,}99Km$

$p + q = 3{,}99 + 1{,}79 = 5{,}78\,Km = p + q$

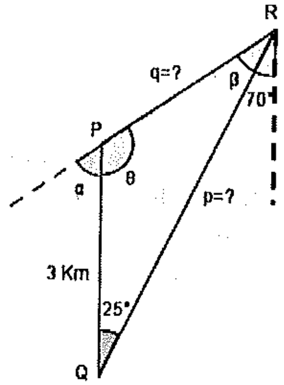


FIGURA 1-135

AYUDA 8

Dada la siguiente figura, halla los valores de las seis funciones trigonométricas del ángulo.

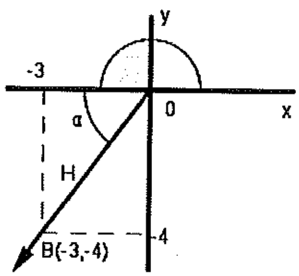


FIGURA 1-136

Solución

$H^2 = (-3)^2 + (-4)^2 = 9 + 16 = 25$

(Teorema de Pitágoras);

$H = \pm\sqrt{25} \Rightarrow H = +5$; $sen\alpha = \dfrac{-4}{5}$

$\cos\alpha = \dfrac{-3}{5}$ $\quad \tan\alpha = \dfrac{4}{3}$ $\quad \cot\alpha = \dfrac{3}{4}$

$\sec\alpha = \dfrac{5}{-3}$

$\csc\alpha = \dfrac{5}{-4}$

AYUDA 9

Resuelve el triángulo ABC, de la figura:

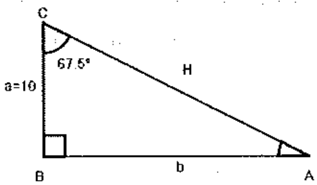


FIGURA 1-137

Solución

$\angle A = 90° - 67.5° = 22.5°$

$$senA = \frac{a}{H} \Rightarrow sen22.5^{\circ} = \frac{10}{H}$$

$$\Rightarrow H = \frac{10}{Sen\ 22{,}5°}$$

$$\Rightarrow H = \frac{10}{0.3826} = 26.13; \quad \cos A = \frac{b}{H} \Rightarrow \cos 22.5^{\circ} = \frac{b}{26{,}13}$$

$$\Rightarrow b = 26{,}13 \times \cos 22{,}5° = 24{,}14$$

AYUDA 10

Desde su torre de observación de 225 pies (1 pie = 30.48 cm.) sobre el suelo, un guardabosques divisa un incendio. Si el ángulo de depresión con que se observa el fuego es de 10°, ¿a qué distancia de la base de la torre está localizado el fuego?

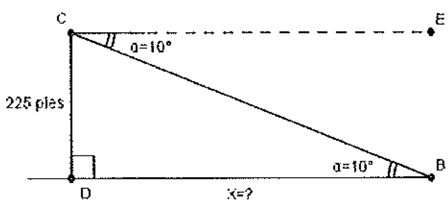


FIGURA 1-138

Solución

Los dos ángulos son iguales por alternos internos entre paralelas:

$$\tan 10^{\circ} = \frac{225}{x} \Rightarrow x = \frac{225}{\tan 10^{\circ}}$$

$$x = \frac{225}{0{,}176} \Rightarrow x = 1276\ pies$$

AYUDA 11

Dos retenes sobre una carretera están separados por 10 km. En uno de los retenes se recibe aviso de un accidente en la dirección $S86°E$ del retén; y en el otro retén se reporta en la dirección Sur.

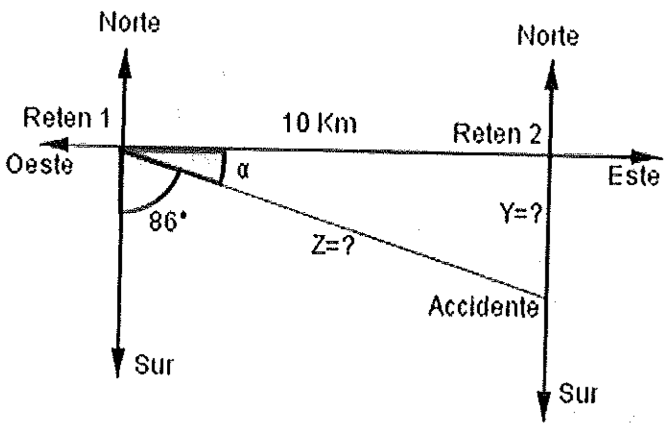


FIGURA 1-139

1. ¿A qué distancia del primer retén se produjo el accidente?
2. ¿A qué distancia del segundo retén se produjo el accidente?

NOTA: Los dos retenes están separados 10 km en la dirección Este.

Solución

$<\alpha = 90° - 86° = 4°$

$$\tan\alpha = \frac{y}{10} \Rightarrow y = 10\tan 4^{\circ} \Rightarrow y = 0.7\ km$$

$$\cos\alpha = \frac{10}{Z} \Rightarrow Z = \frac{10}{\cos 4^{\circ}} \Rightarrow Z = 10\ km$$

1.15.2 Retos

1. Encuentra la medida del tercer ángulo interior de un triángulo, si la medida de los otros dos son:

   a) 67° y 47° b) 22° y 135° c) a° y 2a°

2. Determina el valor de x si los ángulos interiores de un triángulo son x, 2x y 3x.

3. En un triángulo isósceles, el ángulo exterior del vértice mide 70°. ¿Cuánto miden los ángulos interiores de la base?

4. El ángulo CAB de un triángulo ABC cualquiera mide 52°. Si el ángulo ABC es tres veces mayor que el ángulo ACB, ¿cuánto mide el ángulo ACB?

5. En un triángulo rectángulo los ángulos agudos están en la razón de 5:4. ¿Cuánto miden estos ángulos?

6. En un triángulo isósceles, un ángulo basal tiene 18,5° más que el ángulo del vértice. Calcula los ángulos interiores del triángulo.

7. Los ángulos interiores de un triángulo están en la razón 3:4:5. ¿Cuánto miden estos ángulos?

8. En un triángulo ABC cualquiera, el ángulo CAB tiene 15° más que el ángulo CBA y éste 12° más que el ángulo ACB. Determina el valor de los ángulos exteriores de este triángulo.

9. En un triángulo isósceles, la suma de uno de los ángulos exteriores de la base con el ángulo exterior del vértice es 243ª. Calcula la medida del ángulo interior del vértice.

10. En un triángulo, un ángulo mide 47° y el segundo tiene 17° más que el tercero. Calcula la medida de los ángulos interiores del triángulo.

11. El ángulo ABC de un triángulo ABC cualquiera mide 56°. Si los ángulos CAB y ACB están en la razón 3:2, ¿cuál es el valor del ángulo ACB?

12. En un triángulo rectángulo, uno de los ángulos agudos tiene 20° más que el otro. ¿Cuánto miden los ángulos agudos?

13. En un triángulo cualquiera, un ángulo interior tiene 20° más que otro, pero 35° menos que el tercero. ¿Cuánto miden los ángulos interiores de este triángulo?

14. En un triángulo cualquiera, los ángulos exteriores están en razón de 2:3:4. ¿Cuánto miden los ángulos interiores de este triángulo?

15. En un triángulo, uno de los ángulos es el 50% de uno de los otros dos y el 33 1/3 % del tercero. Determina la medida del ángulo menor de este triángulo.

1.15.3 Retos

Resuelve utilizando los teoremas del 1 al 6 y justificando todos los pasos:

1. ¿Si $b = 20$ cm; $c = 10$ cm; $d = ?$
2. Si $\sigma = 70°$; $\theta = ?$;
3. ¿Si f=13 cm; $d = 20$ cm; $a = ?$
4. Si $\angle ACB = 40°$ $\sigma = ?$
5. ¿Si $d = 2c$; $b = ?$
6. Si $\sigma = 20$ $\lambda = ?$
7. ¿Si $\lambda = 2\varphi$ $f = 40$ cm; $d = ?$

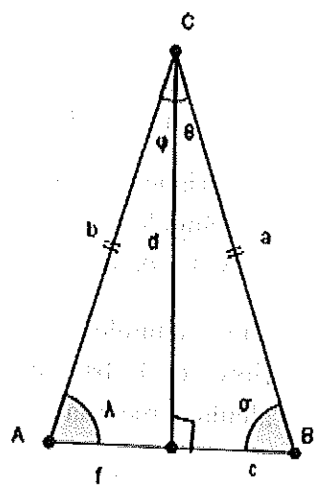


Figura 1-140

1.15.4 Retos

1. El tanque en forma de cono invertido de la figura tiene agua hasta una altura de 10 m. Halla el radio del cono de agua. Observa:

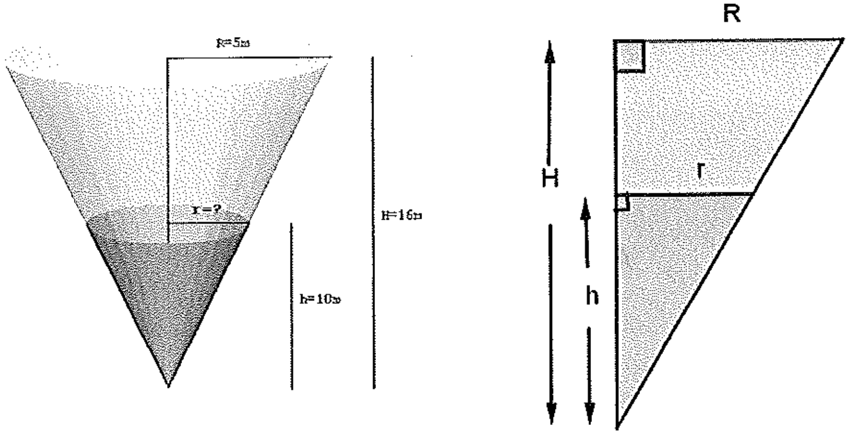


Figura 1-141

2. Halla el valor de x en las dos figuras siguientes, justificando todos los pasos.

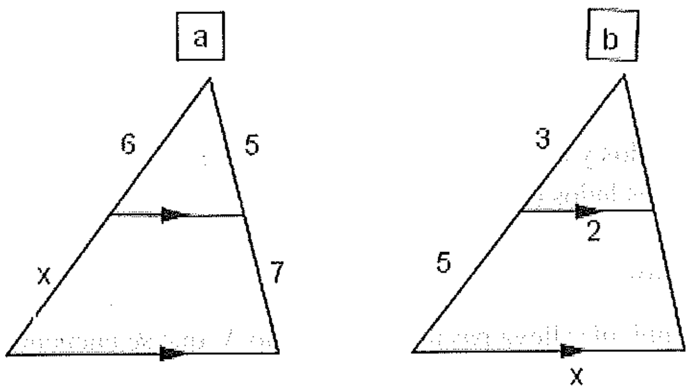


Figura 1-142

3. Halla el valor de f justificando todos los pasos, si d = 3, e = 1, c = 12 y b = 4.

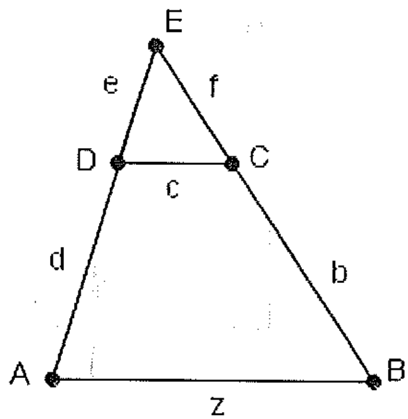


Figura 1-143

1.15.5 Reto

Demuestra la ley de los cosenos, a partir de la utilización del teorema de Pitágoras.

$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C \end{cases}$$

Recuerda que esta ley se aplica cuando los datos conocidos son:

1. Dos lados y el ángulo entre ellos (L-A-L)
2. Los tres lados (L-L-L)

1.15.6 Retos

1. Un funicular lleva pasajeros del punto A, que se encuentra a 1.2 millas del pie de una montaña, al Pico del Mirador, en el punto P, como se muestra en la figura. El ángulo de elevación de P

desde A es de 21°, mientras que el ángulo de elevación desde B, al pie de la montaña, es de 65°.

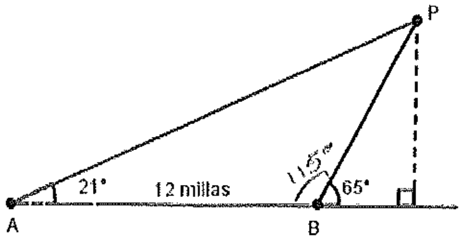


Figura 1-144

a. ¿Qué distancia recorre el funicular entre A y P?

b. ¿Cuál es la altura de P con respecto al nivel de A?

2. Los ángulos de elevación de un globo desde los puntos A y B a nivel del suelo son 24°10' y 47°40', respectivamente. Según la figura, los puntos A y B están a 8.4 millas entre sí y el globo se encuentra entre ambos puntos, en el mismo plano vertical. Calcula la altura del globo sobre el suelo.

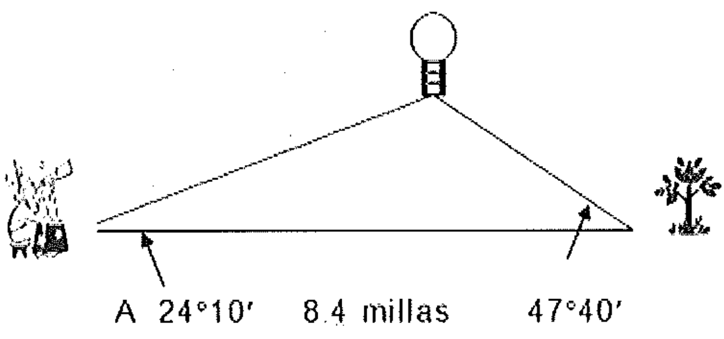


Figura 1-145

3. La caja rectangular de la figura tiene dimensiones 8" x 6" x 4". Calcula el ángulo θ formado por una diagonal de la base y una diagonal del lado de 6" x 4".

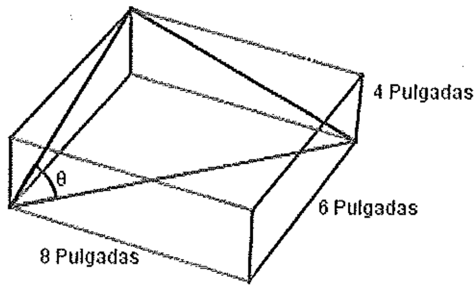


FIGURA 1-146

4. Dos automóviles salen de una ciudad al mismo tiempo y circulan en carreteras rectas que difieren 84° en dirección. Si viajan a 60 y 45 millas/hora respectivamente, ¿a qué distancia aproximada se hallarán al cabo de 20 minutos?

5. Un automovilista viaja en una carretera horizontal a 60 km./h, directamente hacia una montaña distante. Observa que entre la 1:00 p. m. y la 1:10 p. m. el ángulo de elevación a la cima de la montaña cambia de 10 a 70 grados. Calcula la altura aproximada de la cumbre.

6. La altura de una colina es de 990 m sobre el nivel de un plano horizontal. Desde un punto A de dicho plano, la elevación angular a la cima de la colina es de 60°. Un globo se eleva desde el punto A y asciende verticalmente con velocidad uniforme; después de 5 minutos, la elevación angular a la cima, para un observador que está en el globo, es de 30°. Halla la velocidad de ascensión del globo en kilómetros/hora.

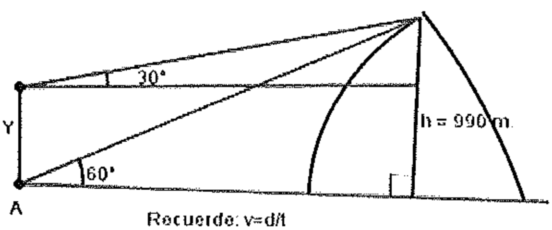


FIGURA 1-147

7. Desde la cúspide de un monumento de 30 m de altura, los ángulos de depresión de dos objetos que están sobre el terreno en la dirección Oeste del monumento, son de 45° y 30°. Halla la distancia que los separa.

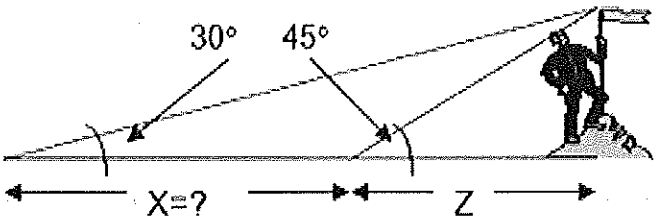


FIGURA 1-148

8. Un carpintero quiere construir un marco simétrico de madera de la forma ilustrada en la figura. ¿Cuál debe ser la longitud exterior de AB?

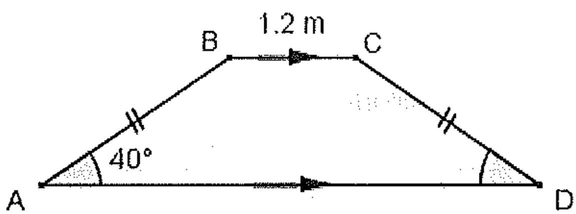


FIGURA 1-149

9. Dos barcos salen de un puerto al mismo tiempo y viajan a la misma velocidad. El primer barco toma dirección Norte; el rumbo del segundo barco es $N50°E$. ¿A qué distancia están los dos barcos uno del otro luego de haber recorrido 18 km cada uno?

1.16 SECCIÓN CUATRO

1.16.1 POLÍGONOS

1.16.1.1 LOGRO

Identificar y clasificar los polígonos, sus partes, y deducir sus propiedades fundamentales.

1.16.1.2 INDICADORES DE LOGRO

- Relaciona y diferencia los elementos que constituyen un polígono.
- Clasifica y relaciona las clases de polígonos.

1.16.1.3 COMPETENCIA

Aplicar las propiedades de los polígonos, sean regulares o irregulares, en la solución de problemas, a partir de relaciones métricas y geométricas.

1.16.1.4 CONOCIMIENTOS PREVIOS

Debes saber: Algunos conceptos básicos, figuras congruentes, tipos de triángulos y ángulos.

1.16.1.5 ESTÁNDARES

Clasificar los polígonos en regulares o irregulares para resolver problemas de aplicación conforme a la figura de análisis dada.

1.16.1.6 RESEÑA HISTÓRICA

Tomado de: http://simetria.dim.uchile.cl/matematico/nodo614.html. 6 de mayo de 2009. Ampliar información.

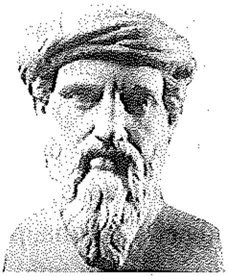


Foto Tomada de: http://www.portalplanetasedna.com.ar/matematico2.htm

Pitágoras (c. 582-c. 500 a. C.), filósofo y matemático griego, nacido en la isla de Samos.

Fue instruido en las enseñanzas de los primeros filósofos jonios por Tales de Mileto, Anaximandro y Anaxímenes. Se dice que Pitágoras había sido condenado al exilio de Samos por su aversión a la tiranía de Polícrates. Hacia el 530 a. C. se instaló en Crotona, una colonia griega al sur de Italia, donde fundó un movimiento con propósitos religiosos, políticos y filosóficos, conocido como pitagorismo. La filosofía de Pitágoras se conoce sólo a través de la obra de sus discípulos.

Los pitagóricos asumieron ciertos misterios, similares en muchos puntos a los enigmas del orfismo. Aconsejaban la obediencia y el silencio, la abstinencia de consumir alimentos, la sencillez en el vestir y en las posesiones, y el hábito del autoanálisis. Los pitagóricos creían en la inmortalidad y en la trasmigración del alma. Se dice que el propio Pitágoras proclamaba que él había sido Euphorbus, y combatido durante la guerra de Troya, y que le había sido permitido traer a su vida terrenal la memoria de todas sus existencias previas.

Entre las amplias investigaciones matemáticas realizadas por los pitagóricos se encuentran sus estudios de los números pares e impares, de los números primos y de los cuadrados, esenciales en la teoría de los números. Desde este punto de vista aritmético, cultivaron el concepto de número, que llegó a ser para ellos el principio crucial de toda proporción, orden y armonía en el universo. A través de estos estudios, establecieron una base científica para las matemáticas. En geometría el gran descubrimiento de la escuela fue el teorema de la hipotenusa, conocido como teorema de Pitágoras, que establece que el cuadrado de la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

Una revuelta provocada en Crotona, por una asociación de ideas contrarias a las pitagóricas, terminó con el incendio de la sede. Se cree que Pitágoras se vio obligado a huir de Crotona y murió en Metaponto. La persecución de los pitagóricos provocó el éxodo a la Grecia Continental, dando lugar a la difusión de las ideas pitagóricas.

La estrella pentagonal o pentágono estrellado era, según la tradición, el símbolo de los seguidores de Pitágoras. Los pitagóricos pensaban que el mundo estaba configurado según un orden numérico, donde sólo tenían cabida los números fraccionarios. La casualidad, sin embargo, hizo que en su propio símbolo se encontrara un número particularmente no fraccionario: el número de oro.

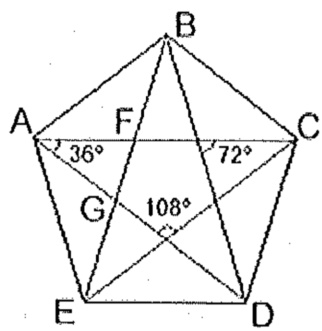


FIGURA 1-150

En efecto, la relación entre la diagonal del pentágono y su lado es el número de oro.

$$\frac{AC}{AB} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi$$

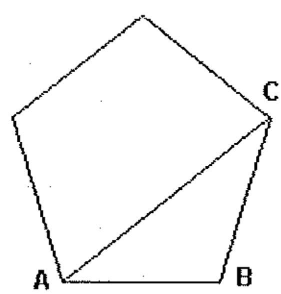


FIGURA 1-151

También se puede comprobar que los segmentos QN, NP y QP están en proporción áurea.

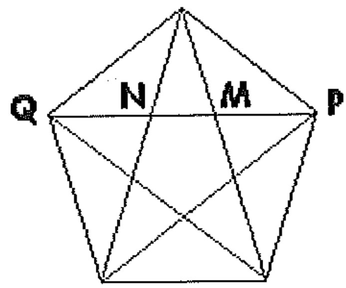


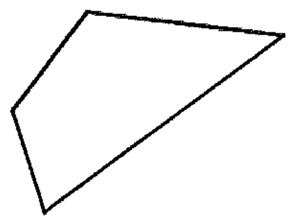
FIGURA 1-152

HERRAMIENTAS

Al dibujar varios segmentos consecutivos obtendremos una línea poligonal. Un **polígono** es la región interior de una línea poligonal cerrada y no cruzada. Sus elementos son: los lados, los vértices y las diagonales. A la línea que lo rodea se la llama *contorno del polígono*. Las figuras pueden dividirse en dos grandes grupos: cóncavas y convexas.

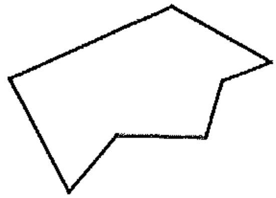
1.16.1.7 CLASIFICACIÓN DE LOS POLÍGONOS DE ACUERDO CON SU FORMA

Polígono convexo: Las medidas de sus ángulos interiores son menores de 180°.



(a)

Polígono cóncavo: La medida de uno o más de sus ángulos interiores es cóncavo.



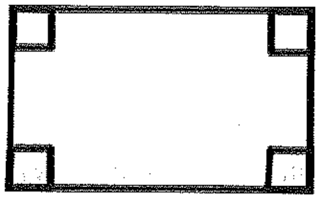
(b)

Polígono equilátero: Sus lados son congruentes.

(c)

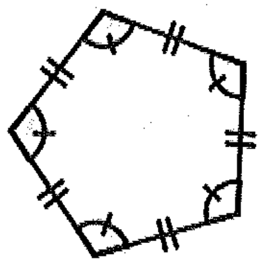
FIGURA 1-153

Polígono equiángulo: Las medidas de sus ángulos interiores son congruentes.



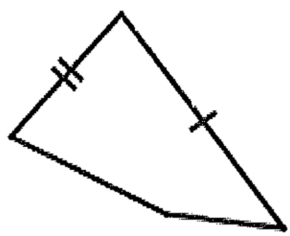
(a)

Polígono regular: Es equilátero y a su vez equiángulo.



(b)

Polígono irregular: Por lo menos dos de sus lados tienen valores diferentes.

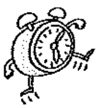


(c)

FIGURA 1-154

1.16.1.8 Clasificación de los polígonos de acuerdo con el número de sus lados

Triángulo (3 lados), cuadrilátero (4 lados), pentágono (5 lados), hexágono (6 lados), heptágono (7 lados), octágono (8 lados), eneágono (9 lados), decágono (10 lados), endecágono (11 lados), dodecágono (12 lados), pentadecágono (15 lados), icoságono (20 lados). En términos generales para los demás polígonos se nombra mencionando el número de lados así: polígono de 13 lados, polígono de 14 lados, polígono de 16 lados, entre otros.



AYUDA 0. Practica en el DVD en el apartado GeoPlana. Polígonos. Tres unidades didácticas de Fernando Arias Fernández-Pérez, Rita Jiménez Igea y Eduardo Barbero Corral (33 escenas interactivas).

1.16.1.9 Aplicaciones en polígonos convexos

Elementos de un polígono convexo

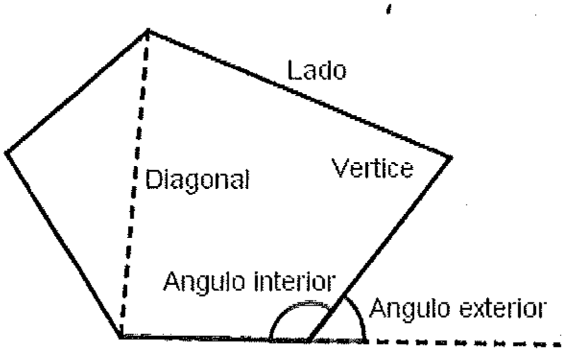


Figura 1-155

i) Sea ABCDEFG un polígono de "n" lados. Se trazan desde A todas las posibles diagonales, formándose (n-2) triángulos. La suma de las medidas de los ángulos interiores de estos (n-2) triángulos es igual a la suma de los ángulos interiores del polígono. De tal forma que la suma de medidas de los ángulos interiores de un polígono convexo de "n" lados es:

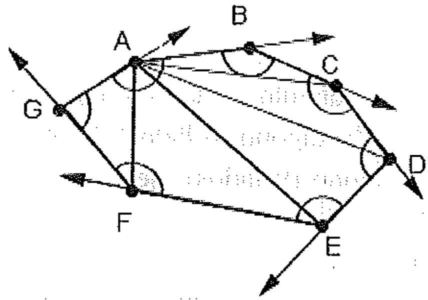


FIGURA 1-156

$$\boxed{S_{\hat{\imath}} = (n-2)\ 180^{\circ}}$$

ii) Se trazan los ángulos exteriores de un polígono convexo, prolongando los lados en un mismo sentido. Sea $S\hat{e}$ = suma de las medidas de los ángulos exteriores de un polígono convexo de "n" lados.

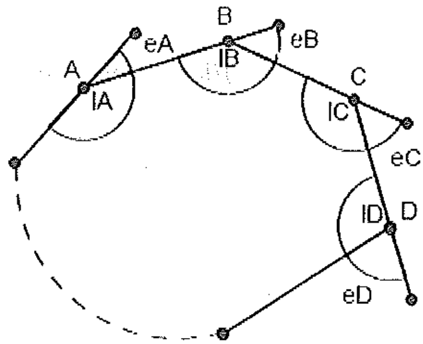


FIGURA 1-157

En cada vértice la medida de un ángulo interior más la medida del exterior adyacente es 180°. Como hay "n" vértices:

$i_A + e_A = 180^{\circ}$ (suplem.)
$i_B + e_B = 180^{\circ}$ (suplem.)
$i_C + e_C = 180^{\circ}$ (suplem.)
$i_D + e_D = 180^{\circ}$ (suplem.)

$$i_E + e_E = 180^\circ \text{ (suplem.)}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots \quad +$$

$$\underbrace{i_A + i_B + i_C + i_D + i_E + \ldots}_{S_i} + \underbrace{e_A + e_B + e_C + e_D + e_E + \ldots}_{S_e} = 180.n$$

$$180(n-2) \quad + \quad S\hat{e} \quad = 180n$$

$$\Rightarrow \cancel{180n} - 360 + S\hat{e} = \cancel{180n} \quad \Rightarrow \quad \boxed{S\hat{e} = 360^\circ}$$

iii) Si desde un vértice de un polígono convexo se trazan todas las diagonales posibles, siempre habrán tres vértices a los cuales no se puede trazar diagonal: el vértice desde el cual se trazan, y los dos vértices contiguos. Por lo tanto, el número de diagonales que se pueden trazar desde un vértice de un polígono convexo es:

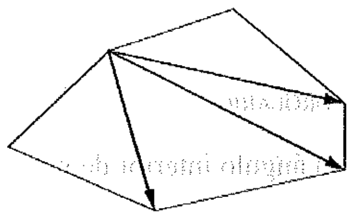


FIGURA 1-158

$$\boxed{d = n - 3}$$

iv) Desde un vértice de un polígono convexo pueden trazarse "n−3" diagonales. Como hay "n" vértices, el número de diagonales sería n(n-3); pero como cada diagonal une dos vértices, de esta manera se han contado doble número de diagonales. Entonces sería la mitad de diagonales. Por lo tanto, el número total de diagonales que se pueden trazar desde todos los vértices de un polígono convexo es:

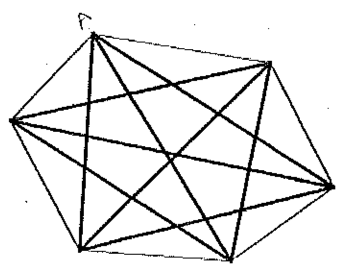


FIGURA 1-159

$$\boxed{D = \frac{n(n-3)}{2}}$$

1.16.1.10 Polígono regular

Polígono regular es el que tiene todos sus lados iguales, ángulos interiores iguales y ángulos exteriores iguales.

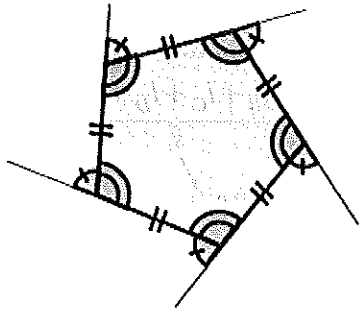


Figura 1-160

Corolario

Un ángulo interior de un polígono regular es $\boxed{\hat{\imath} = \frac{si}{n} = \frac{180(n-2)}{n}}$

si: suma de los ángulos interiores de un polígono.
ê: ángulo exterior de un polígono.
S_e: sum de los ángulos exteriores de un polígono.
n: número de lados del polígono.

Corolario

Un ángulo exterior de un polígono regular es $\boxed{\hat{e} = \frac{S_e}{n} = \frac{360^\circ}{n}}$

AYUDA 1

Halla la suma de los ángulos interiores de un cuadrado.

Solución: $si = (n-2)180^\circ = (4-2)180^\circ = 360^\circ$

AYUDA 2

¿Cuál es el polígono cuya suma de ángulos interiores vale 1260°?

Solución

$$si = (n-2)180°$$
$$\downarrow$$
$$1260° = (n-2)180° \Rightarrow \frac{1260°}{180°} + 2 = n \Rightarrow n = 9 \Rightarrow n = \text{eneágono}$$

AYUDA 3

Halla el valor de un ángulo interior de un hexágono regular.

Solución: $\hat{\imath} = \dfrac{si}{n} = \dfrac{(n-2)180°}{n} = \dfrac{(6-2)180°}{6} = 120° = \hat{\imath}$

AYUDA 4

Determina cuál es el polígono regular cuyo ángulo interior vale 60°.

Solución: $\hat{\imath} = \dfrac{(n-2)180°}{n}$

$$\downarrow$$
$$60° = \frac{(n-2)180°}{n} \Rightarrow 60n = 180n - 360 \Rightarrow 360 = 120n$$

$$\text{Triángulo equilátero} \Leftarrow 3 = n$$

AYUDA 5

Halla la suma de los ángulos exteriores de un heptágono.

Solución: $s\hat{e} = 360° \Rightarrow 360°$

AYUDA 6

Halla el valor de un ángulo exterior de un octágono regular.

Solución: $\hat{e} = \dfrac{se}{n} = \dfrac{360°}{8} = \dfrac{360°}{8} = 45°$

AYUDA 7

¿Cuál es el polígono regular cuyo ángulo exterior vale 120°?

Solución: $\hat{e} = \dfrac{360°}{n}$

$\downarrow$

$120 = \dfrac{360}{n} \Rightarrow n = \dfrac{360}{120} = 3 \Rightarrow$ triángulo equilátero.

AYUDA 8

Calcula el número de diagonales que se pueden trazar desde un vértice de un pentágono.

Solución: $d = n - 3$

$d = 5 - 3$

$d = 2$ diagonales

AYUDA 9

¿Cuál es el polígono en el que se pueden trazar tres diagonales desde un vértice?

Solución: $d = n - 3$

$\downarrow$

$3 = n - 3 \Rightarrow 6 = n \Rightarrow$ hexágono

AYUDA 10

Calcula el número total de diagonales que se pueden trazar en un octágono.

Solución: $d = \dfrac{n(n-3)}{2} = \dfrac{8(8-3)}{2} = 20$ diagonales

AYUDA 11

¿Cuál es el polígono en el cual se pueden trazar 14 diagonales en total?

Solución:

$$d = \frac{n(n-3)}{2}$$

$$\downarrow$$

$$14 = \frac{n(n-3)}{2} \Rightarrow 28 = n^2 - 3n \Rightarrow 0 = n^2 - 3n - 28$$

$$0 = (n-7)(n+4)$$

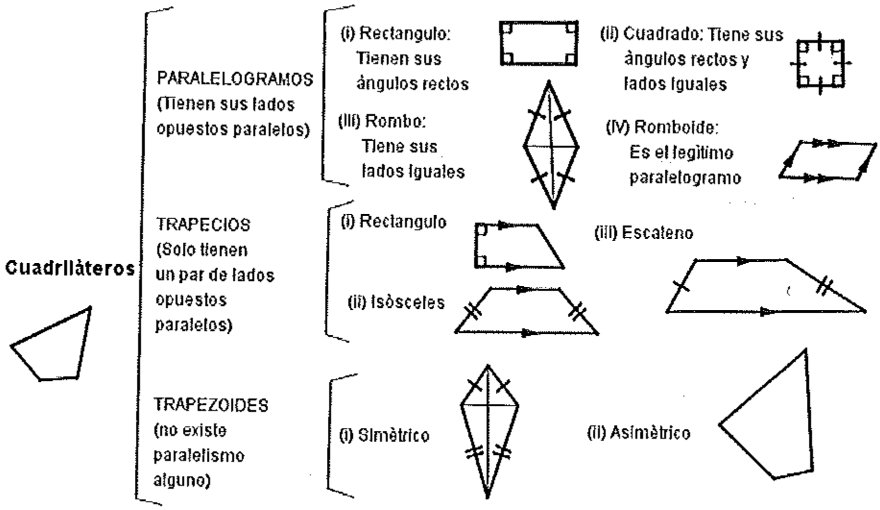
$$\downarrow$$

$$n = 7 \Rightarrow \text{heptágono}$$

1.16.1.11 Cuadriláteros

El cuadrilátero es un polígono de cuatro lados.

En la siguiente figura se ilustra un cuadro que presenta una división de los cuadriláteros.



1.16.2 Retos

1. En un trapecio rectangular la medida de uno de sus ángulos interiores es 58°. ¿Cuánto miden los otros ángulos interiores?

2. En un romboide la medida de uno de sus ángulos exteriores es 137°. Determina la medida de todos los ángulos interiores de ese romboide.

3. ¿Cuál es la medida del lado del cuadrado cuya diagonal mide 12 cm?

4. Determina la medida de la diagonal del rectángulo cuyos lados miden 5 cm y 12 cm.

5. Determina la suma de las medidas de las diagonales del cuadrado cuyo lado mide 8 cm.

6. Señala el tipo de triángulo que se determina al trazar las diagonales de un cuadrado.

7. En un rombo, la medida de una diagonal es el doble de la otra. Determina el perímetro del rombo sabiendo que la medida de la diagonal menor mide 6 cm.

8. Dos cuadrados de 80 cm de perímetro se unen de manera que forman un rectángulo. Determina la medida de la diagonal del rectángulo formado.

9. Halla los valores pedidos.

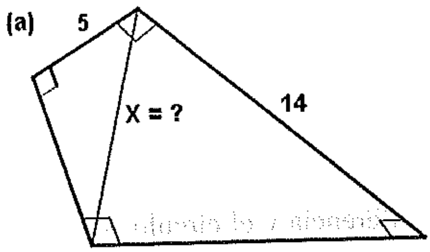


FIGURA 1-161

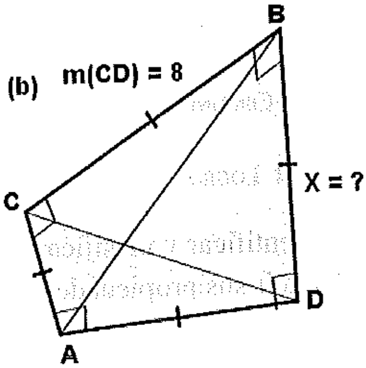


FIGURA 1-162

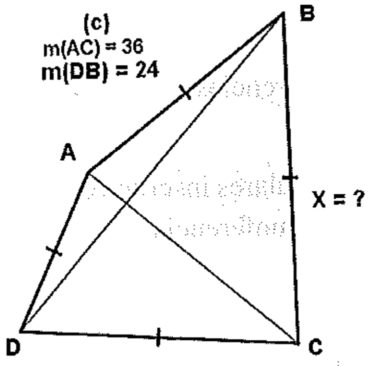


FIGURA 1-163

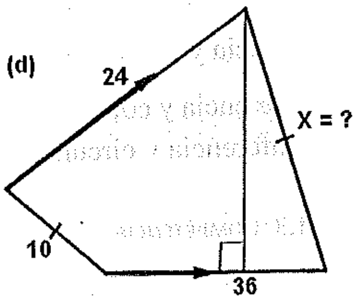


FIGURA 1-164

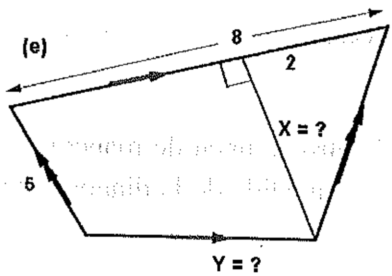


Figura 1-165

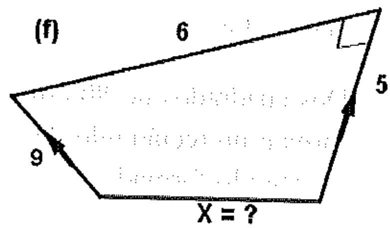


Figura 1-166

1.17 SECCIÓN CINCO

1.17.1 Circunferencia y círculo

1.17.1.1 Logro

Identificar y clasificar la circunferencia y el círculo, sus partes y deducir sus propiedades fundamentales.

1.17.1.2 Indicadores de logro

- Relaciona y diferencia los elementos de una circunferencia.
- Diferencia círculo y circunferencia.
- Describe las relaciones entre circunferencias y entre una circunferencia y una recta.
- Diferencia y construye polígonos regulares inscritos en una circunferencia y circunscritos a una circunferencia.

1.17.1.3 Competencia

Aplicar las propiedades de la circunferencia y el círculo en la solución de problemas, a partir de relaciones métricas y geométricas.

1.17.1.4 CONCEPTOS PREVIOS

***Debes saber*:** Algunos conceptos básicos, como por ejemplo: ángulo, vértice, lado, bisectriz, mediatriz, rectas paralelas y perpendiculares.

HERRAMIENTAS

Circunferencia: Es el conjunto de todos los puntos que equidistan de otro llamado centro.

Círculo: Es el conjunto de todos los puntos de la circunferencia y de los interiores a la misma.

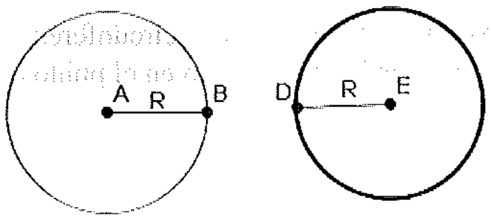


FIGURA 1-167

1.17.1.5 ELEMENTOS BÁSICOS DE UNA CIRCUNFERENCIA

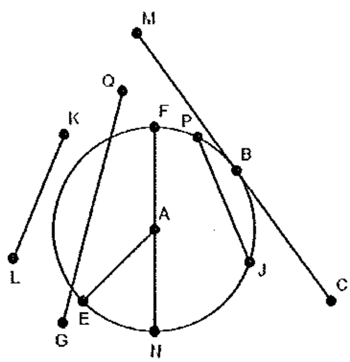


FIGURA 1-168

Arco: Porción de circunferencia: $\overset{\frown}{PJ}$

Cuerda: Segmento determinado por dos puntos de circunferencia. $\overline{PJ}$

Radio(R): Distancia de un punto sobre la circunferencia al centro. $R = \overline{EA}$

Diámetro: Una cuerda que pasa por el centro de la circunferencia.

$D = \overline{NF} = 2R$

Secante: Un segmento que corta la circunferencia en dos puntos. $\overline{QG}$.

Tangente: Una recta o segmento que toca la circunferencia. $\overline{MC}$.

Exterior: Recta o segmento que no tiene ningún punto común con la circunferencia. KL

NOTA: La tangente a una circunferencia es perpendicular al radio en el punto de contacto.

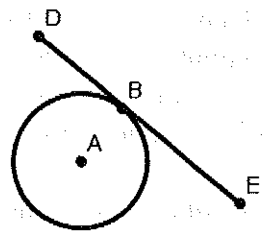
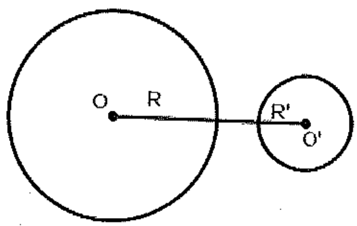


FIGURA 1-169

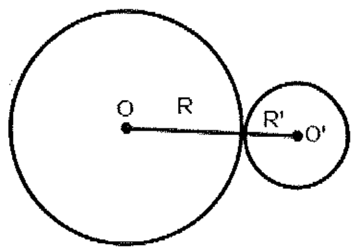
1.17.1.6 POSICIONES RELATIVAS ENTRE CIRCUNFERENCIAS

Circunferencias exteriores: Cuando los puntos de cada una son exteriores a la otra.



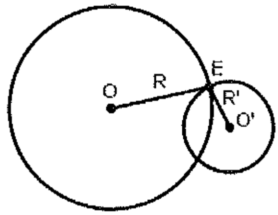
(a)

Circunferencias tangentes exteriores: Cuando las circunferencias tienen un punto común, siendo los demás puntos de cada una exteriores a la otra.



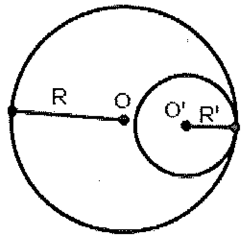
(b)

Circunferencias secantes: Cuando tienen dos puntos en común.



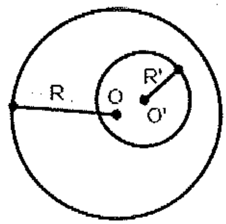
(c)

Circunferencias tangentes interiores: Cuando tienen un punto en común, siendo los demás puntos de una de ellas interiores a la otra.



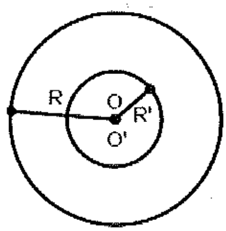
(d)

Circunferencias interiores: Cuando todos los puntos de una de ellas son interiores a la otra.



(e)

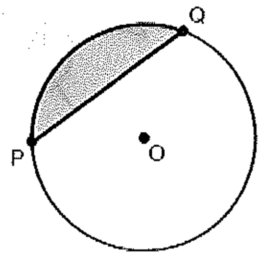
Circunferencia concéntricas: Cuando tienen el mismo centro.



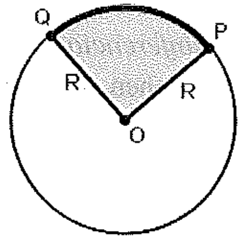
(f)

FIGURA 1-170

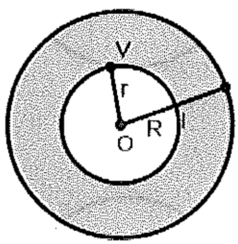
1.17.1.7 Figuras en el círculo



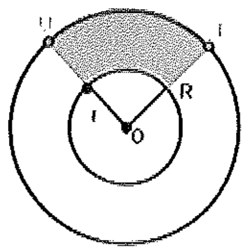
Segmento circular
(a)



Sector circular
(b)



Corona circular
(c)



Trapecio circular
(d)

Figura 1-171

NOTA: en las figuras la parte sombreada hace referencia al nombre dado.

1.17.1.8 Ángulos en una circunferencia

HERRAMIENTAS

La medida de un **arco completo** de una circunferencia es 360°.

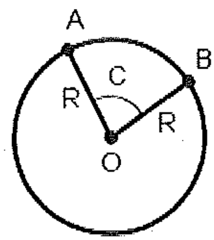
AYUDA 0

Practica en el DVD en el apartado GeoPlana. Circunferencia. Dos unidades didácticas de José Luis Alonso Borrego y Miguel García Reyes (21 escenas interactivas).

Ángulo central: Es el que tiene su vértice en el centro de la circunferencia y sus lados son radios.

La medida de un ángulo central es igual al arco que subtiende.

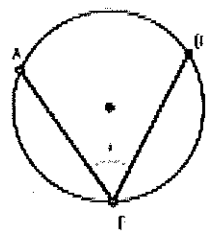
$<AOB = <C = \overset{\frown}{AB}$



(a)

Ángulo inscrito: Es el que tiene su vértice sobre la circunferencia y sus lados son dos cuerdas. La medida de un ángulo inscrito es igual a la mitad del arco que subtiende.

$\angle AEB = <i = \overset{\frown}{BA/2}$



(b)

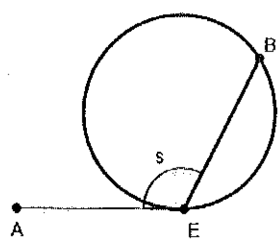
Ángulo semi-inscrito: Es el que tiene su vértice sobre la circunferencia y sus lados son una tangente y una cuerda.

La medida de un ángulo semi-inscrito es igual a la mitad del arco que subtiende.

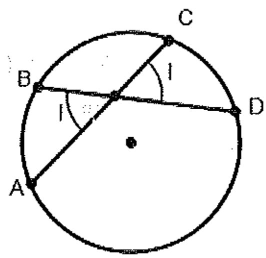
$\angle AEB = < s = \overset{\frown}{BE/2}$

$\overline{EA}$ Tangente,

$\overline{EB}$ Cuerda



(c)

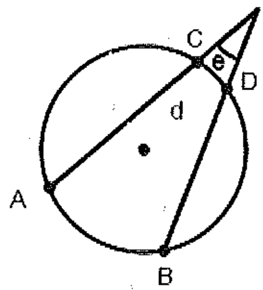


(d)

Ángulo interior: Es el que tiene su vértice en un punto interior a la circunferencia.

La medida de un ángulo interior es igual a la semisuma de los arcos que subtiende.

$$\boxed{\hat{I} = \frac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD}}{2}}$$



(e)

Ángulo exterior: Es el que tiene su vértice en un punto exterior a la circunferencia.

La medida de un ángulo interior es igual a la semidiferencia de los arcos que subtiende.

$$\boxed{e = \frac{A\hat{B} - C\hat{D}}{2}}$$

FIGURA 1-172

DESAFÍO P5.1

AYUDA 1

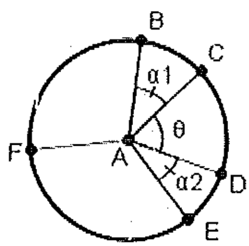


FIGURA 1-173

En la figura se tiene que el arco BC es igual al arco DE. Demostrar que el $\angle BAD = \angle CAE$.

Solución: Arco BC es igual al arco DE (dado); por lo tanto $\angle\alpha 1 = \angle\alpha 2$ (son ángulos centrales; $\angle\alpha 1 + \angle\theta = \angle\alpha 2 + \angle\theta$ (adición); $\angle BAD = \angle CAE$.

AYUDA 2

En la figura siguiente, halla los valores de los ángulos X y Y y del arco Z.

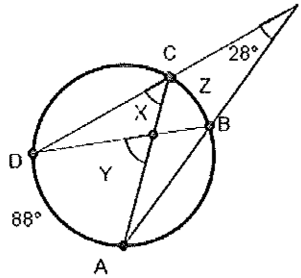


FIGURA 1-174

Solución

$$28° = \frac{88° - \hat{Z}}{2} \quad \left(\acute{A}ngulo\ exterior\right) \Rightarrow \hat{Z} = 32°$$

$$\angle X = \frac{88°}{2} = 44° = \angle X \quad \left(\acute{A}ngulo\ inscrito\right)$$

$$\angle Y = \frac{88° + \hat{Z}}{2} = \frac{88° + 32°}{2} = 60° \quad (\acute{A}ngulo\ interior)$$

AYUDA 3

Halla los valores de los ángulos X y Y.

Solución

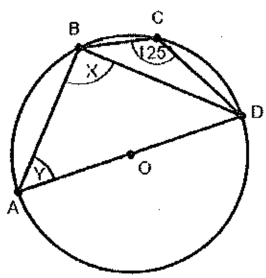


FIGURA 1-175

$$\angle X = \frac{A\hat{D}}{2} = \frac{180°}{2} = 90° \quad \left(\acute{A}ngulo\ inscrito\right)$$

$$125° = \frac{A\hat{B} + A\hat{D}}{2} \quad \left(\acute{A}ngulo\ inscrito\right)$$

$$\angle Y = \frac{B\hat{C} + C\hat{D}}{2} \quad \left(\acute{A}ngulo\ inscrito\right)$$

$$125° + \angle Y = \frac{A\hat{B} + A\hat{D} + B\hat{C} + C\hat{D}}{2} = \frac{360°}{2} = 180°$$

(Suma de arcos en una circunferencia)

$$\angle Y = 180° - 25° = 55° = \angle Y$$

AYUDA 4

Halla los valores del ángulo X y del arco Z.

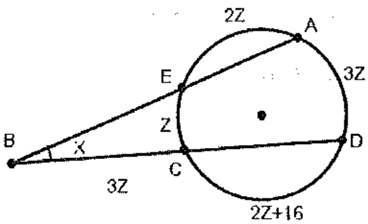


FIGURA 1-176

Solución

$\widehat{3Z} + \widehat{2Z} + \hat{Z} + \widehat{2Z + 16} = 360°$

(Circunferencia completa) $\Rightarrow \hat{Z} = 43°$

$\angle X = \frac{\widehat{AD} - \widehat{EC}}{2}$ (ángulo exterior)

$$\angle X = \frac{\widehat{3Z} - \hat{Z}}{2} = \frac{\widehat{2Z}}{2} = \hat{Z} = 43°$$

AYUDA 5

Halla el valor del ángulo X.

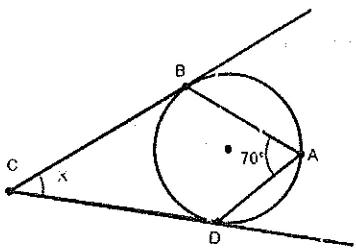


FIGURA 1-177

Solución

$\angle A = \frac{\widehat{BD}}{2}$ (ángulo inscrito)

$$\Rightarrow 70° = \frac{\widehat{BD}}{2} \Rightarrow \widehat{BD} = 140°$$

$$\angle X = \frac{\widehat{BAD} - \widehat{BD}}{2} = \frac{220° - 140°}{2}$$

$\Rightarrow \angle X = 40°$ (ángulo exterior)

1.17.2 Retos

1. Halla los valores desconocidos justificando la respuesta.

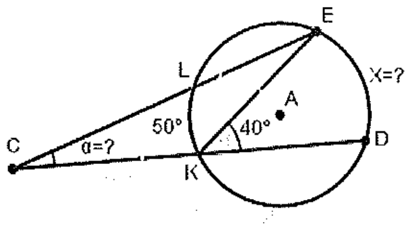


Figura 1-178

2. Halla los valores desconocidos justificando la respuesta.

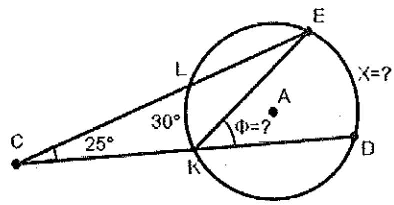


Figura 1-179

1.18 SECCIÓN SEIS

1.18.1 Áreas y perímetros

1.18.1.1 Logro

Resolver problemas que involucren los conceptos de área y perímetro.

1.18.1.2 Indicadores de logro

- Calcula perímetros y áreas a través de composición y descomposición de figuras en el plano (áreas sombreadas) en problemas de contexto.
- Calcula áreas relacionadas con polígonos inscritos en una circunferencia y circunscritos a una circunferencia.

1.18.1.3 Conceptos previos

Para estudiar el tema siguiente.

Debes saber: Algunos conceptos básicos, como por ejemplo: polígono, circunferencia, círculo, teoremas de Pitágoras.

HERRAMIENTAS

MEDIDAS

En áreas como ocurre en otros casos, la "unidad de área" se escoge arbitrariamente. Es usual y corriente escoger una unidad que esté relacionada con la unidad de distancia. Si la distancia está en centímetros, el área se medirá en centímetros cuadrados, y así para cualquier unidad de distancia que se elija se medirá el área en la correspondiente unidad cuadrada.

La unidad de área es entonces la región formada por un cuadrado de longitud unitaria y su interior.

Por ejemplo, en la figura, ABCD es un cuadrado que tiene un centímetro de largo; la medida de la región encerrada se llama *centímetro cuadrado* = cm^2.

FIGURA 1-180

Otras medidas de áreas comunes son: m^2, $pies^2$, $pulgadas^2$, km^2, etc.

1.18.1.4 ALGUNAS ÁREAS Y PERÍMETROS PRINCIPALES

Cuadrado

$$\boxed{A = L^2}$$

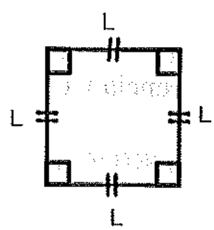


FIGURA 1-181

Rectángulo

$$A = b \times h$$
$$P = 2b + 2h$$

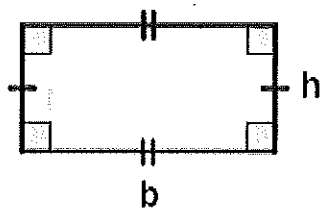


FIGURA 1-182

Romboide

$$A = b \times h$$
$$P = 2b + 2a$$

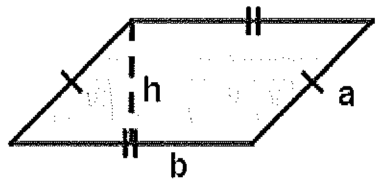


FIGURA 1-183

Rombo

$$A = \frac{d1 \times d2}{2}$$

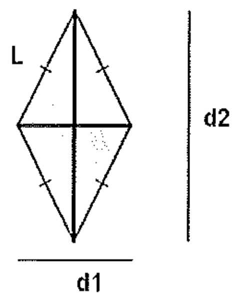


FIGURA 1-184

Triángulo

$$A = \frac{b \times h}{2} = \sqrt{\frac{p}{2}\left(\frac{p}{2} - a\right)\left(\frac{p}{2} - b\right)\left(\frac{p}{2} - c\right)}$$
$$P = a + b + c$$
(Fórmula de Herón)

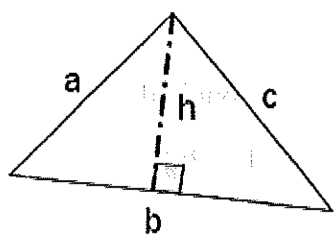


FIGURA 1-185

Triángulo equilátero

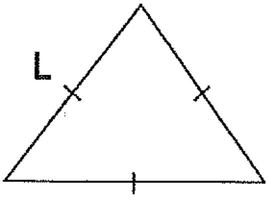


FIGURA 1-186

$$A=\sqrt{\frac{3l}{2}(\frac{3l}{2}-l)^3}=\sqrt{\frac{3l}{2}\times(\frac{l}{2})^3}=\sqrt{\frac{3l}{2}\times\frac{l^3}{8}}\Rightarrow A=\frac{l^2}{4}\sqrt{3}$$

P = 3L

Trapecio

$$A=\frac{(b+B)h}{2}$$

P = a + b + c + B

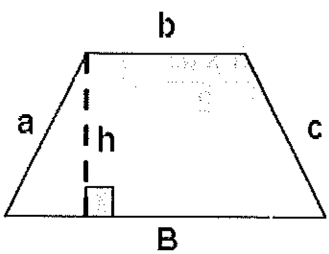


FIGURA 1-187

Circunferencia

Longitud→

L = 2πR

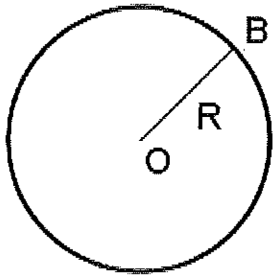


FIGURA 1-188

DESAFÍOS P6.1.1, P6.1.2, P6.1.3, P6.1.4, P6.1.5, P6.1.6, P6.1.7

AYUDA 0

Practica en el DVD en el apartado GeoPlana. Áreas sombreadas. Unidad didáctica de Juan Guillermo Rivera Berrío (25 escenas interactivas).

Áreas y polinomios. Unidad didáctica de Juan Guillermo Rivera Berrío, José R. Galo Sánchez y José Luis Alcón Camas (15 escenas interactivas).

1.18.1.5 Relaciones métricas en los polígonos regulares

- Una **apotema** en un polígono regular es una línea *perpendicular* trazada desde el centro al punto medio de uno de sus lados.
- Área de un polígono regular.

El área de un polígono regular puede ser calculada de la siguiente forma:

Suponiendo que:

A = Área
n = número de lados
L = longitud de uno de los lados
a = apotema

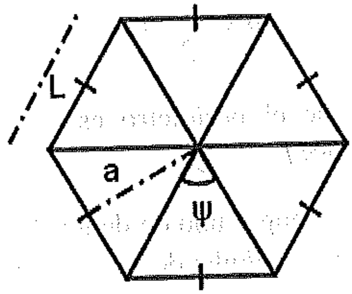


Figura 1-189

Se cumplen las siguientes relaciones:

En todo polígono regular de "n" lados se forman "n" triángulos isósceles iguales.

DESAFÍOS P6.2.1, P 6.2.2, P6.2.3

El área de un triángulo es la longitud de la base multiplicada por la longitud de la altura y luego se divide entre dos:

$$A = \frac{b \times h}{2}$$

Pero se sabe que la base "b" es un lado "L" y que la altura "h" es la apotema "a"; por lo tanto, el área va quedando así:

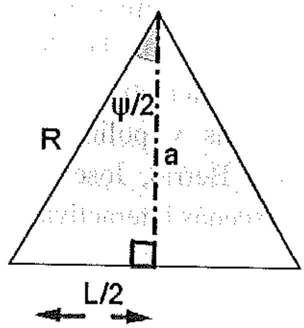


FIGURA 1-190

$$A = \frac{b \times h}{2} = \frac{L \times a}{2}.$$

Pero además sabemos que hay "n" triángulos isósceles iguales; por lo tanto, el área de todo el polígono regular de "n" lados sería:

$$A_p = n \times \frac{b \times h}{2} = n \times \frac{L \times a}{2} = \frac{n \times L \times a}{2} = \frac{P \times a}{2};$$

ya que el perímetro es la suma de todos los lados, es decir: $P = n \times L$.

Al coger uno de de los "n" triángulos isósceles iguales de todo polígono regular de "n" lados y trazar su apotema, se forma un triángulo rectángulo, en el cual se pueden sacar las siguientes relaciones trigonométricas:

$$sen(\psi / 2) = \frac{L/2}{R}$$ Se están relacionando L y R

$$\cos(\psi/2) = \frac{a}{R}$$ Se están relacionando a y R

$$\tan(\psi/2) = \frac{L/2}{a}$$ Se están relacionando L y a

Obsérvese que el ángulo ψ/2 siempre se podrá conocer ya que hay "n" ángulos "ψ" iguales, los cuales forman una circunferencia completa; por lo tanto:

$$n \times \psi = 360^\circ \Rightarrow \psi = \frac{360^\circ}{n}$$

Véase, entonces, que si en un polígono regular se conoce uno de los siguientes datos: apotema, radio o lado, se pueden conocer los otros dos, y por lo tanto su área.

Resumiendo:

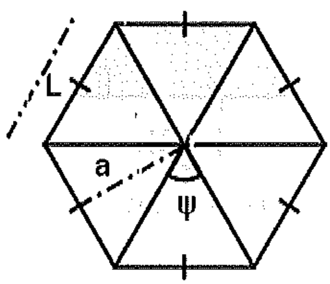


FIGURA 1-191

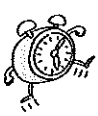
Polígono regular:

a = apotema

L = valor del lado

$$A = \frac{n \times L \times a}{2} = \frac{P \times a}{2}$$

$$P = n \times L$$



AYUDA 1

Un rectángulo tiene $60\,m^2$ de área y 32 m de perímetro. Halla sus dimensiones.

Solución

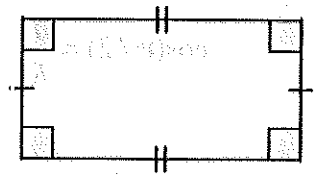


FIGURA 1-192

$A = b \times h = 60\ (1)$

$P = 2b + 2h = 32 \quad \Rightarrow \div 2 \Rightarrow b + h = 16$

$b = 16 - h\ (2)$

$(2)\ en\ (1) \rightarrow (16 - h)h = 60 \Rightarrow 16h - h^2 = 60$

$0 = h^2 - 16h + 60 \Rightarrow 0 = (h - 10)(h - 6) \ \Rightarrow h_1 = 10\ y\ h_2 = 6$

$h_1 = 10$ en $(2) \rightarrow b_1 = 6$

$h_2 = 6$ en $(1) \rightarrow b_2 = 10$

AYUDA 2

La base de un rectángulo es el triple de su altura y su área es 27 m^2. Halla sus dimensiones.

Solución

$b = 3h\ (1)$

$A = b \times h = 27\ (2)$

$(1)\ en\ (2) \rightarrow 3h^2 = 27 \Rightarrow h = 3\ m$

$h = 3\ m\ (1) \rightarrow b = 9\ m$

$b = 3h$

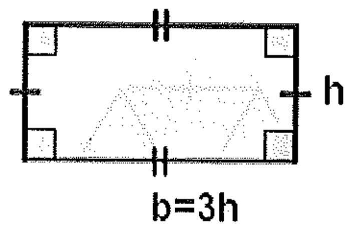


FIGURA 1-193

AYUDA 3

El área de un cuadrado es 81 cm². Halla su perímetro.

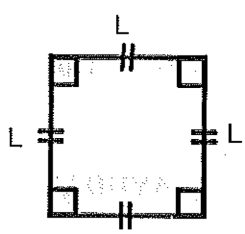


FIGURA 1-194

Solución

$A = L^2 = 81 \Rightarrow L = 9$ cm $\quad P = 4L = 4 \times 9 = 36$ cm $= P$

AYUDA 4

Dado el trapecio ABCD; $\overline{BC}$ // $\overline{AD}$;
$\hat{B} = 45°$, $\overline{BC} = 3a$; $\overline{AB} = \overline{AD} = a$.

Halla el área de ABCD.

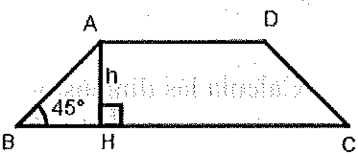


FIGURA 1-195

Solución

$$sen45 = \frac{h}{a} \Rightarrow h = a{\cdot}sen45 = 0.707a$$

$$\text{Área} = \frac{(b+B)h}{2} =$$

$$\frac{(a+3a)0.707a}{2} = 1.41\,a^2 = \text{Área}$$

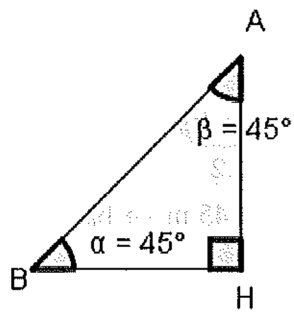


FIGURA 1-196

AYUDA 5

A la base b de un rectángulo se le añaden 5 m. ¿Cuánto debe añadirse a la altura para que el rectángulo resultante tenga un área doble del primero?

Solución

$A_2 = 2A_1$

$(b + 5)(h + x) = 2bh$

$bh + bx + 5h + 5x = 2bh$

$\Rightarrow bx + 5x = bh - 5h \Rightarrow$

$x(b + 5) = h(b - 5)$

$x = h(b - 5)/(b + 5)$ m.

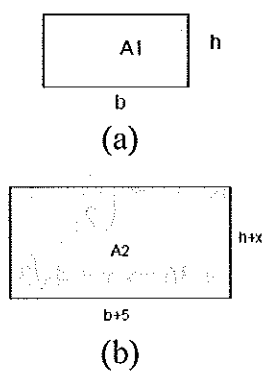


FIGURA 1-197

AYUDA 6

Calcula las dimensiones de un trapecio de área 864 m^2, sabiendo que la base es $\frac{3}{5}$ de la mayor y que la altura es igual al tercio de la suma de las bases.

Solución

$$H = \frac{1}{3}\left(x + \frac{3}{5}x\right) = \frac{8x}{15}$$

$$A = \frac{(b+B)h}{2} \Rightarrow 864 = \frac{\left(\frac{3}{5}x + x\right)\frac{8}{15}x}{2}$$

$\Rightarrow$ x = 45 m $\rightarrow$ base mayor

$\frac{3}{5}$ x= 27 m $\rightarrow$ base menor

$\frac{8x}{15}$ = 24 m $\rightarrow$ altura

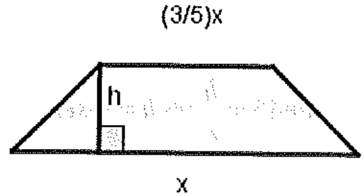


FIGURA 1-198

AYUDA 7

Halla el área de un triángulo isósceles, sabiendo que su base mide 12 cm y que la altura es igual a la mitad de uno de los lados congruentes.

Solución

h = $x/2$

Pitágoras: $x^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + 6^2;$

$$x^2 = \frac{x^2}{4} + 36 \Rightarrow x = 4\sqrt{3}$$

$$\text{Área} = \frac{b \times h}{2} = \frac{12 \times \frac{4\sqrt{3}}{2}}{2} = 12\sqrt{3}\ cm^2 = \text{Área}$$

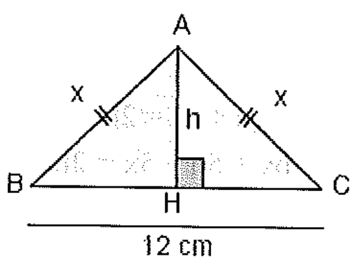


FIGURA 1-199

AYUDA 8

El perímetro de un rombo es 2P cms y la suma de sus diagonales es m cms. Halla, en función de P y m, el área del rombo.

Solución

Área $= \frac{x.y}{2}$; $\quad 4L = 2P \Rightarrow L = \frac{P}{2}$

Pitágoras: $L^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2$

$\Rightarrow \left(\frac{P}{2}\right)^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 \Rightarrow P^2 = x^2 + y^2 \; (1)$

Pero m = x + y $\Rightarrow \; m^2 = x^2 + y^2 + 2xy \; (2)$

(1) en (2) $\rightarrow \; m^2 = P^2 + 2xy \Rightarrow \frac{m^2 - P^2}{2} = xy \quad \Rightarrow$

Área $= \frac{xy}{2} = \frac{m^2 - P^2}{4} =$ Área

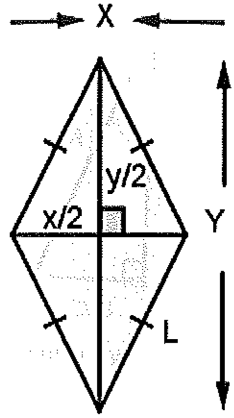


FIGURA 1-200

AYUDA 9

Halla el área de un decágono regular de 10 cm de radio.

Solución

$\theta = \frac{360}{n} = \frac{360}{10} = 36 \rightarrow \frac{\theta}{2} = 18$

$sen18^\circ = \frac{L/2}{10} = \frac{L}{20} \rightarrow L = 20 \times sen18^\circ = 6.18$

$\mathrm{Cos}18^\circ = \frac{a}{10} \rightarrow a = 10 \times \cos 18^\circ = 9.51$

$A = \frac{n.L.a}{2} = \frac{10 \times 6.18 \times 9.51}{2} = 293.86\; cm^2$

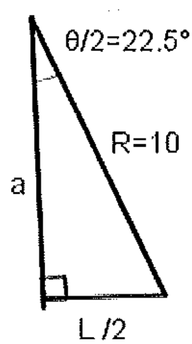


FIGURA 1-201

AYUDA 10

Halla el área de un pentágono regular de 15 cm de apotema.

Solución

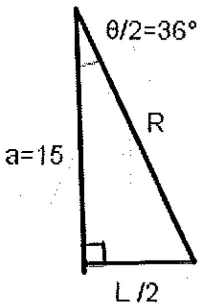


FIGURA 1-202

$$\theta = \frac{360}{n} = \frac{360}{5} = 72 \rightarrow \frac{\theta}{2} = 36$$

$$tan36^{\circ} = \frac{L/_2}{15} = \frac{L}{30} \rightarrow L = 30 \times tan36 = 21.8$$

$$A = \frac{n.L.a}{2} = \frac{5 \times 21.8 \times 15}{2} = 1.64\ cm^2$$

AYUDA 11

Halla el área de un octágono regular de 12 cm de lado.

Solución

$$\theta = \frac{360}{n} = \frac{360}{8} = 45 \rightarrow \frac{\theta/}{2} = 22.5$$

$$tan22.5^{\circ} = \frac{6}{a} \rightarrow a = \frac{6}{tan22.5} = 14.49$$

$$A = \frac{n.L.a}{2} = \frac{8 \times 12 \times 14.49}{2} = 695.52\ cm^2$$

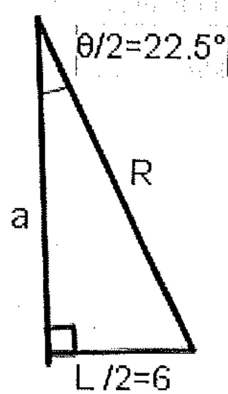
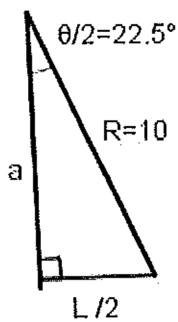


FIGURA 1-203

AYUDA 12

Halla el área entre un octágono regular y una circunferencia de radio 10 cm circunscrita a dicho octágono.

Solución



(a)

$$\theta = \frac{360}{n} = \frac{360}{8} = 45 \rightarrow \frac{\theta}{2} = 22.5$$

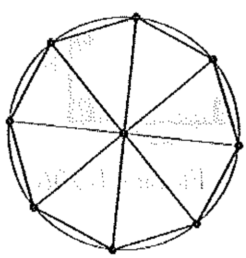
$$cos22.5^{\circ} = \frac{a}{10} \rightarrow$$

$a = 10 \text{ x Cos } 22.5$

$= 9.24$ entonces: A octágono

$$= \frac{\text{n. L. a}}{2} = \frac{8 \times 7.65 \times 9.24}{2}$$

$= 282.74 \text{ cm}^2$



(b)

FIGURA 1-204

Entonces: ***A círculo*** $= \pi r^2 = \pi 10^2 = 314.16 \text{ cm}^2$

Área entre círculo y octágono $= 314.16 - 282.74 = 31.42 \text{ cm}^2$

1.18.2 Retos

1. Se mide un terreno entre dos personas con una lienza y estacas. Cuál es el área del terreno si las longitudes encontradas fueron:

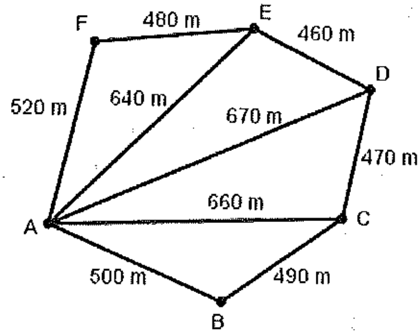


Figura 1-205

2. ¿Cuáles son las dimensiones de un campo rectangular, sabiendo que la diagonal mide 200 m y que vendido a \$210 el m², ha producido \$3.760.050?

3. Si se prolonga el radio de un círculo en 4 cm, el área queda aumentada en 80 cm². Calcula el lado del cuadrado inscrito en el círculo primitivo.

4. Halla el perímetro del rectángulo mostrado en la figura, sabiendo que su área son 9.600 m cuadrados.

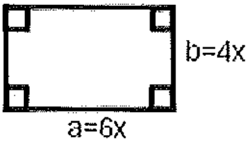


Figura 1-206

5. Halla el área del rectángulo mostrado en la figura, sabiendo que su perímetro son 160 m.

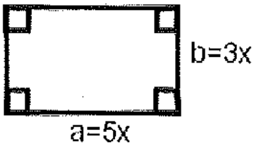


Figura 1-207

6. Determina el área de un pentágono regular con 5 cm de radio.

7. Halla el área de un octágono regular con 15 cm de apotema.

8. Encuentra el área de un decágono regular con 13 cm de lado.

9. Halla la diagonal de un rectángulo si sus lados están en una razón de 2:3 y su área es 2.400 m^2.

10. ¿Cuánto miden los ángulos interiores de un trapecio isósceles, si sus bases miden 20 cm y 14 cm, y su altura 4 cm. ¿Cuánto miden sus lados iguales?

11. El área de cada rueda de una bicicleta son 7.500 cm^2. Para llegar a la ciudad que está a 2 km, ¿cuántas vueltas giran sus ruedas?

12. Halla el área entre un círculo y un pentágono regular inscrito en dicha circunferencia, si su apotema mide 7 cm.

13. Un joyero tiene un pedazo de oro de forma cilíndrica de 5 m de longitud y 1 cm de diámetro. ¿Cuántos aros con radio interior de 2 cm puede fabricar?

14. Encuentra el área de una cancha de fútbol en cm^2, si sus dimensiones son de 80 m por 1.100 dm. ¿Cuántas cuadras mide la cancha si una cuadra mide 80 m x 80 m. Si una hectárea mide 100 m x 100 m, ¿cuántas canchas de fútbol se necesitaría para cubrir 15 hectáreas?

15. Con un galón de cierta pintura se pueden pintar 100 m^2. El galón cuesta $50.000. ¿Cuánto cuesta pintar un salón, las paredes y techo, si las dimensiones son 10 m x 15 m, y la altura son 4 m, y el salón tiene 2 puertas de 3 m x 2 m que no se pintan?

16. Una página de un libro mide 30 cm x 40 cm. Si la margen superior e inferior son 5 cm y 4 cm, y la margen derecha e izquierda son 3 cm y 2 cm, ¿cuál es el área de la porción impresa en la página?

17. Una ventana Normanda se forma por una región semicircular colocada arriba de una región rectangular, como se muestra en la figura. Si la porción rectangular mide 300 cm de ancho y el área de toda la ventana es $(6+9\pi/4)$ m^2, ¿cuál es la altura de toda la ventana?

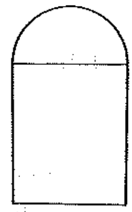


FIGURA 1-208

18. Si una pizza circular de 20 cm de diámetro es una ración para una persona, ¿cuántas pizzas circulares de 15 cm de radio son necesarias para 15 persona? Suponga que el grosor de todas las pizzas es el mismo.

19. Una manguera para jardín está enrollada en círculos que miden 40 cm de diámetro. Si hay 12 vueltas completas, ¿cuánto mide de largo la manguera?

GEOESPACIO

DESARROLLO DE PENSAMIENTOS: MÉTRICO, GEOMÉTRICO Y ESPACIAL

2. EJE TEMÁTICO: GEOESPACIO

2.1 LOGRO

Desarrollar habilidades para construir y apropiarse de estrategias que conlleven a la formulación y la solución de situaciones problema utilizando propiedades métricas y geométricas de los sólidos, aplicando la comprensión y organización de los conceptos matemáticos, en forma gradual que le permita el desarrollo de un pensamiento espacial de manera coherente.

2.2 INDICADORES DE LOGRO

- Relaciona y diferencia los elementos que constituyen un poliedro y algunos sólidos de revolución.
- Diferencia un poliedro de un sólido de revolución.
- Identifica y diferencia prismas y pirámides.
- Clasifica prismas y pirámides en regulares o irregulares, oblicuos o rectos.
- Diferencia las dimensiones involucradas en sólido: longitud, área y volumen.
- Calcula la longitud de las aristas y el perímetro de las caras en un prisma y en una pirámide.
- Calcula el área lateral y el área total de un poliedro y de un sólido de revolución.
- Calcula el volumen de algunos sólidos y los relaciona con su capacidad.

2.3 COMPETENCIA

Reconocer las formas geométricas sólidas en los objetos cotidianos, utilizando sus propiedades en la modelación y solución de situaciones problema.

2.4 CONOCIMIENTOS PREVIOS

Para estudiar el tema siguiente.

Debes saber: Algunos conceptos básicos de la geometría plana como por ejemplo: punto, recta, plano, ángulo y sus relaciones; Teorema de Pitágoras; Polígono: regular e irregular; Circunferencia y círculo; Áreas y Perímetros de figuras planas.

Para recordar los conceptos previos, contesta a la pregunta de manera intuitiva y después realiza una consulta en algún texto que trate del tema (puede ser la guía anterior –GEOPLANA– u otros textos).

1. ¿Sabes qué tipo de objetos estudia la geometría plana? ¿Qué relaciones podrías establecer entre unos y otros objetos?
2. ¿Qué significa calcular el perímetro de una figura cerrada?
3. ¿Qué significa calcular el área de una figura cerrada?

¿Sabes qué es?

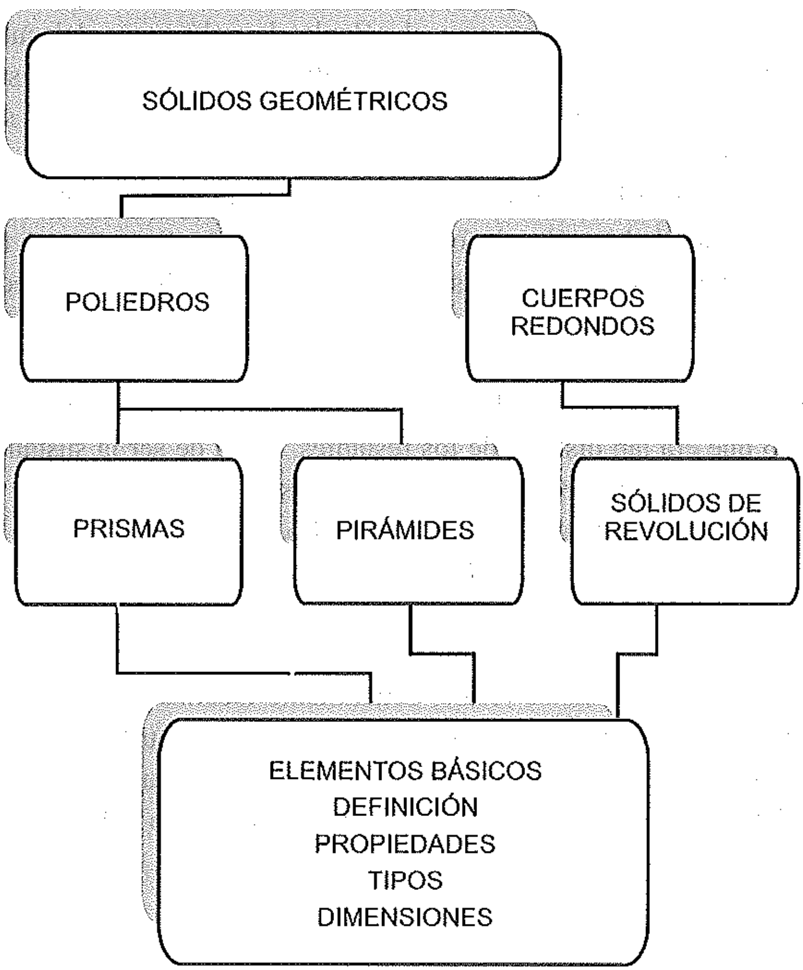
- un punto
- una recta
- un plano
- un polígono
- una circunferencia
- un círculo

2.5 ESTÁNDARES

Hacer conjeturas y verificar propiedades de congruencias y semejanzas entre figuras bidimensionales y entre objetos tridimensionales en la solución de problemas.

Usar argumentos geométricos para resolver y formular problemas en contextos matemáticos y en otras ciencias.

2.6 RED DE CONCEPTOS



2.7 RESEÑA HISTÓRICA

Tomado de: http://dialnet.unirioja.es/servlet/fichero_articulo?codigo=1349682&orden=60589, abril 30 de 2009.

LOS POLIEDROS DESDE LA HISTORIA

Euclides en el libro XI (geometría de sólidos y métodos de exhausción) inicia el tratamiento de los volúmenes o sólidos.

En el papiro de rhind se obtuvo información de las reglas empleadas por los egipcios para el cálculo de volúmenes del cubo, paralelepípedo, cilindro y figuras sencillas, en algunos casos estos métodos conducen a aproximaciones pero en otros los cálculos son correctos.

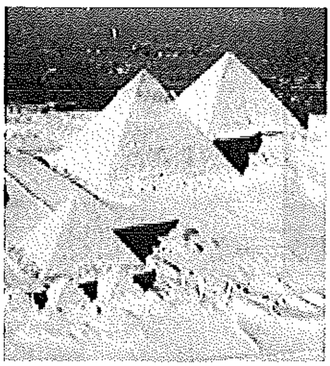
Los pitagóricos pensaban que era muy importante la observación de que había sólo cinco poliedros regulares. Se cree que fue Empédocles quien primero asoció el cubo, el tetraedro, el icosaedro y octaedro con la tierra, el fuego, el agua y el aire, respectivamente. Estas sustancias eran los cuatro elementos de los griegos antiguos. Luego "Platón asoció el dodecaedro con el universo pensando que, dado que era tan distinto de los restantes, debía de ser la sustancia de la cual estaban hechos los planetas y las estrellas.

Etimológicamente la palabra poliedro (Πολυεδροσ) deriva de los términos griegos Πολυṣ(mucho) y *εδρα* (plano).

Los vestigios encontrados en algunas zonas de Escocia nos hace pensar que ya algunos pueblos neolíticos conocían la existencia de ciertos poliedros. Estos restos, actualmente localizados en el Ashmolen Museum de Oxford, son piedras esculpidas que recuerdan a algunos poliedros (cubo, icosaedro, dodecaedro) y que se sospecha pudieron ser usados como dados, elementos de juego o decorativos (véase figura 2-1).

FIGURA 2-1. Restos neolíticos (2000 a. C.)

Algunas civilizaciones, como la egipcia y la babilónica, tenían conocimiento más explícitos de algunos de estos poliedros (cubo, tetraedro, octaedro, pirámide, etc.). Una evidencia de ello la encontramos en las famosas pirámides egipcias, santuarios de eternidad de los faraones, en donde ya comienza a ponerse de manifiesto la conexión entre los poliedros y ciertos aspectos religiosos y místicos.



Estos conocimientos pudieron haberse propagado desde Egipto y Babilonia a Grecia a través de los viajes de Tales y Pitágoras. Se sospecha que el interés de Pitágoras por los poliedros regulares viene de la observación de estas formas geométricas en los minerales, ya que su padre era grabador de piedras preciosas.

Los pitagóricos estaban fascinados por los poliedros conocidos, pero sobre todo, por el dodecaedro y por su relación con el cosmos. Relata Jámblico cómo la divinidad elimina al delator de uno de sus grandes secretos: "*la divinidad se disgustó con el que divulgó las doctrinas de Pitágoras, de tal forma que pereció en el mar, por el sacrilegio cometido, el que reveló como se inscribía en una esfera la constitución del dodecaedro*".

La razón de esta fascinación se debe a su relación con *el pentagrama místico (pentalfa)* o estrella de 5 puntas (véase figura 2-3), emblema de la salud y símbolo de identificación de los pitagóricos. Esta estrella se obtiene al trazar en un pentágono regular las diagonales o prolongar sus lados. Una de las bellas propiedades que tiene el pentagrama es que los cortes entre las diagonales determinan segmentos que están en *proporción áurea (divina proporción)*, siendo el segmento mayor igual al lado del pentágono. Recordamos que un punto C entre el segmento AB determina la sección áurea si AC/BC = BC/AB. La sección áurea, en forma de rectángulo áureo (los lados del rectángulo están en proporción áurea), aparece en muchas obras arquitectónicas emblemáticas a lo largo de la historia: el Partenón, la gran muralla China, el castillo de Windsor, la Plaza de la Concordia en París y otros.

FIGURA 2-3. Pentalfa

El pentagrama ya era conocido en Egipto. En el templo de Kurna (1700 a. C.) fue encontrado un tablero con este símbolo en el que se practicaba un juego (pentalfa), que todavía subsiste en algunos lugares de Creta.

Aunque Proclo atribuye a Pitágoras la construcción de las figuras "cósmicas" que relacionan los 4 elementos primarios (fuego, tierra, aire y agua) con el tetraedro, el cubo, el octaedro y el icosaedro, respectivamente, parece que esto es poco probable, ya que Empédocles de Agrigento fue el primero que distinguió los cuatro elementos primarios. Al parecer los pitagóricos sólo conocían el tetraedro, el cubo y el dodecaedro. El icosaedro y el octaedro se atribuyen a un amigo de Platón, Teeteto, a quien se debe el estudio sistemático de los cinco poliedros regulares. Los poliedros regulares (el tetraedro, el cubo, el icosaedro, el octaedro y el dodecaedro) se llaman *sólidos platónicos* por el papel que tiene en el diálogo de Platón (Timeo) en donde se pone de manifiesto la relación entre los cuatro primeros sólidos platónicos y los 4 elementos primarios. Del quinto poliedro regular, el dodecaedro, dice: *"Quedaba aún una sola y única combinación; el Dios se sirvió de ella para el Todo cuando esbozó su disposición final"*. Para Platón la belleza de los poliedros regulares no reside en su apariencia física, sino en el ámbito del pensamiento matemático: *"cada uno de los 5 sólidos participa en la idea de sólido regular e inversamente esta idea se plasma en 5 casos particulares"* (La República).

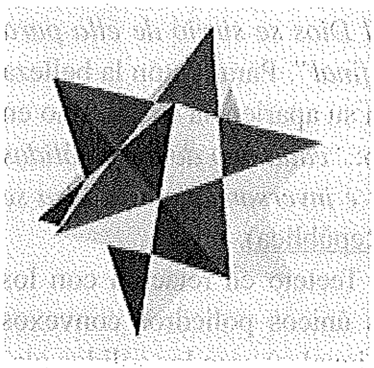
Euclides mejoró los trabajos de Teeteto en relación con los sólidos platónicos, probando que los únicos poliedros convexos regulares (con caras y figuras vértices iguales) eran los sólidos platónicos. De hecho, este resultado es importante en la historia de las Matemáticas, ya que constituyen el primer ejemplo de teorema fundamental de clasificación: *"Ninguna otra figura, además de estos cinco (los sólidos platónicos) se pueden construir con polígonos equiláteros y equiángulos"*.

Los poliedros platónicos pueden ser considerados como poliedros en el límite de la perfección. Algunas evidencias a este respecto son las siguientes:

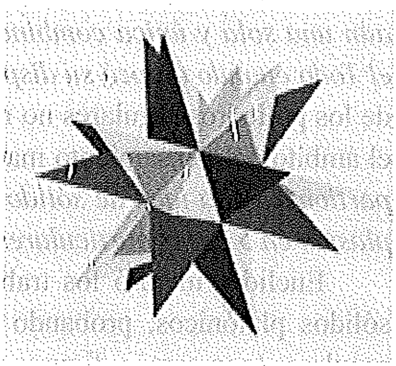
Los sólidos platónicos son poliedros convexos cuyas caras y figuras vértices son polígonos regulares. Las figuras vértice también son polígonos regulares. Esta última condición es equivalente a que los vértices del poliedro estén en una esfera o que los ángulos diedrales (ángulos que determinan las caras adyacentes del poliedro) sean iguales.

Las figuras vértice de los sólidos platónicos generan nuevos poliedros

Kepler en 1619 se dio cuenta de que existían dos maneras diferentes de pegar 12 pentagramas a lo largo de sus aristas para obtener un sólido regular. Si 5 de ellos se unen en un solo vértice, obtenemos el pequeño dodecaedro estrellado (véase figura 2-4). Si son 3 pentagramas los que se encuentran en cada vértice, tenemos el gran dodecaedro estrellado (véase figura 2-5).



Pequeño dodecaedro estrellado
FIGURA 2-4



Gran dodecaedro estrellado
FIGURA 2-5

Posteriormente, en 1809 Louis Poinsot descubrió los otros dos poliedros no-convexos regulares, el pequeño icosaedro (véase figura 2-6) y el gran dodecaedro (véase figura 2-7). Las 12 caras del gran dodecaedro son pentágonos, pero que, a diferencia del dodecaedro, se intersecan unas a otras. Si observas detenidamente el gran dodecaedro parece que contiene varias estrellas que conforman su estructura, pero sólo se puede ver una. El gran icosaedro se obtiene con 20 triángulos, intersecándose entre sí. Los sólidos de Poinsot son de hecho los duales de los sólidos de Kepler.

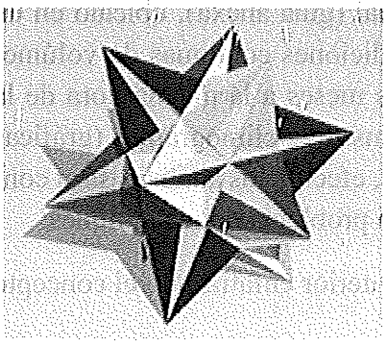


Figura 2-6. Pequeño icosaedro

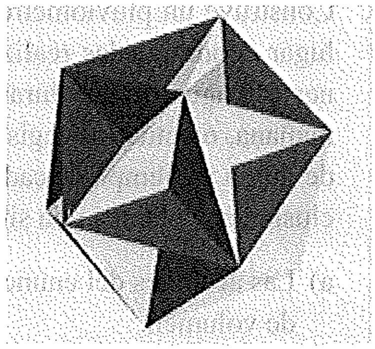


Figura 2-7. Gran dodecaedro

2.8 SITUACIONES PROBLEMA

1. Un contratista tiene que determinar el volumen de aire acondicionado de un espacio como el que muestra la figura de piso rectangular el depósito cuyas dimensiones son: 20 m de largo, 13 m de ancho, y tal que los aleros están situados a ambos lados del auditorio a 3.5 m de altura y el punto más alto del techo está a 5 m del piso. Ayúdale al constructor a determinar el volumen del auditorio.

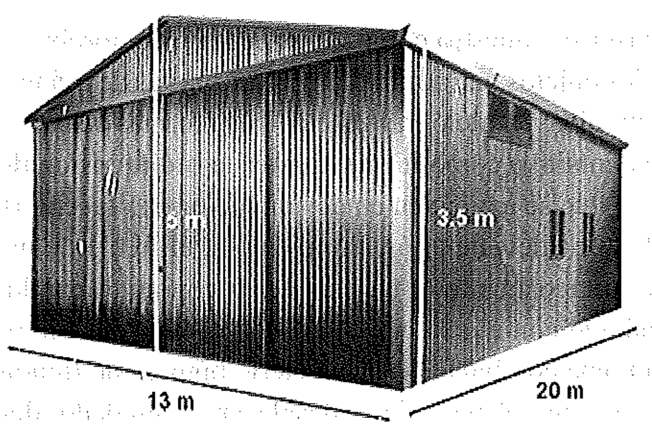


Figura 2-8

2. Construye un pluviómetro manual (guía anexa), ubícalo en un lugar donde puedas realizar mediciones continuas de volúmenes (de agua lluvia) durante tres meses a la misma hora de la mañana, efectúa los registros construye climogramas (gráficas de lluvia vs tiempo de cada mes), efectúa los análisis, saca conclusiones y plantea una situación problema donde apliques:

   a) Las acciones del enunciado anterior enfatizando el concepto de volumen.

   b) Los conceptos sobre el cilindro que utilizaste como pluvímetro.

3. Encuentra el volumen de un objeto irregular (una piedra, por ejemplo) aplicando los principios de impenetrabilidad y Arquímedes.

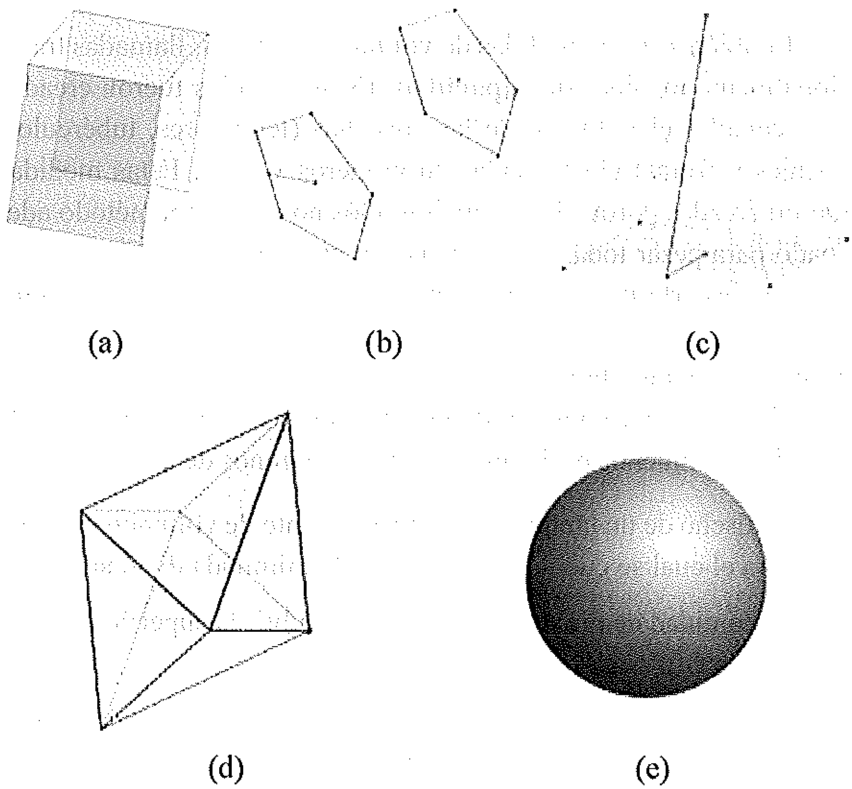
2.9 SECCIÓN UNO

2.9.1 Conceptos básicos

2.9.1.1 Sólidos

Un vistazo a nuestro entorno nos permite comprobar que en su mayoría los objetos que nos rodean tienen formas de triángulos, cuadrados, círculos, paralelogramos etc. Tales formas las reconocemos de manera intuitiva como **formas planas o bidimensionales**, es decir, formas que se extienden en dos direcciones: derecha-izquierda, arriba-abajo o adelante-atrás. Por ejemplo, el frente de un edificio puede ser un rectángulo, o un rectángulo con un triángulo encima, o un cuadrado con media circunferencia encima, en fin, podría ser en general una combinación de un cierto número de figuras que reconocemos como planas. Si nos desplazamos alrededor del edificio observamos otras figuras planas, que no están en el mismo plano, tales figuras junto con el techo y el piso encierran lo que reconocemos como el interior del edificio. Esta percepción nos permite aumentar una dimensión más a las formas dispuestas a nuestros ojos. Llamaremos a éstas, **formas sólidas o tridimensionales.**

Entenderemos, entonces, como **sólido geométrico,** una región cerrada del espacio limitada por ciertas superficies que pueden ser planas o curvas.



(a) (b) (c)

(d) (e)

FIGURA 2-9

En un sólido se reconocen entonces tres dimensione las cuales conforman el **volumen.**

Intuitivamente, volumen es la cantidad de espacio que ocupa un cuerpo tridimensional. La unidad de medida de volumen en el Sistema Métrico Decimal es el metro cúbico, aunque el SI, también acepta (temporalmente) que el litro y el mililitro son unidades que fueron creadas para medir el volumen que ocupan los líquidos dentro de un recipiente.

DESAFÍO S1.1

También se usan medidas de volumen de áridos, llamadas tradicionalmente medidas de **capacidad**. Estas medidas fueron creadas para calcular el volumen de las cosechas (legumbres, tubérculos, forrajes y frutas) almacenadas en graneros y silos. Estas medidas fueron creadas porque hace muchos años no existía un método adecuado para pesar todas las cosechas en un tiempo breve, y era más práctico hacerlo usando volúmenes áridos. Actualmente, estas unidades son poco utilizadas, porque ya existe tecnología para pesar la cosecha en tiempo breve.

El cálculo del volumen de cuerpos sólidos es importante en la solución de muchos problemas prácticos, algunos de ellos son:

- El diseño de un tanque de almacenamiento de volumen máximo para el cual se cuenta con una cantidad limitada de material.
- La cantidad de pintura necesaria para cubrir la superficie lateral de una edificación con una cierta forma.
- La cantidad de material necesario para construir una losa en la construcción con una forma determinada.

Presentamos a continuación algunas formas geométricas sólidas básicas.

2.9.1.2 POLIEDROS

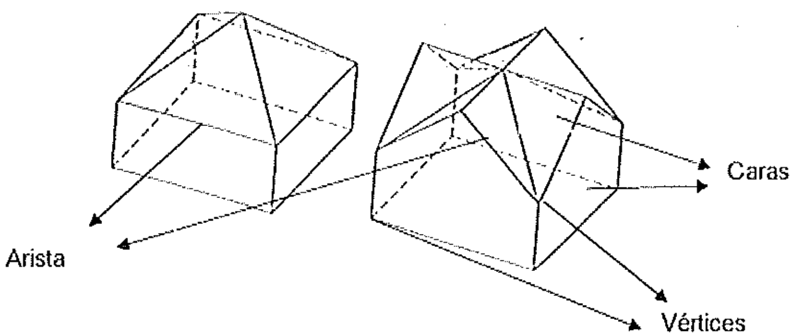
Poliedro: Es un cuerpo geométrico cuya superficie se compone de una cantidad finita de polígonos planos que encierran un volumen finito y no nulo.

En un poliedro cualquiera se puede distinguir los siguientes tres elementos notables principales:

Caras: Son las porciones del plano en forma de polígonos que limitan el poliedro.

Aristas: Son los segmentos en los que se intersecan dos caras.

Vértices: Son los puntos del poliedro en los que se encuentran tres o más aristas.



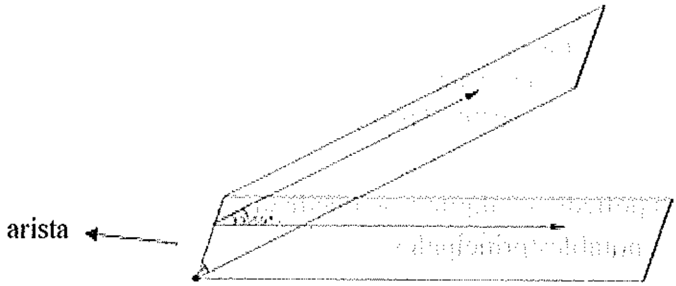
Caras, vértices, aristas

FIGURA 2-10

También se puede hablar de:

Diagonales: Son los segmentos que unen vértices que no están en el mismo plano.

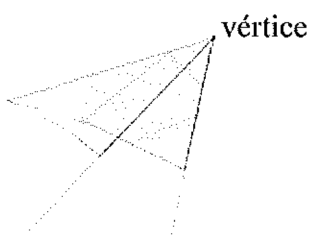
Ángulo diedro: Es la porción del espacio limitada por dos planos que se cortan en una recta común. En un poliedro, un ángulo diedro se identifica como el ángulo formado por dos caras que se cortan en una arista. Véase figura.



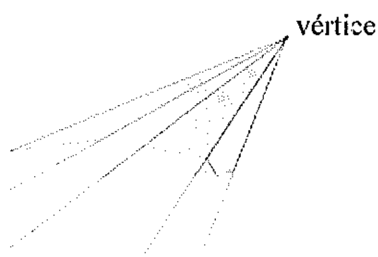
Ángulo diedro
FIGURA 2-11

DESAFÍO S2.1

Ángulo poliedro: Es la porción del espacio limitada por varios planos que concurren en un punto. El punto común se llama vértice y es el mismo que definimos como un vértice del poliedro.



Ángulo triedro
FIGURA 2-12



Ángulo poliedro
FIGURA 2-13

Los poliedros se pueden clasificar en **regulares** si sus caras, sus ángulos diedros y sus ángulos poliedros son congruentes, e **irregulares** en otro caso.

DESAFÍO POLIEDROS

Consulta de las siguientes direcciones de internet, los diferentes tipos de poliedros, en ellos observa el número de caras, de aristas, de vértices. Y menciona algunas aplicaciones.

(http://www.korthalsaltes.com/es/index.html,www.bbo.arrakis.es/geom/pris1.html, mayo 3 de 2009

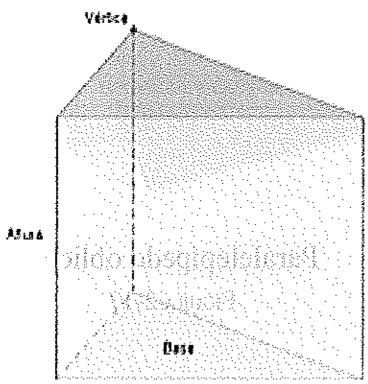
www.sectormatematica.cl/ppt/poliedros.ppt, mayo 3 de 2009.

A continuación se estudiarán dos tipos particulares de poliedros llamados: **prismas** y **pirámides**.

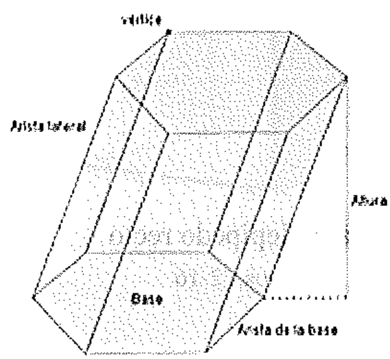
2.9.1.3 PRISMA

Prisma: es un poliedro con dos de sus caras congruentes y paralelas; éstas se llaman **bases** del prisma. Las demás caras son paralelogramos y hay tantos como lados tengan los polígonos de la base y son llamadas **caras laterales** del prisma.

La **altura de un prisma** es el segmento perpendicular a las bases, comprendido entre ellas.



Prisma triangular
FIGURA 2-14

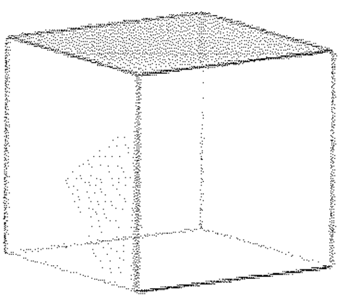


Prisma hexagonal
FIGURA 2-15

Un prisma se llama triangular cuadrangular, pentagonal, si sus bases son triángulos, cuadriláteros, pentágono, etcétera, respectivamente.

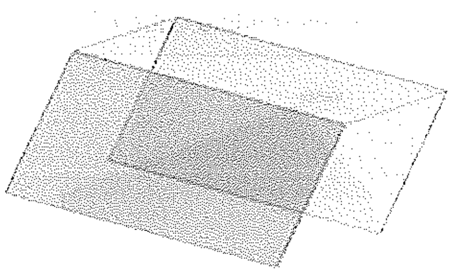
Se llama **prisma recto** cuando sus caras laterales forman un ángulo recto con las bases; en este caso las caras laterales son rectángulos y la arista lateral coincide con la altura del prisma (figura 2-14). Y se llama prisma ***oblicuo*** cuando las caras laterales son oblicuas a las bases, en este caso las caras laterales son paralelogramos (figura 2-15).

¿Qué objetos reales te sugieren la idea de prisma? ¿Incluirías los prismas regulares entre los poliedros regulares? Algunos prismas especiales son los **paralelepípedos** en los cuales las bases son paralelogramos. Tienen, en total, seis caras. En un paralelepípedo podemos considerar que las bases son cualquier par de caras opuestas, y las demás caras son las caras laterales. Así, algunos paralelepípedos pueden, a la vez, ser rectos u oblicuos, según las caras que se consideren como bases.



Paralelepípedo recto

FIGURA 2-16



Paralelepípedo oblicuo

FIGURA 2-17

Un paralelepípedo se llama **recto** si sus aristas laterales son perpendiculares a las bases.

Si las bases de un paralelepípedo recto son rectángulos, se llama paralelepípedo recto rectangular o también ortoedro.

Las seis caras de un ortoedro son rectángulos y aquellos ortoedros de caras cuadradas iguales se llaman cubos.

HERRAMIENTAS

TEOREMA

"En todo ortoedro, el cuadrado de la diagonal es igual a la suma de los cuadrados de las tres aristas que concurren en un mismo vértice".

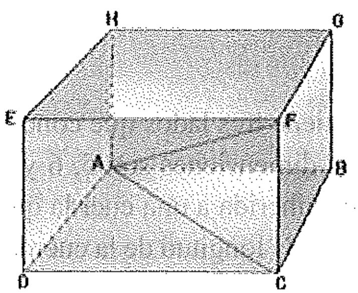


FIGURA 2-18

HIPÓTESIS

ABCDEFGH es un ortoedro; $\overline{CD}$, $\overline{BC}$ y $\overline{CF}$ son aristas concurrentes en un vértice; $\overline{AF}$ es una diagonal.

TESIS

$$(\overline{AF})^2 = (\overline{AB})^2 + (\overline{BC})^2 + (\overline{CF})^2$$

En el triángulo rectángulo ACF, tenemos:

$$\left.\begin{array}{ll} (\overline{AF})^2 = (\overline{AC})^2 + (\overline{CF})^2 & (1) \\ \textit{En el triángulo ABC, también rectángulo:} & \\ (\overline{AC})^2 = (\overline{AB})^2 + (\overline{BC})^2 & (2) \end{array}\right\} \textit{Teorema de Pitágoras}$$

Sustituyendo (2) en (1), y sabiendo que $(\overline{AB}) = (\overline{CD})$:

$(\overline{AF})^2 = (\overline{AB})^2 + (\overline{BC})^2 + (\overline{CF})^2$ como queríamos demostrar.

AYUDA 0

Practica en el DVD en el apartado GeoEspacial.

Introducción. Unidad didáctica de Javier de la Escosura Caballero (38 escenas interactivas).

Poliedros. Dos unidades didácticas de Javier Abia Llera y Eduardo Barbero Corral (79 escenas interactivas).

Calcula volúmenes. Unidad didáctica de Josep Mª Navarro Canut y otra desarrollada en trabajo conjunto de los profesores Juan Guillermo Rivera Berrío, José R. Galo Sánchez y José Luis Alcón Camas (32 escenas interactivas).

AYUDA 1A

En un salón de forma ortoédrica que tiene tres lados que concurren a una misma esquina (vértice) cuyas dimensiones son 5, 6 y 4 m, se desea colocar una bandera que está adherida a una cuerda que hace las veces de diagonal del salón. Calcula la longitud de la cuerda.

Solución

Como se sabe, por el teorema anterior: "En todo ortoedro, el cuadrado de la diagonal es igual a la suma de los cuadrados de las tres aristas que concurren en un mismo vértice".

Podemos afirmar que:

$\text{Diagonal}^2 = \text{lado}^2 + \text{lado } 2 + \text{lado}^2$, por lo tanto:

$diagonal^2 = 5^2 + 6^2 + 4^2$

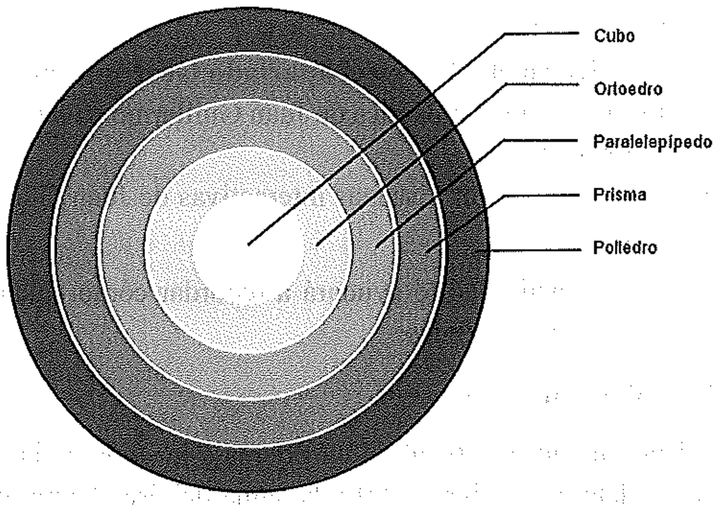
$diagonal^2 = 25 + 36 + 16$

$diagonal^2 = 77$

$\sqrt{diagonal^2} = \sqrt{77}$

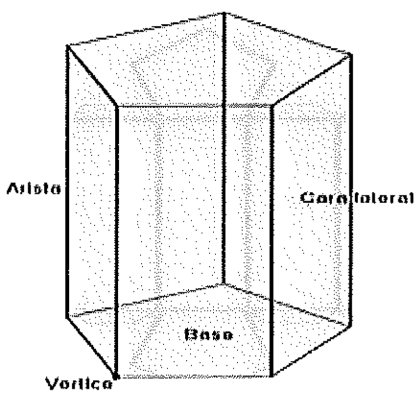
$\sqrt{diagonal^2} = \sqrt{77}$, para facilitar los cálculos se han omitido las magnitudes de los lados y la respuesta.

Algunas relaciones de contenencia del cubo se observan en el siguiente diagrama:



Dimensiones en un prisma

Tienen dimensión de longitud en un prisma: las aristas en la base, las aristas laterales, la altura del prisma, entre otras.



Prisma pentagonal

FIGURA 2-19

Tienen dimensión de superficie en un prisma: los polígonos de las bases y los paralelogramos de las caras laterales.

AYUDA 1B

Practica en el DVD en el apartado GeoEspacial.

Aptitud espacial. Unidad didáctica de Juan Guillermo Rivera Berrío (12 escenas interactivas).

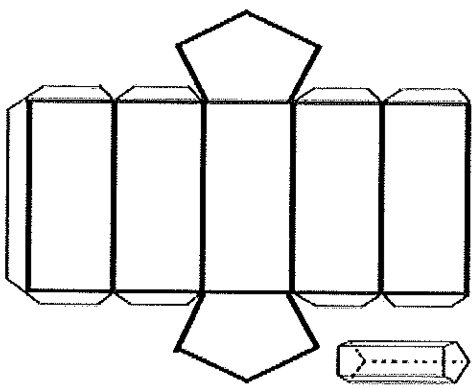
Sólidos de revolución. Escenas interactivas de Juan Guillermo Rivera Berrío (4).

La siguiente actividad te ayudará a recordar cómo calcular el área de algunas figuras planas.

Área lateral de un prisma

Se denomina **área lateral** de un prisma a la suma de las áreas de las caras laterales y **área total** a la suma del área lateral con el área de los polígonos de las bases. Debes recordar que cada cara lateral en el caso del prisma es un paralelogramo. Luego, si se desea calcular el área lateral, se debe calcular la suma de las áreas de cada paralelogramo. Es decir:

Área lateral = (Suma de área de caras lateales)



Desarrollo plano de un prisma pentagonal

FIGURA 2-20

Volumen de un prisma

El volumen de un prisma se calcula como el producto del área de la base por la altura. Su fórmula matemática es:

Volumen del prisma = (Área de la base) * (Altura)

En donde el área de la base es el área de una figura plana (de las que consultaste en la actividad anterior). Esto es, puede ser un triángulo, un cuadrado, un polígonos regular o irregular o un círculo.

DESAFÍOS S3.8.

En GeoGebra se construye un prisma del que se conocen las longitudes. Se calculan áreas y volúmenes.

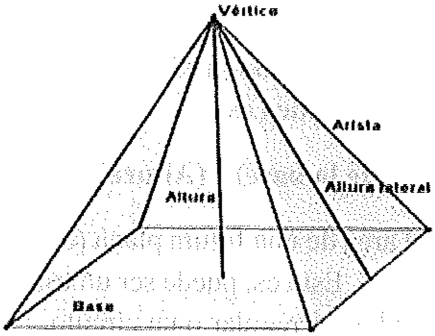
DESAFÍO S3.1, S3.2, S3.3, S3.4, S3.5, S3.6, S3.7, S3.9, S3.10, S3.11, S3.12, S3.13, S3.14.

DESAFÍO S3.15

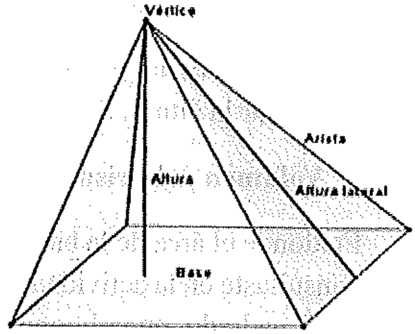
2.9.1.4 Pirámide

Pirámide: es un poliedro que tiene por **base** un polígono y cuyas **caras laterales** son triángulos que se reúnen en un mismo punto llamado **vértice de la pirámide.**

La **altura** de la pirámide es el segmento perpendicular a la base, comprendido entre el vértice de la pirámide y la base. La **altura lateral** se define como la altura de los triángulos de las caras laterales.



Pirámide recta
FIGURA 2-21



Pirámide oblicua
FIGURA 2-22

Puedes notar que en general la altura lateral no es igual para cada lateral. Explica está afirmación.

Dependiendo del número de lados del polígono de la base se clasifican en pirámides triangulares, cuadrangulares, etc.

Se llama **pirámide recta** cuando las caras laterales son triángulos isósceles, de lo contrario se llama **pirámide oblicua.**

Se llama **pirámide regular** si la base es un polígono regular y la altura cae en el centro de este polígono.

AYUDA 2

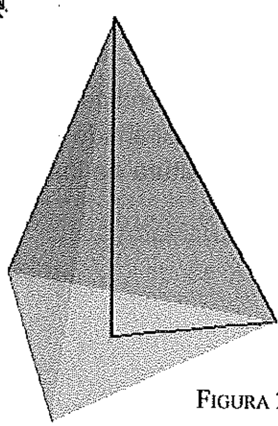
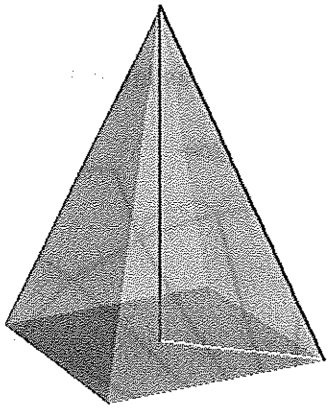


FIGURA 2-23

Pirámide triangular: la base es un triángulo y las caras laterales son triángulos. Se conoce como tetraedro cuando sus caras son congruentes, en este caso sus caras son triángulos equiláteros.



Pirámide cuadrangular: la base es un cuadrilátero y las caras laterales son triángulos. Si la base es un cuadrado es regular, y si además las caras laterales son triángulos isósceles, es también recta.

FIGURA 2-24

DESAFÍO S 4.1.

En GeoGebra se visualiza una pirámide en el que cambia el polígono de la base y la altura. Lo mismo con pirámides oblicuas. Manipula los comandos indicados para ver qué tipo de polígonos resultan. Justifica.

Dimensiones en una pirámide

Tienen dimensión de longitud en una pirámide: las aristas en la base, las aristas laterales, la altura lateral y la altura de la pirámide, entre otras.

Tienen dimensión de superficie en una pirámide: el polígono de la base y los triángulos de las caras laterales.

Se denomina área lateral de una pirámide a la suma de las áreas de las caras laterales y área total a la suma del área lateral con el área de la base. Debes recordar que cada cara lateral en el caso de la pirámide es un triángulo. Luego si se desea calcular el área lateral, se debe calcular la suma de las áreas laterales.

Es decir:

Área lateral = (Suma de área de caras laterales)

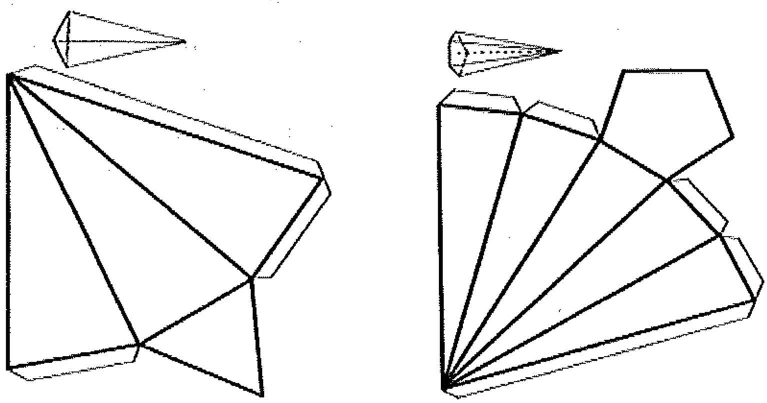


FIGURA 2-25

El *volumen de una pirámide* se calcula como la tercera parte del producto del área de la base por la altura. Es decir:

Volumen de la pirámide = $\frac{1}{3}$ (Área de la base) * (Altura)

De nuevo debes tener en cuenta que la base de una pirámide es una figura plana como un triángulo, cuadrado, un polígono, etc.

DESAFÍO 4.2.
En GeoGebra se construye una pirámide de la que se conocen las longitudes. Se calculan áreas y volúmenes.

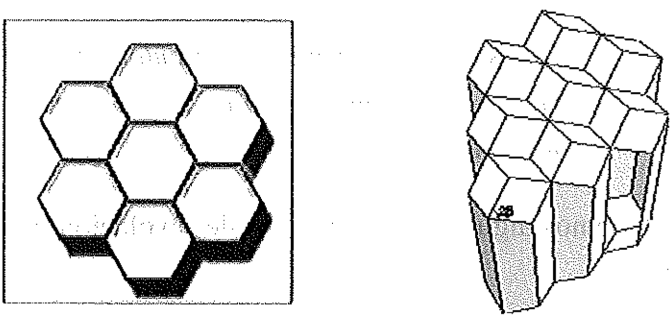
DESAFÍO S4.3, S4.4, S4.5, S4.6, S4.7, S4.8, S4.9, S4.10, S4.11, S4.12

DESAFÍO S4.13

DE INTERÉS: ¿Conocen las abejas las propiedades de los poliedros?

Los poliedros son configuraciones ligadas a la naturaleza (la naturaleza busca la forma de obtener el mejor rendimiento con el mínimo esfuerzo). Un ejemplo de esa situación es el que pasamos a describir a continuación.

Cuando las abejas se ponen a construir las colmenas donde almacenan la miel, buscan la forma de obtener la mayor rentabilidad: mayor superficie y capacidad de la celda usando la mínima cantidad de cera en la construcción de la misma. Es por ello que sus paneles están formados por celdas que determinan un mosaico homogéneo sin huecos desaprovechados. Esto se puede conseguir con celdas triangulares, cuadradas o hexagonales. De estas tres formas, si suponemos que el perímetro es el mismo, la que tiene mayor superficie es el hexágono. Por eso las celdas de las colmenas tiene forma hexagonal. Sin embargo, las celdas no son prismas hexagonales. Para cerrar la celdilla usan la estrategia de almacenar la misma cantidad de miel que una celda en forma de prisma hexagonal, pero usando la mínima cantidad de cera. Por ello cierran la celda por uno de los extremos con tres rombos de tal forma que el volumen que encierra la celdilla es el del prisma hexagonal, pero el área total de la celda es la menor posible. El ángulo de inclinación de los rombos es exactamente (70° 31' 43.606") con el que se consigue minimizar el área del poliedro (un rombododecaedro) que presentamos en la siguiente figura.



(a) (b)

FIGURA 2-26

2.9.1.5 Sólidos de revolución

El cuerpo geométrico que se obtiene mediante la rotación de una superficie plana llamada **figura generatriz**, alrededor de una recta (eje de rotación) que se halla en el mismo plano y no corta la figura, se llama **sólido de revolución.**

Un ejemplo, no muy común, es el **toro o arganeo** sólido obtenido haciendo girar un círculo en torno de un eje contenido en el mismo plano del círculo y sin cortar el eje.

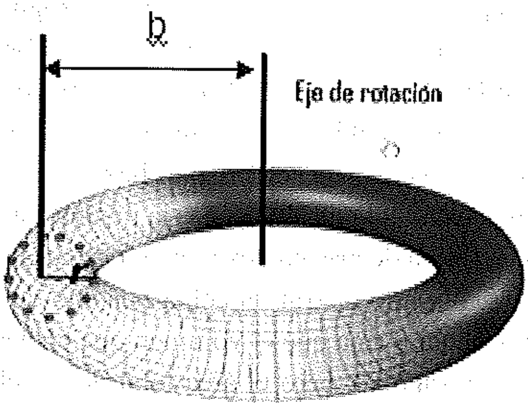


FIGURA 2-27

Donde: *r = radio del círculo*

b = distancia del centro del círculo de revolución

Área de la superficie $= 4\pi^2 b$

Volumen $= 2\pi^2 r^2 b$

Estudiaremos algunos de los sólidos de revolución más representativos.

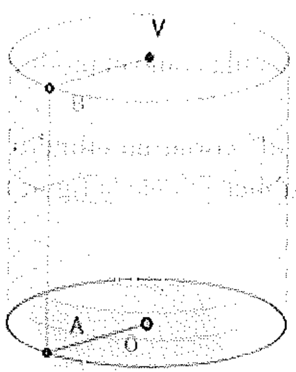
CILINDRO

Sólido generado al girar un rectángulo alrededor de uno de sus lados. En general el cilindro obtenido se llama **cilindro circular recto.**

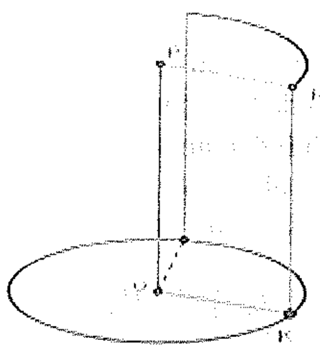
El cilindro consta de **dos bases circulares** paralelas y congruentes y una **superficie lateral** que, al "desenrollarse" da lugar a un rectángulo.

La distancia entre las bases es la **altura del cilindro.**

El cilindro puede ser visto también como una figura límite del prisma, cuando el número de lados del polígono de la base del prisma crece indefinidamente.



(a)



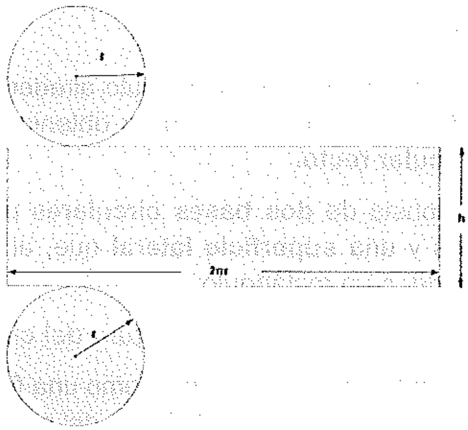
(b)

FIGURA 2-28

Dimensiones en un cilindro recto

Tienen dimensión de longitud en un cilindro recto: el radio de las bases, la longitud de la circunferencia de las bases y la altura.

Tienen dimensión de superficie en un cilindro recto: el círculo de las bases y la superficie lateral. Se denomina ***área lateral de un cilindro recto*** al área de la superficie lateral y ***área total*** a la suma del área de la superficie lateral con el área de los círculos de las bases.

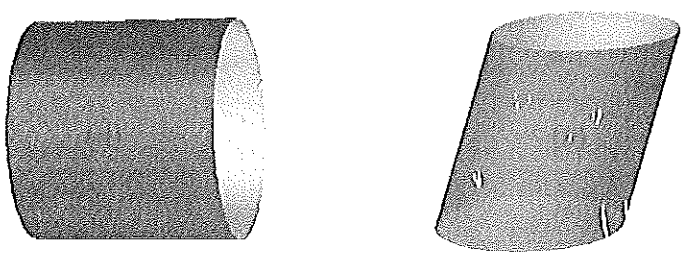


Área de las bases = $2\pi r$ | Área lateral = $2\pi r \cdot h$

FIGURA 2-29

El volumen de un cilindro recto se calcula como el producto del área de la base por la altura.

Cilindro oblicuo: es el que resulta de cortar un cilindro recto por dos planos paralelos que seccionan oblicuamente la figura generatriz. No es un sólido de revolución.



(a) (b)

FIGURA 2-30

DESAFÍO S5.1, S5.2, S5.3, S5.4

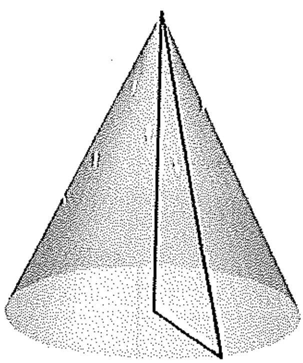
DESAFÍO S5.5

CONO

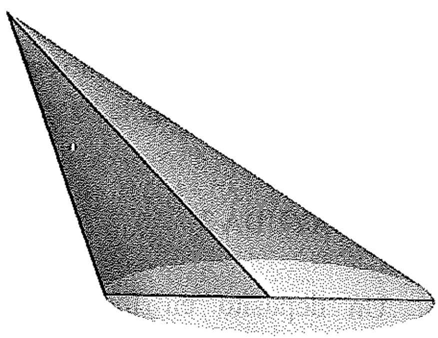
Cono: Es un sólido generado al girar un triángulo rectángulo alrededor de uno de sus catetos. En general el cono obtenido se llama **cono circular recto.**

El cono se compone de una **base circular** generada por el otro cateto al girar alrededor del eje y una **superficie lateral** generada por la hipotenusa del triángulo; ésta al "desenrollarse" da lugar a un sector circular. El **vértice** es el punto donde se encuentran la hipotenusa y el cateto que sirve de eje para generar el cono. La longitud del cateto que sirve de eje es la **altura del cono.**

El cono puede ser visto también como una figura límite de la pirámide, cuando el número de lados del polígono de la base de la pirámide crece indefinidamente.



Cono recto
FIGURA 2-32

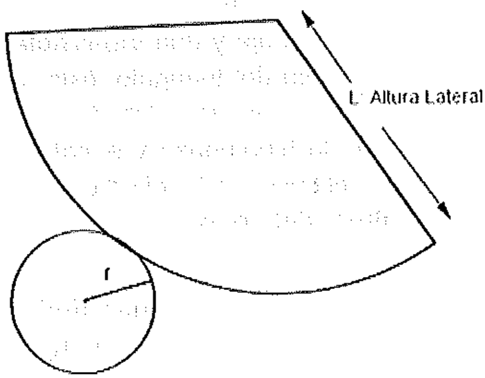


Cono oblicuo
FIGURA 2-32

Dimensiones en un cono recto

Tienen dimensión de longitud en un cono recto: el radio de la base, la longitud de la circunferencia de la base, la altura lateral y la altura del cono.

Tienen dimensión de superficie en un cono recto: el círculo de la base y la superficie lateral. Se denomina **área lateral de un cono recto** al área de la superficie lateral y **área total** a la suma del área de la superficie lateral con el área del círculo de la base.



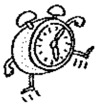
Área de la base = πr^2

Área lateral = $\pi r L$

Volumen = $\frac{1}{3}\ \pi r^2 h$

FIGURA 2-33

El **volumen de un cono recto** se calcula como la tercera parte del producto del área de la base por la altura.



AYUDA 2

Un depósito en forma de cono recto tiene de radio 5 metros en la base y altura igual a tres veces el diámetro de la circunferencia de la base. Si se quiere forrar el exterior del cono con un papel impermeabilizante, ¿cuánta cantidad de papel se necesita si también se forra la tapa?

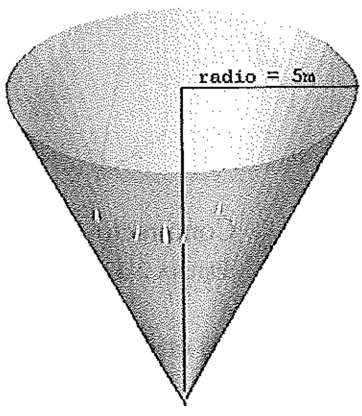


FIGURA 2-34

Solución

Como se sabe para poder determinar la cantidad superficial de papel, se debe calcular el área total del cono; recordemos que está dada por la fórmula:

$$\begin{aligned} \textit{Área total} &= 2\pi r \cdot h_L + \pi r^2 \\ &= 2\pi 5 \cdot h_L + \pi(5)^2 \\ &= 10\pi \cdot h_L + 25\pi \end{aligned}$$

En la fórmula anterior necesitamos conseguir h_L (altura lateral del cono); para calcular h_L tenemos la siguiente relación:

$$h_L^2 = H^2 + r^2$$

Como $H = 3 \cdot$ diámetro $= 3(2r) = 6 \cdot 5 = 30$ m, entonces, la ecuación anterior queda:

$h_L^2 = 30^2 + 5^2 = 900 + 25 = 925$ m^2

Luego $h_L = \sqrt{925}$ m $= 30.41$ m

Finalmente, con el valor de h_L se puede calcular el área total del cono; esto es:

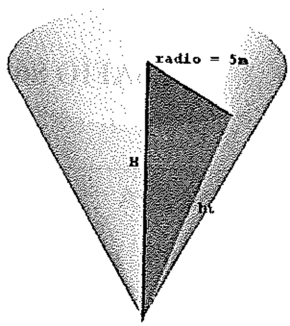


FIGURA 2-35

$$\begin{aligned} \textit{Área total} &= 10\pi \cdot h_L + 25\pi \\ &= 10\pi \cdot 30.41 + 25\pi \\ &= 329.1\pi\ m^2 \end{aligned}$$

Y con eso se puede responder que se necesitan 329.1 m^2 de papel para forrar el cono.

Si desea calcular el volumen del cono, se puede usar la expresión:

$$\begin{aligned} Volumen &= \frac{1}{3}\ \pi r^2\ H \\ &= \frac{1}{3}\ \pi(5\ m)^2\ (30\ m) \\ &= \frac{750}{3}\ \pi\ m^3 \end{aligned}$$

Un cono oblicuo es el sólido que resulta de cortar un cono recto mediante un plano oblicuo a su eje de rotación y que corte la superficie generatriz. En el cono oblicuo del gráfico (figura 2-32), se nota que el segmento que va desde el centro de la base al vértice es oblicuo a la base. No es un sólido de revolución.

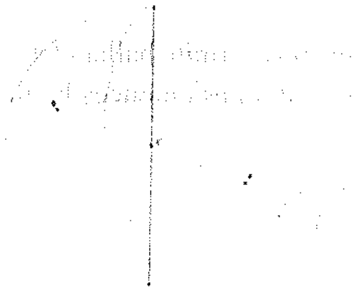
DESAFÍO S6.1, S6.2, S6.3, S6.4, S6.5

DESAFÍO S6.6

ESFERA

Esfera: es un sólido formado por la revolución de un círculo alrededor de uno de sus diámetros.

La esfera tiene la característica de que cada punto sobre ella equidista de un punto llamado **centro**. A tal distancia constante se le llama **radio**, y al doble del radio se le llama **diámetro**.



$$\text{Área de superficie} = S = 4\pi R^2$$

$$\text{Volumen} = V = \frac{1}{3}\ \pi R^3$$

FIGURA 2-36

Dimensiones de una esfera

Tienen dimensión de longitud en una esfera: el **radio** y el **diámetro.**

Tiene dimensión de superficie en una esfera: la **superficie de la esfera,** la cual podemos entender como la cáscara que recubre la esfera.

El **volumen de una esfera** se calcula como los cuatro tercios del producto de pi por el radio al cubo.

DESAFÍO S6.7

AYUDA 3A

Un tanque semiesférico tiene de radio 7 m. Calcula la capacidad de la semiesfera y el área superficial interior y exterior de ella.

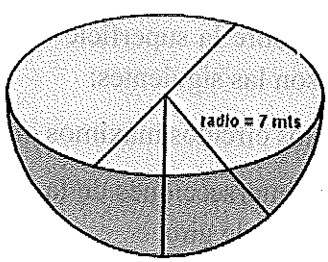


FIGURA 2-37

Solución

Ya conocemos una expresión que nos permite hallar el área total de la esfera. La capacidad de la semiesfera es entonces la mitad de la capacidad de la esfera.

$$\begin{aligned} Volumen &= \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right) \\ &= \frac{1372}{6}\pi\, m^3 \end{aligned}$$

Para calcular el área superficial de la semiesfera interior y exterior, se usa la fórmula dada para calcular el área total de la esfera, suponiendo que el área interior sea igual a la exterior, con eso

$$\begin{aligned} \text{Área de superficie} &= 4\pi R^2 \\ &= 4\pi\,(7\ m)^2 \\ &= 196\pi\ m^2 \end{aligned}$$

La **esfera** es la figura geométrica que presenta la menor superficie externa que encierra un volumen dado. Esta propiedad es la causa de su omnipresencia en el mundo físico: en la superficie de una gota de un líquido inmerso en un ambiente gaseoso o también líquido.

De interés: coordenadas geográficas

La Tierra es aproximadamente una esfera que gira alrededor de un eje que pasa por dos puntos fijos: el Polo Norte y el Polo Sur. Para situar los puntos sobre la superficie terrestre se definen unas líneas especiales que son las siguientes:

Meridianos: son los círculos máximos que pasan por los polos.

Paralelos: son las intersecciones de la esfera terrestre con planos perpendiculares al eje de giro.

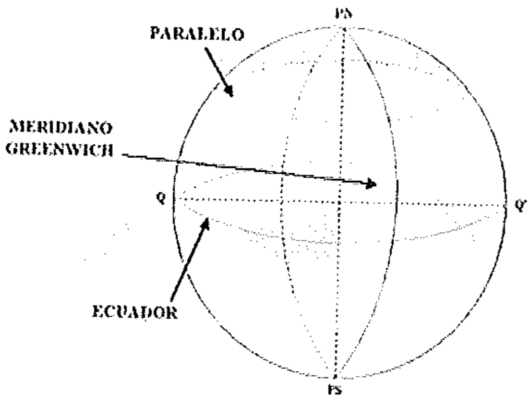


FIGURA 2-38

En un sistema geográfico

La latitud de un punto es el ángulo en que se encuentra el paralelo que pasa por el punto respecto al Ecuador (es su línea de base). Latitud Norte o Sur, según corresponda. La latitud del Ecuador es por tanto 0°.

La longitud de un punto es el ángulo que forma el meridiano que pasa por él con un meridiano que arbitrariamente se ha tomado como referencia. La longitud es Este u Oeste, según se encuentre el punto con respecto al meridiano referencia (el que pasa por Greenwich, el cuál es su línea de base).

AYUDA 3B

Practica en el DVD en el apartado GeoEspacial.

Platónicos. Unidad didáctica de *Javier Abia Llera* (19 escenas interactivas).

Proyecciones. Unidad didáctica de Juan Guillermo Rivera Berrío (13 escenas interactivas).

Video.

2.9.2 Retos

1. Clasifica los poliedros de la figura 2-39 en irregulares y regulares.

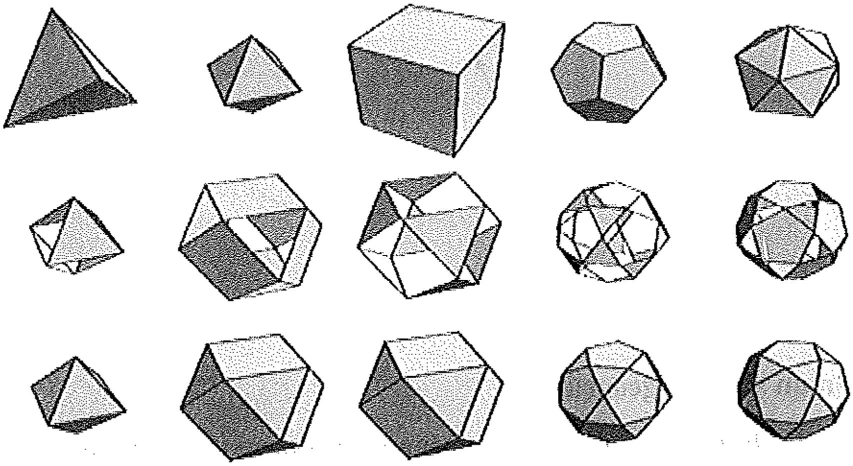


Figura 2-39

2. Observa los poliedros de la figura 2-40. Si los sitúas en un plano, mira que hay dos que no se pueden apoyar sobre todas sus caras. ¿Cuáles son?

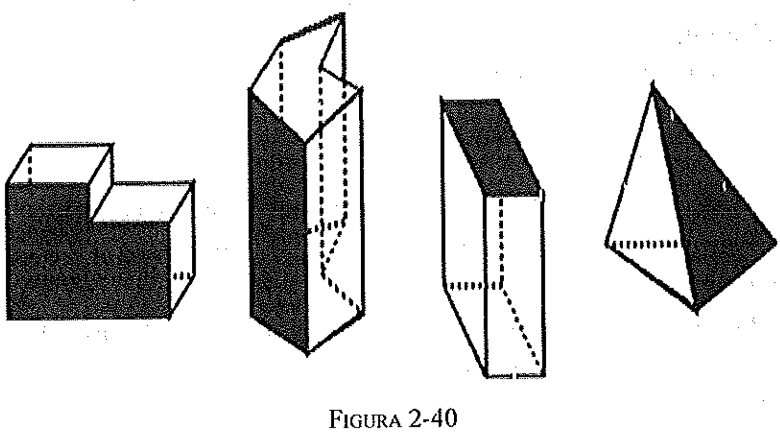
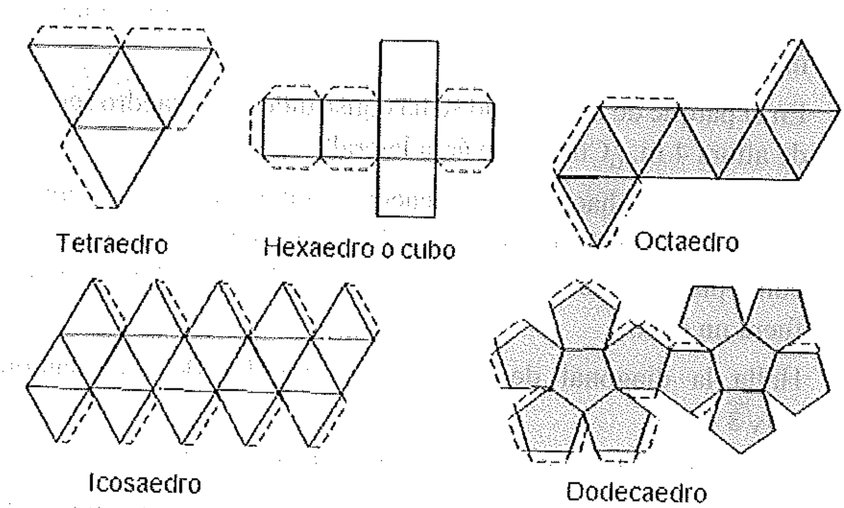


Figura 2-40

Poliedros cóncavos o no convexos son aquellos en el que en algún par de puntos interiores no los une un segmento de recta interior al poliedro, y a los demás **convexos.** Acá se trabajará siempre, salvo que se indique lo contrario, con poliedros convexos.

3. En la figura 2-41 tienes un desarrollo plano de cada poliedro regular o sólido platónico. Partiendo de ellos, dibújalos en una cartulina, recórtalos y constrúyelos. ¡Ah! ¡No te olvides de las pestañas para poder pegar bien las aristas!, con estos completa la tabla y comprueba la relación de Leonard Euler.



Sólidos platónicos o poliedros regulares
FIGURA 2-41

NOMBRE	No. DE CARAS (C)	No. DE ARISTAS (A)	No. DE VÉRTICES (V)	C + V –A =	No. DE ÁNGULOS DIEDROS
TETRAEDRO					
HEXAEDDRO					
OCTAEDRO					
DODECAEDRO					
ICOSAEDRO					

2.9.3 Reto

Consulta en un libro de geometría las fórmulas para calcular el área de las figuras planas más representativas (triángulo, cuadrado, polígonos regulares e irregulares y círculos) y realiza una tabla cuyo contenido sean estas fórmulas; si el polígono es irregular inspecciona cómo calcular el área haciendo una partición adecuada de polígonos más conocidos (triángulos, cuadrados, paralelogramos).

2.9.4 Retos

1. ¿Cuánto papel necesitaré para construir un cubo cuya diagonal mida 9 cm?
2. En el parque de una ciudad se ha construido un tetraedro regular de altura 4 m. ¿Cuál es su área lateral?
3. He encargado hacer un dodecaedro regular hueco de 3 cm de arista, de un material que pesa 20 kg/m^2, con el fin de usarlo como pisapapeles. ¿Cuál será su peso total? ¿Y si el pisapapeles fuera un cubo?
4. Halla la diagonal de un octaedro regular de área lateral $18\sqrt{3}\ cm^2$.
5. Halla el área de un icosaedro regular de arista 12 cm.
6. ¿Qué relación hay entre la arista de un cubo y su diagonal? ¿Y entre la arista y la diagonal de una cara? ¿Cuánto valdrá la arista de un cubo cuya diagonal vale 3 m?
7. Una piscina tiene una longitud de 18 m, una anchura de 8 m y una profundidad de 2 m. Se llena mediante 4 grifos que tienen un caudal de 120 litros por minuto cada uno. ¿Cuánto tiempo tardará en llenarse la piscina?
8. La longitud de la diagonal de una caja cúbica, que contiene un par de zapatos es de $16\sqrt{3}$ cm. Si se desea forrarla para un obsequio, ¿cuál será el área del papel necesario?

2.9.5 Retos

1. Un tubo cilíndrico de 7 cm de radio y 42 cm de altura tiene en su interior tres pelotas bien encajadas. Calcula el volumen de aire que hay en su interior.

2. La cúpula del observatorio del ITM tiene 6.5 m de radio la cual es de forma semiesférica. Calcula su área superficial.

3. Dentro de una caja cúbica cuyo volumen es 64 cm^3, se coloca una pelota que toca a cada una de las caras en su punto medio. Calcula el volumen de la pelota.

4. Se quiere construir un envase cilíndrico cuyo volumen es 125 cm^3. Halla la ecuación del área total.

5. Halla el área total de un prisma recto de 15 cm de altura cuya base son rombos de diagonales 16 cm y 12 cm.

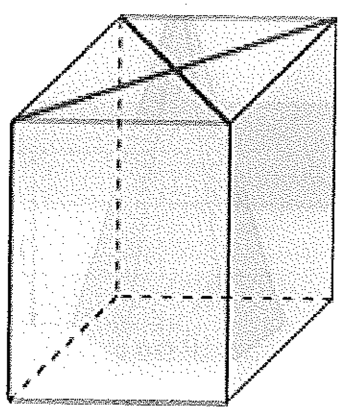


Figura 2-42

6. La base de una pirámide regular es un cuadrado de 6 dm de lado y su altura es de 4 dm. Halla su área total.

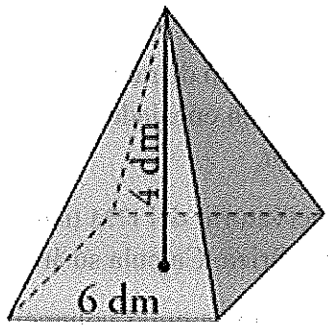


FIGURA 2-43

7. La base de esta pirámide regular es un hexágono de 10 cm de lado. Su altura que es de 24 cm se corta por un plano que pasa a 18 cm de la base. Halla el área total del tronco de pirámide que resulta.

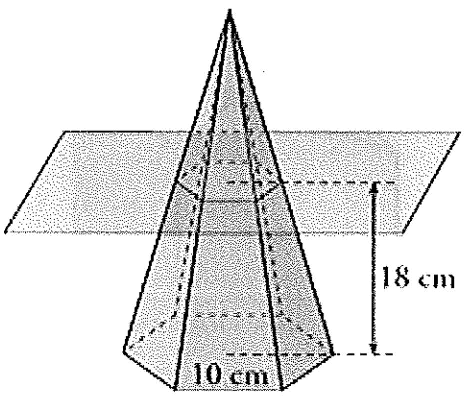


FIGURA 2-44

8. Averigua cuánto cuesta la reparación de esta casa, sabiendo que hay que:

- Blanquear las cuatro paredes, por dentro y por fuera, a \$6.500 el m^2.

- Reparar el tejado, a \$12.500 el m^2
- Embaldosar el suelo, a \$15.000 el m^2

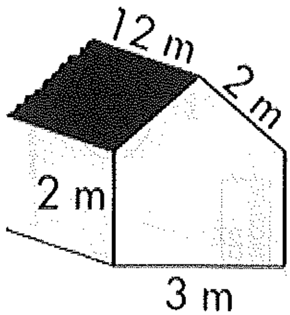


FIGURA 2-45

9. Encuentra el área lateral total y el volumen de un tanque de agua que tiene de radio de la base 80 cm y altura 120 cm.

10. Un prisma dodecagonal regular tiene de lado de la base 4 cm y de altura 10 cm si el prisma se inscribe a un cilindro. Compara el volumen del cilindro y del prisma.

11. El radio terrestre es aproximadamente de 6.400 km. Encuentra el área, el volumen de la tierra y la longitud del ecuador.

12. Encuentra el área lateral, total y volumen del cono, si el diámetro de la base es de 6 cm y su altura es de 4 cm.

13. Halla el área total de un octaedro en el que la distancia entre los vértices no consecutivos es de 20 cm.

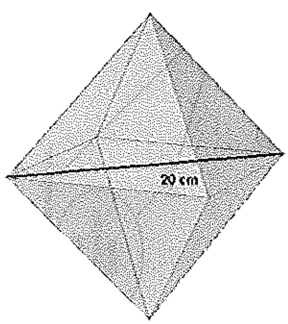
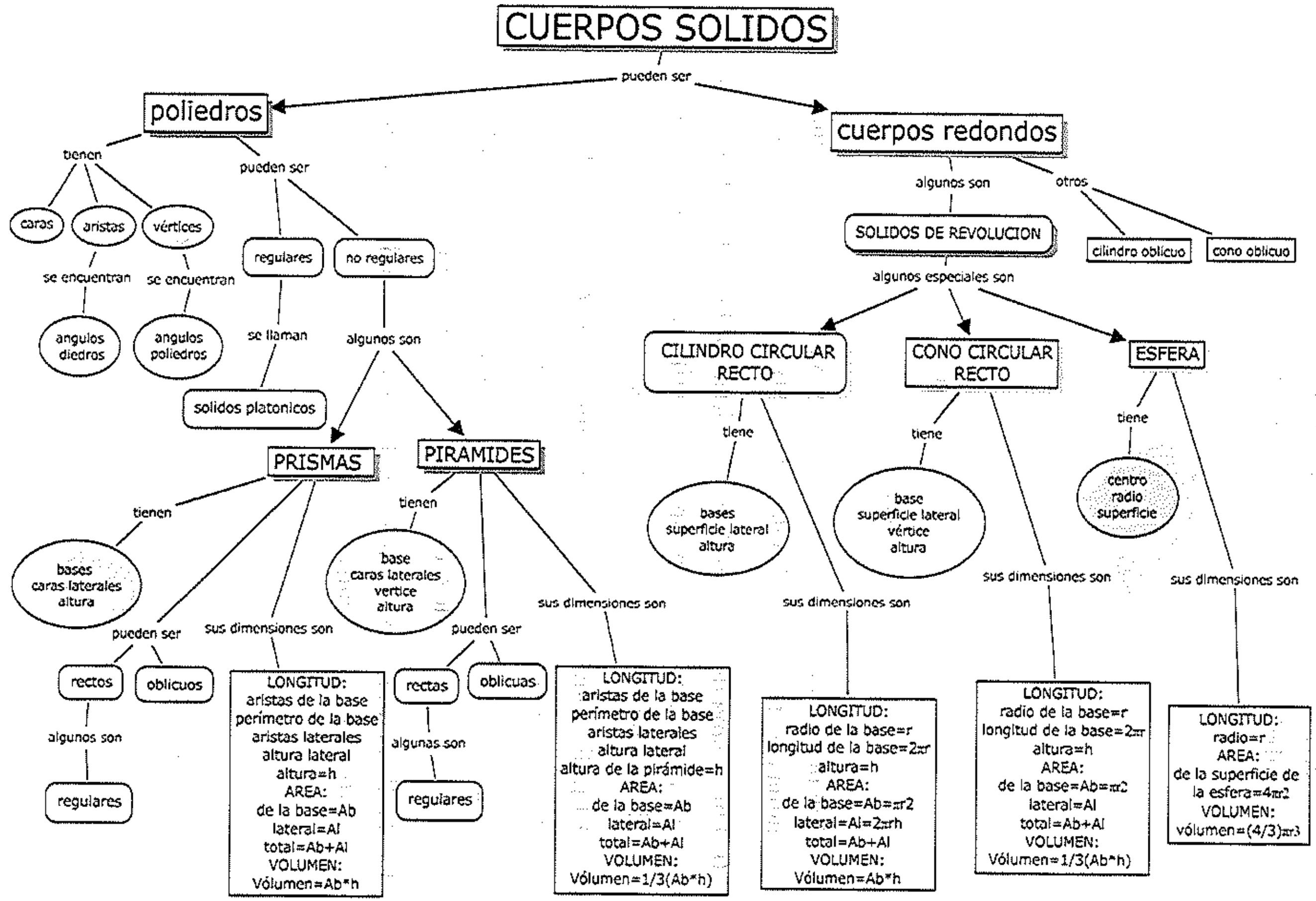


FIGURA 2-46


CUERPOS SOLIDOS
pueden ser
poliedros
cuerpos redondos
tienen
caras
aristas
vértices
se encuentran
se encuentran
angulos diedros
angulos poliedros
pueden ser
regulares
no regulares
se llaman
solidos platonicos
algunos son
PRISMAS
PIRAMIDES
tienen
bases caras laterales altura
pueden ser
rectos
oblicuos
algunos son
regulares
sus dimensiones son
LONGITUD: aristas de la base perímetro de la base aristas laterales altura lateral altura=h AREA: de la base=Ab lateral=Al total=Ab+Al VOLUMEN: Vólumen=Ab*h
tienen
base caras laterales vertice altura
pueden ser
rectas
oblicuas
algunas son
regulares
sus dimensiones son
LONGITUD: aristas de la base perímetro de la base aristas laterales altura lateral altura de la pirámide=h AREA: de la base=Ab lateral=Al total=Ab+Al VOLUMEN: Vólumen=1/3(Ab*h)
algunos son
otros
SOLIDOS DE REVOLUCION
cilindro oblicuo
cono oblicuo
algunos especiales son
CILINDRO CIRCULAR RECTO
CONO CIRCULAR RECTO
ESFERA
tiene
bases superficie lateral altura
sus dimensiones son
LONGITUD: radio de la base=r longitud de la base=2πr altura=h AREA: de la base=Ab=πr2 lateral=Al=2πrh total=Ab+Al VOLUMEN: Vólumen=Ab*h
tiene
base superficie lateral vértice altura
sus dimensiones son
LONGITUD: radio de la base=r longitud de la base=2πr altura=h AREA: de la base=Ab=πr2 lateral=Al total=Ab+Al VOLUMEN: Vólumen=1/3(Ab*h)
tiene
centro radio superficie
sus dimensiones son
LONGITUD: radio=r AREA: de la superficie de la esfera=4πr2 VOLUMEN: vólumen=(4/3)πr3

Por último, utilizando el embudo, agrega la pintura reflectiva sobre el pegador con el fin de que forme una capa impermeable y a la vez de alta reflectividad, con el fin que el recipiente no se caliente bajo la acción de la reacción solar, y no se produzca evaporación en el agua recogida en nuestro pluviómetro.

Una vez tengas el pluviómetro listo, lo debes colocar en un soporte que te permita fijarlo al suelo, para evitar que se vuelque o sea arrastrado por un viento fuerte y se riegue el agua que se ha recogido. El pluviómetro debe estar ubicado en un área despejada (lejos de árboles o edificaciones que desvíen o retengan el agua lluvia).

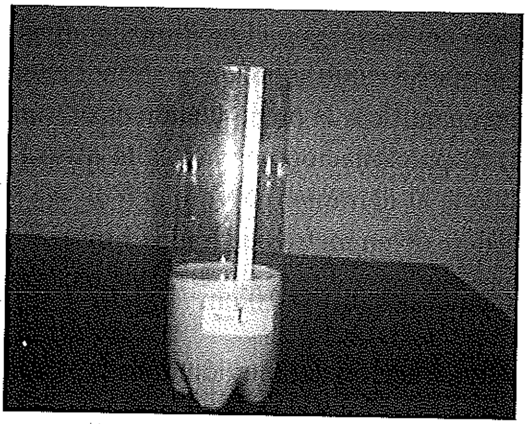


FIGURA 2-47

2.9.6 ANEXO

PLUVIÓMETRO

La precipitación o cantidad de lluvia que cae como parte activa del ciclo hidrológico determina la presencia continua del agua en la tierra. Los múltiples beneficios que nos trae y lo que podemos aprovechar son objeto de estudio, y es por ello que necesitamos cuantificar la cantidad de agua lluvia que cae.

Descripción del pluviómetro

Es un aparato empleado para medir la cantidad de agua que cae sobre la superficie del suelo; con él medimos el nivel o altura de la columna de agua que ha caído sobre una región. La unidad de medida utilizada para cuantificar la precipitación es el (mm) milímetro.

Un (1 mm) de precipitación nos indica **la altura** de la capa de agua que se obtiene al derramar un volumen de un 1 litro de agua sobre una superficie de un metro cuadrado (1 m^2),

$$1\ \text{litro/m}^2 = 10^3\text{cm}^3/(10^2\ \text{cm})^2 = 10^3\text{cm}^3/10^4\ \text{cm}^2 = 0.1\ \text{cm} = 1\ \text{mm}$$

ACTIVIDAD: Construcción del pluviómetro

Ahora construyamos un pluviómetro sencillo. Toma una botella de plástico (1 litro, 2 litros o hasta litro y medio), corta la punta de la botella de forma que te quede una especie de embudo, y de forma tal que la boca de ese embudo coincida con el diámetro de la botella. Debes tener cuidado con dejar una altura suficiente para que se forme una columna de agua que puedas medir fácilmente. Seguidamente, toma otro recipiente para realizar la mezcla de pegacor y agua, luego toma un embudo y vacía la mezcla a la botella de plástico que cortaste hasta donde comienza el área cilíndrica, ayuda a asentar la mezcla dándole unos pequeños golpes al recipiente sobre un superficie plana, deja secar la mezcla por varias horas.

GEOANALÍTICA

3. EJE TEMÁTICO: GEOANALÍTICA

3.1 LOGROS

- Hallar la dirección, la pendiente y los interceptos de una línea recta.
- Identificar distintas formas de la ecuación de una línea recta.
- Determinar analíticamente cuando dos rectas son paralelas o perpendiculares.
- Hallar las ecuaciones básica y general de una recta y resolver problemas de aplicación.
- Hallar las ecuaciones básica y general de una circunferencia.
- Resolver problemas de aplicación y analizar los posibles casos de intersección entre una circunferencia y una línea recta.
- Establecer diferencias y semejanzas entre las diferentes secciones cónicas.
- Hallar los elementos básicos de una parábola y de una hipérbola cuya ecuación está escrita en forma básica o general y dibuja su gráfica y resuelve problemas de aplicación.

3.2 INDICADORES DE LOGRO

- Interpreta claramente el concepto de línea recta.
- Ubica claramente las coordenadas en el plano cartesiano.
- Identifica el tipo de gráfica que representa una ecuación lineal
- Interpreta claramente el concepto de cónicas.

- Identifica el tipo de gráfica que representa una ecuación cuadrática.
- Aprovecha los modelos del álgebra definidos para la ecuación cuadrática en la solución.
- Identifica y modifica modelos matemáticos para el cálculo de elementos de las figuras cónicas.
- Aplica creativamente un algoritmo para solucionar problemas referidos a la ecuación cuadrática.
- Distingue la ecuación cuadrática que representa una figura cónica.

3.3 COMPETENCIA

Aplicar el análisis matemático y el álgebra para modelar figuras geométricas planas utilizando instrumentos geométricos y las tecnologías de información, como herramientas facilitadoras en la modelación de las curvas en estudio, permitiendo describirlas en situaciones físicas reales.

3.4 CONOCIMIENTOS PREVIOS

Para estudiar el tema siguiente.

Debes saber: geometría plana (ángulos y triángulos), geometría analítica (plano cartesiano y rectas), razones trigonométricas y solución triangular aplicando teoremas del seno y del coseno.

Para recordar los conceptos previos, contesta a la pregunta de manera intuitiva y después realiza una consulta en algún texto que trate del tema (pueden ser las guías anteriores u otros textos).

¿Sabes qué es una recta?

¿Sabes qué es un plano?

¿Sabes qué es un ángulo?

¿Sabes qué es un triángulo?

¿Sabes cómo se expresa matemática las funciones trigonométricas?

¿Para qué sirve el teorema del seno y el del coseno?

3.5 ESTÁNDARES

Reconocer los elementos básicos de la geometría analítica y su aplicación en la solución de problemas.

3.6 RESEÑA HISTÓRICA

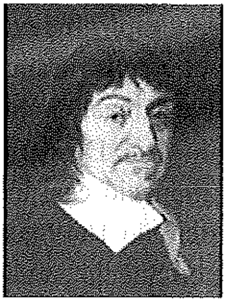


Foto tomada de: http://www.webdianoia.com/moderna/descartes/desc_bio.htm
Tomado de: http://www.educared.pe/docentes/articulo/846/biografia-de-rene-descartes/
16 de mayo de 2009. Ampliar información.

Descartes fue un filósofo y matemático francés que nació en La Haya, cerca de Tours, el 31 de marzo de 1596. Falleció en Estocolmo, Suecia, el 11 de febrero de 1650.

Descartes usó su nombre latinizado: Renatus Cartesius. Hay que considerar que el latín era el lenguaje erudito y esta costumbre era muy común. Ésta es la causa de que su sistema filosófico se llame "cartesiano" y que el sistema más corriente sobre el que se trazan las curvas que representan ecuaciones, sistema que Descartes inventó, es el de las "coordenadas cartesianas". Sin embargo, Descartes escribió en francés más que en latín, señal de la decadencia de esta lengua universal entre los eruditos en Europa.

La madre de Descartes murió cuando éste sólo contaba con un año de edad y parece ser que heredó su mala salud. Tuvo problemas con una tos crónica y cuando fue al colegio se le permitió quedarse en cama cuando lo desease. El hecho de que fuera un estudiante brillante contribuyó quizás a su favoritismo. Mantuvo durante toda su vida la costumbre de trabajar en la cama.

Desde los días de su educación con los jesuitas, Descartes fue siempre muy devoto. Cuando en 1633 tuvo noticia de la condena de Galileo por herejía, abandonó por el momento el libro que estaba escribiendo sobre el universo en el que aceptaba la teoría de Copérnico, lo que nos demuestra su espíritu devoto.

Pasó algunos años en el ejército francés, durante los cuales no participó en la guerra activa jamás, encontrándose con tiempo de sobra para trabajar en su filosofía. Descartes se estableció en la Holanda protestante. Allí permaneció casi toda su vida, hasta que un día aciago de septiembre del año 1649 aceptó una invitación de la corte sueca. El gobernante en Suecia en aquel momento era la reina Cristina, ansiosa de conseguir un buen filósofo para glorificar su Corte.

La reina Cristina era una de las personas más excéntricas que jamás ocupó un trono y para sacar fruto de Descartes lo hacía levantarse a las cinco de la mañana para que le diera clases de filosofía. Los delicados pulmones de Descartes no pudieron aguantar el invierno sueco, sobre todo a las cinco de la mañana, y sus visitas al castillo produjeron su muerte antes de que el invierno acabase. Su cuerpo, a excepción de la cabeza, fue regresado a Francia. En 1809 su cráneo pasó a manos de Berzelius, que se lo mandó a Cuvier; de esta manera, el cuerpo de Descartes pudo estar completo en su país.

Descartes fue un mecanicista. Empezó a dudar de todo, pero esta duda pareció ser lo que él buscaba como hecho incontrovertible. La existencia de una duda implicaba la existencia de alguien que dudaba, y de ahí dedujo la existencia de sí mismo. Expresó esto en la frase latina *Cogito ergo sum* ("Pienso, luego existo"). La doctrina que hizo a partir de este punto le valió el título que a veces se le ha concedido de padre de la filosofía moderna.

Aplicó su doctrina mecanicista incluso al cuerpo humano. Basando sus conclusiones en la obra de Besalia y Harvey, trató de presentar los mecanismos puramente anormales del cuerpo como un sistema de artificio mecánico. El entendimiento estaba fuera del cuerpo e independiente de él, aunque comunicándose por un "medio", que era la glándula pineal, pequeño órgano pegado al cerebro.

Escogió la glándula pineal porque creyó que era el único órgano no común entre animales y humanos, y éstos al carecer de ella carecían de alma y entendimiento, con lo que se convertían en simples máquinas vivientes. (En esto se equivocó Descartes, ya que Stenon descubrió unas décadas más tarde que dicha glándula existía en animales inferiores, y ahora incluso sabemos que un reptil primitivo tiene la glándula aún más desarrollada que el hombre.)

Descartes contribuyó principalmente a la ciencia con sus matemáticas. Se interesó especialmente en esta materia cuando estuvo en el ejército, ya que la inactividad de que gozó le dio mucho tiempo para pensar. Su gran descubrimiento lo hizo en la cama, según se cuenta, al observar el vuelo de una mosca. Se le ocurrió que la posición de la mosca podía darse en cada momento de su vuelo al localizar los tres planos perpendiculares que se cortan en el punto que ésta ocupa en el espacio. Es una superficie bidimensional, como puede ser una hoja de papel, cada punto se podía localizar por las dos rectas que se cortaban perpendicularmente en dicho punto.

Esto no era totalmente original. Todos los puntos del globo terráqueo se podían localizar por medio de una longitud y una latitud, que son en una superficie esférica, análogas a lo que representan las coordenadas cartesianas en una superficie plana.

Lo que de verdad conmovió al mundo fue el hecho fue que Descartes por medio de su sistema de coordenadas podía representar cada punto del plano por un sistema original de dos números. Para los puntos del espacio se requerían tres números, el tercero de los cuales representaba las unidades de arriba o abajo.

Descartes publicó este concepto en un apéndice de unas cien hojas que incluyo en su libro, publicado en 1637, que trataba de vértices y de la estructura del sistema solar. No es la primera vez en la historia de la ciencia que un apéndice fuera mucho más valioso en su contenido que el libro al que estaba sujeto.

El gran mérito del concepto de Descartes fue el de combinar álgebra y geometría para el enriquecimiento de ambas, pudiendo de esta manera resolver problemas con más facilidad que si se hubieran de hacer con las de las dos por separado. Esta combinación abrió camino al cálculo que Newton desarrolló, que consiste esencialmente en la aplicación del álgebra a fenómenos de variación lenta (como el movimiento acelerado) que pudieron así representarse geométricamente por distintos tipos de curvas.

Como fuera "análisis" el sinónimo de álgebra que se utilizó desde los días de Vieta, se llamó geometría analítica a la función que Descartes hizo con las dos ramas de las matemáticas.

3.7 SITUACIÓN PROBLEMA

Las directivas del ITM han tomado la iniciativa de reformar la plazoleta central de Campus Fraternidad, para construir el sistema solar en el rectángulo actual (superficie). Como la última órbita se corresponde con Plutón, se desea determinar cuál es la elipse de menor excentricidad contenida en esta área. Recordemos que cuanto más se separa la órbita de un cuerpo celeste de la circunferencia para adquirir la forma ovalada, mayor es su excentricidad.

3.8 SECCIÓN UNO

3.8.1 LA LÍNEA RECTA

Antes de dar inicio al estudio de la LÍNEA RECTA, recuerda:

3.8.1.1 SISTEMA DE COORDENADAS RECTANGULARES

Divide el plano cartesiano en cuatro cuadrantes por medio de dos rectas perpendiculares que se cortan en el punto (0, 0) que es el origen, así:

A la recta horizontal se le llama eje "x", y a la recta vertical se le llama eje "y".

Los puntos que se dibujan en este sistema se llaman **coordenadas rectangulares** de la forma (x, y), donde "x" recibe el nombre de abscisa (*variable independiente*) y se ubica en el eje "x". La "y" recibe el nombre de ordenada (*variable dependiente*) y se ubica en el eje "y".

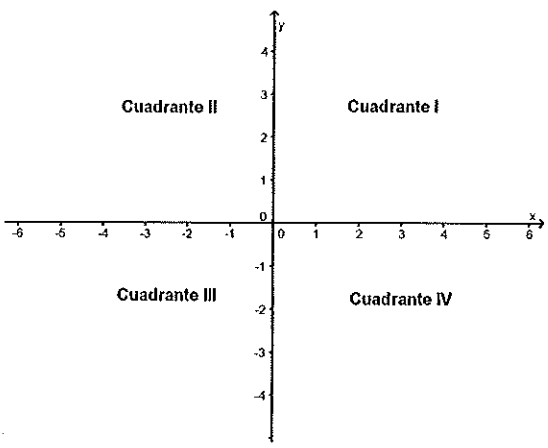


FIGURA 3-1

En el eje *x*, todos los valores a la derecha del origen son positivos y a su izquierda son negativos. En el eje *y*, todos los valores que se ubican del origen hacia arriba son positivos y hacia abajo, negativos.

AYUDA 0

Conceptos básicos. Unidades didácticas de los profesores españoles José Antonio Salgueiro González y Juan Luis Tomé Marqués (19 escenas interactivas).

AYUDA 1

Ubica en el plano cartesiano las siguientes coordenadas rectangulares:

A. (–2, 5): ubico en el eje x a –2 y subo 5 unidades
B. (4, 0): ubico en el eje x a 4 y no subo nada.
C. (0, –3): ubico en el eje x a 0 y bajo hasta –3.
D. (–2, –7): ubico en el eje x a –2 y bajo hasta –7.
E. (5, –1): ubico en el eje x a 5 y bajo hasta –1.

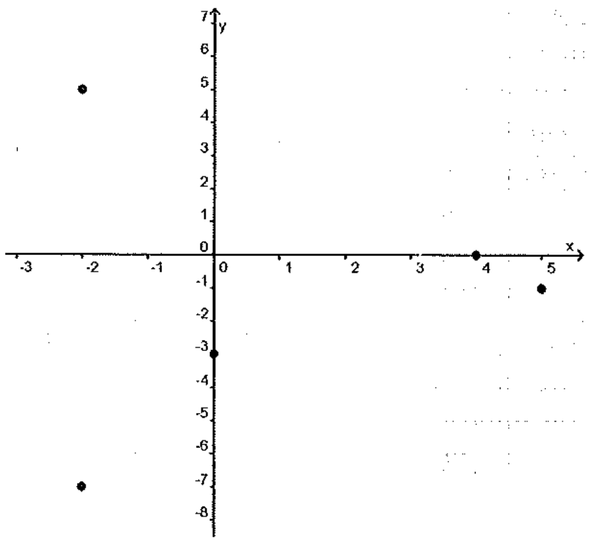


FIGURA 3-2

HERRAMIENTA

La *recta* es una sucesión infinita de puntos. Cuando se traza en el plano cartesiano, se genera a partir de la gráfica de una función lineal, la cual relaciona a dos variables, una llamada independiente "x" y la otra llamada dependiente "y". Se llama dependiente a la variable "y", porque su existencia depende del valor que tome la variable "x".

AYUDA 2

Grafica la función $y = 3x - 2$.

Solución

Se debe escoger algunos números que representan a la variable "x", para obtener el valor de la variable y respectivamente, así:

x	-2	-1	0	1
y	-8	-5	-2	1

El proceso:

Para x = –2

$$y = 3(-2) - 2 = -6 - 2 = -8$$

Para x = –1

$$y = 3(-1) - 2 = -3 - 2 = -5$$

Para x = 0

$$y = 3(0) - 2 = 0 - 2 = -2$$

Para x = 1

$$y = 3(1) - 2 = 1$$

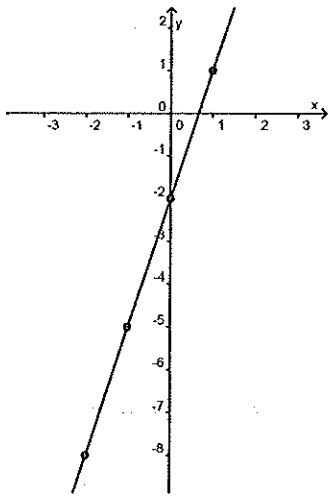


FIGURA 3-3

Lo que genera las siguientes coordenadas:

(–2, –8), (–1, –5), (0, –2) y (1, 1). Luego se ubican en el plano cartesiano.

NOTA: Es importante que tengas en cuenta que para graficar una línea recta basta con obtener dos puntos de ella y luego con una regla prolongarlos hasta el infinito.

AYUDA 3

Grafica la función $y = -\frac{1}{2}x + 1$

Solución

Se deben escoger dos números que representen a la variable "x", para obtener dos valores de "y", así:

x	0	2
y	1	0

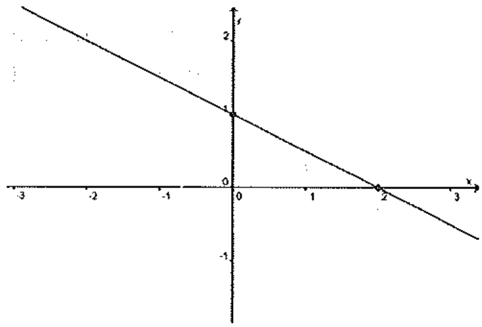


FIGURA 3-4

El proceso:

Para x = 0

$y = \frac{-1}{2}(0) + 1 = 0 + 1 = 1$

Para x = 2

$y = \frac{-1}{2}(2) + 1 = -1 + 1 = 0$

Así se obtiene las coordenadas (0, 1), (2, 0)

3.8.1.2 DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS

Al trazar por el punto A una paralela al eje "x" y por B una paralela al eje "y", éstas se interceptan en el punto C, determinando el triángulo ΔACB y en el cual se reconoce: $\overline{AB}$ como la hipotenusa, $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ como los catetos.

Calculando las medidas de los catetos del triángulo rectangular en función de las coordenadas rectangulares de los puntos A, B, y C, se tiene que:

$\overline{AC} = x_2 - x_1$ y $\overline{BC} = Y_2 - Y_1$

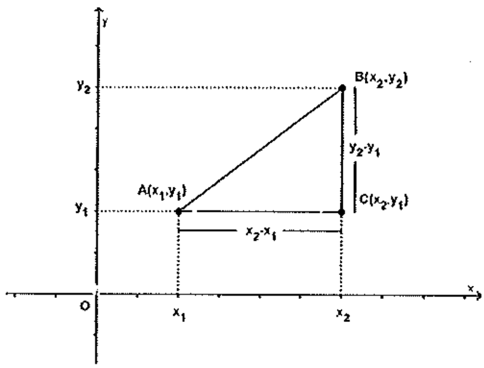


FIGURA 3-5

Utilizando el teorema de Pitágoras en el triángulo A, C y B, se obtiene:

$$|\overline{AB}|^2 = |BC|^2 + |\overline{AC}|^2$$

Al reemplazar las medidas de los catetos se tiene:

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2}$$

NOTAS:

1. La distancia entre dos puntos siempre es positiva.
2. El orden en el cual se restan las coordenadas de los puntos A y B no afecta el valor de las distancias (todo número negativo elevado a una potencia par da positivo).

AYUDA 4

Calcula la distancia entre los puntos $A(2,3)$ y $B(-2,-3)$.

Solución

Se ubican los puntos en el plano cartesiano. Se asocian los puntos, es decir, $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$, con $x_1 = 2$ $y_1 = -2$, $x_2 = -2$ $y_2 = -3$, finalmente se reemplaza en la fórmula de distancia entre dos puntos:

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2}$$

Queda

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(-3-3)^2 + (-2-2)^2}$$

$$|\overline{AB}| = \sqrt{36+16} = \sqrt{52}$$

$|\overline{AB}| = 7.21$ Distancia entre los dos puntos

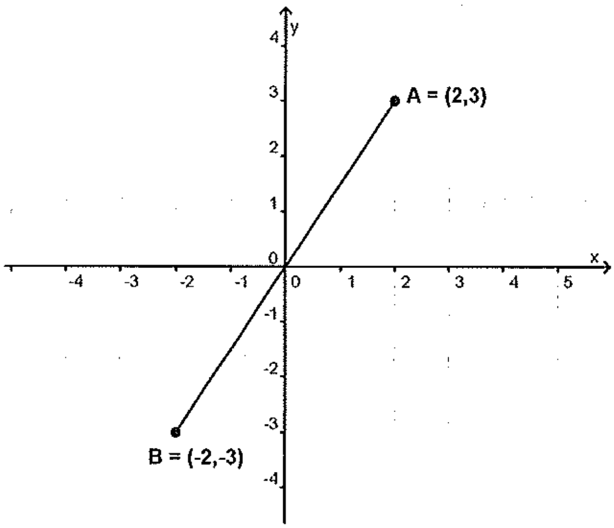


FIGURA 3-6

3.8.1.3 PUNTO MEDIO DE UN SEGMENTO

Hipótesis

Se consideran dos puntos del plano:
$A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$.

Tesis

Se define el punto medio de un segmento como

$$M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

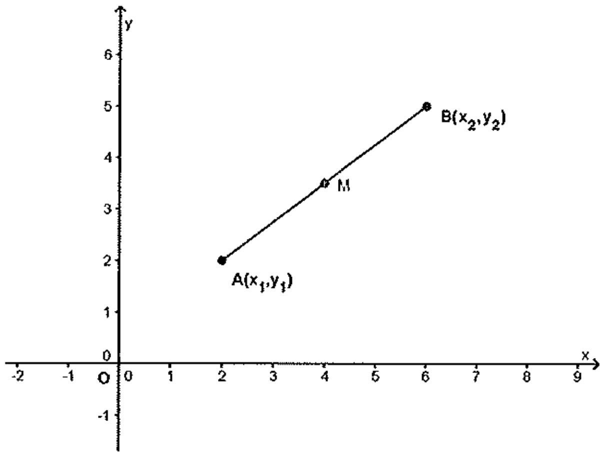
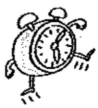


FIGURA 3-7



AYUDA 5

Halla las coordenadas del punto medio dado por (–2, 3) y (4, –2).

Solución

Se nombran los puntos $A(-2, 3)$ y $B(4, -2)$, luego $x_1 = -2$; $y_1 = 3$; $x_2 = 4$; $y_2 = -2$ y luego se reemplaza en

$$M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

$$M\left(\frac{-2+4}{2},\frac{3+(-2)}{2}\right) = M\left(1,\frac{1}{2}\right)$$

Donde el punto del medio del segmento formado por $\overline{AB}$ es $M\left(1,\frac{1}{2}\right)$; se puede comprobar que $\overline{AM} = \overline{MB}$, analizando:

$$\overline{AM} = \sqrt{\left(3-\frac{1}{2}\right)^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{\left(\frac{6-1}{2}\right)^2 + (-3)^2}$$

$$\overline{AM} = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + 9} = \sqrt{\frac{25}{4} + 9} = \sqrt{\frac{25+36}{4}}$$

$$\overline{AM} = \sqrt{\frac{61}{4}} = 3{,}9$$

Ahora

$$\overline{MB} = \sqrt{\left(\frac{1}{2} - (-2)\right)^2 + (1-4)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2} + 2\right)^2 + (3)^2}$$

$$\overline{MB} = \sqrt{\left(\frac{1+4}{2}\right)^2 + 9} = \sqrt{\frac{25}{4} + 9} = \sqrt{\frac{25+36}{4}} = \sqrt{\frac{61}{4}}$$

$$\overline{MB} = \frac{\sqrt{61}}{2} = 3{,}9$$

Se concluye que son iguales las distancias, por lo tanto, M sí es el punto medio.

3.8.1.4 Dirección y pendiente de un segmento

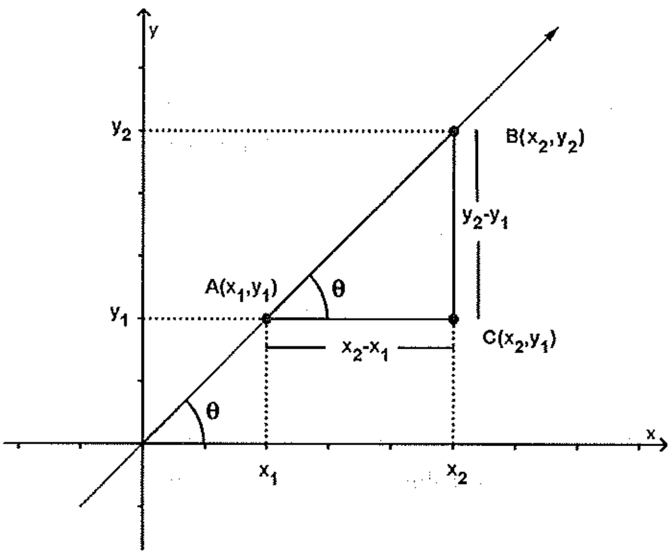


Figura 3-8

En la figura, θ representa la dirección o inclinación de la recta respecto al eje de las "x". La razón entre la longitud $|\overline{BC}|$ y $|\overline{AC}|$ se conoce como pendiente de una recta y se simboliza con la letra **m**.

$$m = \frac{desplazamiento\ dirigido\ vertical}{desplazamiento\ dirigido\ horizontal} = \frac{\Delta y}{\Delta x}, donde\ \Delta x \neq 0$$

$$m = \frac{|\overline{BC}|}{|\overline{AC}|} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, con\ x_2 - x_1 \neq 0$$

También se debe establecer una relación entre la pendiente **m** y las razones trigonométricas para triángulo rectángulo:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y}{x} = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente} = Tan\theta$$

$$luego\quad m = Tan\theta\ \therefore Tan^{-1}(m) = \theta$$

- Si **m** es positivo la recta es creciente a medida que "x" se hace más grande.
- Si **m** es negativo la recta es decreciente a medida que "x" se hace más pequeña.

HERRAMIENTA

- Si una recta es horizontal, entonces $y_1 = y_2$ y su pendiente es 0.
- Si una recta es vertical, entonces $x_1 = x_2$ y su pendiente es indefinida.
- Si el **ángulo de dirección** de la recta es un ángulo agudo, su pendiente es positiva.
- Si el **ángulo a dirección** de la recta es un ángulo obtuso, su pendiente es negativa.

3.8.1.5 Ángulo de dirección

Si una recta corta al eje x, se le llama ángulo a dirección (o de inclinación) de la recta al ángulo θ que cumple las siguientes condiciones:

- θ está formado por la recta y la parte del eje x ubicado a la derecha del punto donde la recta corta a este eje.
- θ es un ángulo positivo (medido en sentido contrario del movimiento de las agujas del reloj) menor de 180°.

AYUDA 6

Halla la pendiente y el ángulo de inclinación de la recta que une los puntos $A(-5, 3)$ y $B(2, -3)$.

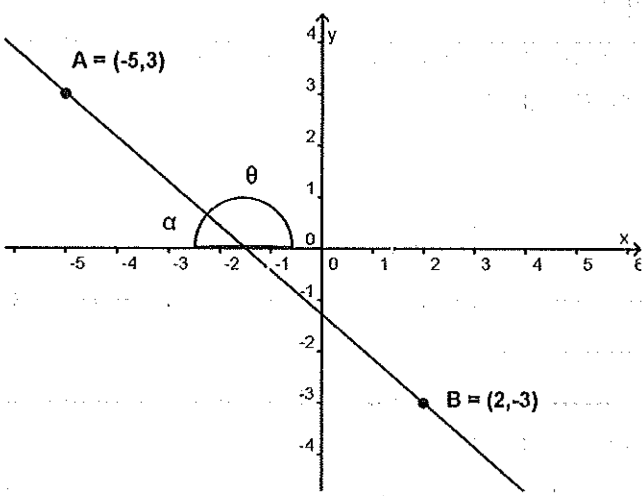


Figura 3-9

Solución

Se reemplaza en la fórmula de la pendiente y se tiene que $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$, entonces:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-3-3}{2+5} = \frac{-6}{7} = -0.85 \quad \therefore\ m = -0.85$$

Ahora, para calcular el ángulo de dirección se tiene $Tan\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$$Tan\alpha = -\frac{6}{7} \text{ Luego } \alpha = Tan^{-1}\left(-\frac{6}{7}\right), \text{ entonces } \alpha = -40.6^{\circ}$$

Este ángulo se desplaza en dirección negativa porque rota en el mismo sentido de las manecillas del reloj. Por lo tanto, para hallar el ángulo de dirección θ (obtuso), entonces, su respectivo valor en forma positiva es:

$$\theta = 180^{\circ} - \alpha \qquad \theta = 180^{\circ} - 40.6^{\circ} = 139.39^{\circ} \qquad \therefore\ \theta = 139.4^{\circ}$$

3.8.1.6 Ecuación de la recta punto - pendiente

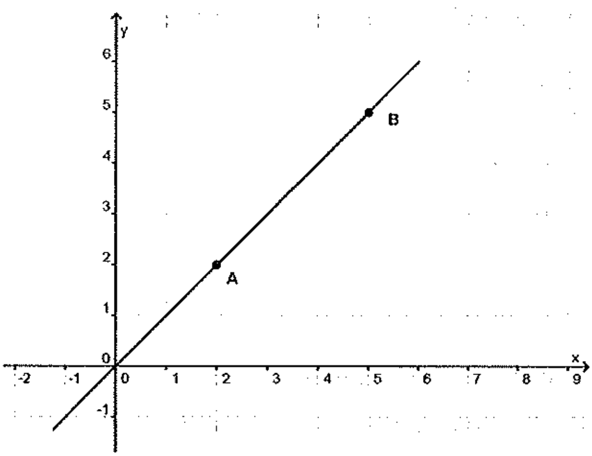


Figura 3-10

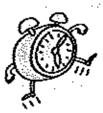
Se conoce un punto $A(x_1, y_1)$ y la pendiente de la recta; se debe encontrar para cualquier punto $B(x, y)$ cuál es la relación matemática existente.

Se debe utilizar la fórmula pendiente $m = \dfrac{y - y_1}{x - x_1}$.

Organizando esta ecuación de otra forma, se tiene que:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

La cual es la fórmula de la ecuación de la recta, conocido un punto de ella y su pendiente.



AYUDA 7

Halla la ecuación de la recta que pasa por $(-3, 4)$ y su pendiente es 2.

Solución

El punto conocido $(x_1, y_1) = (-3, 4)$ y la pendiente $m = 2$, entonces, sustituyendo en la ecuación se tiene:

$$y - 4 = 2(x - (-3))$$
$$y - 4 = 2x + 6$$
$$y = 2x + 6 + 4$$
$$y = 2x + 10$$

3.8.1.7 Ecuación de la recta que pasa por dos puntos

En este caso se conocen dos puntos, mas no se conoce la pendiente de la recta, entonces se calcula, utilizando la fórmula $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = k$. Se supone que dio un valor de "k", luego se escoge

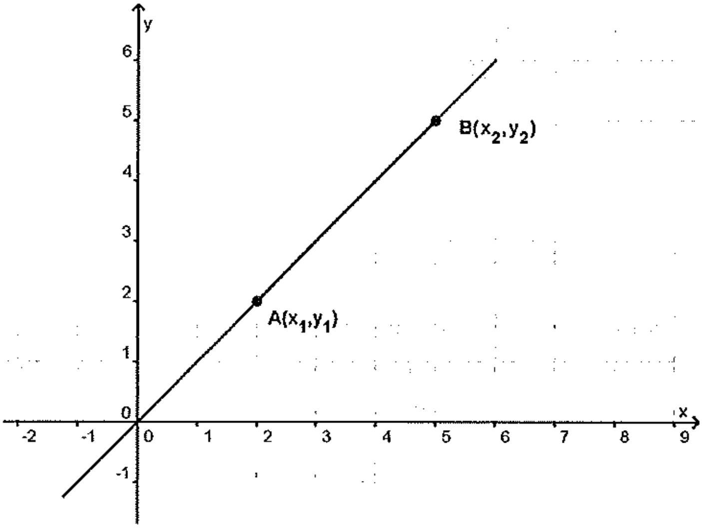


FIGURA 3-11

cualquiera de los puntos conocidos A o B y la sustituimos en la ecuación $y - y_1 = m(x - x_1)$, escogiendo el punto A nos queda $y - y_1 = k\ (x - x_1)$ y aquí tendremos la función de la recta que pasa por dos puntos.

AYUDA 8

Halla la ecuación de la recta que pasa por (–1, 3) y (2, 0).

Solución

Sea $A(-1,3)$ y $B(2,0)$

Se calcula la pendiente $m = \dfrac{0-3}{2-(-1)} = \dfrac{-3}{3} = -1$. Luego se escoge cualquier punto, por ejemplo: $A(-1,3) = (x_1 - y_1)$, entonces reemplazando en la ecuación de la recta:

$$(y - y_1) = m(x - x_1)$$
$$(y-3) = -1(x-(-1))$$
$$y = -x - 1 + 3$$
$$y = -x + 2$$

3.8.1.8 Ecuación general de una recta

En cualquiera de las formas que se desarrolle la línea recta, se puede observar que todas corresponden a una ecuación de primer grado en "x" y "y" de la forma general

$$Ax + By + C = 0$$

De donde se puede deducir la pendiente relacionando los coeficientes así: $m = -\dfrac{A}{B}$, y su intercepto con el origen $b = -\dfrac{C}{B}$; luego se puede escribir:

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B} \Rightarrow y = mx + b$$

AYUDA 9

Dada la ecuación $5x + 8y - 10 = 0$, calcula la pendiente (m) y la ordenada del intercepto con el eje y (b).

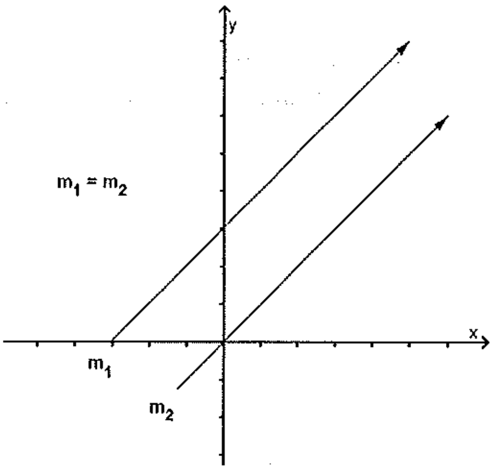
Solución

Se reconocen los coeficientes $A = 5$; $B = 8$; $C = -10$

$$m = -\frac{5}{8}; \qquad b = -\frac{-10}{8} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}; \qquad b = \frac{5}{4}$$

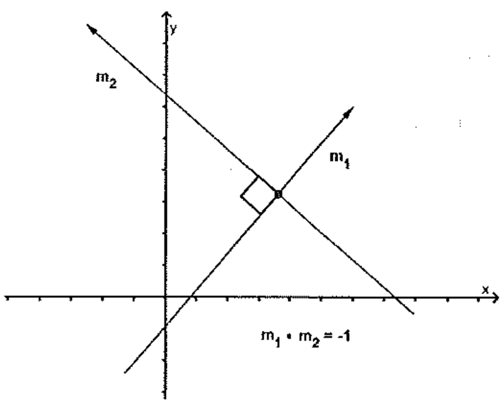
Luego se puede escribir $y = -\dfrac{5}{8}x + \dfrac{5}{4}$

- Dos rectas son paralelas si sus pendientes son iguales $m_2 = m_1$.



Rectas paralelas
FIGURA 3-12

- Dos rectas son perpendiculares si el producto de sus pendientes es igual a -1, es decir, $m_1 \cdot m_2 = -1$.



Rectas perpendiculares
FIGURA 3-13

AYUDA 10

Halla la ecuación de la recta que pasa por $(-2,-3)$ y es paralela a la recta $y = -2x + 1$.

Solución

La recta dada es $y=-2x+1$, entonces la pendiente $m_1=-2$, por el criterio de paralelismo $m_2=-2$.

Se utiliza el punto (–2, –3) y lo sustituimos en la ecuación

$$
\begin{aligned}
&y-y_1=m(x-x_1)\\
&y-(-3)=-2(x-(-2))\\
&y+3=-2(x+4)\\
&y=-2x-4-3\\
&y=-2x-7
\end{aligned}
$$

AYUDA 11A

Halla la ecuación de la recta que pasa por $(-2,-3)$ y es perpendicular a $y=-2x+1$.

Solución

La recta dada es $y=-2x+1$, entonces la pendiente $m_1=-2$, por el criterio de perpendicular $m_2=\frac{1}{2}$

Se utiliza el punto (–2, –3) y se sustituye en la ecuación

$$
\begin{aligned}
&y-y_1=m(x-x_1)\\
&y-(-3)=\frac{1}{2}(x-(-2))\\
&y+3=\frac{1}{2}(x+2)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}2\\
&y=\frac{1}{2}x+1-3\\
&y=\frac{1}{2}x-2
\end{aligned}
$$

DESAFÍOS A1.1

3.8.2 RETOS

Verifica la fórmula $M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$ del punto medio, con la siguiente construcción:

Traza un trapecio rectángulo en un plano cartesiano, de tal forma que uno de sus lados quede sobre el eje semieje positivo de las x y verifica una propiedad de la Geometría que dice que: "la medida de la base media de un trapecio es igual a la semisuma de las medidas de las bases".

3.8.3 RETOS

1. Se tiene un par de puntos:

   Grafícalos en un plano de coordenadas.
   Determina la distancia entre ellos.
   Obtén el punto medio del segmento que los une.

   a. (–2, 1) y (4, –3)
   b. (6, –2) y (–1, 3)
   c. (1, –6) y (–1, –3)
   d. (3, 4) y (–3, –4)
   e. (5, 0) y (0, 6)

2. Halla la distancia entre los puntos A(1, 4) y B(6, –8)

   RECUERDA QUE: $\overline{P_1P_2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

3. Calcula la distancia de los siguientes pares ordenados:

   $P_1(-3, 0)$ y $P_2(5, 0)$

   $P_1(1, 8)$ y $P_2(-2, 0)$

   $P_1(-5, 2)$ y $P_2(5, 4)$

4. ¿Cuál es el valor de x si la distancia entre P(8, –1) y Q(x, 3) es $4\sqrt{10}$?

5. Dibuja y halla la pendiente de la recta que pasa por los puntos P(–2, –1) y Q(3, 5). Señala el ángulo de dirección α que se forma entre el eje positivo de las x y la recta, y resuelve las siguientes preguntas:

   a. La pendiente es positiva, negativa, no existe o es cero. ¿Por qué?
   b. ¿Cuál es la ecuación de la recta?
   c. ¿Cuál es el intercepto con el eje y?
   d. ¿Cuál es el valor del ángulo α?

   RECUERDA QUE:

   $$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad \textit{siempre que } x_2 \neq x_1; \quad y - y_1 = m(x - x_1)$$

   $$\text{m} = \text{Tan } \alpha = \frac{y}{x}$$

6. Calcula la amplitud del ángulo α que forma la recta r con la dirección positiva del eje x si sabes que pasa por los puntos:

   A(4, 3), B(–1, 4)

   C(2.5, 2), D(1.5, $\sqrt{3}$)

   E($\sqrt{5}$, 2.6), F($\sqrt{2}$, 1.3)

   G(3, 8), H(–3.4, $2\sqrt{2}$)

7. Demuestra que el cuadrilátero con vértices P(1, 2), Q(4, 4), R(5, 9) y S(2, 7) es un paralelogramo y que su diagonales se bisecan entre sí.

8. Traza el rectángulo con vértices A(1, 3), B(5, 3), C(3, 6) y D(7, 6) en un plano de coordenadas. Determina el área del mismo.

9. Grafica el paralelogramo de vértices A(1, 2), B(5, 2), C(3, 6) y D(7, 6) en un plano de coordenadas. Determina el área del mismo.

10. Grafica los puntos A(0, 1), B(5, 0), C(4, 3) y D(2, 3) en un plano de coordenadas. Traza los segmentos AB, BC, CD Y DA. ¿Qué clase de cuadrilátero es ABCD y cuál es su área?

11. Grafica los puntos P(5, 1), Q(0, 6) y R(-5, 1) en un plano de coordenadas. ¿Dónde debe estar el punto S a fin de que el cuadrilátero PQRS sea un cuadrado? Determina el área de éste.

12. Demuestra que el triángulo de vértices A(0, 2), B(–3, –1) y C(–4, 3) es isósceles.

13. Determina el área del triángulo de vértices A(–2, 1), B(4, 1) y C(7, 4).

14. Demuestra que el triángulo de vértices C(–3, –3), D(3, 1) y E(2, 2) es rectángulo, utilizando el recíproco del teorema de Pitágoras.

15. Grafica el paralelogramo de vértices A(–2, –1), B(4, 2), C(7, 7) y D(1, 4), obtén los puntos medios de sus diagonales y concluye que éstas se intersecan en su punto medio.

16. Halla el centro y el radio de la circunferencia que pasa por los puntos D(0, 0), E(1, 7) y F(7, –1). Utiliza sólo el concepto de distancia entre dos puntos. $\overline{OD} = \overline{OE} = \overline{OF}$ y origen O(x, y).

17. Prueba que los triángulos de vértices G(3, 5), H(1, 1), I(–1, 2), y J(0, –1), K(2, 3), L(4, 2) son rectángulos y congruentes.

18. Halla la ecuación canónica y general de la recta que pasa por el punto (–4, 3) y tiene pendiente $\frac{1}{2}$.

19. Halla la pendiente m y el intercepto con el eje y de la recta cuya ecuación es $2y - 3x = 6$.

20. Demuestra que los puntos (3, 6), (5, 4), (–4, –1) y (–2, –3) son vértices de un rectángulo. Calcula luego su perímetro, su área y la longitud de cada una de sus distancias.

21. Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto (2, 3) y cumple la condición siguiente:

    a. Es paralela a la recta $2x + 37 - 5 = 0$
    b. Es perpendicular a la recta $4x + 5y - 20 = 0$

22. Halla la distancia d desde:

    La recta $8x + 15y - 24 = 0$ al punto (–2, –3)

    La recta $6x - 8y + 5 = 0$ al punto (–1, 7)

23. Dado el triángulo de vértices A(–2, 1), B(5, 4) y C(2, –3), halla la longitud de la altura correspondiente al vértice A y el área del mismo.

24. Halla la distancia d del punto de intersección de las rectas $x + 3y - 4 = 0$, $5x - y + 6 = 0$ a la recta $4x - y - 3 = 0$.

25. Los puntos A(1, 1), B(5, 3), C(3, 7) y D(–1, 5), tomados en ese orden, son los vértices de un cuadrado:

    a. Halla su área.
    b. Halla el centro y el radio de la circunferencia circunscrita.

26. Dado el triángulo, cuyos vértices son D(–5, –5), E(1,7) y F(5,1):

a. Halla las ecuaciones de las rectas que pasan por sus vértices y son paralelas al lado opuesto.
b. Halla las coordenadas del ortocentro.
c. Halla las coordenadas del circuncentro.

27. Las ecuaciones de los lados de un triángulo son: $3x - y - 7 = 0$, $x + y - 5 = 0$ y $2x - y - 7 = 0$. Halla las coordenadas de sus vértices.

28. Dado el triángulo de vértices A(–2, 1), B(5, 4) y C(2, –3), halla la longitud de la altura correspondiente al vértice A y el área del mismo.

Respuesta: $\frac{20\sqrt{58}}{29}$ y 20

29. ¿Cuál es la ecuación de la recta perpendicular a la recta $2x - 3y + 7 = 0$, que pasa por el punto medio del segmento de ésta comprendido entre los ejes coordenados?

Respuesta: $36x + 24y + 35 = 0$.

30. Los puntos A(1,–1), B(5,1) y C(1,5) son vértices de un triángulo.

a. Clasifica dicho triángulo según la longitud de sus lados.
b. Calcula su área, perímetro y ángulos interiores.
c. Calcula las coordenadas del circuncentro, del ortocentro y del baricentro.
d. Halla la ecuación de la recta de Euler.

Respuestas:

Escaleno
Área = 12 u^2
Ángulos interiores: 45°, 71.6° y 63.4°
Circuncentro: (2,2), ortocentro: (3,1) y baricentro: $\left(\frac{7}{3},\frac{5}{3}\right)$

3.9 SECCIÓN DOS

AYUDA 11B. Practica en el DVD en el apartado GeoAnalítica. Secciones cónicas. Unidad didáctica diseñada Eduardo Barbero Corral (8 escenas interactivas).

Curvas cónicas. Unidades didácticas de Manuel Sada y Miguel Ángel Cabezón (33 escenas interactivas). Video.

HERRAMIENTAS

Secciones cónicas

Se llama *cónica* al conjunto de puntos que forman la intersección de un plano con un *cono* de revolución de dos mantos.

La ecuación representativa de las *cónicas* en una de sus formas es:

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

En donde los coeficientes A, C, D, E, y F son números reales que determinan el tipo de curva correspondiente que, si existen, tendremos la *línea recta*, la *circunferencia*, la *parábola*, la *elipse* o una *hipérbola*.

También es muy común llamarlas *cónicas*, porque resultan de un cono de revolución al ser cortado por un plano, ya sea oblicuamente a la base, perpendicularmente a ella o paralelamente a la generatriz.

En otros casos, la curva puede presentarse como una *recta* o un *par de rectas*, también puede ser un *punto* o el *conjunto vacío*. (Curvas degeneradas).

Si los coeficientes A y C son *iguales* a *cero*, es decir: $A = C = 0$, la gráfica es una *recta*.

Si los coeficientes A y C son *diferentes* a *cero*; es decir $A \neq 0$ y $C \neq 0$. Y se cumple que: $A = C \neq 0$. La gráfica será una *circunferencia*, un *punto* o el *conjunto vacío*.

También puede presentarse que uno de los coeficientes de las variables al cuadrado sea *igual* a *cero*, por lo que la gráfica de la curva será una *parábola*, una *línea recta*, *dos líneas rectas* o un *conjunto vacío*.

Si se cumple que el producto de los coeficientes A y C es un resultado *mayor que cero*, la gráfica representará una *elipse*, un *punto* o un *conjunto vacío*. Es decir que: $(A)(C) > 0$.

Cuando el producto de los coeficientes A y C es un resultado *menor que cero*, la gráfica es una *hipérbola* o *dos líneas rectas* que se *intersecan.*

Si se considera el término Bxy, su forma general sería:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

El término Bxy aparece solamente cuando la curva tiene sus ejes inclinados con respecto a los ejes cartesianos.

3.9.1 La circunferencia

De las cuatro curvas cónicas, la circunferencia es la más simple y geométricamente se describe como la intersección de un cono recto circular y un plano paralelo a la base del cono. También se puede describir como la sección perpendicular al eje de simetría, de una superficie cónica o cilíndrica.

HERRAMIENTA

La circunferencia es el lugar geométrico de todos los puntos de un plano que equidistan (están a igual distancia) de un punto fijo llamado centro. Esta distancia se denomina radio. Sólo posee longitud.

3.9.1.1 Ecuación de una circunferencia de centro (0, 0)

La ecuación de una circunferencia de centro (0, 0) es: $x^2 + y^2 = r^2$.

3.9.1.2 Ecuación generalizada de una circunferencia de centro (h, k)

Para deducir la ecuación de esta curva, cuyas características geométricas son bien conocidas, se supone que el centro es el punto C(h, k) y que el radio (r) es una constante a, como se muestra en la figura siguiente:

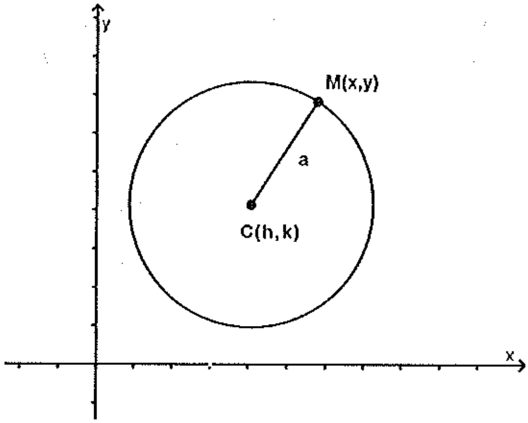


FIGURA 3-14

Sea M(x, y) un punto cualquiera de la circunferencia con centro en C(h, k) y radio igual a r. Por definición, el radio (r) es una constante, por lo que la condición de movimiento de M es:

$\overline{MC} = constante = r$

Aplicando la fórmula de la distancia entre dos puntos, tenemos:

$\overline{MC} = \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2}$

Como $\overline{MC} = r$ se tiene: $r = \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2}$

Elevando al cuadrado ambos miembros de la igualdad, nos queda:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2 \qquad \textbf{(1)}$$

Esta es la ecuación generalizada de la *circunferencia*, correspondiente a una ecuación cartesiana, cuyos parámetros, además del radio r son la abscisa h y la ordenada k del *centro*, cuyas coordenadas deben **tomarse siempre con signo contrario al que tenga en la ecuación.**

AYUDA 12

En el caso de la circunferencia $(x-3)^2+(y+2)^2=36$, se tiene que $h=3$, $k=-2$ y $r^2=36$. Por lo tanto, su *centro* es: C (3, –2) y *Radio* = 6.

AYUDA 13

Encuentra la ecuación de la circunferencia con centro en (5, 2) y radio igual a 4.

Solución

De acuerdo con los datos: $h=5$, $k=2$ y $r=4$.

Sustituyendo en la ecuación **(1)** estos valores, se tiene $(x-5)^2+(y-2)^2=36$, que es la ecuación canónica o básica.

AYUDA 14

Encuentra la ecuación de la circunferencia con centro en (–3, 4) y radio igual a 5.

Solución

De acuerdo con el enunciado: $h=-3$, $k=4$ y $r=5$.

Según la ecuación **(1)**, sustituyendo estos valores tenemos $(x+3)^2+(y-4)^2=25$.

La posición y tamaño de la circunferencia depende de las tres constantes arbitrarias h, k y r.

3.9.1.3 Ecuación general de la circunferencia

En muchos casos se presenta la ecuación general de la circunferencia, en cuyo caso interesa identificarla y poder determinar su centro y su radio.

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

Efectuando los productos notables en la ecuación canónica (1), se concluye que:

$$x^2-2hx+h^2+y^2-2ky+k^2-r^2=0$$

Dado que: $-2h, -2k$ y $(h^2+k^2-r^2)$ son constantes, se puede escribir la ecuación como:

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0 \qquad \textbf{(2)}$$

En donde: $D=-2h \qquad E=-2k \qquad F=h^2+k^2-r^2$

Entonces, conociendo los valores de D, E y F, se pueden encontrar las coordenadas del *centro* y la longitud del *radio* de una *circunferencia.*

Análisis de la ecuación

Las observaciones que se pueden hacer son las siguientes:

1. Una ecuación con dos variables de segundo grado representa una *circunferencia,* si los coeficientes de x^2 y y^2 son iguales y del mismo signo. También se puede presentar una degeneración de ella.

2. Si la ecuación contiene términos de primer grado, el *centro* está fuera del *origen.* Si a la ecuación le falta uno de los términos de primer grado, el *centro* está sobre el eje del sistema de nombre distinto al término faltante. Si le falta el término en x, el centro está sobre el eje y o viceversa.

3. Si la ecuación no tiene término independiente, la *circunferencia* pasa por el *origen.*

4. La ecuación no presenta términos en x, y; toda la circunferencia tiene una ecuación de la forma $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$; sin embargo, no toda circunferencia de esta forma representa una circunferencia.

   Si trata de determinar el *centro* y el *radio* a partir de la ecuación, se debe transformar en su forma canónica, en la que intervienen binomios al cuadrado y a la que se llega completando trinomios cuadrados perfectos en x y y, como se muestra en las ayudas siguientes:

DESAFÍOS A2.1, A2.2

AYUDA 15

Encuentra el *centro* y el *radio* de la *circunferencia* cuya ecuación es: $9x^2 + 9y^2 - 12x + 36y - 104 = 0$. Traza la *circunferencia.*

Solución

Se ordena y se completan los trinomios cuadrados perfectos en x y y, obteniendo:

$$(9x^2 - 12x) + (9y^2 + 36y) - 104 = 0$$

$$(9x^2 - 12x) + (9y^2 + 36y) - 104 = 0$$

$$9\left(x^2 - \frac{12}{9}x\right) + 9\left(y^2 + 4y\right) - 104 = 0$$

$$9\left(x^2 - \frac{4}{3}x\right) + 9\left(y^2 + 4y\right) - 104 = 0$$

$$9\left(x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{4}{9}\right) + 9\left(y^2 + 4y + 4\right) - 4 - 36 - 104 = 0$$

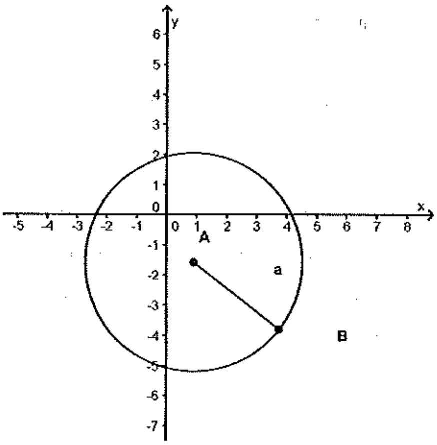


FIGURA 3-15

$$9\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+9(y+2)^2=144$$

$$9\left[\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+(y+2)^2\right]=144$$

$$\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+(y+2)^2=\frac{144}{9}$$

$$\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+(y+2)^2=16$$

Comparando con la ecuación **(1),** se tiene que: $h=\dfrac{2}{3}$ $k=-2$ y $r=4$; por lo tanto el centro de la circunferencia y el radio están dados por $C\left(\frac{2}{3},-2\right)$; $r=4$.

AYUDA 16

Encuentra el centro y el radio de la circunferencia dados por la ecuación: $4x^2 + 4y^2 + 4x + 4y - 2 = 0$.

Solución

Ordenando y completando trinomios cuadrados perfectos en x y y, se tiene:

$$2\left(2x^2+2y^2+2x+2y-1\right)=0$$
$$(2x^2+2x)+(2y^2+2y)-1=0$$
$$2\left(x^2+x\right)+2\left(y^2+y\right)-1=0$$
$$2\left(x^2+x+\frac{1}{4}\right)+2\left(y^2+y+\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-1=0$$
$$2\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+2\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=2$$
$$2\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2\right]=2$$
$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=1$$

Por lo tanto, el centro y el radio de la circunferencia son respectivamente:

$$C\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right);\ r=1$$

AYUDA 17

Encuentra el centro y el radio de la circunferencia representada por la ecuación: $x^2+y^2-16x+2y+65=0$.

Solución

Ordenando y completando trinomios cuadrados perfectos en x y y, se obtiene:

$$(x^2-16x)+(y^2+2y)+65=0$$
$$(x^2-16x+64)+(y^2+2y+1)-64-1+65=0$$
$$(x-8)^2+(y+1)^2=0$$

Por lo tanto, el centro y el radio de la circunferencia son respectivamente:

$$C(8,-1); r = 0$$

Como el *radio* es cero, la *circunferencia* se reduce a un *punto del plano cartesiano* que representa el mismo *centro.*

AYUDA 18

Determina la ecuación de una circunferencia que pasa por P(1, 0), sabiendo que es concéntrica a la representada por la ecuación: $x^2 + y^2 - 2x - 8y + 13 = 0$.

Solución

La ecuación debe tener la forma de la ecuación dada por la fórmula **(1),** debiendo ser las coordenadas h y k de centro, las mismas de la circunferencia dada, para lo cual debes hallar su ecuación cartesiana.

Ordenando y completando trinomios cuadrados perfectos en x y y, se tiene

$$\left(x^2 - 2x\right) + \left(y^2 - 8y\right) + 13 = 0$$
$$\left(x^2 - 2x + 1\right) + \left(y^2 - 8y + 16\right) - 1 - 16 + 13 = 0$$
$$(x-1)^2 + (y-4)^2 = 4$$

De la expresión anterior se deduce que el centro es C(1, 4), es decir, h = 1 y k = 4 y r = 2.

El radio r de la circunferencia buscada se calcula como la distancia del punto P al centro C.

$$r = \overline{PC} = \sqrt{(1-1)^2 + (0-4)^2} = 4$$

Por lo tanto, $r^2 = 16$. Sustituyendo este valor y los de *h, k* en la fórmula (1), se encuentra la ecuación de la circunferencia $(x-1)^2 + (y-4)^2 = 16$.

AYUDA 19

El diámetro de una circunferencia es el segmento de la recta definida por los puntos: D(–8, –2) y E(4, 6). Obtén la ecuación de dicha circunferencia.

Solución

La forma de la ecuación es la de la fórmula **(1).** El centro es el punto medio del diámetro, cuyas coordenadas se obtienen aplicando las fórmulas para el punto medio de un segmento, en este caso $\overline{DE}$:

$$h = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-8+4}{2} = -2$$

$$k = \frac{y_1 + Y_2}{2} = \frac{-2+6}{2} = 2$$

Por lo tanto, el centro es C(–2, 2). El radio es la distancia del centro C a cualquiera de los extremos del diámetro, es decir:

$$r = \sqrt{(-2-4)^2 + (2-6)^2} = \sqrt{36+16} = \sqrt{52} \quad \therefore r^2 = 52$$

La ecuación de la circunferencia pedida es

$(x+2)^2 + (y-2)^2 = 52.$

AYUDA 20A

Halla la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos A(2, –2), B(8, 4) y C(6, 0). Encuentra las coordenadas del centro y el radio.

Solución

POSTULADO

Por tres puntos no alineados pasa siempre una circunferencia. Autor: J. Bolyai.

Recuerda que: Dados tres puntos de una circunferencia, también es posible encontrar la ecuación acudiendo a la forma general $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$, sustituyendo "x" y "y" en cada caso, para establecer un sistema de ecuaciones de tres ecuaciones con tres variables D, E y F.

Su ecuación es la forma $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$

Halla D, E y F.

- Como $A(2, -2) \in \mathbf{C}$, se tiene $8 + 2D - 2E + F = 0$ **(1)**
- Como $B(8, 4) \in \mathbf{C}$, entonces $80 + 8D + 4E + F = 0$ **(2)**
- Como $C(9, 3) \in \mathbf{C}$, luego $36 + 6D + F = 0$ **(3)**

El sistema de ecuaciones **(1), (2), (3)** se puede escribir así:

$$2D - 2E + F = -8$$
$$8D + 4E + F = -80$$
$$6D + F = -36$$

Luego la ecuación de sería: $(x - 1)^2 + (y - 5)^2 = 50$.

Así que la circunferencia **C** circunscrita al triángulo ABC tiene centro en (1, 5) y radio $\sqrt{50}$.

3.9.2 RETOS

1. Halla la ecuación de cada una de las circunferencias que satisface las condiciones dadas:

   a. $C(0,0), r = 1$ b. $C(0,0), r = \sqrt{2}$ c. $C(0,0), r = \frac{1}{2}$

2. Halla la ecuación de cada una de las circunferencias que satisface las condiciones dadas:

   a. $C(-3, -4)$, $r = 5$
   b. $C(\frac{3}{4}, -\frac{1}{2})$, $r = 7$
   c. $C(\sqrt{2}, 3)$, $r = 4$

3. Determina el centro y el radio de la circunferencia que satisface la ecuación dada:

   a. $x^2 + y^2 = 25$
   b. $x^2 + y^2 + 6x = 0$
   c. $x^2 + y^2 - 4x + 6y = 0$
   d. $x^2 + y^2 - 10x + 22 = 0$

4. Resuelve los siguientes problemas:

   a. Determina si el punto $P(1, -2)$ pertenece a la circunferencia cuya ecuación es $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9$.

   b. Halla la ecuación de la circunferencia con su centro en $C(3, 1)$ y es tangente al eje x.

   c. Señala la ecuación de la circunferencia con centro en $(-1, 2)$, que es tangente al eje y.

   d. Halla la ecuación de la circunferencia tangente a ambos ejes, cuyo centro está en el primer cuadrante y su radio es 2.

   e. Encuentra la ecuación de la circunferencia, que tiene como puntos extremos de un diámetro $P_1(2, -2)$ y $P_2(2, 2)$.

   f. Halla la ecuación para la circunferencia que pasa por los puntos:

      a. $P(0, 0)$, $Q(3, 6)$, y $R(7, 0)$
      b. $M(4, -4)$, $N(0, -7)$, $L(-2, -3)$

5. "Toda recta tangente a una circunferencia es perpendicular al radio trazado al punto de tangencia". PROPIEDAD DE LA CIRCUNFERENCIA. Si el centro de una circunferencia es $(0, -2)$ y es tangente a la recta $5x - 12y + 2 = 0$, ¿cuál es su ecuación general?

   RECUERDA QUE:

   Distancia de un punto a una recta $d = \dfrac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

6. Halla la ecuación del diámetro de la circunferencia $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 17 = 0$, que es perpendicular a la recta $5x + 2y - 13 = 0$.

7. Determina la relación de posición entre la circunferencia y la recta dada (recta tangente, secante o exterior a la circunferencia): $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$; $y = 2x + 4$. Construye la gráfica.

8. Halla la ecuación de la circunferencia en forma canónica. Encuentra el centro y el radio:

   a. $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 6 = 0$
   b. $x^2 - 6x + 4y + 9 + y^2 = 0$
   c. $4x^2 + 4y^2 - 8x + 24y + 32 = 0$
   d. $x^2 + y^2 + 4x + 8y + 11 = 0$
   e. $\frac{2}{3}x^2 + \frac{2}{3}y^2 = 16$

9. Determina si la gráfica de cada una de las ecuaciones siguientes es una circunferencia, un punto o el conjunto vacío:

   a. $x^2 + y^2 + 4x + 4 = 0$
   b. $x^2 + y^2 + 4x + 4y + 9 = 0$
   c. $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 39 = 0$
   d. $x^2 + y^2 + 6x - 4y + 18 = 0$

10. Halla la ecuación de la circunferencia circunscrita al triángulo cuyos vértices son A(–4,–3), B(–1, –7) y C(0, 0).

RECUERDA QUE:

El centro de una circunferencia circunscrita en un triángulo es el punto de corte de las mediatrices de los lados de un triángulo.

Dados tres puntos de una circunferencia, también es posible encontrar la ecuación acudiendo a la forma general $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$, sustituyendo x y y en cada caso, para establecer un sistema de ecuaciones de tres ecuaciones con tres variables D, E y F.

11. Halla la ecuación de la circunferencia circunscrita al triángulo cuyos lados están representados por las ecuaciones lineales:

a. $x + y = 8$
b. $2x + y = 14$
c. $3x + y = 22$

12. Los puntos A(0, 2), B(3, 0), C(5, 3) y D(2, 5) son los vértices de un cuadrado. Escribe la ecuación de la circunferencia inscrita en dicho cuadrado.

13. Encuentra el punto de intersección de las siguientes ecuaciones, si existe, y construye su respectiva gráfica:

a. $x^2 + y^2 - 4y - 14 = 0;\ x + y - 8 = 0$
b. $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 9;\ x - y + 2 = 0$
c. $x^2 + y^2 - 8x - 4y - 38 = 0;\ 7x + 3y - 34 = 0$

3.10 SECCIÓN TRES

AYUDA 20B
Practica en el DVD en el apartado GeoAnalítica.

Problemas de la elipse. Unidad didáctica de Javier de la Escosura Caballero (12 escenas interactivas).

3.10.1 LA ELIPSE

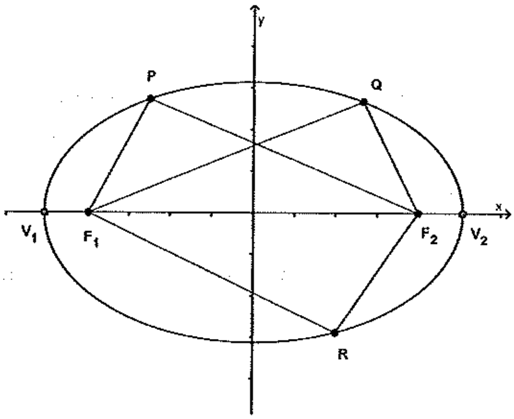


FIGURA 3-16

Una **ELIPSE** es el lugar geométrico de los puntos del plano tales que la suma de las distancias a dos puntos fijos de ese plano llamados focos es constante, y mayor que la distancia entre ellos.

Sean F_1 y F_2 dos puntos del plano y sea d una constante mayor que la distancia F_1F_2. Un punto "p" pertenece a la elipse de focos F_1 y F_2, entonces: $\overline{F_1p} + \overline{F_2p} = d = 2a$, donde "a" es el semieje mayor de la elipse.

3.10.1.1 ELEMENTOS DE LA ELIPSE

Los elementos básicos de una elipse son los siguientes:

1. FOCOS: Son los puntos fijos F_1 y F_2.
2. EJE FOCAL: Es la recta que pasa por los focos de la elipse, $|\overline{F_1F_2}| = 2c$.
3. VÉRTICES: Son los puntos V_1 y V_2 donde la elipse corta al eje focal.

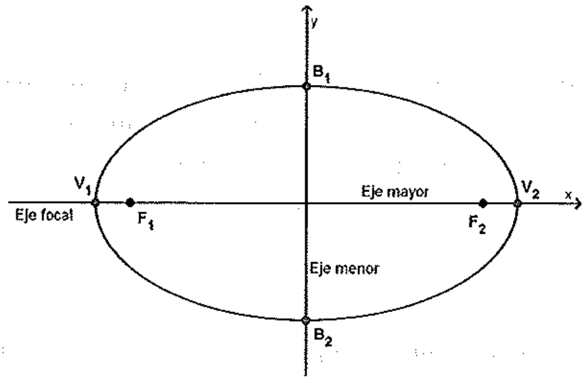


FIGURA 3-17

4. EJE MAYOR: Es el segmento cuyos extremos son V_1 y V_2. De acuerdo con la definición de elipse se cumple que $|\overline{V_1 V_2}| = 2a.$
5. CENTRO: Es el punto medio del segmento $\overline{V_1 V_2}$ y tambien punto medio del segmento $\overline{F_1 F_2}$. Lo denotamos por c.
6. EJE MENOR: Es el segmento $\overline{B_1 B_2} = 2b$ perpendicular al eje mayor y que pasa por el centro.
7. DISTANCIA FOCAL: Es la distancia entre los dos focos y se denota por $2c$, es decir, $|\overline{F_1 F_2}| = 2c.$

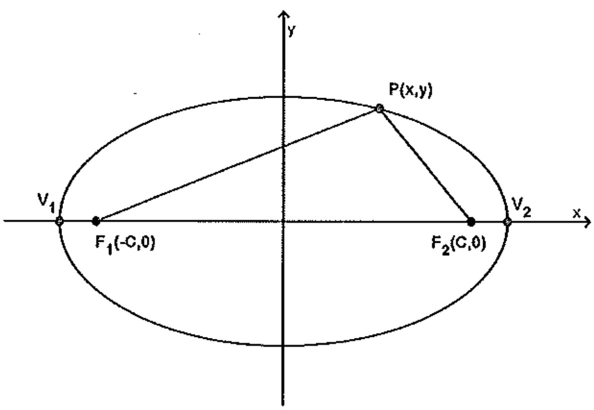


FIGURA 3-18

3.10.1.2 Ecuación de la elipse

Para deducir la ecuación de la elipse se traza un sistema de coordenadas en el plano de la curva de tal modo que el origen coincida con el centro y el eje focal coincida con uno de los eje coordenados (por ejemplo, en el eje x como en la figura anterior).

DEDUCCIÓN

Si $P(x, y)$ es un punto cualquiera de la elipse y se aplica la definición nos queda $|\overline{PF_1}| + |\overline{PF_2}| = 2a.$

En donde α es una constante positiva mayor que c.

Pero: $|\overline{PF_1}| = \sqrt{(x+c)^2 y^2}$ y $|\overline{PF_2}| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$

Luego: $\sqrt{(x+c)^2+y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$

Por lo tanto: $\sqrt{(x+c)^2+y^2} - 2a = -\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$; elevando al cuadrado ambos miembros de la ecuación, se obtiene:

$(x+c)^2 + y^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + 4a^2 = (x-c)^2 + y^2$; entonces desarrollando y cancelando y^2 se obtiene:

$$x^2 + 2cx + c^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + 4a^2 = x^2 - 2cx + c^2;$$

por lo tanto, cancelando x^2 y c^2 y agrupando 2cx: $4cx + 4a^2 = 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}$

Dividiendo por 4 y elevando al cuadrado:

$$(cx + a^2)^2 = (a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\,)^2$$
$$c^2x^2 + 2a^2cx + a^4 = a^2(c^2 + 2cx + x^2 + y^2)$$
$$c^2x^2 + 2a^2cx + a^4 = a^2c^2 + 2a^2cx + a^2x^2 + a^2y^2$$
$$a^4 - a^2c^2 = a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2$$
$$a^2(a^2 - c^2) = x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2$$

Dividiendo ambos miembros de la ultima ecuación por $a^2(a^2-c^2)$, se obtiene:

$$1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{(a^2-c^2)}.$$

Además, en la siguiente figura puede observarse que:

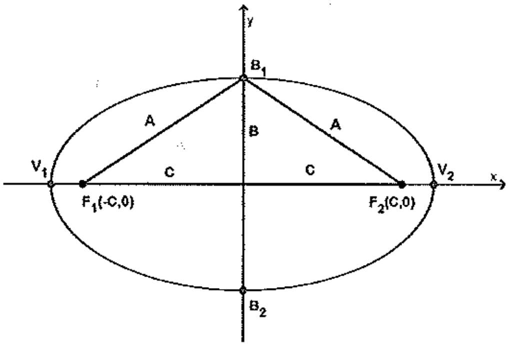


FIGURA 3-19

$b^2+c^2=a^2 \therefore b^2=a^2-c^2$; así queda finalmente: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1.$

TEOREMA

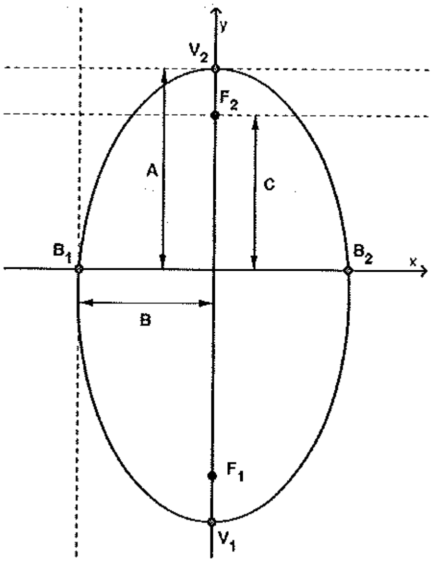
La ecuación de una ELIPSE cuyos focos son $F_1(-c, o)$ y $F_2(c, o)$, y en la cual $2a$ es la suma de las distancias de un punto cualquiera P de la elipse a los focos es:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Donde b es un número positivo, tal que: $b^2 = a^2 - c^2$.

¡ATENCIÓN!

En forma similar se puede demostrar que si los focos de la elipse son los puntos $F_1(o, -c)$ y $F_2(o, c)$, es decir, el eje focal coincide con el eje y, entonces la ecuación es:



$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1,$$ donde b es un número positivo, tal que:

$$b^2 = a^2 - c^2$$

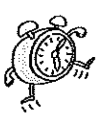
FIGURA 3-20

3.10.1.3 EXCENTRICIDAD DE LA ELIPSE (e)

La excentricidad de la elipse es un número que mide el mayor o menor achatamiento de la elipse, y es igual al cociente entre su semidistancia focal y su semieje mayor.

$$e=\frac{c}{a}, \qquad c \le a \qquad \text{y} \qquad 0 \le e \le 1$$

Sí c = 0 y b = a, entonces e = 0



AYUDA 21

Si c = 0 y b = a = 2

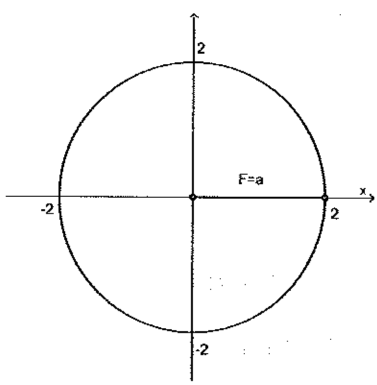


FIGURA 3-21

Una excentricidad baja indica que la elipse es muy parecida a una circunferencia.

AYUDA 22

Si $e = \dfrac{3}{5}$

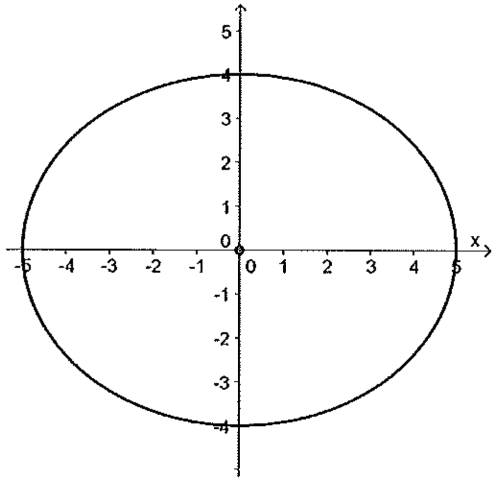


FIGURA 3-22

Una excentricidad alta corresponde a una curva muy achatada.

AYUDA 23

Si $e = \dfrac{\sqrt{21}}{5}$

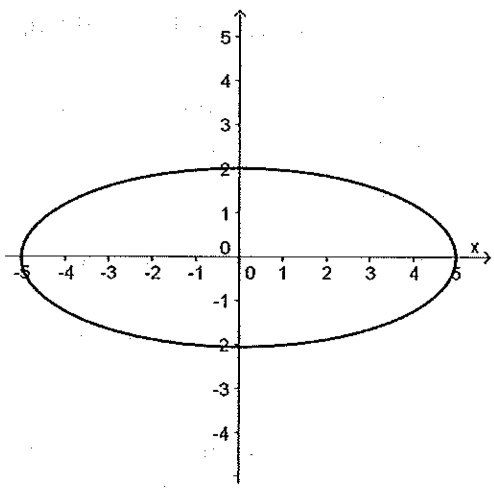


FIGURA 3-23

El último caso sería si c = a, entonces b = 0, luego e = 1.

AYUDA 24

Si $e = \frac{5}{5} = 1$

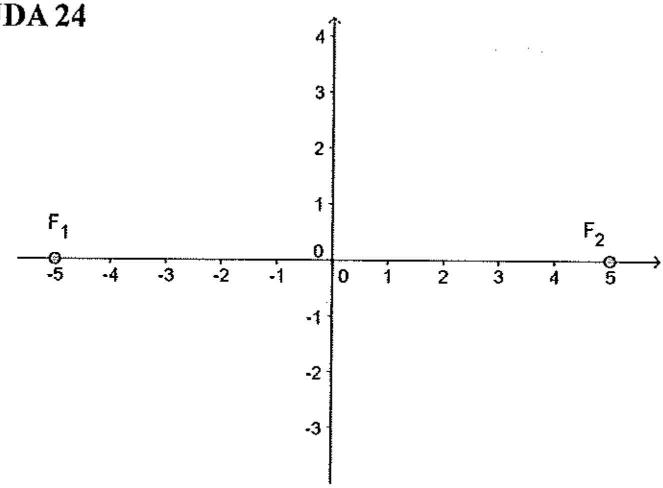


FIGURA 3-24

OBSERVACIONES

1. Tanto en la ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, como en la ecuación $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ intervienen las cantidades a, b y c que representan:
   - a, la distancia del centro al vértice
   - b, la distancia del centro al extremo del eje menor
   - c, la distancia del centro del foco
2. El valor de “a” siempre es mayor que el valor “b”.
3. Si se escribe la ecuación en la forma: $\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} = 1$

   Se tiene que:
   - A = B, representa una circunferencia.
   - A>B, representa una elipse horizontal.
   - A<B, representa una elipse vertical.

3.10.1.4 Ecuación de una elipse de centro c (h, k)

Para hallar la ecuación de la elipse horizontal con centro C(h, k):

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

Para hallar la ecuación de la elipse vertical con centro C(h, k):

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$

Si se desarrolla la ecuación canónica:

$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1,$ se obtiene:

$$\frac{b^2(x-h)^2+a^2(y-k)^2}{a^2b^2}=1$$

$$b^2(x^2-2hx+h^2)+a^2(y^2-2ky+k^2) = a^2b^2$$

$$b^2x^2-2b^2hx+b^2h^2+a^2y^2-2a^2ky+a^2k^2- a^2b^2 = 0$$

$$b^2x^2+a^2y^2-2b^2hx-2a^2ky+b^2h^2+a^2k^2-a^2b^2=0$$

$A = k^2$

$B = No\ existe, porque\ no\ hay\ término\ xy$

$C = a^2$

$D = -2b^2h$

$E = -2a^2k$

$F = b^2h^2+a^2k^2-a^2b^2$

Se obtiene entonces la forma

$$Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

$$A \neq C\ y\ A.C > 0$$

3.10.1.5 LADO RECTO DE UNA ELIPSE (LATUS RECTUM)

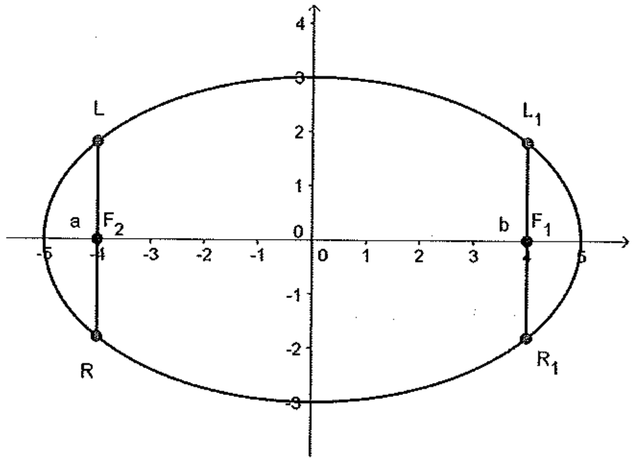


FIGURA 3-25

Para determinar la longitud del lado recto $\overline{LR}$ de la elipse de ecuación: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, basta con hallar la ordenada del punto L_1 (c, y) y duplicar su valor. Como L_1 (c, y) pertenece a la elipse, entonces se despeja a de la ecuación, asumiendo que x = c.

$$\frac{c^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \therefore b^2c^2+a^2y^2=a^2b^2$$

$$y^2=\frac{a^2b^2-b^2c^2}{a^2}$$

$$y^2=\frac{b^2(a^2-c^2)}{a^2}$$

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-c^2}$$

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{b^2}$$

$y=\pm\frac{b^2}{a}$, luego la cuerda completa es: $\overline{LR}=\frac{2b^2}{a}$

AYUDA 25

Dada la ecuación $25x^2 + 16y^2 = 400$, encuentra: las coordenadas de los extremos del eje menor, las coordenadas de los focos y además, dibuja la gráfica.

Solución

Se escribe la ecuación en la forma:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad ó \quad \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

Se divide a ambos lados de la ecuación por el término independiente y así se obtiene:

$$\frac{25}{400}x^2 + \frac{16}{400}y^2 = \frac{400}{400}$$

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$$

Esta ecuación corresponde a una elipse vertical, porque al escribirla en la forma canónica, el mayor denominador corresponde a la variable y, por lo tanto:

$$b^2 = 25 \Rightarrow b = 5$$

$$a^2 = 16 \Rightarrow a = 4$$

$$c^2 = 25 - 16 = 9 \Rightarrow c = 3$$

De esta forma: $V_1(0, -5)$, $V_2(0, 5)$ son los vértices $B_1(-4, 0)$, $B_2(4, 0)$ son los extremos del semieje menor. $F_1(0, 3)$ y $F_2(0, 3)$ son los focos.

La gráfica es la de una elipse con centro en el origen y focos sobre el eje *y*.

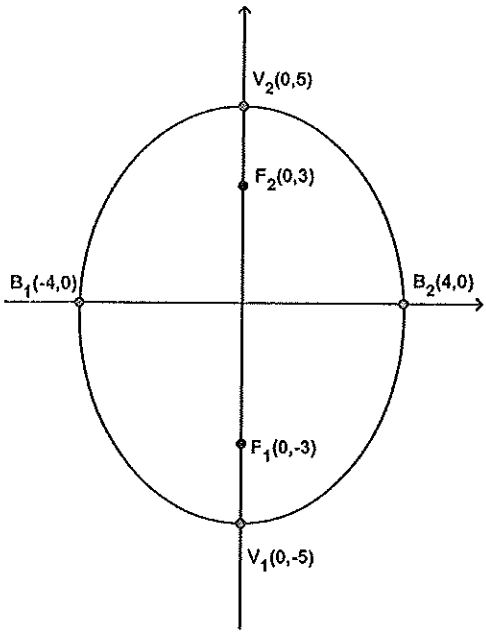


FIGURA 3-26

AYUDA 26

Encuentra la ecuación de una elipse centrada en el origen, cuyos focos son los puntos $F_1(-2, 0)$, $F_2(2, 0)$ y vértices los puntos $V_1(-5, 0)$, $V_2(5, 0)$.

Solución

De acuerdo con los datos del problema a = 5, c = 2, de donde se obtiene que el valor b es: $b^2 = a^2 - c^2$.

$b^2 = 25 - 4,\ b^2 = 21 \quad \therefore\ b = \sqrt{21}$

Si $a = 5,\ b = \sqrt{21}$, entonces la ecuación es: $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{21} = 1$

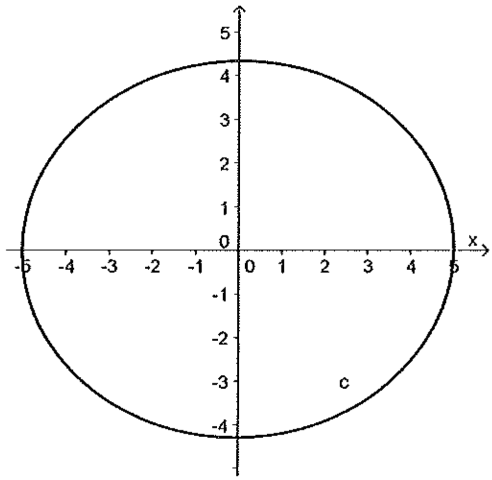


FIGURA 3-27

AYUDA 27

Encuentra la ecuación de una elipse centrada en el origen, cuyos focos son los puntos $F_1(0, -3)$, $F_2(0, 3)$, y vértices los puntos $V_1(0, -7)$, $V_2(0, 7)$.

Solución

De acuerdo con los datos del problema $a = 7$, $c = 3$, de donde se obtiene el valor b:

$$b^2 = a^2 - c^2 \;\rightarrow\; b^2 = 49 - 9; \text{ por lo tanto } \; b^2 = 40 \;\therefore\; \mathrm{b} = 2\sqrt{10}$$

Si $a = 5$, $b = 2\sqrt{10}$, entonces la ecuación es: $\dfrac{x^2}{40} + \dfrac{y^2}{25} = 1$

AYUDA 28

Halla la ecuación de la elipse con centro $C(-2, 3)$, un vértice en $V_1(-2, 7)$ y un foco en $F_1(-2, 6)$.

Solución

De acuerdo con los datos: $h = -2,\ k = 3,$

$c = |\overline{CF_1}| = 3,\ a = |\overline{CV_1}| = 4$ Por lo tanto el valor de b:

$b^2 = a^2 - c_2 \Rightarrow b_2 = 16 - 9 = 7 \therefore b = \sqrt{7}$

Como el eje focal es vertical, dado que h es constante en V_1 y F_2, entonces la ecuación de la elipse es de la forma:

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

Reemplazando los valores *h, k, a* y *b*, en dicha ecuación, se obtiene:

$$\frac{(x+2)^2}{7} + \frac{(y-3)^2}{16} = 1$$

La gráfica de la elipse es la siguiente:

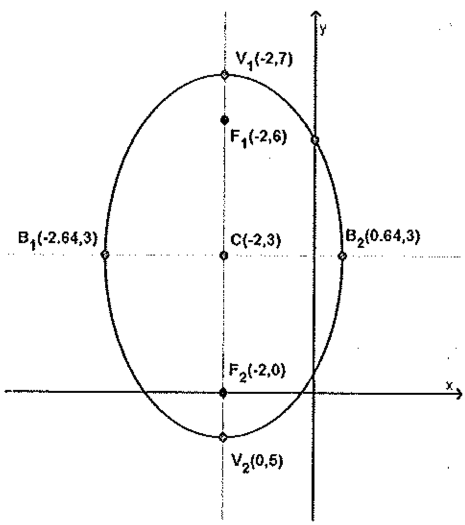


FIGURA 3-28

AYUDA 29

Determina el centro, los semiejes, los vértices y los focos de la elipse cuya ecuación es $25x^2 + 9y^2 - 50x + 36y - 164 = 0$.

Solución

$(25x^2 - 50x) + (9y^2 + 36y) = 164$

Se saca factor común y así: $25(x^2 - 2x) + 9(y^2 + 4y) = 164$

$$25(x^2 - 2x + 1 - 1) + 9(y^2 + 4y + 4 - 4) = 164$$

Se completan trinomios cuadrados perfectos:

$$25(x^2 - 2x + 1) + 9(y^2 + 4y + 4) = 164 + 25(1) + 9(4)$$

$$25(x - 1)^2 + 9(y + 2)^2 = 225$$

Dividiendo ambos miembros de la ecuación por 225, se obtiene:

$$\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{25} = 1$$

De la ecuación se deduce:

$b = 3,\ \ a = 5\,;\ \ de\ donde\ c^2 = a^2 - b^2;\ c^2 = 25 - 9;\ c^2 = 16\ \therefore\ c = 4$

Por tanto, el centro es el punto $C(1, -2)$, el semieje menor mide 3 y el semieje mayor 5 unidades, los vértices son:

$$V_1(h, k + a) = (1, -2 + 5) = (1,3)$$
$$V_2(h, k - a) = (1, -2 - 5) = (1, -7)$$

Los focos son $F_1(1,\ 2)$, $F_2(1,\ -6)$; los extremos del semieje menor son los puntos $B_1(-2, -2)$, $B_2(4, -2)$.

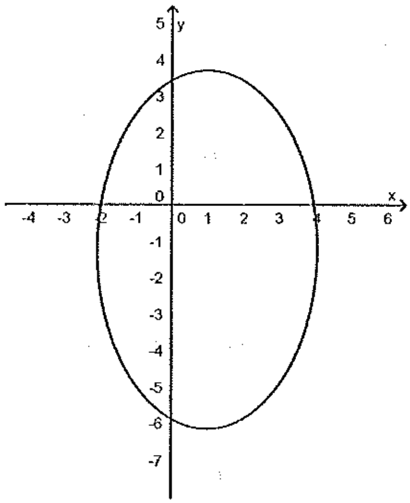


FIGURA 3-29

AYUDA 30

Determina si el lugar geométrico correspondiente a la ecuación: $9x^2 + 4y^2 - 36x - 8y + 76 = 0$ es o no una elipse.

Solución

Agrupando variables, se obtiene: $(9x^2 - 36x) + (4y^2 - 8y) = -76$.

Se saca factor común y así: $(9x^2 - 4x) + 4(y^2 - 2y) = -76$

Se completan trinomios cuadrados perfectos:

$$9(x^2 - 4x - 4) + 4(y^2 - 2y + 1) = -76 + 9(4) + 4(1)$$
$$9(x - 2)^2 + 4\,(y - 1)^2 = --36$$

Por lo tanto el lugar geométrico es el conjunto vacío, ya que suma de cuadrados nunca es negativa en el conjunto de los números reales.

AYUDA 31

Encuentra una ecuación de la elipse para la cual los focos están en (–8, 2) y (4, 2) y la excentricidad es $\frac{2}{3}$. Haz un dibujo de la elipse.

Solución

La distancia entre los focos es 12; por lo tanto "c" = 6 y $e=\frac{\mathrm{c}}{\mathrm{a}}=\frac{2}{3} \Rightarrow \frac{6}{\mathrm{a}}=\frac{2}{3} \Rightarrow \mathrm{a}=6 \cdot \frac{3}{2}=9.$

$\Rightarrow \mathrm{a}=9; \Rightarrow \mathrm{a}^2=\mathrm{b}^2+\mathrm{c}^2; \Rightarrow 81=\mathrm{b}^2+36; \Rightarrow b=\sqrt{45} \approx 6.8$

Ecuación de la elipse$\rightarrow$ $$\frac{(x+2)^2}{\underbrace{\underbrace{\underbrace{81}_{a^2}}_{a=9}}_{}}+\frac{(y-2)^2}{\underbrace{\underbrace{45}_{b^2}}_{b=6.8}}=1$$

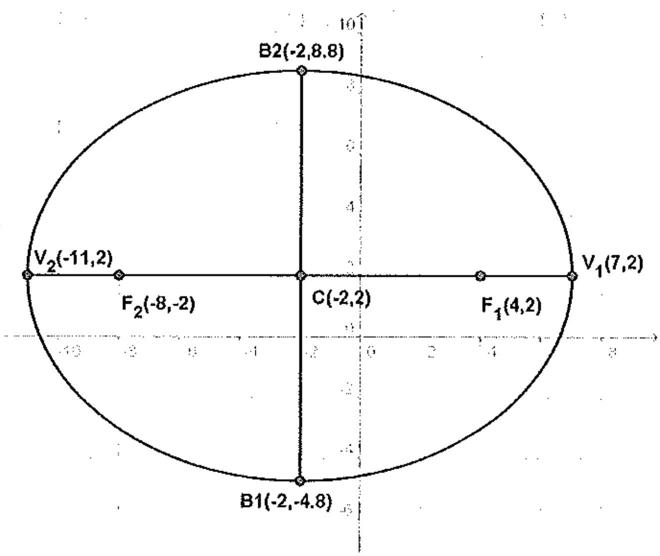


FIGURA 3-30

$$\frac{5(x+2)^2}{405}+\frac{9(y-2)^2}{405}=\frac{405}{405} \Rightarrow 5(x^2+4x+4)+9(y^2-4y+4)=405$$

$$\Rightarrow 5x^2+20x+20+9y^2-36y+36=405$$

$$5x^2+9y^2+20x-36y+369=0$$

3.10.2 Retos

1. Completa la siguiente tabla y grafica cada una de las elipses dadas:

Ecuación	Vértice	Focos	Lado mayor	Lado menor
$4x^2+9y^2=36$				
$9x^2+4y^2=36$				
$25x^2+16y^2=400$				
$4x^2+y^2=16$				

2. Halla la ecuación de la elipse que pasa por el punto (3, 1) y tiene sus focos en (4, 0) y (–4, 0).

3. Halla la ecuación reducida de la elipse que verifica:
   a. pasa por (25, 0) y la distancia semifocal es 7.
   b. pasa por (4, 1) y por (0, 3).

4. Determina el centro, los vértices, los focos y dibuja la elipse que tiene por ecuación: $4x^2+y^2-16x+2y+13=0$.

5. Contesta verdadero o falso y por qué:
   a. La ecuación $x^2+y^2=0$ representa una elipse.
   b. Cuanta más pequeña es la excentricidad de una elipse más cerca está de la forma circular.
   c. La elipse $6x^2+4y^2=24$ tiene sus focos en el eje de abscisas.

6. En la elipse $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{25} = 1$, ¿cuál es la longitud de la cuerda paralela al eje menor que divide al semieje "a" en dos partes iguales?

7. Encuentra las coordenadas del centro, focos, eje menor y vértices, longitud eje mayor y menor, distancia focal y grafica la ecuación: $25x^2 + 9y^2 - 200x + 90y + 400 = 0$.

8. Encuentra las coordenadas del centro, focos, eje menor y vértices, longitud eje mayor y menor, distancia focal y grafica la ecuación: $4x^2 + y^2 + 8x - 16y + 64 = 0$.

9. Encuentra las coordenadas del centro, focos, eje menor y vértices, longitud eje mayor y menor, el lado recto, distancia focal y grafica la ecuación: $2x^2 + 5y^2 + 8x - 20y + 18 = 0$.

10. Obtén la ecuación de la elipse cuyos vértices se localizan en $(-5, 9)$ y $(-5, 1)$ y la longitud de su lado recto es igual a 3 unidades.

    Respuesta: $15x^2 + 6y^2 + 160x - 60y + 454 = 0$.

PROBLEMAS DE APLICACIÓN

1. El arco de un puente tiene forma de semielipse con el eje mayor horizontal de longitud 12 m y altura del arco sobre el agua al centro 4 m. Calcula la altura del arco en un punto a 2 m de uno de los extremos del arco.

2. La órbita elíptica del cometa Halley tiene una excentricidad e = 0,967. Lo más cerca que llega al Sol es 0,587 UA (Unidad Astronómica). Calcula la distancia máxima entre el Sol y el cometa.

   $a + c$ = afelio $\qquad$ $a - c$ = perihelio

3. La órbita de la Tierra es una elipse en uno de cuyos focos está el Sol. Si se sabe que el semieje mayor de la elipse es 148.5 millones de kilómetros y que la excentricidad vale 0.017, halla la máxima y la mínima distancia de la Tierra al Sol.

4. Con base en la siguiente información, construye la respectiva gráfica y demuestra la ecuación de la elipse de C(0,0) y eje mayor sobre el eje x.

   Supóngase que nos plantean el problema de construir la elipse de ecuación dada por $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, *con* $a>b$.

   Se trazan los llamados círculos directores, que son círculos concéntricos, con centro en 0, uno de radio $\overline{OA}=a$ y el otro de radio $\overline{OB}=b$.

   Se traza luego un rayo cualquiera con origen en 0, el cual intercepta a los círculos en los puntos S y N. Por estos puntos, se trazan paralelas a los ejes x y y, respectivamente, las cuales se cortan en el punto $M(x_m, y_m)$.

   Se puede afirmar que el punto M está en la elipse de ecuación $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

   En efecto, demuestra que $\frac{x_m^2}{a^2}+\frac{y_m^2}{b^2}=1$.

5. Dada la siguiente gráfica, obtén la ecuación de la circunferencia y de la elipse. Halla los puntos de intersección entre las dos curvas.

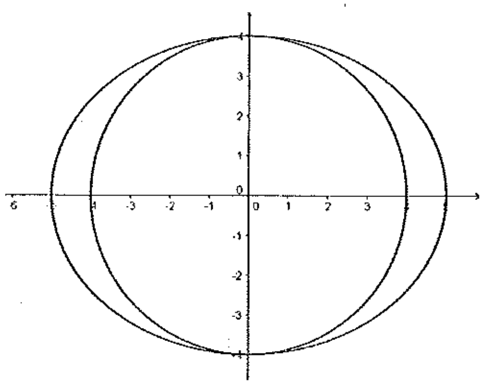


FIGURA 3-31

DESAFÍO A3.1

3.11 SECCIÓN CUATRO

3.11.1 LA PARÁBOLA

Una **PARÁBOLA** es el lugar geométrico de los puntos de un plano que equidistan (igual distancia) de un punto fijo llamado foco (F), y de una recta fija llamada directriz (D), ambos contenidos en el mismo plano.

Los puntos A, B, C, D y E pertenecen a la parábola, ya que:

$$\left|\overline{AF}\right| = \left|\overline{AA'}\right|, \left|\overline{BF}\right| = \left|\overline{BB'}\right|, \left|\overline{CF}\right| = \left|\overline{CC'}\right|$$
$$\left|\overline{DF}\right| = \left|\overline{DD'}\right| \text{ y } \left|\overline{EF}\right| = \left|\overline{EE'}\right|$$

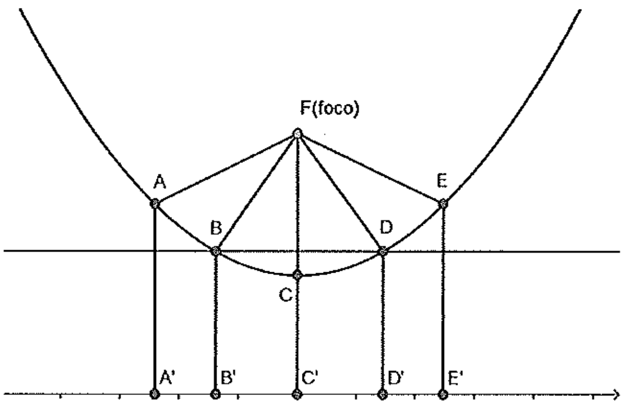


FIGURA 3-32

3.11.1.1 Elementos de la parábola

Los elementos básicos de una parábola son los siguientes:

1. Foco (F): es el punto fijo mencionado en la definición.
2. Directriz (D): es la recta fija mencionada en la definición.
3. Eje focal: es una recta que pasa por el foco y es perpendicular a la directriz.
4. Vértice: Es el punto donde el eje focal corta la parábola.
5. Distancia focal: es la distancia dirigida del vértice al foco y del vértice a la directriz, se denota por p.
6. Lado recto: es un segmento perpendicular al eje focal, que pasa por el foco (F), cuyos extremos son dos puntos de la parábola.

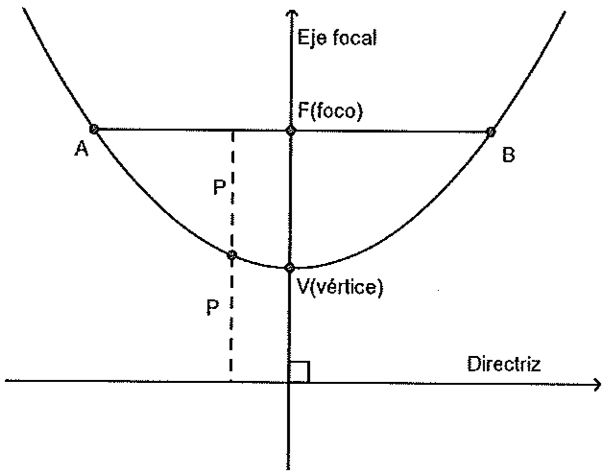


Figura 3-33

3.11.1.2 Ecuación de la parábola

Considérese la parábola cuyo vértice es (0, 0) y cuyo eje coincide con el eje x.

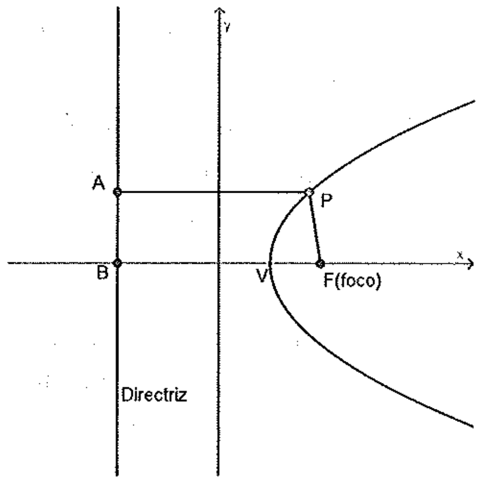


FIGURA 3-34

A continuación se determinan las coordenadas de los puntos P, F y el punto sobre la directriz (véase figura).

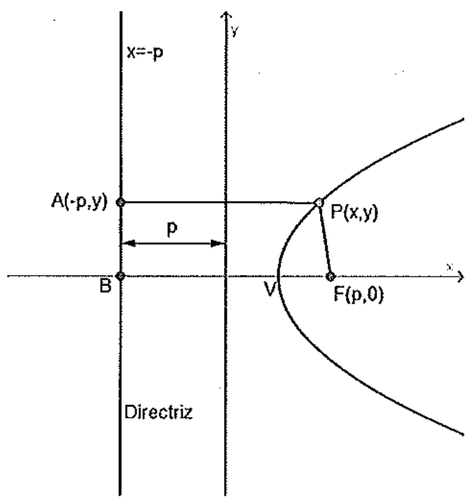


FIGURA 3-35

Como P es un punto de la parábola, debe cumplirse que $\left|\overline{PA}\right| = \left|\overline{PF}\right|$. Por definición de la parábola $\overrightarrow{PA} \perp D$.

Donde D es la directriz, A es un punto sobre la directriz y además $\left|\overline{BF}\right| = |2p|$, $\left|\overline{BV}\right| = \left|\overline{VF}\right| = |p|$, ya que la distancia del punto al foco es igual a la distancia del foco a la directriz.

Donde **V** es el vértice de la parábola y **B** el punto donde se corta el eje focal con la directriz.

Las coordenadas de P son (x, y), por ser un punto cualquiera de la curva. Las coordenadas de A son (–p, y). Finalmente, se aplica la definición de parábola, según la cual la distancia de P a la directriz es igual a la distancia de P al foco, es decir:

$$\left|\overline{PA}\right| = \left|\overline{PF}\right| \quad \textbf{(1)}$$

Aplicando la definición de distancia entre dos puntos, se tiene:

$$\left|\overline{PF}\right| = \sqrt{(x-p)^2 + (y-0)^2} \text{ y } \left|\overline{PA}\right| = \sqrt{(x+p)^2 + (y-y)^2}$$

Luego, sustituyendo los resultados anteriores en (1), se obtiene:

$$\sqrt{(x-p)^2 + y^2} = \sqrt{(x+p)^2}$$

Elevando a ambos lados de la ecuación al cuadrado, se obtiene:

$$(x-p)^2 + y^2 = (x+p)^2$$

$$x^2 - 2xp + p^2 + y^2 = x^2 + 2xp + p^2$$

$$y^2 = 4px$$

Esta última ecuación es la "forma canónica" para la ecuación de una parábola con foco $F(p, 0)$ y directriz $x = -p$.

TEOREMA

La ecuación $y^2 = 4px$ corresponde a una parábola con las siguientes características:

- Su eje focal coincide con el eje x.
- Su vértice es el origen (0, 0).
- Esta abierta hacia la derecha cuando $p > 0$.
- Las coordenadas del foco son (p, 0).
- La ecuación de la directriz es $x = -p$.

Despejando "y" de la anterior ecuación, se obtiene $y = \pm 2\sqrt{px}$, por lo tanto:

- $x \geq 0\ si\ p > 0$, en cuyo caso la parábola se abre hacia la derecha.
- $x \leq 0\ si\ p < 0$ y la parábola se abre hacia la izquierda.

En forma similar se puede verificar que la ecuación de una parábola con vértice $V(0, 0)$ y eje focal el eje y es $x^2 = 4py$, donde el foco es el punto $F(0, p)$; la directriz es la recta $y = -p$. En este caso, si $p > 0$, $y \geq 0$ la parábola se abre hacia arriba; si $p < 0$, $y \leq 0$ la parábola se abre hacia abajo.

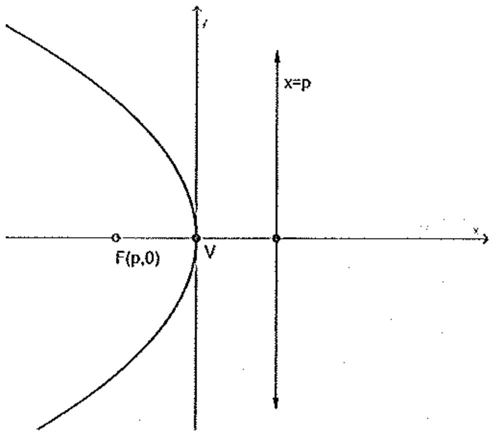


FIGURA 3-36

TEOREMA

La ecuación $y^2 = -4px$, corresponde a una parábola con las siguientes características:

- Su eje focal coincide con el eje x.
- Su vértice es el origen (0, 0).
- Está abierta hacia la izquierda cuando $p < 0$.
- Las coordenadas del foco son $(-p, 0)$.
- La ecuación de la directriz es $x = p$.

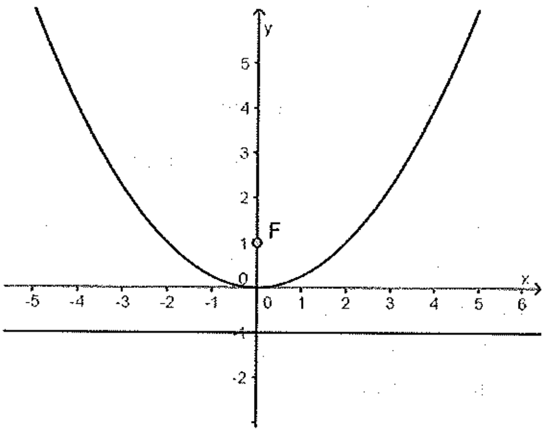


FIGURA 3-37

TEOREMA

La ecuación $x^2 = 4px$, corresponde a una parábola con las siguientes características:

- Su eje focal coincide con el eje y.
- Su vértice es el origen (0, 0).
- Está abierta hacia la izquierda cuando $p > 0$.
- Las coordenadas del foco son $(0, p)$
- La ecuación de la directriz es $y = p$.

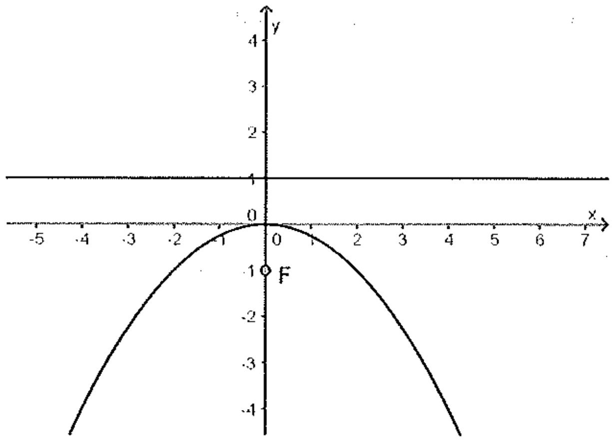
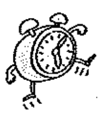


FIGURA 3-38

TEOREMA

La ecuación $x^2 = -4py$ corresponde a una parábola con las siguientes características:

- Su eje focal coincide con el eje x.
- Su vértice es el origen (0, 0).
- Esta abierta hacia abajo cuando $p < 0$.
- Las coordenadas del foco son $(-p, 0)$.
- La ecuación de la directriz es $x = -p$.



AYUDA 32

Halla la ecuación de la parábola con foco (2, 0) y directriz la recta $X = -2$. Dibuja la gráfica.

Solución

Según los datos del problema, se tiene que: $p = 2$ y $v = (0, 0)$.
El eje focal es el eje x. Por lo tanto, la ecuación es $y^2 = 4px$.

$y^2 = 4(2)x$
$y^2 = 8x$

Para dibujar la gráfica de la parábola puede elaborarse una tabla de valores:

X	Y
0	0
1	± 2,83
2	± 4
3	± 4,9

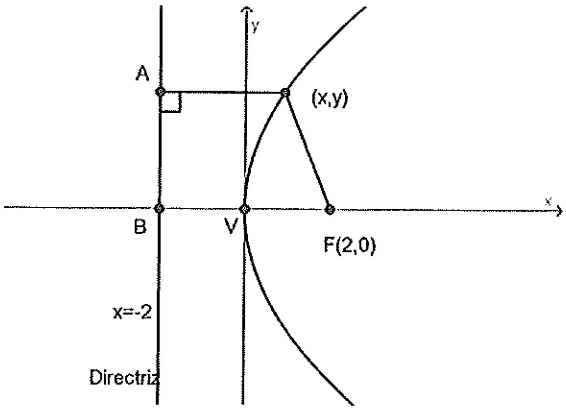


FIGURA 3-39

AYUDA 33

Una parábola tiene su vértice en el origen; su eje focal es el eje x y pasa por el punto (–5, 10). Halla su ecuación y dibuja la gráfica.

Solución

Como el vértice es (0, 0) y el eje focal es el eje x, entonces la ecuación de la parábola es de la forma: $y^2 = 4px$, donde desconocemos el valor de p. Puesto que la parábola pasa por el punto (–5, 10), entonces sus coordenadas deben satisfacer la anterior ecuación. Por tanto:

$$10^2 = 4p\,(-5)$$
$$100 = -20p$$
$$p = (-5)$$

Luego la ecuación de la parábola es: $y^2 = 20x$.

Como p es negativo, entonces la parábola aparece dibujada a la izquierda del origen.

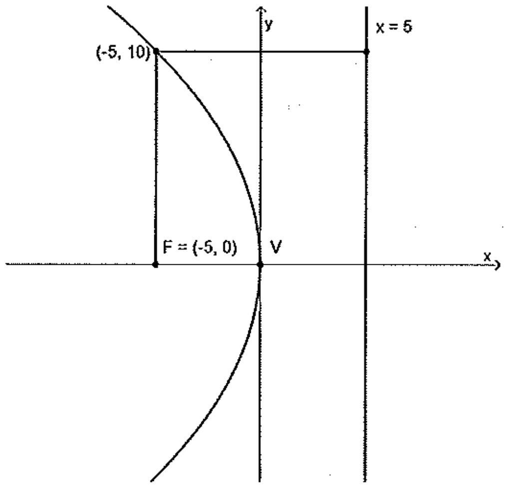


FIGURA 3-40

DESAFÍO A4.1, A4.2, A4.3

Si la parábola tiene su vértice en $V(h, k)$ y su eje focal es paralelo a uno de los ejes coordenados, sus ecuaciones son:

- $(y - k)^2 = 4p(x - h)$ si su eje es paralelo al eje x.
- $(x - h)^2 = 4p(y - k)$ si su eje es paralelo al eje y.

AYUDA 34

El vértice de una parábola es $(-2, 5)$ y el foco es $(-4, 5)$. Halla la ecuación de la parábola, la ecuación de la directriz y dibuja la curva.

Solución

Los datos del problema son: $v(-2, 5)$ y $f(-4, 5)$.

Como la segunda componente tiene el mismo valor en estos puntos, entonces el eje focal de la parábola es paralelo al eje x. Por lo tanto su ecuación es de la forma:

$$(y-k)^2 = 4p(x-h)$$

Hasta el momento se tiene $h = -2$ y $k = 5$. Falta calcular el valor de p, el cual se obtiene haciendo la diferencia del vértice y el foco, así:

$$p = -4 - (-2)$$
$$p = -4 + 2, \ p = -2$$

Reemplazando los valores obtenidos en la ecuación, daría:

$$(y-5)^2 = 8(x+2)$$

La directriz coincide con el eje y luego su ecuacion es $x = 0$.

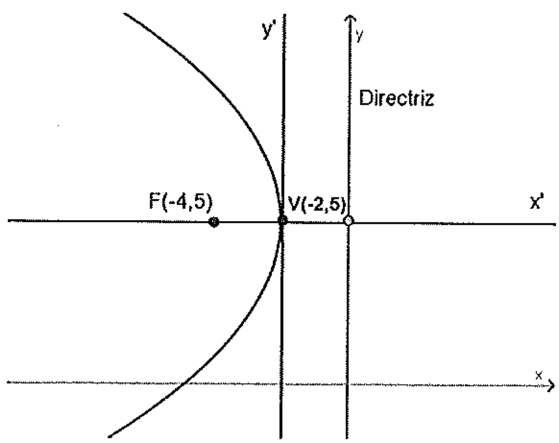


FIGURA 3-41

AYUDA 35

Dada la parábola cuya ecuación es $y^2 - 6y - 4x + 17 = 0$. Halla las coordenadas del vértice y del foco y la ecuación de la directriz.

Solución

En este caso, la forma más recomendable de solución es efectuar la complementación de trinomio cuadrado perfecto a la ecuación dada.

$$y^2 - 6y - 4x + 17 = 0.$$
$$y^2 - 6y = 4x - 17$$
$$y^2 - 6y + 9 = 4x - 17 + 9$$
$$(y - 3)^2 = 4x - 8$$
$$(y - 3)^2 = 4(x - 2)$$

Esta ecuación corresponde a una parábola con su eje paralelo al eje x, vértice en el punto $V(2, 3)$.

Para hallar la ecuación de la directriz se debe conocer el valor de p. Luego: $4p = 4$

$p = 1$

Por lo tanto, la ecuación de la directriz es $x = 1$.

Y su foco tiene coordenadas en $F(3, 3)$.

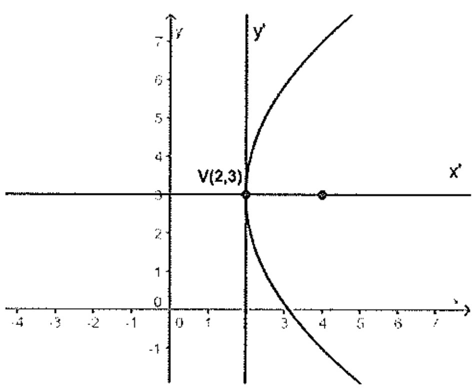


FIGURA 3-42

3.11.2 Retos

1. En cada uno de los siguientes ejercicios, halla las coordenadas del foco y del vértice, la ecuación de la directriz y haz la gráfica.

   a. $x^2 = 14y$ b. $y^2 = 8x$ c. $y^2 = 16x$

   d. $x^2 = 4y$ e. $2y^2 = 15x = 0$ f. $x^2 + 10y = 0$

2. Halla la ecuación de la parábola de vértice en el origen y cuya directriz es la recta:

   a. $x - 3 = 0$ b. $y + 4 = 0$ c. $x - 5 = 0$

3. Halla la ecuación de la parábola cuyo vértice foco son los puntos (–4, 3) y (–1, 3), respectivamente. Halla también las ecuaciones directrices y su eje focal. Grafica dicha parábola.

4. La directriz de una parábola es la recta $y - 1$ y su foco es el punto (4, –3). Halla la ecuación de la parábola y grafícala.

5. Dada las siguientes ecuaciones, halla las coordenadas del vértice y del foco, las ecuaciones del eje focal y de la directriz y traza su gráfica.

   a. $3x^2 + 12x + 20y + 32 = 0$ b. $3x^2 + 12x + 20y + 32 = 0$

   c. $x^2 + 3y - 12 = 0$ d. $y^2 - 12x + 8y + 40 = 0$

6. Encuentra la ecuación de la parábola que pasa por los puntos (2, 2), (4, 6), (4, –2) y cuyo eje es paralelo al eje x. Encuentra, además, la ecuación de su directriz.

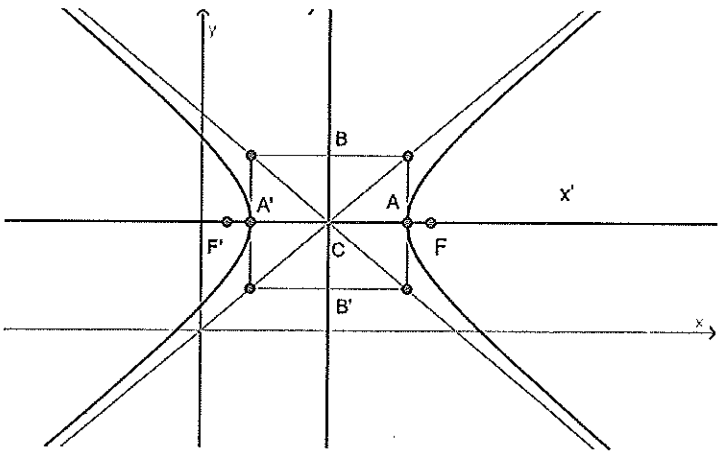
7. Halla la ecuación de la parábola de vértice (3, –2), eje de la recta $y + 2 = 0$, y que pasa por el punto (5, 2).

3.12 SECCIÓN CINCO

3.12.1 LA HIPÉRBOLA

HERRAMIENTA

Se llama hipérbola al lugar geométrico de los puntos del plano, tales que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos, F y F', llamados focos, es constante e igual a 2a. Es decir:



$$\left||PF_1| - |PF'|\right| = 2a$$

FIGURA 3-43

3.12.1.1 ELEMENTOS DE LA HIPÉRBOLA

1. Los puntos fijos F, F' se llaman FOCOS.
2. La distancia de F a F' es la DISTANCIA FOCAL, d (F, F') = 2c.
3. PF y PF' son los radio vectores.
4. Los puntos A y A' son los VÉRTICES donde el eje focal corta la hipérbola.

5. La recta que pasa por los focos y los vértices se llama EJE FOCAL d (A, A') = 2a.
6. El segmento AA' es el EJE TRANSVERSO.
7. Sean B y B' los puntos de la mediatriz del segmento AA', tales que su distancia al punto A sea c (semidistancia focal). d (B, A) = c
8. El segmento BB' se llama eje secundario o imaginario y, por similitud con la elipse, se le asigna una longitud 2b.
9. Por la misma razón a los puntos B y B' se les llama vértices imaginarios.
10. El punto C, intersección de los ejes, es el CENTRO.

Considerando el triángulo rectángulo CAB y aplicando el teorema de Pitágoras, se tiene la relación fundamental de la hipérbola:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

3.12.1.2 Ecuación de una hipérbola de centro (0, 0)

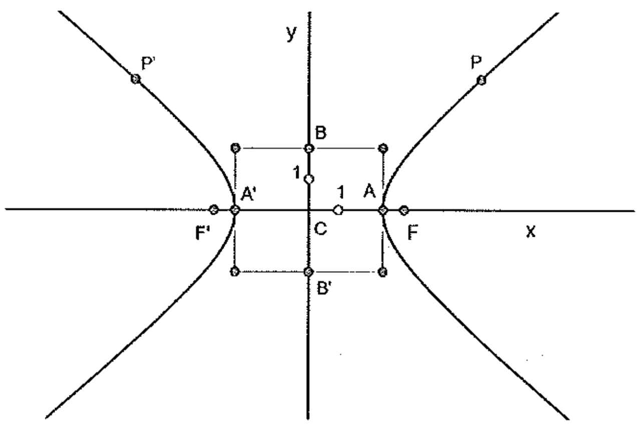


Figura 3-44

Ecuación de la hipérbola de centro $C(0, 0)$ y focos en el eje de abscisas $F(c, 0)$ y $F'(-c, 0)$.

Sea $P(x, y)$ un punto cualquiera de la hipérbola, entonces por su definición, se tiene:

$$|\overline{PF} - \overline{PF'}| = 2a$$

En donde a es una constante positiva y $2a < 2c$. Usando la definición de distancia entre dos, se tiene:

$$\sqrt{[x-(-c)]^2+(y-0)^2} - \sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2} = \pm 2a$$

Ordenando la expresión:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

Elevando al cuadrado ambos miembros y desarrollando, se obtiene:

$$\left[\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right]^2 = \left[\pm 2a + \sqrt{(x-c)^2+y^2}\right]^2$$

$$(x+c)^2+y^2 = 4a^2+4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2$$

$$x^2+2xc+c^2+y^2 = 4a^2+4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+x^2-2xc+c^2+y^2$$

$$2xc = 4a^2+4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}-2xc$$

Transponiendo términos y dividiendo ambos miembros por 4:

$$2xc+2xc-4a^2 = 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$4xc-4a^2 = 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$xc-a^2 = a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

Elevando ambos miembros al cuadrado, se tiene:

$$(xc - a^2)^2 = \left[a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right]^2$$
$$x^2c^2 - 2xca^2 + a^4 = a^2[(x-c)^2 + y^2]$$
$$x^2c^2 - 2xca^2 + a^4 = a^2(x^2 - 2xc + c^2 + y^2)$$
$$x^2c^2 - 2xca^2 + a^4 = a^2x^2 - 2xca + a^2c^2 + a^2y^2$$
$$x^2c^2 + a^4 = a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2$$

Agrupando términos y factorizando

$$(x^2c^2 - a^2x^2) - a^2y^2 = (a^2c^2 - a^4)$$
$$x^2(c^2 - a^2) - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

Dividiendo ambos miembros por $a^2(c^2 - a^2)$:

$$\frac{x^2(c^2 - a^2)}{a^2(c^2 - a^2)} - \frac{a^2y^2}{a^2(c^2 - a^2)} = \frac{a^2(c^2 - a^2)}{a^2(c^2 - a^2)}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1$$

Como $c > a$, se tiene $c^2 - a^2 > 0$ y se define $b^2 - a^2$, al reemplazar se tiene:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Que es la ecuación de una hipérbola con centro en el origen $O(0, 0)$, focos $F(\pm\, c,\, 0)$ y vértices en $V(\pm\, a,\, 0)$ y el eje focal con el eje "x."

En forma análoga, se puede demostrar que si el centro de la hipérbola está en el origen y eje focal coincide con el eje de las "y", la ecuación toma la forma:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

Que es la ecuación de una hipérbola con centro en el origen $O(0, 0)$, focos $F(0, \pm c)$ y vértices en $V(0 \pm a)$ y el eje focal con el eje "y".

3.12.1.3 Excentricidad (e)

Unas hipérbolas tienen las ramas más abiertas que otras. Esta característica de ser más abierta o más cerrada se mide con un número e llamado **excentricidad.**

Se define la excentricidad de una hipérbola, e, como el cociente entre la semidistancia focal y el semieje real: $e = \frac{c}{a}$. Al ser $c > a$, se tiene que $e > 1$.

Por tanto, fijado el valor de a, cuanto más próxima está la excentricidad a 1, más cerradas son las ramas de la hipérbola. Por el contrario, cuanto mayor es la excentricidad más abiertas son las ramas de la hipérbola.

3.12.1.4 Ecuación de la hipérbola con centro diferente al origen

Ejes paralelos a los ejes de coordenadas

Si el centro de la hipérbola no está en el origen y sus ejes son paralelos a los ejes de coordenadas cartesianas, pueden hallarse sus respectivas ecuaciones empleando las fórmulas para la translación de ejes, o sea: $x' = x - h$ y $y' = y - k$.

Cuando el eje transverso es paralelo al eje "x" y el centro es el punto $O'(h, k)$, la ecuación es de la forma $\frac{(x')^2}{a^2} - \frac{(y')^2}{b^2} = 1$ con $b^2 = c^2 - a^2$

Reemplazando x' y y' por sus valores, se obtiene

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Que es la ecuación de la hipérbola con centro en *0'(h, k),* focos en *F(h ± c, k),* vértices en *V(h ± a, k)* y asíntotas definidas por $y - k = \pm\frac{b}{a}(x - h)$·

Cuando el eje transverso es paralelo al eje "y" y el centro es el punto *0'(h, k)*, la ecuación es de la forma $\frac{y'^2}{a^2} - \frac{x'^2}{b^2} = 1,\ con\ \ b^2 = c^2 - a^2$.

Reemplazando x' y y' por sus valores, se obtiene

$$\frac{(y-h)^2}{a^2} - \frac{(x-k)^2}{b^2} = 1$$

Que es la ecuación de la hipérbola con centro en *0'(h, k)*, focos en *F(h, k ± c)*, vértices en *V(h, k ± a)* y asíntotas definidas por $y - k = \pm\frac{a}{b}(x - h)$·

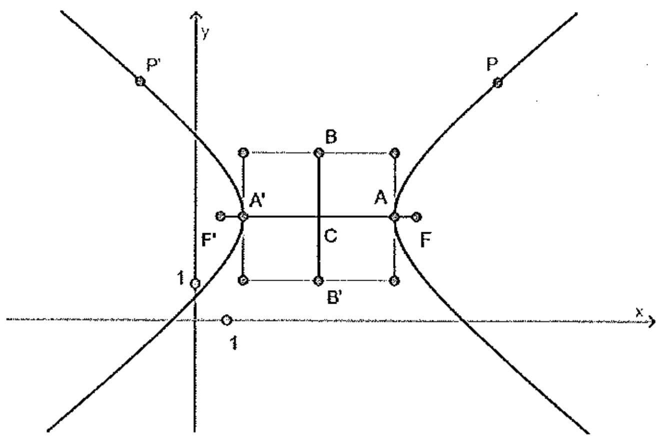


FIGURA 3-45

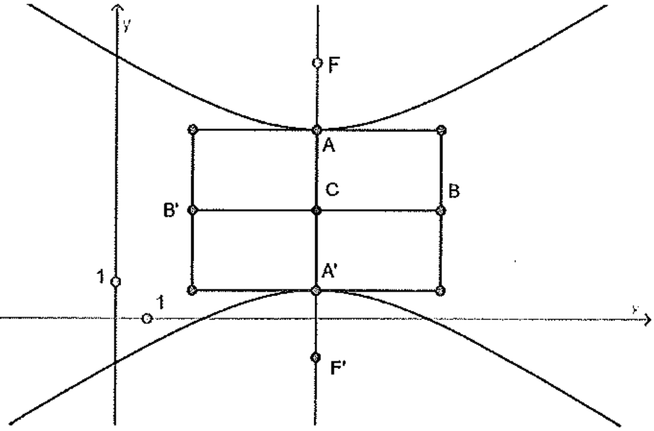


FIGURA 3-46

3.12.1.5 ASÍNTOTAS DE LA HIPÉRBOLA

Uno de los elementos más característicos de la hipérbola son sus asíntotas.

Se llama asíntota de una curva a toda recta, tal que su distancia a dicha curva tiende a cero, a medida que la curva se aleja del origen en forma indefinida.

La hipérbola definida mediante las ecuaciones $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ y $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$ no tienen asíntotas verticales ni horizontales, pero veremos que la curva tiene dos asíntotas oblicuas.

Para la ecuación $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, que se puede escribir $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$ y despejando la y, se obtiene

$$y=\pm\frac{b}{a}x\sqrt{x^2-a^2}$$

También puede inscribirse de la forma: $y = \pm\frac{b}{a}x\sqrt{1-\frac{a^2}{b^2}}$ ¿Por qué?

Si un punto de la hipérbola se mueve a lo largo de la curva, de manera que su abscisa aumenta numéricamente sin límite, el radical del segundo miembro se aproxima cada vez más a uno. Por lo tanto, la ecuación tomaría la forma:

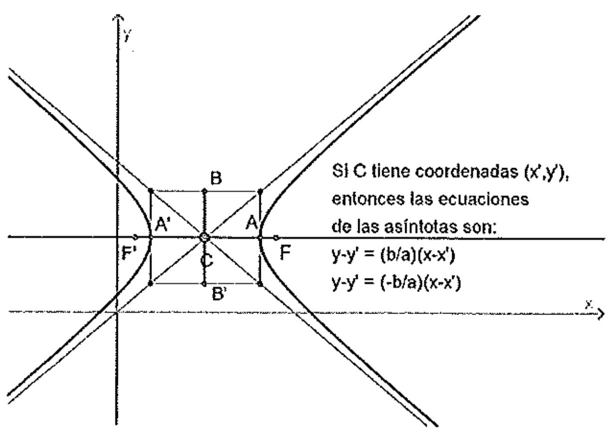
$$y = \pm\frac{b}{a}x$$

Esta ecuación representa las rectas $y = \frac{b}{a}x$ y $y = -\frac{b}{a}x$, que son las asíntotas oblicuas de la hipérbola.

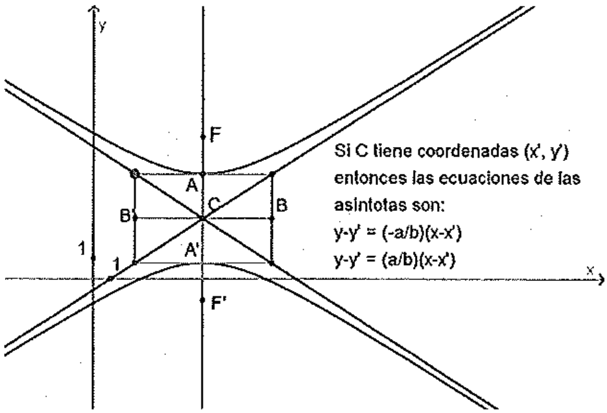
Para la ecuación $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$, que se puede escribir $b^2y^2 - a^2x^2 = a^2b^2$ y procediendo de forma análoga, se obtiene:

$$y = \pm\frac{a}{b}x$$

Esta ecuación representa las rectas $y = \frac{a}{b}x$ y $y = -\frac{a}{b}x$, que son las asíntotas oblicuas de la hipérbola



(a)



(b)

FIGURA 3-47

AYUDA 36

Los focos y los vértices de una hipérbola son los puntos: *F (5, 0), F'(–5, 0),* V_1 *(4, 0)* y V_2 *(–4, 0)*, respectivamente. Determina la ecuación de la hipérbola, dibuja su gráfica e indica las asíntotas.

Solución

Como los focos están sobre el eje x, la ecuación de la hipérbola es de la forma: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

En este caso: $a = 4$; $c = 5$, de donde $b=\sqrt{25-16}=3$.

En consecuencia, la ecuación de la hipérbola es: $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$.

Ahora,

$$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=0 \leftrightarrow \left(\frac{x}{4}-\frac{y}{3}\right)\left(\frac{x}{4}+\frac{y}{3}\right)=0$$

$$\left(\frac{x}{4}-\frac{y}{3}\right)=0 \quad \text{v} \left(\frac{x}{4}+\frac{y}{3}\right)=0 \ \Rightarrow y=\frac{3}{4}x \vee y=-\frac{3}{4}x$$

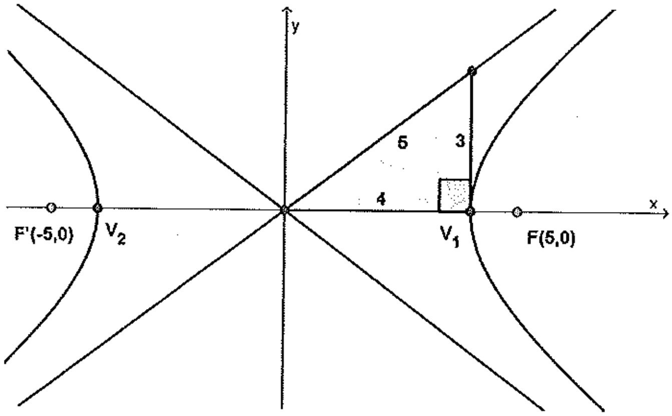
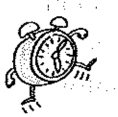


FIGURA 3-48

Luego, las ecuaciones de las asíntotas son las rectas: $y = \frac{3}{4}x$ y $y = -\frac{3}{4}x$.



AYUDA 37

Dada la hipérbola cuya ecuación viene dada por: $7y^2 - 9x^2 = 63$, determina: coordenadas de los focos, de los vértices, ecuaciones de las asíntotas y traza la gráfica.

Solución

La ecuación: $7y^2 - 9x^2 = 63$ puede escribirse en las formas equivalentes: $7y^2 - 9x^2 = 63$; se divide por 63 en ambos miembros de la igualdad.

$$\frac{7y^2}{63} - \frac{9x^2}{63} = 1; \quad \text{se simplifica } \frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{7} = 1.$$

La última ecuación corresponde a una hipérbola cuyo eje focal coincide con el eje "y" que es: $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$.

En este caso: $a = 3$, $b = \sqrt{7}$ luego $c = \sqrt{9 + 7} = 4$

Con estos datos, se tiene: $F(0, 4)$, $F'(0, -4)$, $V_1(0, 3)$ y $V_2(0, -3)$.

Además de la ecuación: $\dfrac{y^2}{9} - \dfrac{x^2}{7} = 1$, se deduce que las ecuaciones de las asíntotas son las rectas de ecuación: $y = \dfrac{3}{\sqrt{7}}x$ y $y = -\dfrac{3}{\sqrt{7}}x$.

AYUDA 38

Una hipérbola, cuyo centro es el punto C(2, 3), tiene sus focos sobre la recta y = 3. Además, la distancia entre los focos es 10 unidades y la distancia entre sus vértices es 8 unidades. Traza la gráfica y determina: coordenadas de los vértices, focos y ecuaciones de las asíntotas.

Solución

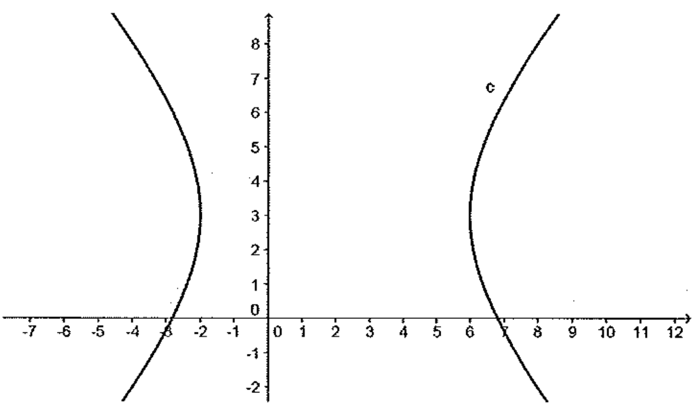


FIGURA 3-49

Ahora, puesto que los focos están sobre la recta y = 3 (paralela al eje x), la ecuación de la hipérbola pedida tiene la forma:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1 \Leftrightarrow \frac{(x-2)^2}{16}-\frac{(y-3)^2}{9}=1$$

Las coordenadas de los focos son: $x = h \pm c$ y $y = 3 = k$
Esto es: $F(7, 3)$ y $F'(-3, 3)$.

Igualmente, las coordenadas de los vértices son:

$x = h \pm a$ y $y = 3$

Esto es, $V_1(6, 3)$ y $V_2(-2, 3)$.

$$\frac{(x-2)^2}{16}-\frac{(y-3)^2}{9}=0$$

Además, de la ecuación se deduce que:

$$y-3=\frac{3}{4}(x-2) \Leftrightarrow 3x-4y+6=0 \quad \text{y}$$

$$y-3=-\frac{3}{4}(x-2) \Leftrightarrow 3x+4y-18=0$$

son las ecuaciones de las asíntotas.

AYUDA 39

Dada la hipérbola, cuya ecuación en su forma general es:

$3y^2 - x^2 + 4x - 6y - 13 = 0$.

Determina y grafica: centro, focos, vértices y ecuaciones de las asíntotas.

Solución

La ecuación general, puede escribirse en las formas equivalentes:

$$(3y^2 - 6y) - (x^2 - 4x) = 13$$

$$3(y^2-2y+1-1)-(x^2-4x+4-4)=13$$
$$3(y-1)^2-(x-2)^2=12$$
$$\frac{(y-1)^2}{4}-\frac{(x-2)^2}{12}=1$$

Esta última ecuación corresponde a una hipérbola cuyo centro es el punto $C(2, 1)$ y su eje focal es una recta paralela al eje y que pasa por $C(2, 1)$. En esta caso, x = 2.

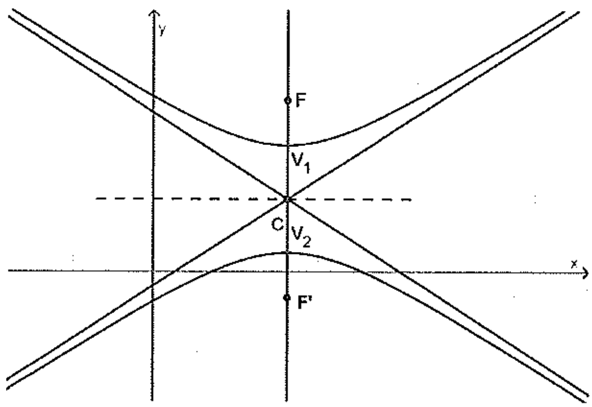


FIGURA 3-50

Además, $a^2 = 4$, $b^2 = 12$. Con lo cual: $c=\sqrt{a^2+b^2}=4$.

Las coordenadas de los focos son: $x=2$ y $y=1\pm 4$.

Esto es $F(2, 5)$ y $F'(2, -3)$. Igualmente, las coordenadas de los vértices son: $x=2$ y $y=1\pm 2$.

Esto es $V_1(2, 3)$ y $V_2\ (2, -1)$.

Las ecuaciones de las asíntotas son las rectas: $y-1=\frac{1}{\sqrt{3}}(x-2)$ y $y-1=-\frac{1}{\sqrt{3}}(x-2)$.

3.12.2 Retos

1. Para cada una de las ecuaciones dadas, halla las coordenadas de los vértices, los focos, la excentricidad, y las longitudes de los ejes; traza las gráficas.

   a. $9x^2 - 4y^2 = 36$
   b. $9y^2 - 4x^2 = 36$
   c. $4x^2 - 9y^2 = 36$
   d. $4y^2 - 9x^2 = 36$

2. Para cada una de las hipérbolas dadas, halla las coordenadas de los vértices, focos, las ecuaciones de sus asíntotas y dibuja las gráficas.

   a. $25x^2 - 16y^2 = 400$
   b. $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} = 1$
   c. $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} = 1$
   d. $y^2 - 4x^2 = 4$

3. Encuentra las coordenadas del centro, vértices, focos y asíntotas de las hipérbolas cuyas ecuaciones son:

   a. $\dfrac{(y-3)^2}{9} - \dfrac{(x-2)^2}{16} = 1$
   b. $\dfrac{(x+2)^2}{9} - \dfrac{(y+4)^2}{7} = 1$

4. Halla:

   a. La ecuación de la hipérbola con vértices en $V(0 \pm 6)$ y asíntotas con ecuaciones $y = \pm 9x$.

   b. La ecuación de la hipérbola cuyos focos son $F(\pm 10,0)$ y vértices $V(\pm 5,0)$.

   c. La ecuación de la hipérbola de vértices $(\pm 6,0)$ y asíntota $6y = \pm 7x$.

5. Busca las ecuaciones de las hipérbolas que satisfagan las siguientes condiciones:

6. Halla los puntos de intersección de la hipérbola y la curva que se da a continuación. Dibuja la gráfica.

   a. $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1 \; con \; 4x - 3y - 16 = 0$

   b. $4x^2 - 9y^2 = 36$ con $2x - y + 1 = 0$

   c. $2x^2 + y^2 = 33$ con $x^2 - y^2 = 15$

   d. $x^2 - 4y^2 = 32$; $3x + 2y - 16 = 0$

   e. $3x^2 + y^2 = 21$; $y^2 = 2x + 5$

7. Clasifica las cónicas que tienen las siguientes ecuaciones:

   a. $x^2 + y^2 + 2x + 2y + 1 = 0$

   b. $2x^2 + 2y^2 - 4x + 4y + 19 = 0$

   c. $x^2 + 4y^2 = 100$

   d. $8x^2 - 3y^2 = 120$

   e. $y^2 = 36x$

   f. $y = x^2 - 2x + 3$

   g. $x = -3y^2 + y + 5$

GEOVECTORIAL

4. EJE TEMÁTICO: GEOVECTORIAL

4.1 LOGROS

Resolver correctamente problemas prácticos, utilizando la noción de vector y sus propiedades.

4.2 INDICADORES DE LOGRO

- Reconoce los elementos que determinan un vector.
- Aplica las nociones de magnitud y dirección de un vector en la solución de ejercicios.
- Diferencia las cantidades vectoriales de las escalares.
- Realiza operaciones con vectores combinando métodos geométricos y algebraicos.
- Interpreta gráficamente un enunciado con cantidades vectoriales dado en lenguaje natural.
- Traduce correctamente la información que suministra un gráfico con vectores.

4.3 COMPETENCIAS

- Interpretar la información presente en un gráfico que contenga vectores.

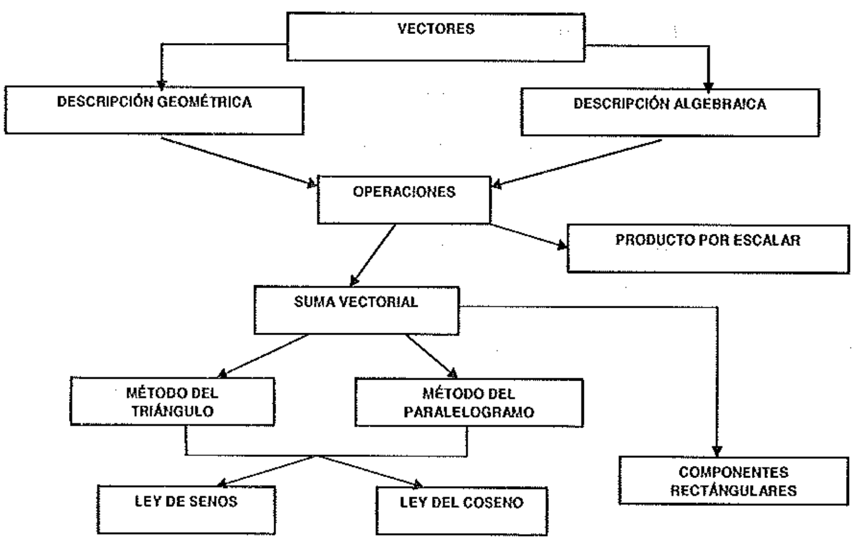
- Representar en el lenguaje gráfico los enunciados representados en el lenguaje natural.
- Usar los conceptos sobre vectores para resolver problemas de la vida cotidiana.

4.4 CONOCIMIENTOS PREVIOS

Debes saber: Tipos de ángulos y sus propiedades, tipos de triángulos y sus propiedades, propiedades de los paralelogramos, razones trigonométricas, teoremas del seno y del coseno.

4.5 ESTÁNDARES

ESQUEMA TEMÁTICO



4.6 RESEÑA HISTÓRICA

LOS COMIENZOS DEL CÁLCULO VECTORIAL

Los vectores que eran utilizados en mecánica en la composición de fuerzas y velocidades desde fines del siglo XVII, no tuvieron repercusión entre los matemáticos hasta el siglo XIX, dado que la noción de vector estaba implícitamente definida en la ideas de fuerza y velocidad. Las operaciones vectoriales de modo explícito se desarrollan, por vez primera, en la representación geométrica de los números complejos en los trabajos de Gauss y cuando Bellavitis desarrolla sus "equipolencias", un conjunto de operaciones con cantidades dirigidas, que equivale al cálculo vectorial de hoy. El paso siguiente lo da Hamilton, quien inicia el estudio de los vectores. Se le debe a él el nombre de 'vector', por ser el creador de un sistema de números complejos de cuatro unidades, denominado "cuaterniones", muy usados hoy en día para el trabajo con rotaciones de objetos en el espacio 3D.

Actualmente, casi todas las áreas de la física son representadas por medio del lenguaje de los vectores.

4.7 SITUACIÓN PROBLEMA

Un avión viaja a una altura fija con un factor de viento despreciable y sigue una ruta N (norte) con un componente de 30° al O (Oeste) y con una velocidad de 800 kilómetros por hora. Cuando el avión pasa por determinado punto, encuentra un viento de dirección 45° NE (Nordeste) y de velocidad 120 kilómetros por hora.

Determina la nueva velocidad y dirección del avión.

Al estudiar el mundo físico es necesario analizar tipos de cantidades; entre éstas, aquéllas que tienen asociada como medida una magnitud no dirigida que, de acuerdo con alguna escala o unidad de medida, se le asigna un número real y reciben el nombre de *cantidades escalares*; por ejemplo: masa de un cuerpo, densidad de un liquido, área de una superficie, etc. Otras cantidades físicas muy importantes son aquellas que tienen asociadas las propiedades básicas de magnitud, sentido y dirección y se conocen como *cantidades vectoriales* y que nos permiten determinar: fuerza, velocidad, aceleración, momento, etc.

Cuando se quiere describir la velocidad de un objeto en movimiento, se deben especificar la rapidez, la dirección y el sentido del recorrido. Decir que un avión vuela a 350 km/h, no nos dice nada de su destino; se debe adicionar la dirección y el sentido del desplazamiento para que quede configurada correctamente la información, es decir, hablar en términos de vectores. Las cantidades mencionadas como desplazamiento y velocidad, además de la aceleración y la fuerza, que implican magnitud, dirección y sentido, se llaman cantidades dirigidas. Una forma de representarlas matemáticamente (sintética o analíticamente), es utilizando ***vectores.***

4.8 VECTORES

Considérese una recta $\vec{R}$ y un objeto que se desplaza en la dirección de $\vec{R}$ entre dos puntos: 0 y V.

El desplazamiento puede darse solamente de 0 hacia V o de V hacia 0; en este caso, estos dos desplazamientos tienen sentidos contrarios (véase figura 4-1). Por tanto, en toda dirección determinada por una recta $\vec{R}$ existen dos sentidos, contrarios entre sí.

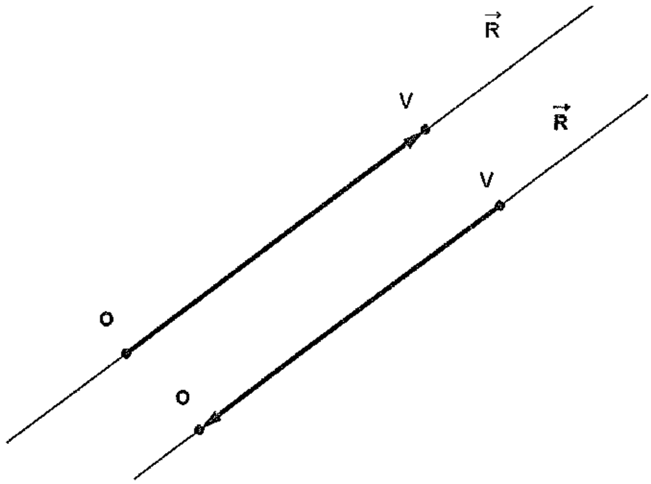
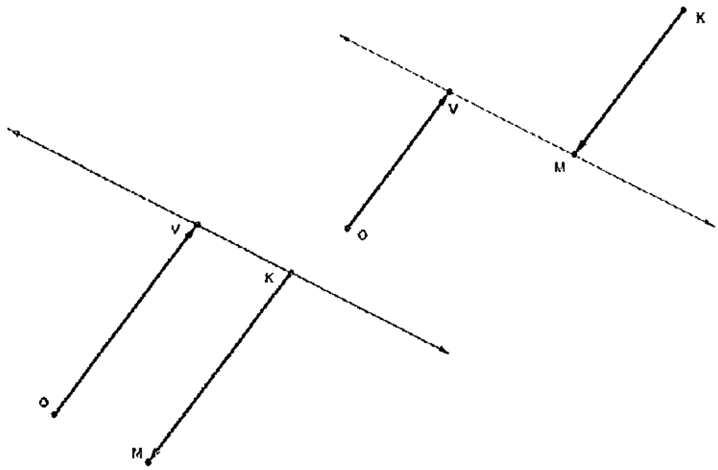


FIGURA 4-1

Si al segmento OV le asociamos uno de los sentidos de la dirección determinada por $\vec{R}$, entonces el segmento OV es un segmento orientado. Por consiguiente, a cada par de puntos distintos del plano corresponden dos segmentos orientados.

Así, los puntos O y V determinan un segmento no orientado $\overline{OV} \cong \overline{VO}$; pero determinan dos segmentos orientados $\overrightarrow{OV}$ y $\overrightarrow{VO}$ distintos entre sí.

En el caso de dos vectores $\overrightarrow{AE}$ y $\overrightarrow{BF}$, con la misma dirección, tienen el mismo sentido si al trazar una recta por sus puntos iníciales, los vectores quedan contenidos en el mismo semiplano; si quedan en semiplanos distintos, tienen sentido opuesto (véase figura 4-2).



(a) (b)

FIGURA 4-2

Un vector es una representación gráfica de una magnitud física, que se caracteriza por tener longitud, dirección y sentido.

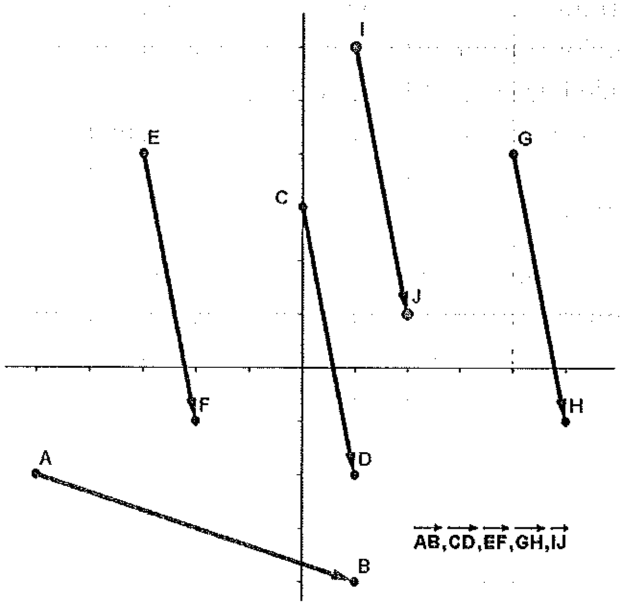


FIGURA 4-3

En la figura 3 observamos varios vectores y su representación geométrica, cada uno de ellos puede representar una cantidad vectorial.

Un vector en el plano se representa geométricamente por un segmento de recta orientado, que va desde un punto inicial hasta un punto final, en la Figura 3 tenemos varios ejemplos: uno que va desde el punto A hasta el punto B, este vector se representa como $\overrightarrow{AB}$. El punto A es el punto inicial, y B es el punto terminal del vector $\overrightarrow{AB}$, en otras palabras se definiría como un elemento que se desplaza desde el punto A hasta el punto B. Este mismo vector se puede representar por la letra minúscula o en negrita, así $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{u}$.

La longitud del vector es una magnitud, se denomina norma del vector y se representa por $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\boldsymbol{u}\|$.

Dos segmentos son congruentes si tienen la misma longitud; para los vectores, esta condición no es suficiente, dado que ***dos vectores son congruentes si y sólo si son segmentos orientados que tienen igual longitud, dirección y sentido.***

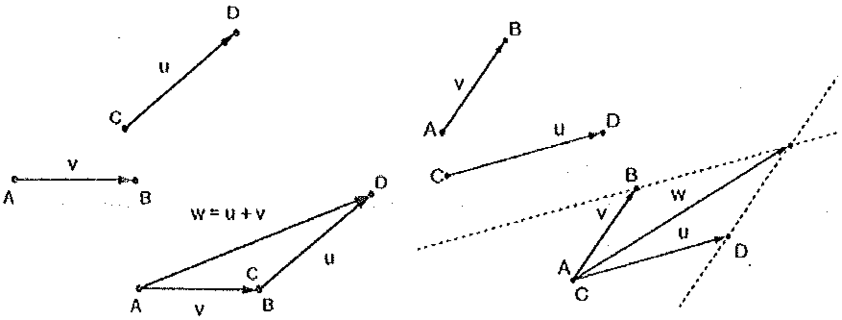
En la figura 4-3, por ejemplo, podemos decir que $\overrightarrow{EF} \cong \overrightarrow{DC} \cong \overrightarrow{IJ} \cong \overrightarrow{GH}$, debido a que todos poseen la misma dirección, longitud y sentido; $\overrightarrow{AB}$ no es congruente con los demás vectores, ya que no posee la misma dirección de los demás.

4.8.1 SUMA Y DIFERENCIA GEOMÉTRICA DE VECTORES

4.8.1.1 SUMA GEOMÉTRICA DE VECTORES

Sean los vectores $\boldsymbol{v} = \overrightarrow{AB}$ y $\boldsymbol{u} = \overrightarrow{CD}$ la suma $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$ se puede representar gráficamente mediante dos formas:

a) *Método del triángulo*: se une el punto final de $\boldsymbol{v}$ con el punto inicial de $\boldsymbol{u}$, cuyo vector suma o resultante será $\boldsymbol{w} = \overrightarrow{AD}$, el cual corresponde a la unión del punto inicial de $\boldsymbol{v}$ con el punto final de $\boldsymbol{u}$, como lo muestra la figura 4-4 (a).



(a) (b)

FIGURA 4-4

b) *Método del paralelogramo*: se une el punto de inicio de ***v*** con el punto de inicio de ***u***, luego se traza una paralela al vector ***u*** por el punto final del vector ***v*** y una paralela al vector ***v*** por el punto final del vector ***u***. El vector suma o resultante es el vector que une el punto de inicio de los vectores **u** y ***v***, con el punto de corte de las dos paralelas trazadas (véase figura 4-4 (b).

DESAFÍO V1.11 (suma de vectores, cabeza y cola)

DESAFÍO V1.12 (suma de vectores, cabeza y cola)

AYUDA 0

Practica en el DVD en el apartado GeoVectorial.

Movimientos en el plano. Unidad didáctica de Josep Mª Navarro Canut (22 escenas interactivas).

Vectores en el plano. Unidad didáctica de Ángela Núñez Castaín (22 escenas interactivas).

Video.

AYUDA 1

Al aplicar dos fuerzas a un objeto, en este caso un bote remolcado por un canal tal como aparece en la figura 4-5, y representadas dichas fuerzas por los vectores $\boldsymbol{v} = \overrightarrow{AB}$ y $\boldsymbol{u} = \overrightarrow{AC}$,

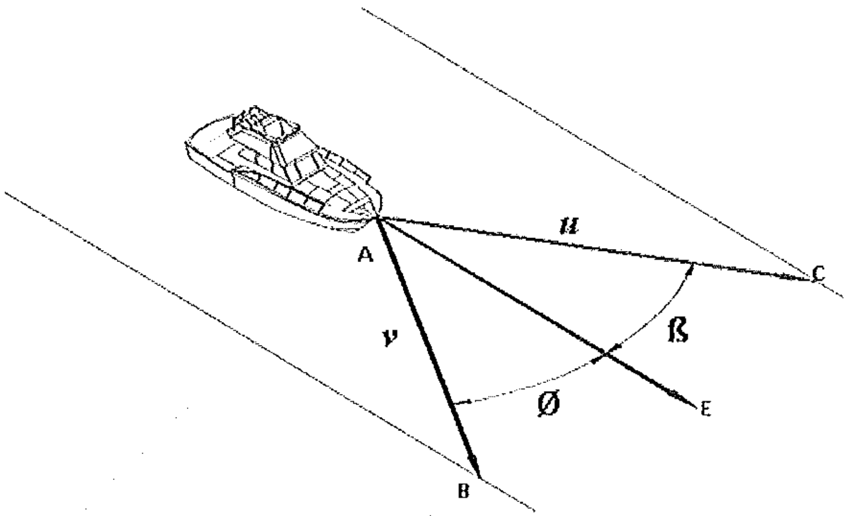


FIGURA 4-5

En física los objetos tienden a representarse como una partícula para facilitar los cálculos. En la figura 4-6 observa lo que se denomina una vista en planta, así comprenderás la situación más fácilmente.

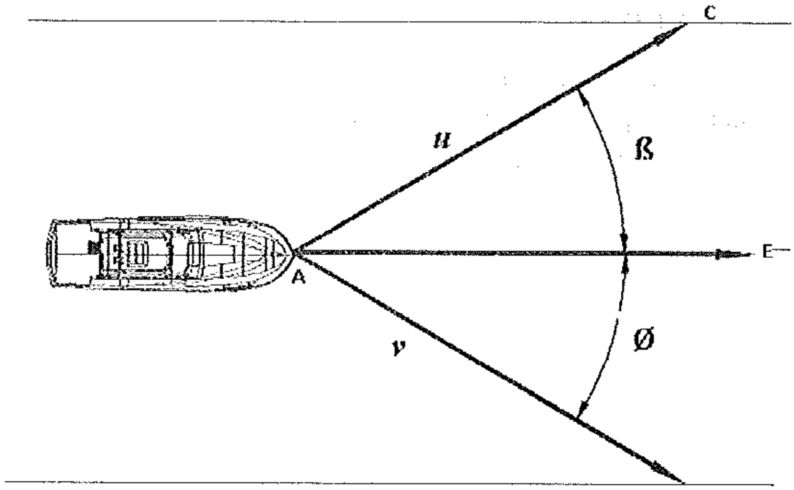


Figura 4-6

Entonces la fuerza resultante es $v + u = \overrightarrow{AE}$, (apoyados en la vista superior), como lo muestra la figura 4-7, donde pueden observarse los dos métodos descritos.

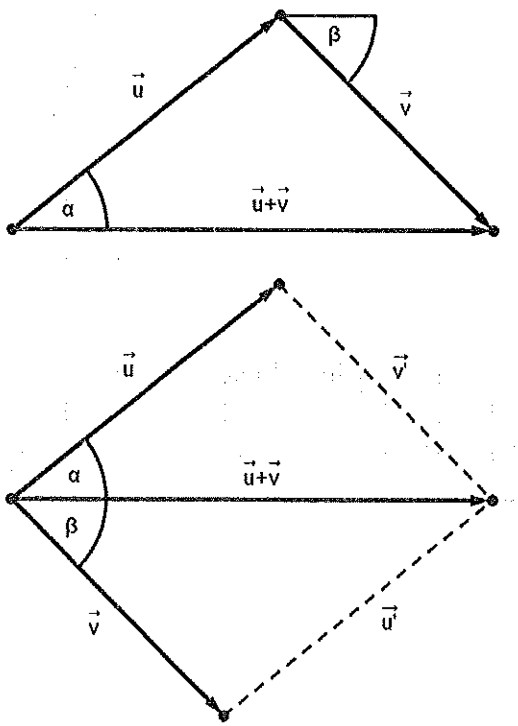


Figura 4-7

Quiere decir que la aplicación de las dos fuerzas tiene como resultante una sola fuerza representada por el vector $\overrightarrow{AE}$ y no tendrá como magnitud resultante la suma aritmética de las dos fuerzas; esto solo sería válido si se aplicasen en la misma dirección y el mismo sentido. Al vector $\overrightarrow{AC}$ se le llama suma de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BE}$, lo cual se expresa en la forma: $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}$.

DESAFÍO V1.5 (suma de vectores, método paralelogramo)

4.8.1.2 DIFERENCIA GEOMÉTRICA DE VECTORES

La diferencia vectorial implica un procedimiento similar al de la suma, sólo que en la representación gráfica el vector que va a ser restado se cambia de sentido y posteriormente se procede como en la suma de vectores; esto, dado que la diferencia $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} + (-\boldsymbol{u})$, como se muestra en la figura 4-8.

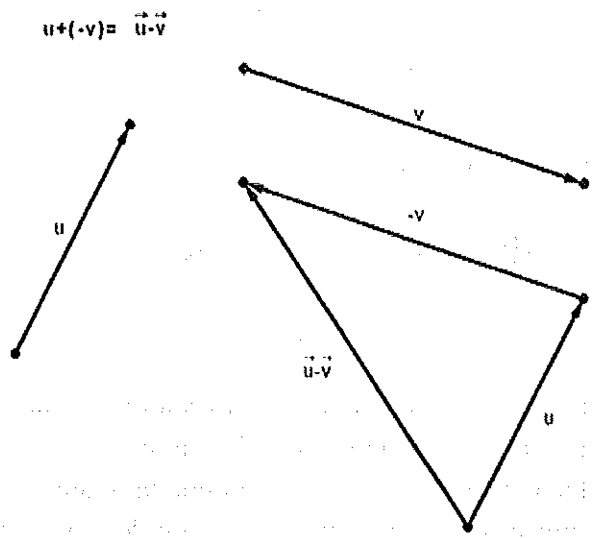


FIGURA 4-8

4.8.2 Reto

Dados los siguientes vectores, representa gráficamente las operaciones indicadas:

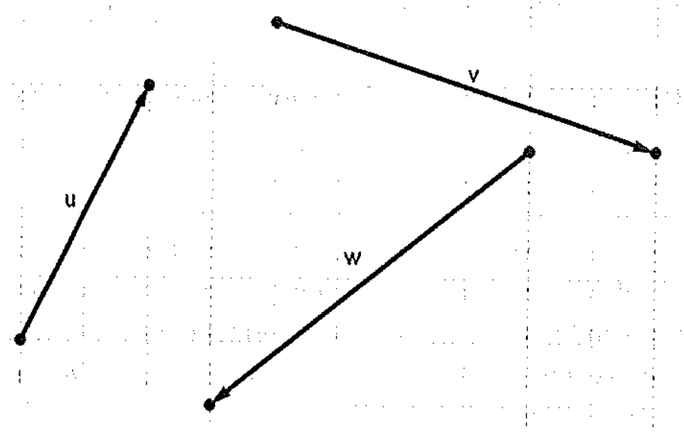


Figura 4-9

- $v + u$; $v - u$; $w - u$; $v - u$; $v - w$; $w + v$.

DESAFÍO V1.7 (resta de vectores)

DESAFÍO V1.8 (resta de vectores)

4.8.3 Producto de un escalar por un vector

Si tomamos un número real a y un vector v, se puede definir un nuevo vector como resultado de multiplicar este número a (escalar) por el vector v. El nuevo vector $a \cdot v$ tiene la magnitud $a \cdot \|v\|$, y tiene la misma dirección y el mismo sentido de v si $a > 0$, o tiene la misma dirección y sentido opuesto a v si $a < 0$. Si $a = 0$, entonces $a \cdot v = 0$ es el vector cero. A este proceso se le llama la ***multiplica-***

ción de un vector por un escalar. A continuación, en la figura 4-10 se muestra el vector $a \cdot v$ para diferentes valores de a.

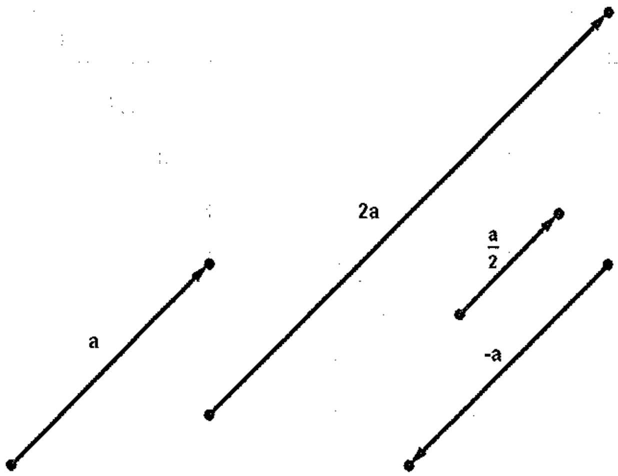


FIGURA 4-10

4.8.4 DESCRIPCIÓN ANALÍTICA DE LOS VECTORES

Para ir del punto inicial de un v a su punto terminal, hay que desplazarse a unidades en el eje de las x, como también b unidades en el eje de las y. Así podemos representar el vector v como el par ordenado de números reales $v\ \langle a, b\rangle$, en donde a es la **componente horizontal** del vector v, y b es la **componente vertical** del vector v (véase figura 4-11). Todos los vectores con las mismas componentes se denominan **vectores equipolentes.** El vector equipolente cuyo punto inicial corresponde al origen de coordenadas se denomina **vector posición**, los demás se denominan **vectores libres,** es decir, aquellos vectores que tienen por coordenadas un punto inicial diferente al origen.

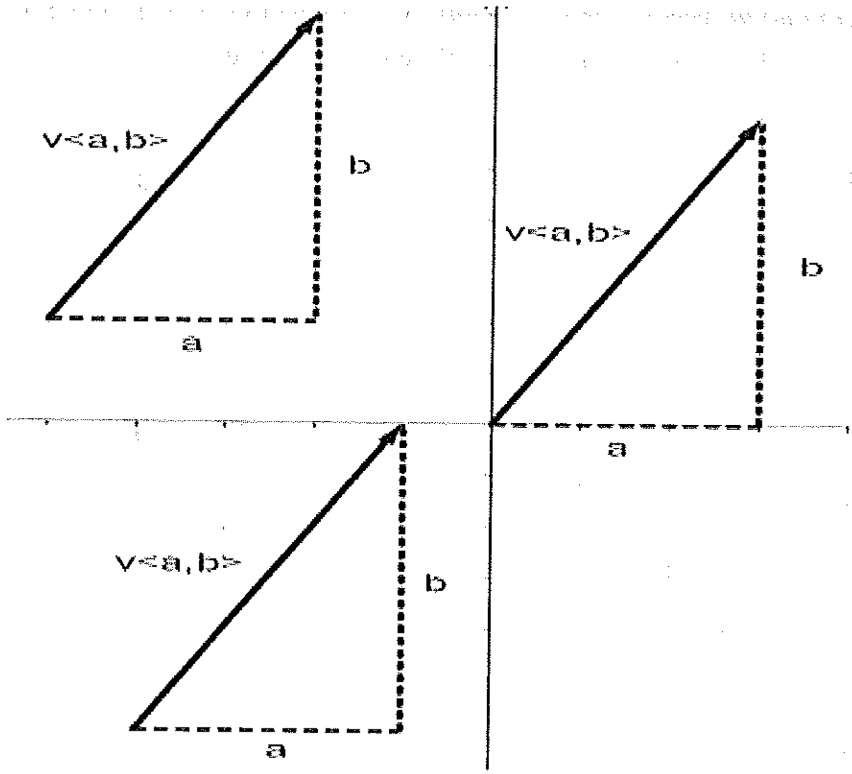


FIGURA 4-11

AYUDA 2

Dado el vector $v\langle 2, 4\rangle$, grafica tres vectores equipolentes al vector v cuyos puntos iniciales son:

a, $(-3, 3)$
b. $(3, 2)$
c. $(0, 0)$

Solución

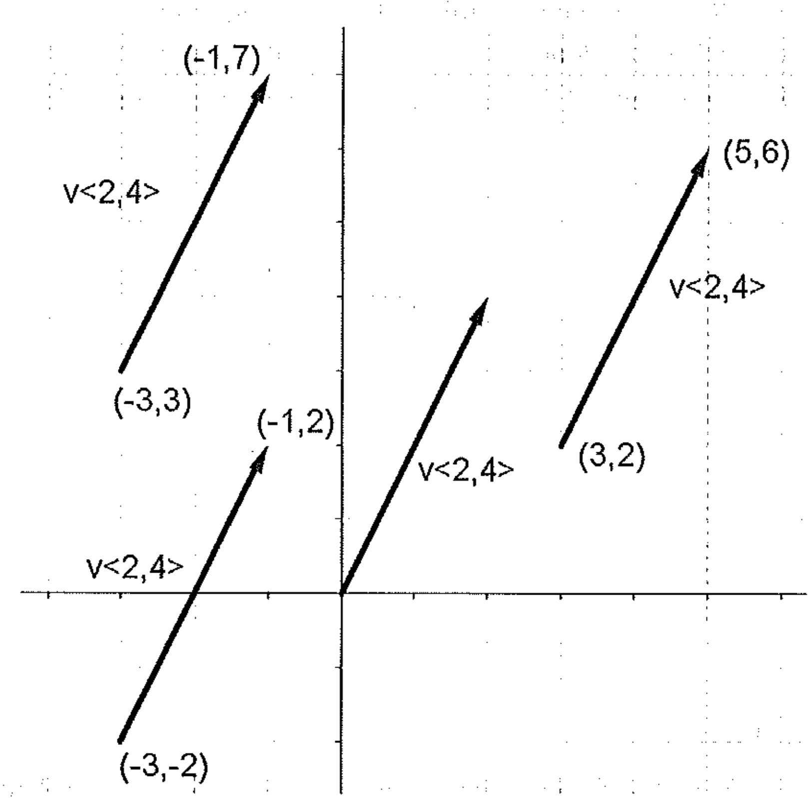


FIGURA 4-12

Se puede observar que sólo en el caso del vector posición las coordenadas del punto final del vector v corresponden a las componentes horizontal y vertical del mismo.

AYUDA 3

Encuentra el punto terminal y trazar el vector $h\langle 4, 1\rangle$, con punto inicial en $A(2, 3)$.

Solución

Sea $B(x, y)$ el punto terminal del vector $\boldsymbol{h}$, entonces $h\langle x-2, y-3\rangle = h\langle 4, 1\rangle$, de donde $x-2=4$, $y-3=1$, luego $x=6$, $y=4$.

El punto terminal del vector $\boldsymbol{h}$ es $B(6, 4)$ (véase figura 4-13).

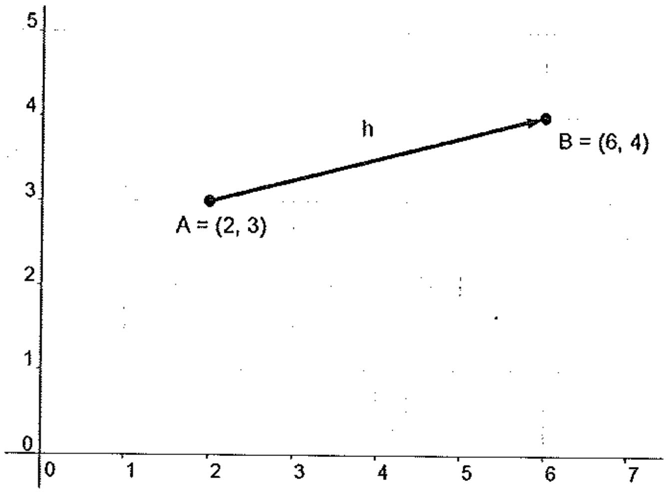


FIGURA 4-13

4.8.5 RETOS

Según lo descrito en el párrafo anterior, determina las coordenadas del punto final o inicial según el caso y grafica:

1. $u\langle 3, -2\rangle$ punto inicial $(-5, 2)$
2. $u\langle -5, -2\rangle$ punto inicial $(2, -1)$
3. $u\langle 5/2, 5/2\rangle$ punto inicial $(5/2, -7/2)$
4. $u\langle 0, 14\rangle$ punto final $(-6, 6)$
5. $u\langle 13, -7\rangle$ punto final $(-0.75, -3)$
6. $u\langle \sqrt{3}/3, -2/\sqrt{5}\rangle$ punto final $(1, 1)$

4.8.6 MAGNITUD O NORMA DE UN VECTOR

Para determinar la norma de un vector posición $u\langle x, y\rangle$ se procede de la misma forma que para calcular la distancia entre dos puntos: la distancia entre el punto final y el punto inicial del vector, así:

$$\|u\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

En el caso de que se requiera calcular la norma de un vector libre, con punto inicial en el punto (x_1, y_1) y punto final en el punto (x_2, y_2), la magnitud está definida por

$$\|u\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

AYUDA 4

Grafica y determina la norma del vector $\boldsymbol{k}$ con punto inicial en $A(-3, 2)$ y punto terminal en B(1, 5).

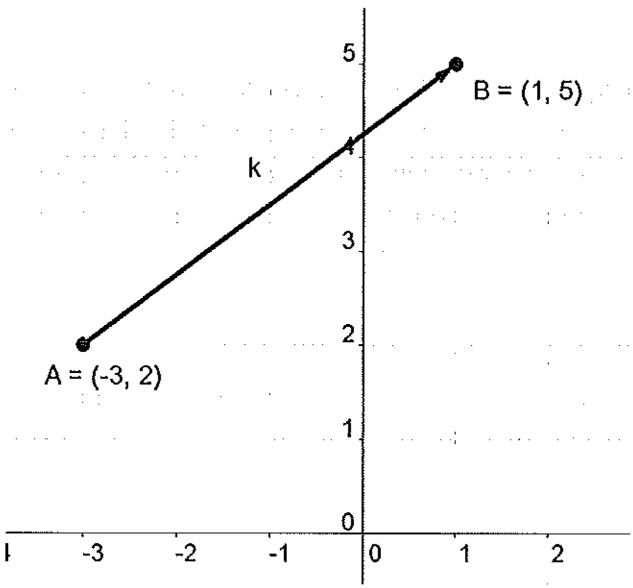


FIGURA 4-14

$$\|k\| = \sqrt{[1 - (-3)]^2 + [5 - 2)]^2}$$
$$= \sqrt{16 + 9} = 5$$

AYUDA 5

Determina la magnitud de los vectores:

- $p\langle 3, -2\rangle$; $\|\boldsymbol{u}\| = \sqrt{(3)^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$
- $z\langle -5, -2\rangle$; $\|z\| = \sqrt{(-5)^2 + (-2)^2} = \sqrt{29}$
- ***u***, punto inicial (–7, 0), punto final (–2, 5)

$$\|\boldsymbol{u}\| = \sqrt{(-2+7)^2 + (5-0)^2} = \sqrt{50}$$

- ***v***, punto inicial (10, 5), punto final (5, –2)

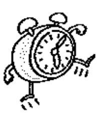
$$\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{(10-5)^2 + (5+2)^2} = \sqrt{74}$$

De cualquier manera, la solución de los problemas en contexto requiere de una gráfica geométrica que permita inicialmente visualizar el problema y, posteriormente, aplicar los conocimientos geométricos y/o trigonométricos que permitan soluciones más exactas.

4.8.7 Operaciones algebraicas con vectores

Sean los vectores $u\langle a_1, b_1\rangle$ y $v\langle a_2, b_2\rangle$.

El vector suma $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$ será igual a la suma de las componentes respectivas de los vectores ***u*** y ***v***, y se expresa como: $r\langle a_1 + a_2, b_1 + b_2\rangle$.



AYUDA 6

Suma los vectores $u\langle 5, 7\rangle$ y $u\langle -8, -7\rangle$.

Solución

$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$; $w\langle 5 - 8, 7 - 7\rangle = w\langle -3, 0\rangle$

El vector diferencia $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}$ será igual a la resta de las componentes respectivas de los vectores $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$, y se expresa como $d\langle a_1 - a_2, b_1 - b_2\rangle$:

AYUDA 7

Resta los vectores $u\langle 4, -8\rangle$ y $v\langle -5, 3\rangle$

Solución

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}; \quad w\langle 4 + 5, -8 - 3\rangle = w\langle 9, -11\rangle$$

El vector que resulta de multiplicar un escalar c por un vector $\boldsymbol{v}$ se expresa como: $z = c \cdot v;\ z\langle c \cdot a_1, c \cdot b_1\rangle$, c$\in$R.

AYUDA 8

Se tiene el vector $u\langle 4, 3\rangle$ y el escalar $a = 2.55$. Halla el vector resultante de multiplicar $a \cdot \boldsymbol{u}$.

Solución

El vector resultante $a \cdot \boldsymbol{u}$ es igual a multiplicar cada componente del vector $\boldsymbol{u}$ por a.

$$r = a \cdot \boldsymbol{u} = 2.55 \cdot u\,\langle 4, 3\rangle = r\langle 2.55 \cdot 4, 2.55 \cdot 3\rangle = r\langle 10.2, 7.65\rangle$$

AYUDA 9A

Sea $h\langle 4, 1\rangle$; $k\langle 2, 3\rangle$; $m\langle 3, 2\rangle$. Realiza las siguientes operaciones:

a. $h + k$ b. $h - k$
c. $k - h$ d. $h + m$
e. $h - m$ f. $m + k$
g. $h + k$

Solución

$s = h + k = s\langle 4 + 2, 1 + 3\rangle = s\langle 6, 4\rangle$. Observa en la figura 4-15 el resultado geométrico. La resultante puede ser trazada en cualquier lugar en R^2, teniendo en cuenta que la diferencia entre sus puntos inicial y final produzca las componentes $a_l = 6$; $b_l = 4$.

He aquí la gráfica de algunas de las respuestas gráficas a los problemas planteados:

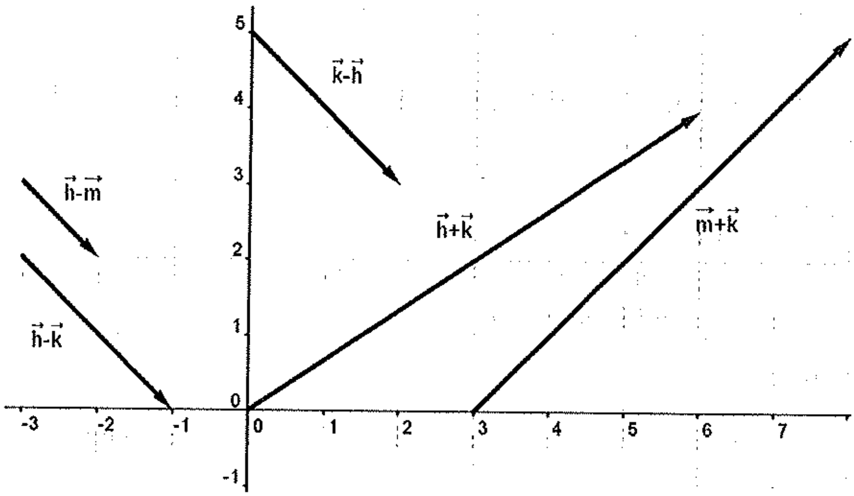


FIGURA 4-15

4.8.8 RETOS

Sean los vectores $u\langle 4, 4\rangle$, $w\langle 4, 3\rangle$, $a\langle -4, 3\rangle$, $b\langle -4, -3\rangle$, $c\langle 4, 0\rangle$, $e\langle 2, 2\rangle$.

Con los anteriores vectores, realiza las siguientes operaciones:

a. $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{w}$ b. $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$

c. $\boldsymbol{w} - \boldsymbol{e} - \boldsymbol{b}$ d. $\boldsymbol{c} + \boldsymbol{a} - \boldsymbol{u}$

e. $\boldsymbol{w} + \boldsymbol{e} - \boldsymbol{a}$ e. $\boldsymbol{e} + \boldsymbol{u} - \boldsymbol{b}$

DESAFÍO V1.9 (suma de vectores, ambos métodos)

DESAFÍO V1.10 (suma de vectores, método paralelogramo)

AYUDA 9B
Practica en el DVD en el apartado GeoVectorial.

Vectores en el espacio. Unidad didáctica de Ángela Núñez Castaín (23 escenas interactivas).

4.8.9 Propiedades de los vectores

- Un vector en R^2 o vector bidimensional es un par ordenado de números reales $u\langle x, y\rangle$.
- Un vector en R^3 es una tríada ordenada $u\langle x, y, z\rangle$ de números reales.
- $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
- $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
- $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$
- $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$

4.8.10 Vector unitario

Se denomina vector unitario aquel vector que posee magnitud igual a uno. Para obtener un vector unitario de la misma dirección y sentido de un vector específico $\vec{u}$, se efectúa el siguiente procedimiento:

$$\vec{u} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$$

AYUDA 10

Dado el vector $d\langle -8, 6\rangle$, determina el vector unitario en la dirección de $\vec{d}$:

$$\vec{u} = \frac{u\langle -8,6\rangle}{\sqrt{(-8)^2 + (6)^2}} = \frac{1}{10}\langle -8, 6\rangle = u\langle -\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\rangle$$

Al determinar la magnitud de este vector, se tiene que $\|\vec{u}\| = 1$.

4.8.11 Operaciones de suma y diferencia mediante los componentes rectangulares

Todo vector ***v*** puede descomponerse en componentes rectangulares: una componente horizontal v_x y una componente vertical v_y.

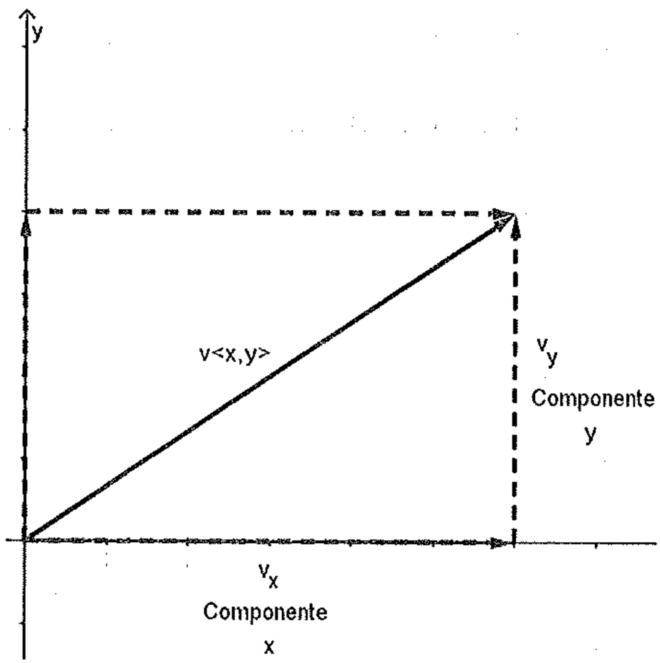


Figura 4-16

Al referirnos a los vectores unitarios en el sistema cartesiano se dispone de tres vectores unitarios: ***i*** en dirección *x*, ***j*** en dirección *y*, ***k*** en dirección z, con su respectivo inverso aditivo, tal como se aprecia en la figura 4-17.

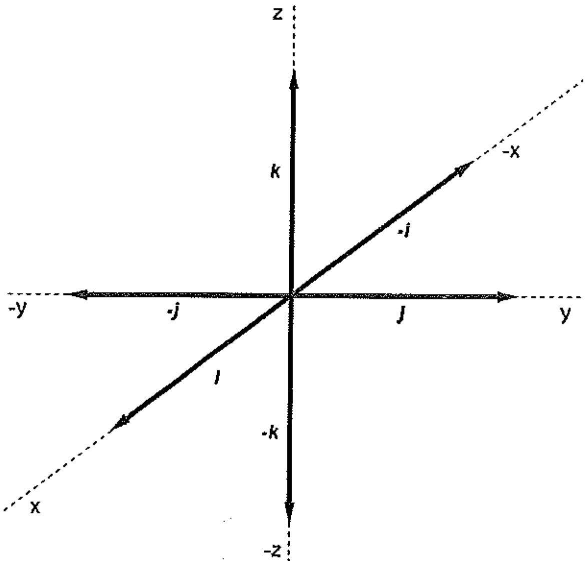


FIGURA 4-17

Así, un vector en el espacio se puede expresar en términos de sus componentes rectangulares y éstos, a su vez, en términos de vectores unitarios

$$v = v_x + v_y + v_z$$

Siendo x, y, z las magnitudes de los vectores v_x, v_y y v_z, respectivamente, se tiene en términos de vectores unitarios que

$$v = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$$

AYUDA 11

Expresa los vectores $u\langle 2, -4\rangle$ y $w\langle 1, 3\rangle$, en términos de los vectores unitarios $\boldsymbol{i}$ y $\boldsymbol{j}$.

Solución

$u = 2i - 4j$

$w = i + 3j$

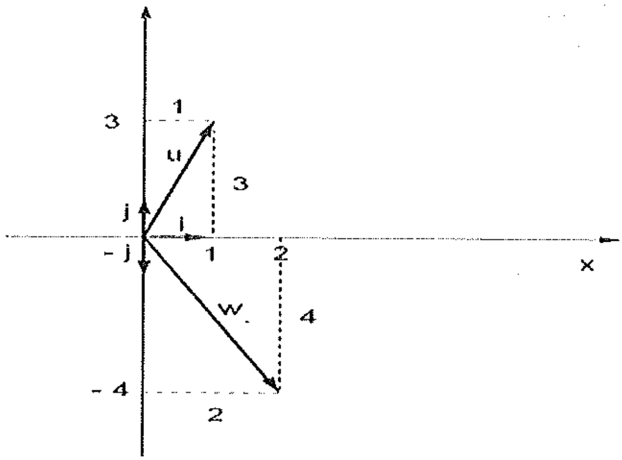


FIGURA 4-18

Para determinar las componentes rectangulares de un vector se debe conocer la dirección y la norma del vector.

La dirección de un vector v la determina el mínimo ángulo positivo, en posición normal, entre el eje positivo de las x y el vector v.

Utilizando las razones trigonométricas del triángulo rectángulo se pueden hallar las componentes rectangulares y la dirección del vector (véase figura 4-19).

$$v_x = \cos\beta \,.\, \|v\|\, i \qquad v_y = \sin\beta \,.\, \|v\|\, j$$

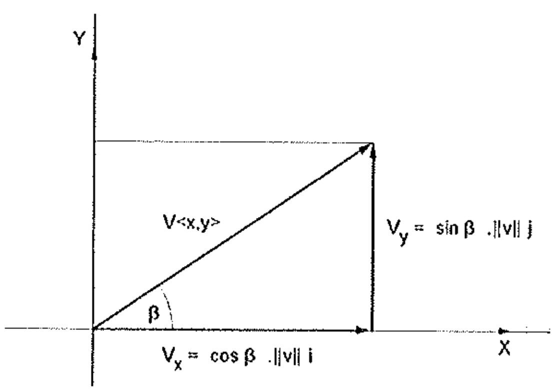
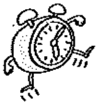


FIGURA 4-19



AYUDA 12

Halla la dirección del vector $v\langle 5, 4\rangle$.

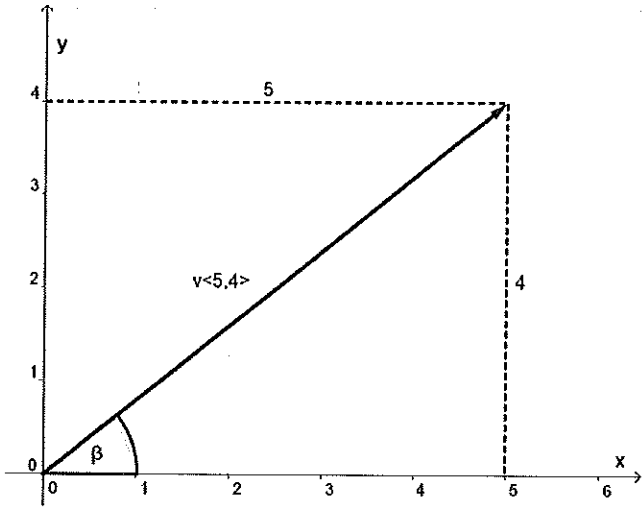


FIGURA 4-20

$$\tan\beta = \frac{4}{5}$$

$$\beta = \tan^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)$$

$$\beta = 38.7°$$

AYUDA 13

Un vector $\boldsymbol{v}$ posee una longitud de unidades y una dirección de 55°. Determina las componentes horizontal y vertical del vector y exprésalos en términos de $\boldsymbol{i}$ y $\boldsymbol{j}$.

$$v = v_x + v_y$$

$$x = 7 \cdot \cos 55° = 4; \quad y = 7 \cdot \sin 55° = 5{,}7$$

$$v_x = 7 \cdot \cos 55° \, \boldsymbol{i} = 4\boldsymbol{i}; \quad v_y = 7 \cdot \sin 55° \, \boldsymbol{j} = 5.7\boldsymbol{j}$$

$$v \langle 4, 5.7 \rangle = v = 4\boldsymbol{i} + 5.7\boldsymbol{j}$$

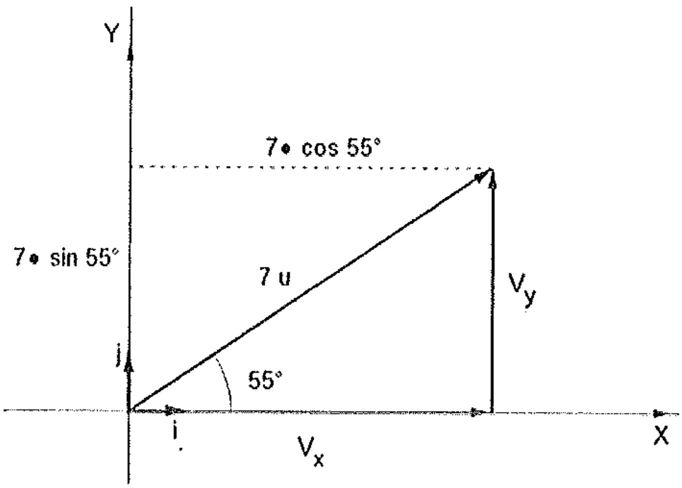


FIGURA 4-21

AYUDA 14

Una fuerza de 50 N se aplica a un objeto en un punto paralelo a su base y al mismo tiempo otra fuerza de 200 N se aplica formando un ángulo de 60º respecto de la horizontal. Se hace necesario reemplazar ambas fuerzas por una sola fuerza de tal manera que se logre el mismo efecto. ¿Cuál es esa fuerza equivalente y cuál su ángulo de aplicación?

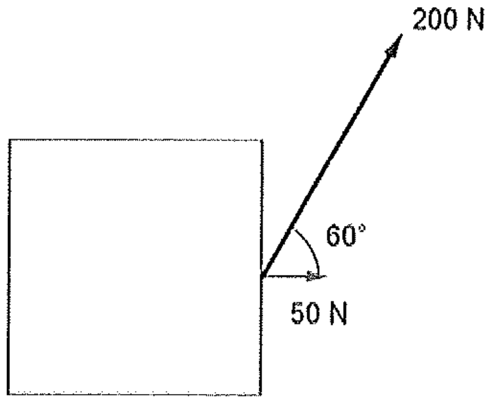


FIGURA 4-22

Análisis primer vector:

$$x = 200 \cdot \cos 60 = 100$$

$$y = 200 \cdot \sin 60 = 173.2$$

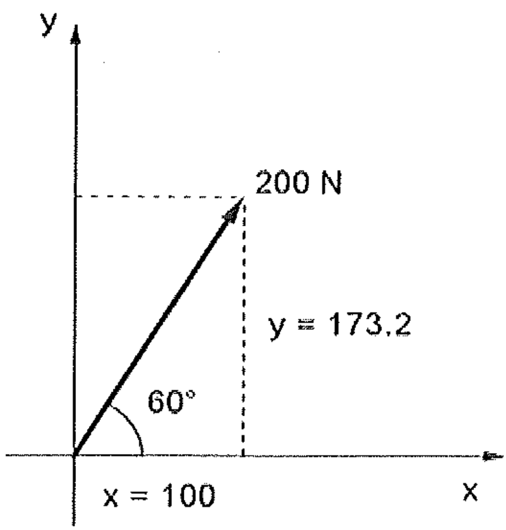


FIGURA 4-23

Análisis segundo vector:

$x = 50 \cdot \cos 0° = 50; \qquad y = 50 \cdot \sin 0° = 0$

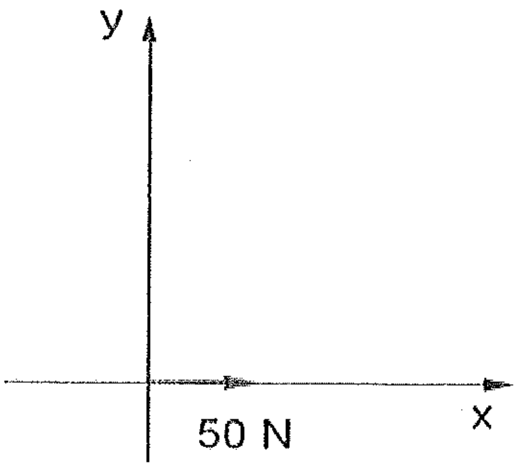


FIGURA 4-24

Las componentes del vector resultante se obtienen al sumar las componentes en x y y de los dos vectores.

La componente en x del vector resultante es: $x = 100 + 50 = 150$.

La componente en del vector resultante es: $y = 173.2 + 0 = 173.2$.

El vector resultante $w\langle 150, 173.2\rangle$

La magnitud del vector $\|\vec{w}\| = \sqrt{(150)^2+(173.2)^2} = \|\vec{w}\| = 229.1$

La dirección del vector resultante es:

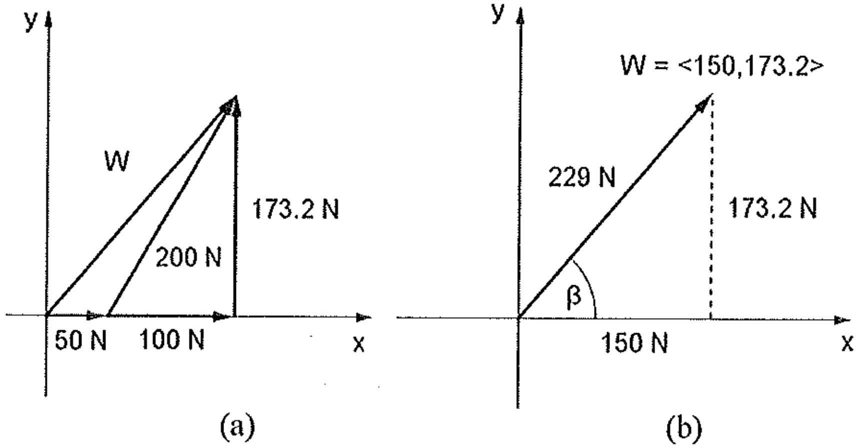


FIGURA 4-25

$$\tan\beta = \frac{173.2}{150}$$

$$\beta = \tan^{-1}\frac{173.2}{150}$$

$$\beta = 49°$$

Por lo tanto, la fuerza equivalente que se debe aplicar al objeto es de 229 N con un ángulo de 49°, con respecto a la horizontal.

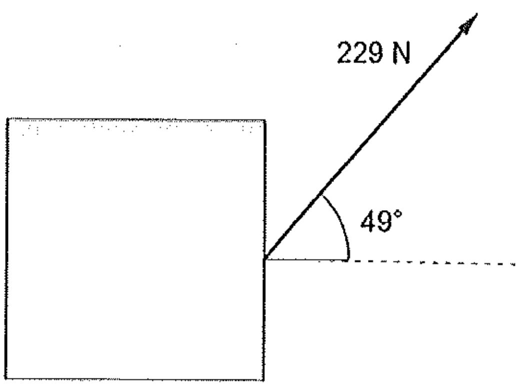


FIGURA 4-26

DESAFÍO V1.11 (Componentes rectangulares)

4.8.12 Retos

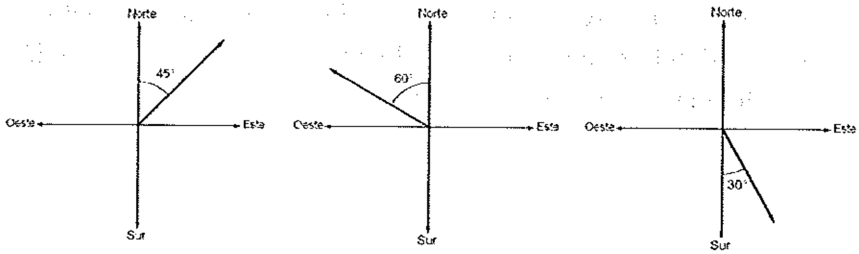
I. Para cada uno de los pares de vectores siguientes que representan fuerzas en Newtons, encuentra la norma y la dirección del vector suma de cada pareja.

1. $u = 65\ N$ con ángulo 85° $v = 48\ N$ con ángulo 30°
2. $k = 180\ N$ con ángulo 20° $w = 92\ N$ con ángulo 75°
3. $a = 125\ N$ con ángulo 70° $b = 43\ N$ con ángulo 55°

4.8.13 Aplicación de vectores en fuerzas y velocidades

Los vectores tienen una gran aplicación en el estudio de la física. El análisis de fuerzas que actúan sobre un elemento es una de las principales aplicaciones en el campo de la ingeniería. Igualmente, la aplicación para determinar la velocidad, la aceleración o el desplazamiento de los cuerpos en el estudio de la cinemática.

En el campo del transporte, ya sea terrestre, marítimo o aéreo, los vectores se utilizan para determinar la dirección o rumbo trazado o destino que se programa. El ángulo agudo medido a partir del Norte (N) o del Sur (S), es el soporte fundamental para los ejes de coordenadas, complementado en forma lógica por el Este (E) y el Oeste (W). En la figura 4-27 que se presenta a continuación, se ilustran algunos casos.



(a) (b) (c)

FIGURA 4-27

La velocidad de un objeto en movimiento se describe mediante un vector cuya dirección es la del movimiento y su magnitud es la rapidez. La velocidad del aire o del agua afecta el movimiento de los vehículos como aviones o barcos, tanto en su magnitud como en su dirección.

AYUDA 15

La rapidez de un móvil en una dirección específica es una cantidad vectorial, en los desplazamientos por aire y por agua. La velocidad y dirección del viento en el primer caso y la dirección y velocidad de la corriente afectan la velocidad con respecto al suelo de estos móviles.

Analiza: un avión se dirige al Oeste a una velocidad aerodinámica de 265 *km/h*, pero se encuentra con que el viento no se dirige al Oeste, tiene una velocidad de 56 *km/h*, pero con una dirección *N*55°*0*, lo que indica que el viento desvía la aeronave hacia el Norte y por lo tanto modifica la velocidad. Encuentra la velocidad con respecto al suelo del avión. En la figura 4-28 puedes observar la situación:

El vector que representa la velocidad respecto al suelo es $p = u + v$; donde u representa la velocidad aerodinámica del avión y v la velocidad del viento,

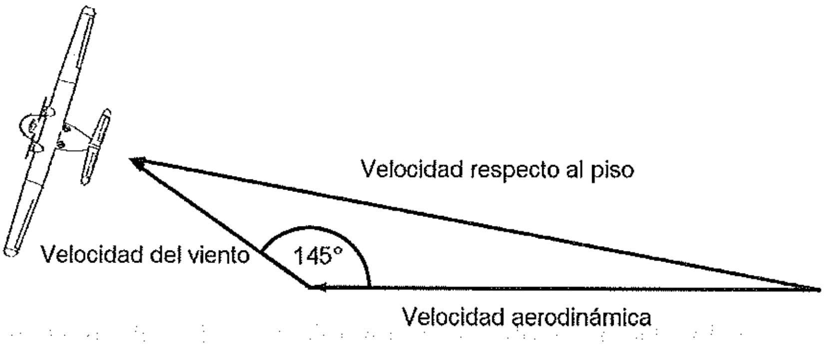


FIGURA 4-28

Solución

Descomponiendo el vector v que representa la velocidad del avión en sus componentes rectangulares, se tiene:

$$x = 265km/h \cdot \cos 0° = 265km/h$$
$$y = 265\,km/h \cdot \sin 0°. = 0$$
$$v\,\langle 265\,, 0\rangle$$

Realizando el mismo procedimiento se descompone el vector que representa la velocidad del viento y se obtiene:

$$x = 56km/h \cdot \cos 35° = 45{,}87km/h$$
$$y = 56km/h \cdot \sin 35° = 32{,}12km/h$$
$$u\,\langle 45.87{,}32.12\rangle$$

La resultante de las dos velocidades es:

$$w\,\langle 265 + 45.87, 0 + 32.12\rangle$$
$$w\,\langle 310.87{,}32.12\rangle$$

La velocidad con respecto al suelo es la norma del vector $\boldsymbol{w}$, es decir:

$$\|w\| = \sqrt{(310.87)^2 + (32.12)^2}$$
$$\|w\| = 312.52$$

Luego la velocidad con respecto al suelo es de 312.52 *km/h.*

DESAFÍO V1.12 (Desplazamiento y velocidad)

4.8.13 Retos

Otro camino para llegar a obtener el valor de la velocidad con respecto al suelo es empleando la ley del coseno. Comprueba la veracidad del resultado utilizando este teorema.

AYUDA 16

Se requiere conocer el ángulo de aplicación de una fuerza que reemplace las fuerzas $\boldsymbol{F_1}$ y $\boldsymbol{F_2}$, que actúan desde un punto P de un cuerpo, las magnitudes de dichas fuerzas son respectivamente 50 y 25 *lb.* y La fuerza de menor magnitud forma 45° con una línea horizontal y entre ambas fuerzas existe un ángulo de 105°. Determina la magnitud de la fuerza que las reemplazaría y su dirección.

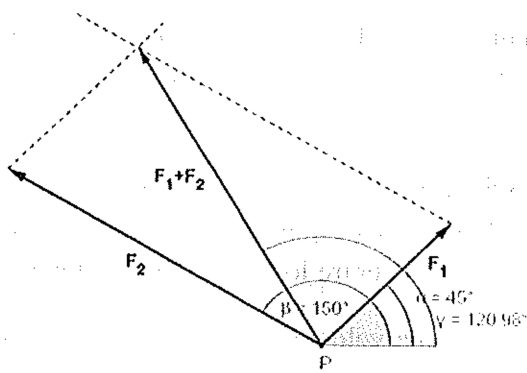


Figura 4-29

Solución

Expresa a F_1 y F_2 en términos de sus componentes

$$F_1 = (25lbCos45°)i + (25lbSen45°)j$$

$$F_2 = (50lbCos150)i + (50lbSen150)j$$

$$\|F_1 + F_2\| = \sqrt{(-25.62lb)^2 + (42.67lb)^2} = 49.77lb$$

La magnitud de la fuerza que reemplazará a F_1 y F_2 es igual a 49.77 *lb*.

El ángulo por lo tanto:

$$\theta = \tan^{-1}\frac{42.67lb}{-25.62lb}$$

$$\theta = -59.02$$

El ángulo positivo de la resultante es 180° – 59.02° = 120.98°.

4.8.14 Retos

1. Una aeronave parte de un lugar *A* con la dirección *N*25°*E* durante 250 minutos hasta el punto *B*; en este punto cambia a *N*63°*E* durante 210 minutos hasta el punto C. ¿Cuánto tiempo y con qué dirección se describiría la trayectoria de *A* hasta *C*?

2. Un automóvil parte de una ciudad con dirección *S*35°*O* durante 350 *km;* al llegar a este punto su dirección cambia a *N*45°*0.* ¿Cuál es la distancia entre los puntos de partida y de llegada?

3. Un bote viaja a una velocidad de 17 *km* por hora contra la corriente en un río cuya dirección es *S*216.87°*O,* con respecto al

punto de partida hasta un lugar ubicado 12 *km* al Sur y 16 *km* al Oeste. ¿Cuánto avanza el bote en 45 minutos de recorrido si la velocidad del río es de 5 *km* por hora?

4. Un avión sale de una ciudad A hacia B que se encuentra a 500 *km* al norte y 600 *km* al Este; de allí debe viajar hasta la ciudad C que se encuentra 300 *km* al Norte y 1.000 *km* al Este de B. ¿Cuál sería el recorrido total si desde B cambia su rumbo hasta una ciudad D localizada a 180° de C?

5. Un avión monomotor vuela a una velocidad aerodinámica de 285 *km/h;* su rumbo está definido por $S13°O$. ¿Qué valores tienen su velocidad con respecto al suelo y su rumbo, sabiendo que está afectada por un viento de 35 *km/h* con dirección $S13°E$.

6. Un avión vuela en dirección $N20°E$, con una rapidez de 240 *km/h.* Calcula las componentes de la velocidad hacia el Norte y hacia el Este y exprésela en términos de vectores unitarios.

7. Si un barco navega 120 *Mill/h* en la dirección $N35°O$ y después en línea recta, siguiendo al Este 150 *Mill/h,* ¿a qué distancia y dirección se encuentra el barco del punto de partida?

8. La corriente de un río tiene una velocidad de 4.7 *km/h,* y un bote de remos viaja a 18.5 *km/h* en aguas tranquilas. Si alguien desea cruzar el río en línea recta, ¿qué dirección debe tomar el bote con qué velocidad?

9. Dos personas arrastran una caja. Una de ellas tira de un cable aplicándole una tensión de 780N y en la misma dirección del eje central de la caja. La otra persona realiza una tensión de 700N, formando un ángulo de 19° con la línea sobre la que actúa la primera tensión. Determina la magnitud de la fuerza resultante y su dirección.

10. Un golfista realiza dos golpes para introducir la bola en el hoyo, uno de 60 *m* al Sur del punto donde se encuentra la bola y luego de 4 *m* a 90°. Determina la distancia inicial de la pelota al hoyo.

11. Dos caminantes parten de un lugar *A* hasta un lugar *B* que se encuentra a 5 *km* al Sur y 1.5 *km* al Oeste, allí deciden ir a otro lugar *C* ubicado 2 *km* al Sur y 3.5 *km* al Este del punto *B*. ¿Cuál es el valor del vector que representa el desplazamiento de *A* hasta *C*?

DESAFÍOS

DESAFÍO V1.1: SUMA DE VECTORES (Método Cabeza con Cola).

En la pantalla se observan los vectores *v* y *w* que se sumarán. Para ello se desplaza la cola de uno de los vectores hasta la cabeza del otro vector; el vector resultante es aquél que une la cola del vector no desplazado y la cabeza del vector que se desplazó. En la pantalla se encuentra un punto que se desliza por una línea de color azul; cuando el valor del punto es cero puedes variar los vectores a sumar arrastrando los punto de inicio o final de cada vector; de esta manera podrán obtenerse diferentes sumas.

DESAFÍO V1.2: Realiza las siguientes actividades y comprueba matemáticamente la operación realizada.

1. Ubica los vectores *v* y *w* (utiliza coordenadas con enteros para estos vectores) en el origen de coordenadas y luego de la suma desplaza el punto de unión de los vectores hasta que la resultante tenga un ángulo aproximado de 90°, 180°, 270°. Expresa matemáticamente la magnitud de la resultante y las coordenadas de los vectores suma en cada caso.

2. Ubica el vector *v* en el tercer cuadrante y el vector *w* en el primer cuadrante; luego de la suma desplaza el punto de unión, de tal manera que la resultante sea de 15 unidades y con un ángulo de 270°.

DESAFÍO V1.3: COORDENADAS DE UN VECTOR.

En pantalla aparece un vector de color rojo cuya posición puede ser alterada conservando su punto final o su punto inicial, arrastrando el punto que se desee variar. El vector completo puede arrastrarse, todo depende del punto en el que se ubique el dispositivo señalador. Al mover el punto al inicio de la línea verde y cuyo valor es $\beta = 0°$, podrás observar las coordenadas del vector.

DESAFÍO V1.4: SUMA DE VECTORES (Método del Paralelogramo).

En la parte superior se encuentra un punto que permitirá realizar la operación de suma de vectores. Cuando el punto tiene un valor de cero, se pueden desplazar los puntos inicial y final de cada uno de los vectores y dará lugar a una nueva suma.

DESAFÍO V1.6: MULTIPLICACIÓN DE UN VECTOR POR UN ESCALAR.

El vector *v*, de color rojo, es el vector original y podemos cambiar su posición y/o su magnitud con el mouse, arrastrándolo completo o por sus puntos inicial o final. En la parte superior de la pantalla aparece un punto deslizador cuyo valor mínimo es **–4** y que puede llegar hasta un máximo de **4**. Al desplazar el deslizador muestra las coordenadas del vector *w* (azul).

Realiza las siguientes actividades con su respectivo sustento algebraico:

1. Determina el valor del escalar para que el vector $v\langle -2.8, 2.1\rangle$ se convierta en $w\langle 3.5, 5\rangle$.
2. Determina la razón de a a b si el vector $a\langle a, b\rangle$ es perpendicular al vector $b\langle 2, -4\rangle$.
3. Siendo el vector $a\langle -3, 3\rangle$, determina el valor del inverso de $3.5a$. ¿Qué ángulo forma el vector con el eje vertical y medido en sentido inverso al de las manecillas del reloj?
4. Determina las coordenadas de un vector con dirección ***S195°O*** para que $\frac{3}{2}a = a\langle -10.5, -3\rangle$.
5. Determina la dirección de un vector para que $\frac{-3}{4}a = a\langle 8, -4\rangle$.

DESAFÍO V2.1:

Un piloto tiene la misión de llevar suministros a un barco en altamar. Él sabe que debe descargar el paquete en el punto cerca del barco para que los tripulantes lo recojan fácil. El avión viaja a determinada altura y debe descender a medida que se acerca al barco. Determina diferentes vectores para el descenso y el ascenso posterior; para ello, desplaza el punto verde que maneja el avión. El punto más alto representa el avión antes de descender, para observar el vector desplaza el punto de color terracota hacia arriba.

DESAFÍO V2.2:

La gráfica muestra el movimiento de una moto náutica. Se pueden analizar las componentes del vector posición desde el momento en que abandona la rampla hasta el momento que toca el agua en su caída. Para ello se emplea el deslizador (el punto verde). Si deseas observar cualquiera de los vectores, es necesario hacer clic en las casillas de verificación.

BIBLIOGRAFÍA

ACEVEDO, Miryam y otros. *Estándares Básicos de Calidad en Matemáticas MEN.* Bogotá. 2003.

ALSINA, Claudi y otros. *Invitación a la didáctica de la geometría.* Síntesis. Madrid, 1992.

AMSTER, Pablo. *La matemática como una de las bellas artes.* Buenos Aires,: Siglo XXI Editores, 2005.

ANTÓN BOZAL, Juan Luis y otros. Taller de matemáticas (1. Guía para el profesorado). Ministerio de Educación y Ciencia. Nancea, S.A. Madrid, 1994.

ANTÓN BOZAL, Juan Luis y otros. *Taller de matemáticas (2. Actividades sobre formas y figuras).* Ministerio de Educación y Ciencia. Madrid: Nancea, S.A., 1994.

ANTÓN BOZAL, Juan Luis y otros. *Taller de matemáticas (3. Actividades sobre resolución de problemas y juegos de lógica y estrategia).* Ministerio de Educación y Ciencia. Madrid: Nancea, S.A., 1994.

ARONS, Arnold. *Evolución de los conceptos de la Física.* México: Trillas, 1970.

BALDOR, Aurelio. *Geometría y Trigonometría.* Bogotá: Cultural. Colombiana, Ltda., 1972.

BALDOR, J. Aurelio. *Geometría Plana y del Espacio, con una introducción a la Trigonometría.* Compañía Cultural Editora y Distribuidora de textos americanos, S.A. (CCEDT) y códice América, S. A. México, 2004.

BRECHT, Hughes. *Círculos Viciosos y Paradojas (Una antología de paradojas lógicas, literarias, científicas, matemáticas y visuales).* Madrid: Zugart Ediciones S.A., 1994.

BURROUGHS, W.J. et al. *Observar el tiempo.* Barcelona, 1998.

CAMPISTROUS PÉREZ, Luis y otros. Matemática Onceno Grado. Pueblo y Educación. Ciudad de la Habana, 1996.

CARDEÑO E, Jorge. *Interpretación Geométrica de Algunos Modelos Aritméticos.* Medellín: Aires Litográficos, 2003.

Cartilla del Observador Meteorológico. HIMAT. Medellín, 1977.

CASTELNUOVO, Emma. *De viaje con la matemática (Imaginación y razonamiento matemático).* México: Trillas, 2001.

CASTELNUOVO, Emma. *Didáctica de la matemática moderna.* México: Trillas, 2004.

DE GUZMÁN OZAMIZ, Miguel. *Tendencias innovadoras en educación matemática*. Popular. Organización de Estados Iberoamericanos para la educación, la ciencia y la cultura, 1993.

DICKSON, Linda, BROWN, Margarita, GIBSON, Olwen. *El aprendizaje de las matemáticas.* España, 1991.

DIKSON, Linda. *El aprendizaje de las matemáticas.* Barcelona: Labor S.A., 1991.

DIMATÉ, Mónica. BELTRÁN, Luis. RODRÍGUEZ, Benjamín. *Matemáticas 10.* Bogotá: Prentice Hall, 2001.

DORAN, Jody L. y HERNÁNDEZ, Eugenio. *Las matemáticas en la vida cotidiana.* Madrid: Addison N Wesley, 1998.

ELAM, Kimberly. *Geometría del diseño (Estudio en proporción y composición.)* México: Trillas, 2003.

FERNANDEZ, León, SALDARRIAGA, Gustavo. *Geometría Integrada.* Fondo Editorial ITM. Medellín, 2007.

GARCÍA ARDURA, Manuel. *Problemas gráficos y numéricos de geometría.* Madrid: Almeda, 1952.

GIANCOLI, Douglas. *Física general.* México: Prentice Hall, 1988.

GOMEZ Joan. *De la enseñanza al aprendizaje de las matemáticas*. Barcelona: Paidós, 2002.

Grupo Abaco de la Universidad Nacional sede Medellín. *Matemáticas cuadernillo de campo aulas taller explora.* Área de comunicaciones centro de ciencia y tecnología de Antioquia CTA. Medellín, 2005.

GUARIN, Hugo. LONDOÑO, Nelson. *Dimensión matemática 10.* Bogotá: Voluntad, 1997.

GUERRERO G, Ana Berenice. *Geometría. (Desarrollo axiomático).* Bogotá: Ecoe Ediciones, 2006.

GUTIÉRREZ RODRÍGUEZ, Angel. *Actividades con el Geoplano para la E.G.B.* (Monografía). Universidad de Valencia, 1985.

Hemmerling, Edwin M. *Geometría elemental.* México: Limusa, 1978.

HIBBELER, R. C. *Mecánica vectorial para ingenieros: estática.* México: Pearson Educación, 2004.

HIRSCH, Christian R; SCHOEN, Harold L. *Trigonometría conceptos y aplicaciones*. Bogotá: McGraw-Hill, 1987.

HURTADO FERRAN y otros. *Atlas de matemáticas (Álgebra y geometría).* Quinto centenario, S. A. Bogotá, 1993.

KOLMAN, Bernard; HILL, David R. *Algebra lineal.* México: Pearson Educación, 2006.

LANDAVERDE, Felipe de Jesús. *Curso de geometría.* México: Progreso, S. A. 1963.

LARSON, Roland E; HOSTETLER, Robert P; EDWARDS, Bruce H. *Cálculo y geometría analítica.* Bogotá: McGraw-Hill Madrid, 1995.

LEITHOLD, Louis. *El cálculo con geometría analítica.* México: Harla, 1992.

LONDOÑO, Nelson, GUARÍN, Hugo. Dimensión Matemática 11. Medellín: Norma, 1996.

LONG, Lynette. *No te compliques con la geometría (Actividades y pasatiempos para aprender jugando).* México: Limusa Wiley, 2006.

LUNDY, Miranda. *Geometría Sagrada.* Barcelona: Ediciones Paidós Ibérica, S.A., 2004.

MADACHY, Joseph. S. *Las esferas doradas (Y otras recreaciones matemáticas. Tomo 2).* Madrid: Zugart Ediciones S.A, 1994.

Mankiewicz, Richard. *Historia de las matemáticas.* Barcelona: Paidós, 2000.

McGEE. R. V. *Matemáticas en Agricultura.* México: Trillas, 1972.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL, *Matemáticas Estándares Curriculares.* Bogotá. 2002.

MOISE, Edwin E. y DOWNS, Jr. Floyd L. *Geometría Moderna.* Addison - Wesley Publishing Company. Massachusetts, 1966.

MORENO, H.A. *Notas para el curso "observadores del tiempo atmosférico.* Medellín, 2002.

NELSON, E. W; BEST, Charles L; MCLEAN, W. G. *Mecánica vectorial: estática y dinámica.* Madrid: McGraw-Hill, 2004.

NOMDEDEU MORENO, Xaro. *Mujeres, manzanas y matemáticas. Entretejidas.* Madrid: Libros Ediciones, 2000.

PETERSON, Ivars y HENDERSON, Nancy. *Matelocuras 2 (Una odisea espacial).* México: Limusa, S.A., 2004.

PETERSON, Ivars y HENDERSON, Nancy. *Matelocuras (Pasatiempos matemáticos).* México: Limusa S.A., 2002.

ROJAS POSADA, Santiago. *La armonía de las formas.* Bogotá: Grupo Editorial Norma, 2007.

RUBIANO O, Gustavo N. *Fractales para profanos.* Bogotá: Unilibros, 2002.

SEVERI, Francesco. *Elementos de geometría (Tomo primero).* Barcelona: Labor, 1958.

SEVERI, Francesco. *Elementos de geometría (Tomo segundo).* Barcelona: Labor, 1958.

Skinner, Stephen. *Geometría sagrada (Descifrando el código).* Madrid: Gaia Ediciones, 2007.

STEWART, James. *Cálculo multivariable.* México: Thomson, 2002.

Une reunión de Professeurs. *Cours de Géométrie (Classes de 1° y 2°).* París: Livre du Maitre. Ligel, 1956.

Une reunión de Professeurs. *Cours de Géométrie (Classes de 1° y 2°).* París: Ligel, 1958.

Une reunión de Professeurs. *Géométrie. (Classes de 3°, 4° y 5°).* París: Ligel, 1947.

URIBE CALAD, Julio A. *Geometría analítica y vectorial*: Universidad Nacional de Colombia. Facultad de Ciencias. Medellín, 2005.

URIBE CALAD, Julio Alberto. Matemática Experimental 10. Medellín: Uros Editores, 2007.

VALVERDE, Ramírez Lourdes. *La resolución de ejercicios y problemas matemáticos utilizando los procedimientos heurísticos.* Universidad de Antioquia. Medellín, 2000.

VÉLEZ A., Jorge. *Geometría plana.* Medellín: Bedout, 1958.

Villella, José. *Uno, dos, tres... Geometría otra vez.* Aique. Buenos Aires: Grupo Editor S.A., 2001.

PÁGINAS Y DOCUMENTACIÓN EN INTERNET: mayo de 2009

www.usuarios.bitmailer.com
http://www.scm.org.co/revistas.php?modulo=Revista
http://www.thatquiz.org/es/
http://sauce.cnice.mecd.es/ebac0003/
http://www.superchicos.net/matematicas.htm
http://www.terra.es/personal/jariasca/proymate/proymate.htm
http://www.ucm.es/BUCM/foa/index.php
http://www.mat.usach.cl/histmat/html/iaf.html#A.C
http://ayura.udea.edu.co/
http://www.udea.edu.co/consulta/publico?accion=contenido&id=4107
http://apuntes.rincondelvago.com/examenes_universidad/
http://apuntes.rincondelvago.com/trabajos_global/matematicas/2/
http://www-groups.dcs.st-andrews.ac.uk/~history/BiogIndex.html

http://www.mat.usach.cl/histmat/html/iaf.html#A.C.
http://www.uam.es/departamentos/economicas/econcuan/PID.ApoyoMatematicas/contenidos.htm
http://www.oei.es/oeivirt/matematica.htm
http://www.oei.es/oeivirt/m.htm
http://www.oei.es/oeivirt/matematica.htm
http://www.rieoei.org/did_mat16.htm
http://www.oei.es/oim/revistaoim/soluciones.htm
http://www.oei.es/oeivirt/materias_educacion.htm
http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd99/ed99-0289-02/ed99-0289-02.html
http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/fib.html
http://www.educared.org.ar/tamtam/archivos/2006/05/26/origami_geometrico.htm
http://www.cientec.or.cr/matematica.html

http://www.terra.es/personal8/vibarbero/
http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/solido/din_rotacion/catenaria/catenaria.htm
http://etsiit.ugr.es/profesores/jmaroza/

HISTORIA DE MATEMÁTICOS

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/BiogIndex.html
http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Indexes/_500_AD.html
http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Chronology/index.html
http://www.archive.org/details/advancedcalculus031579mbp
http://www.rinconmatematico.com/libros.htm
http://www.rinconmatematico.com/
http://www.rinconmatematico.com/biografias.htm

BIOGRAFÍAS DE MUJERES MATEMÁTICAS

http://www.agnesscott.edu/lriddle/women/chronol.htm
http://ima.udg.edu/~cls/hom/cls_hom_llibre.html
http://www.fceia.unr.edu.ar/labinfo/inv_extension/apuntes/apunte_santalo.htm

PROGRAMAS DE JUEGOS

http://www.dma.fi.upm.es/docencia/primerciclo/matrecreativa/juegos/
http://www.iescarrus.com/edumat/prensa/art2007/art2007_01.htm
http://www.arrakis.es/~mcj/notas.htm
http://www.rinconmatematico.com/libros.htm

http://www.rinconmatematico.com/libros.htm
http://www.educa.aragob.es/mvital/

LIBROS
http://librodot.blogspot.com/
http://www.chollogratis.com/gratis/libros-maravillosos-libros-gratis.html
http://www.chollogratis.com/chollos/articulos-gratuitos/
http://www.chollogratis.com/chollos/gratis-en-internet/
http://escolares-pe.blogspot.com/2007/04/libros-maravillosos.html
http://www.educa.aragob.es/mvital/

MATEMÁTICAS INTERACTIVA
http://www.educa.jcyl.es/educacyl/cm/zonaalumnos
http://sepiensa.org.mx/librero/matematicas.html
http://platea.pntic.mec.es/~aperez4/antonio-perez.html
http://es.geocities.com/mundo_matematicas/
http://perso.orange.fr/therese.eveilleau/pages/jeux_mat/indexF.htm
http://www.divulgamat.net/
http://matematicas.uis.edu.co/~calculo1/descartes/CalculO1/Ecuacion_recta/ecuacion_recta1.htm#0
http://matematicas.uis.edu.co/~calculo1/descartes/CalculO1/Ecuacion_recta/ecuacion_recta2.htm#0
http://matematicas.uis.edu.co/~calculo1/descartes/CalculO1/Funcion_proporcionalidad/proporciondirecta.htm

Geometría interactiva
se terminó de imprimir en noviembre de 2009.
Para su elaboración se utilizó papel Bond blanco de 70 g,
en páginas interiores, y cartulina Propalcote 250 g para la carátula.
Las fuentes tipográficas empleadas son Times New Roman 12 puntos,
en texto corrido, y Myriad Pro 14 puntos en títulos.

INSTITUTO TECNOLÓGICO METROPOLITANO
DIRECCIÓN FONDO EDITORIAL

TEXTOS ACADÉMICOS

Serie TEXTOS ACADÉMICOS
¡Publicaciones de nuestros docentes para los estudiantes de Colombia!

FUNDAMENTOS DE LEGISLACIÓN LABORAL
Mónica Lucía Granda Viveros

GESTIÓN DE MANTENIMIENTO HOSPITALARIO E INDUSTRIAL. TENDENCIAS ACTUALES
William Orozco Murillo, compilador

APRENDIENDO A SER EL MEJOR
Yudi Amparo Marín Álvarez

EL LENGUAJE MUSICAL
Elkin Pérez Álvarez

FUNDAMENTOS TEÓRICOS DE LA ARMONÍA
Elkin Pérez Álvarez

FUNCIONES REALES CON MATLAB
Yolanda Álvarez Ríos / Gloria María Díaz Londoño

ESTUDIO DEL TRABAJO: NOTAS DE CLASE
María del Rocío Quesada Castro / William Villa Arenas

INTRODUCCIÓN AL MANTENIMIENTO BIOMÉDICO
Luis Fernando Castrillón Gallego

ÉTICA, INNOVACIÓN Y ESTÉTICA
Marta Palacio Sierra / Raúl Domínguez Rendón / Héctor Cardona Carmona

ESTÁDISTICA BÁSICA
Adriana Guerrero / María Victoria Buitrago / María de los Ángeles Curieses

PRESUPUESTO Y PROGRAMACIÓN DE OBRAS CIVILES
Sergio Andrés Arboleda López

TEXTOS ACADÉMICOS

GRAFICAR CON AUTOCAD
John Jairo García Mora

ACÚSTICA: LA CIENCIA DEL SONIDO
Ana María Jaramillo Jaramillo

INTRODUCCIÓN DE ERRORES EN LA MEDICIÓN
Adriana Guerrero Peña / Gloria María Díaz Londoño

METROLOGÍA. ASEGURAMIENTO METROLÓGICO INDUSTRIAL. TOMO I
Jaime Restrepo Díaz

NEUMÁTICA BÁSICA
Luis Giovanny Berrío Zabala / Sandra Ruth Ochoa Gómez

ELEMENTOS BÁSICOS DE INGENIERÍA DEL SOFTWARE
Diego Guerrero Peña

ADMINISTRACIÓN DE SISTEMAS DE COSTOS POR ÓRDENES
Armando García Muñoz

MANUAL DE PRÁCTICAS PROFESIONALES
Silvia Elena Rivera Escobar

GEOMETRÍA INTEGRADA
León Darío Fernández Betancur / Gustavo Saldarriaga Rivera

QUÍMICA BÁSICA. PRÁCTICAS DE LABORATORIO
Margarita Patiño Jaramillo

PRINCIPIOS DE ADMINISTRACIÓN
Darío Hurtado Cuartas

CÁLCULO DIFERENCIAL. LÍMITES Y DERIVADAS
Sergio Alberto Alarcón Vasco / María Cristina González Mazuelo
Hernando Manuel Quintana Ávila

FÍSICA MECÁNICA. EJERCICIOS RESUELTOS
Richard Hamilton Benavides Palacios / Claudia Milena Serpa Imbett

CARTILLA TÉCNICA DEL DESFIBRILADOR
William Orozco Murillo / Edward Cardona Montoya

TEXTOS ACADÉMICOS

CONSULTA Y ACTUALIZACIÓN DE BASES DE DATOS MEDIANTE EQUIPOS MÓVILES
Jaime Vásquez Rojas

INTRODUCCIÓN A LA PROGRAMACIÓN EN JAVA
Fray León Osorio Rivera

BASES DE DATOS RELACIONALES. TEORÍA Y PRÁCTICA
Fray León Osorio Rivera

MATEMÁTICAS ESPECIALES PARA INGENIERÍA. NIVEL I
Martha Cecilia Guzmán Zapata

METROLOGÍA: ASEGURAMIENTO METROLÓGICO INDUSTRIAL. TOMO II
Jaime Restrepo Díaz

MATEMÁTICAS ESPECIALES PARA INGENIERÍA. NIVEL II
Diego Agudelo Torres

ESPAÑOL AL DÍA. NORMAS DE USO COMÚN
Humberto de la Cruz Arroyave

FÍSICA MECÁNICA. CONCEPTOS BÁSICOS Y PROBLEMAS
Javier Vargas / Iliana Ramírez / Santiago Pérez / Jairo Madrigal

MATERIALES INDUSTRIALES. TEORÍA Y APLICACIONES
Ligia María Vélez Agudelo

LÓGICA Y PROGRAMACIÓN ORIENTADA A OBJETOS:
INICIO AL DESARROLLO DEL SOFTWARE
Fray León Osorio Rivera

SECCIONES CÓNICAS: UNA MIRADA DESDE LA DERIVACIÓN IMPLÍCITA
María Cristina González Mazuelo / Juan Guillermo Paniagua Castrillón
Gustavo Adolfo Patiño Jaramillo

SENTENCIAS BÁSICAS USADAS EN LA PROGRAMACIÓN DE COMPUTADORES
Roberto Carlos Guevara Calume

FUNDAMENTOS DE LA TEORÍA DE LA INFORMACIÓN
Mauricio Correa Villa

ANÁLISIS DE SEÑALES CON LAS TRANSFORMADAS DE FOURIER, GABOR Y ONDITAS
Horacio Arango Marín

Serie TEXTOS ACADÉMICOS

FUNDAMENTOS DE LEGISLACIÓN LABORAL.
Mónica Lucía Granda Viveros

GESTIÓN DE MANTENIMIENTO HOSPITALARIO E INDUSTRIAL. TENDENCIAS ACTUALES
William Orozco Murillo, compilador

APRENDIENDO A SER EL MEJOR
Yudi Amparo Marín Álvarez

EL LENGUAJE MUSICAL
Elkin Pérez Álvarez

FUNDAMENTOS TEÓRICOS DE LA ARMONÍA.
Elkin Pérez Álvarez

FUNCIONES REALES CON MATLAB
Yolanda Álvarez Ríos
Gloria María Díaz Londoño

ESTUDIO DEL TRABAJO: NOTAS DE CLASE
María del Rocío Quesada Castro
William Villa Arenas

INTRODUCCIÓN AL MANTENIMIENTO BIOMÉDICO
Luis Fernando Castrillón Gallego

ÉTICA, INNOVACIÓN Y ESTÉTICA
Marta Palacio Sierra *et al.*

ESTÁDISTICA BÁSICA.
Adriana Guerrero *et al.*

PRESUPUESTO Y PROGRAMACIÓN DE OBRAS CIVILES. Sergio Arboleda López

GRAFICAR CON AUTOCAD
John Jairo García Mora

ACÚSTICA: LA CIENCIA DEL SONIDO
Ana María Jaramillo

INTRODUCCIÓN DE ERRORES EN LA MEDICIÓN. Adriana Guerrero Peña / Gloria María Díaz Londoño

METROLOGÍA. ASEGURAMIENTO METROLÓGICO INDUSTRIAL. TOMO I
Jaime Restrepo Díaz

NEUMÁTICA BÁSICA. Luis Giovanny Berrío / Sandra Ruth Ochoa

ELEMENTOS BÁSICOS DE INGENIERÍA DEL SOFTWARE. Diego Guerrero Peña

PRINCIPIOS DE ADMINISTRACIÓN
Darío Hurtado Cuartas

Ver listado completo al final de la publicación

Geometría interactiva desarrolla líneas de actuación concretas mediante el trabajo con algunas unidades didácticas interactivas. La intención es "abrir los ojos" para que la mente aborde adecuadas observaciones geométricas y, a partir de ellas, desarrolle estrategias de resolución eficientes. Por ejemplo, la descomposición geométrica de figuras en otras más sencillas, o su ubicación en un contexto mayor que lo contenga, pero que sea más simple, son pautas de razonamiento en las que la Geometría "abstrae al Álgebra" y simplifica el aparato matemático necesario, se simplifica el cálculo. Igualmente, el posicionamiento adecuado ante un objeto tridimensional o la percepción reflexiva de la ordenación lógica de sus elementos, su ubicación y relación, también requiere de una práctica y aprendizaje.

ITM

ISBN 978-958-8351-68-1

9 789588 351681