MODELOS DE PRUEBA

EN COMPETENCIAS PARA LA ENSEÑANZA Y PARA EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

ELIME
Equipo línea de investigación matemática educativa y escolar

CEIDADIDA
CENTRO DE ESTUDIOS E INVESTIGACIONES DOCENTES

Modelos de prueba en competencias para la enseñanza y para el aprendizaje de las Matemáticas

Modelos de prueba en competencias para la enseñanza y para el aprendizaje de las Matemáticas

Jorge Cardeño Espinosa, Hernán Darío Ortiz Alzate,
Diego León Correa Arango, Nora Eliana Pino Ramos,
John Jairo Mahecha Bautista, Mercedes Arrubla Carmona

Modelos de prueba en competencias para la enseñanza y para el aprendizaje de las Matemáticas / Director e Investigador principal Jorge Cardeño Espinosa… [et al.]. –1a ed. – Medellín: CEID-ADIDA, 2017.

164 p. -- (Colección Textos académicos)
Incluye Bibliografía
ISBN 978-958-48-1882-9

1. Tópico Número y Variación (Matemáticas) 2. Tópico geometría y medición 3. Tópico pensamiento aleatorio. I. Cardeño Espinosa, Jorge. II. Ortiz Alzate, Hernán y Arrubla Carmona, Mercedes. III. Correa Arango, Diego y Mahecha Bautista, Jhon Jairo. Centro de Estudios de Investigaciones Docentes. Grupo ELIME

Catalogación en la publicación - Biblioteca ADIDA-COMFENALCO
Serie Textos Académicos

CEID-ADIDA
1a. edición: Julio de 2017
ISBN 978-958-48-1882-9
Hechos todos los depósitos legales
Publicación electrónica para consulta gratuita

Director
HAROLD IBARGÜEN MENA
Editor
Grupo ELIME

Corrección de Estilo
EUGENIA MARGARITA SÁNCHEZ CORTÉS
Universidad de Antioquia

Secretaria CEID-ADIDA
LUZ BURITICA

Diseño y diagramación

Diseño de carátula
ISABEL CORREA

CEID-ADIDA.
Calle 57 42-70 Argentina con Girardot
Tel. 2291020 Fax. 2291032
ELIME: http://grupoelime.com/

ELIME
Equipo línea de investigación matemática educativa y escolar

CONTENIDO

PRESENTACIÓN

Continuando el trabajo intelectual y la producción escrita desde el CEID, la línea de investigación: *«Educación Matemática»*, elaboró el presente documento: Modelo de prueba en competencias para la enseñanza y para el aprendizaje de las Matemáticas, como un elemento de preparación, discusión, capacitación y actualización docente, en la fundamentación conceptual de la Evaluación por competencias y de carácter diagnóstico formativa, propuesta por el *Ministerio de Educación Nacional*, para los docentes regidos por el Decreto Ley 1278 de 2002 de las instituciones educativas oficiales, del país, para abordar temáticas concretas que buscan mejorar la conceptualización y el dominio del contenido matemático. Es claro, que quien posea un conocimiento amplio de su saber podrá, efectivamente diseñar estrategias que conlleven a mejores procesos de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas, tanto en el aula como fuera de ella.

Es una necesidad identificar las formas de actuación, tanto de docentes como de estudiantes, para adoptar el método o métodos de aprendizaje más efectivos para producir en el otro, procesos de motivación e interés por el aprender. De esta manera, se podrán diseñar materiales más consistentes donde se aprecie el dominio de la Ciencia, además de su transposición didáctica y formas alternativas de enseñar un conocimiento determinado, pues allí se refleja el carácter del docente y su dedicación como profesional, a una de las tareas más importantes de cualquier sociedad, cual es la Educación de los niños y de os jóvenes.

Conviene precisar que, para dar cumplimiento al anterior propósito que las Competencias Matemáticas se entiendan como la capacidad de los docentes para determinar los aciertos o desaciertos de los estudiantes en su proceso de aprendizaje, así que no se trata solo de saber Matemáticas, sino las situaciones reales que puedan presentarse en el acto educativo, sus dificultades y problemas. También se dice que:

> En consecuencia, la competencia del docente en el área de Matemáticas se relaciona con el uso flexible y comprensivo, en contextos diversos, del conocimiento matemático y del conocimiento matemático escolar para transformar el saber a enseñar en objeto de enseñanza (trasposición didáctica). Este uso puede evidenciarse, entre otros, en su capacidad para analizar, razonar, y comunicar ideas efectivamente, para formular, resolver e interpretar problemas en situaciones didácticas. Abarca las competencias cognoscitivas sobre la disciplina; competencias en la argumentación, el razonamiento y la comunicación (lenguaje y representación); competencias en la matematización, modelización y resolución de problemas; el dominio de contenidos matemáticos y su conocimiento como objetos de enseñanza aprendizaje, la vinculación de contenidos matemáticos básicos con fenómenos que los originan: el reconocimiento de los aspectos formales implicados, su presencia en situaciones cotidianas y otras que procedan de ámbitos multidisciplinarios y los diferentes significados de los conceptos matemáticos y las estructuras. (MEN, 2014: 25)

Se abordarán en concreto, conceptos relacionados con los siguientes tópicos: Número y Variación, Geometría y Medición y, Pensamiento Aleatorio.

La idea fundamental de este trabajo no es suplir a ningún organismo del Estado colombiano, como es el caso del ICFES o de la Universidad Nacional de Colombia, dado que la capacitación es un derecho de todo docente, que además, debería ser subsidiado por parte de éste. De manera, que la idea esencial es brindar una mejor preparación conceptual para la Evaluación Diagnóstico Formativa, que propone, el *Ministerio de Educación Nacional* MEN, a partir del año 2016 y que de seguro tendrá grandes transformaciones, al momento de consolidar un Estatuto Único Docente, para todo el país.

Por último, este texto hace parte de la historia de Colombia en materia de Evaluación de los Docentes, con todos sus aciertos y contradicciones, que originó debate y disputa en el terreno ideológico, político y pedagógico, por parte de los docentes representados en la Federación Colombiana de Trabajadores de la Educación FECODE y el *Ministerio de Educación Nacional* MEN, además de generar una fractura y crear nuevas formas de acceder y avanzar en la carrera docente, propiciando en la práctica grandes obstáculos para el ascenso y una mejor calidad de vida de los maestros. Por ello, en el presente texto se hace un esfuerzo intelectual como aporte para el reconocimiento de las posibles dificultades, los retos y las habilidades que comprometía, el dar respuesta a este tipo de preguntas, en el campo específico de las Matemáticas.

JORGE CARDEÑO ESPINOSA
Director Línea de Investigación: *«Educación Matemática»*
CEID-ADIDA

1. TÓPICO NÚMERO Y VARIACIÓN

Según, el *Ministerio de Educación Nacional* el contenido temático número y variación está *«relacionado con la comprensión, representación, uso, sentido y significado de los números, sus relaciones y operaciones y con el reconocimiento descripción, modelación y representación de la variación y el cambio en distintos sistemas o registros simbólicos»* (MEN, 2014: 26).

Los temas específicos abordados en este tópico son: los números naturales (fases iniciales en el desarrollo de las ideas aritméticas, representación, significado de las operaciones, desarrollo y adquisición de las estructuras aditiva y multiplicativa), los números enteros (significados, representaciones, número con signo operación), los decimales, las fracciones y los reales, sus significaciones como objetos de la matemática escolar (representación decimal, procesos infinitos de aproximación en contextos numéricos y geométricos). Variable (diferentes interpretaciones de la letra: objeto-incógnita-número generalizado), concepto de función y su conexión con la variación, representaciones diversas (descripción verbal, tabla, gráfica, fórmula), descripción de fenómenos de cambio y de dependencia.

Por lo tanto, se propiciarán aportes teóricos sobre el contenido temático, la didáctica y las competencias matemáticas, definidos por el *Ministerio de Educación Nacional*, como elementos esenciales para abordar los conocimientos matemáticos básicos que el docente debe enseñar en referencia con los Estándares Curriculares y se presentarán, igualmente los modelos propuestos en distintos documentos oficiales del Estado. Finalmente, se presentan modelos de problemas, buscando un mayor dominio conceptual para analizar los tipos de preguntas.

1.1. NUMEROS NATURALES

N = Conjunto de los Números Naturales. $\mathrm{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$
Algunas características de los números naturales son:

1. Todo número mayor que 1 (o mayor que 0 en caso de considerar el 0 como natural) va después de otro número natural.
2. Entre dos números naturales siempre hay un número finito de naturales. (Interpretación de conjunto no denso)
3. Dado un número natural cualquiera, siempre existe otro natural mayor que éste. (Interpretación de conjunto infinito).

Propiedades de la Adición de Naturales

Asociativa

Si $\mathrm{a, b, c} \in \mathrm{N}$ se tiene que:

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

Conmutativa

$a + b = b + a$

Propiedades de la Multiplicación de los Naturales

Asociativa

Si $a, b, c \in N$ tenemos que:

$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

Conmutativa

$a \cdot b = b \cdot a$

Distributiva del producto con respecto a la suma:

$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

1.2. ALGUNAS NOCIONES SOBRE TEORÍA DE NÚMEROS

Criterios de Divisibilidad

Para saber si un número es divisible por otro, no siempre es necesario hacer la división, ya que puede aplicarse algunos de los siguientes criterios.

Divisibilidad por dos:

Si su último dígito es par o cero.

Divisibilidad por tres:

Si la suma de sus dígitos es divisible por tres.

Divisibilidad por cinco:

Si su último dígito es cero o cinco.

Divisibilidad por siete:

Cuando la diferencia entre el número sin la cifra de las unidades y el doble de la cifra de las unidades es cero o múltiplo de siete.

Divisibilidad por once:

Si la diferencia entre la suma de las cifras que ocupan los lugares pares y la de los impares es cero o múltiplo de once.

Números Primos

Se denomina número primo a todo entero diferente de uno, cuyos únicos divisores son él mismo, su opuesto y la unidad; los números que no son primos se denominan compuestos. El estudio de los números primos, como sub conjunto de los enteros, ha formado desde épocas remotas una rama especial de las matemáticas, no solo interesante como un juego matemático, sino también por sus implicaciones científicas. Los números primos menores que 100 son los siguientes: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89 y 97

Teorema Fundamental de la Aritmética

Todo número entero positivo puede descomponerse de forma única como producto de factores primos excepto por el orden.

Ejemplo:

$$20808 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 17^2$$
$$3600 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2$$

No existe otra forma de factorización de $20808\ y\ 3600$ en números primos y puesto, que la multiplicación es conmutativa, el orden de los factores no influye; por esta razón, habitualmente se expresa el teorema como factorización única, exceptuando el orden de los factores.

Mínimo Común Múltiplo

El mínimo común múltiplo («M.C.M.» O «MCM») de dos o más números naturales es el menor número natural (distinto de cero) que es múltiplo de todos ellos. Para el cálculo del mínimo común múltiplo de dos o más números se descompondrán los números en factores primos y se tomarán los factores comunes y no comunes, con su mayor exponente.

Cálculo del M.C.M.

1. Descomponer los números en factores primos.
2. Para cada factor común, elegir entre todas las descomposiciones aquel factor con mayor exponente.
3. Multiplicar todos los factores elegidos.

Manera teórica del cálculo del Mínimo Común Múltiplo (MCM)

La teoría es la siguiente:

Factores comunes y no comunes elevados al mayor exponente.

1. Descomponemos los números en factores primos.
2. Para cada factor común, elegir entre todas las descomposiciones aquel factor con mayor exponente.
3. Multiplicar todos los factores elegidos.

Ejemplo, de las factorizaciones de 20808 y 3600:

$$20808 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 17^2$$
$$3600 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2$$

Puede inferirse que su M.C.M. es $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 17^2 = 1.040.400$

Lo que implica que 1.040.400 es el menor múltiplo de 20808 y de 20808 que es divisible, exactamente por cualquiera de ellos.

También puede utilizarse el método abreviado:

Hallar el MCM entre 30, 60, y 90 por el método abreviado.

Solución:	30	60	190	2
	15	30	95	2
	15	15	95	3
	5	5	5	5
	1	1	19	19
	1	1	1	

MCM = 2^2 x 3 x 5 x 19 = 1140

Máximo Común Divisor

El máximo común divisor («M.C.D.» O «MCD») de dos o más números naturales es el mayor divisor posible de todos ellos.

Propiedades

El máximo común divisor de dos números resulta ser el producto de sus factores primos comunes, elevados al menor exponente.

El M.C.D. de tres números se puede calcular como sigue: M.C.D (a, b, c) = M.C.D (a, MCD (b, c)).

Por ejemplo de las factorizaciones de 48 y 60, ($48 = 2^4.3$ y $60=2^2.3.5$) podemos inferir que su MCD es $2^2.3 = 12$ o comúnmente expresado como MCD (60,48) =12.

Como puede verse se ha necesitado calcular la factorización de 48 y 60 en factores primos.

Si en cambio utilizamos el algoritmo de Euclides:

Se calcula el resto de dividir 60 por 48, 12 (En este caso es igual a restar 48 a 60).
Se calcula el resto de dividir 48 por 12: 0. Por tanto, el mcd de 48 y 60 es 12.

Como puede verse para utilizar el algoritmo de Euclides se ha necesitado:

Una resta
Una división

Algoritmo de Euclides

Siendo a y b dos enteros positivos tales que $a > b$, se comienza dividiendo $\frac{a}{b}$, con lo que se obtiene un resto r_1 y un cociente q_1. Se hace la operación $q_1 = \frac{a}{b}$, utilizando la división entera, sin decimales, pero realmente no sólo interesa el resultado o cociente de la división, sino el resto, así que la operación se reescribe de otra forma.

Es importante que llamemos «a» al mayor de los dos números (siempre el mayor va a ser a). Debemos dividir a entre b y obtener un cociente (al que se llama q_1) y un resto (al que llamaremos r_1).

Al obtener ese cociente y ese resto, se cumple que:

$$a = q_1 \cdot b + r_1$$

A partir de esa primera división, es necesario repetir un proceso:

- ✓ Dividir el número que fue divisor en el paso anterior entre el resto obtenido en el paso anterior.
- ✓ Despreciar el cociente.
- ✓ Si el resto obtenido esta vez es 0, el mcd es el divisor de esta operación, es decir, el último resto no nulo (recordemos que el divisor de esta operación fue el resto en la anterior.
- ✓ Si el resto no es 0, ir al primer paso.

Ejemplo:

Hallar el MCD y el MCM de 728 y 304, aplicando el algoritmo de Euclides:

Solución:

$728 \div 304$	2	120
$304 \div 120$	2	64
$120 \div 64$	1	56
$64 \div 56$	1	8
$56 \div 8$	7	0

Por lo tanto se cumple que:

$$\begin{aligned}\mathrm{MCD}(728, 304) &= \mathrm{MCD}(304, 120) = \mathrm{MCD}(120, 64) = \mathrm{MCD}(64, 56) = \mathrm{MCD}(56, 8) \\ &= \mathrm{MCD} = (8, 0) = 8\end{aligned}$$

Por otra parte:

$$\mathrm{MCM}(728, 304) = \frac{728 \ \cdot 304}{\mathrm{MCD}(728,\ 304)} = \frac{728 \ \cdot 304}{8} = 27664$$

1.3. NÚMEROS ENTEROS

El Conjunto de los Números Enteros surge de la necesidad de dar solución general a la sustracción, pues cuando el sustraendo es mayor que el minuendo, esta sustracción no tiene solución en los números Naturales.

Z: Conjunto de los Números Enteros

Z $=$ $\{\ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

El conjunto de los números enteros tiene, entre otras, las siguientes características:

1. No tiene primer elemento
2. Es infinito. No tiene último elemento.
3. Entre dos números consecutivos, no existe otro. El conjunto es de valores discretos.

El orden de los números enteros se define como:

Dados dos números enteros de signos distintos,$+a$ y $-b$, el negativo es menor que el positivo: $-b < +a$.
Dados dos números enteros con el mismo signo, el *menor* de los dos números es:
El de menor valor absoluto, si el signo común es «+».
El de mayor valor absoluto, si el signo común es «−».
El cero, 0, es menor que todos los positivos y mayor que todos los negativos.

Propiedades de la Adición de Enteros

Entenderemos que si a y b son enteros, entonces: $a - b = a + (-b)$. Luego una resta o diferencia puede expresarse como la suma del minuendo, con el opuesto del sustraendo.

Asociativa

Si $\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c} \in \mathrm{Z}$ se tiene que:

$(a + b) + c = a + (b + c)$

Conmutativa

$a + b = b + a$

Distributiva del producto con respecto a la suma:

$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Elemento neutro

$a + 0 = 0 + a = a$

Elemento inverso

$a + (-a) = 0$

PROPIEDADES DE LA MULTIPLICACIÓN DE LOS ENTEROS

Asociativa

Si $a, b, c \in Z$ se tiene que:

$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

Conmutativa

$a \cdot b = b \cdot a$

Elemento neutro

$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$

Producto por cero

$a \cdot 0 = 0$

1.4. NÚMEROS RACIONALES

Números Decimales

El Anillo[1] conmutativo con unidad de los números decimales, que puede simbolizarse por $(D, +, \cdot)$, es una subestructura algebraica del cuerpo de los números reales $(R, +, \cdot)$, con respecto a las operaciones usuales, menos conocida que el Anillo de los números enteros $(Z, +, \cdot)$ y que el Cuerpo de los números racionales $(Q, +, \cdot)$.

$0{,}8 = \frac{4}{5}$ y $\frac{2}{3} = 0{,}666\ldots$

¿Ambos son números decimales?

Ambos son elementos de Q, pero mientras el primero es un racional decimal, el segundo es un racional no decimal.

Un número real racional es un decimal sí y solo sí, puede escribirse con la forma $d = n.10^p$, donde n y p son números enteros. Si p es positivo, el decimal $d = n.10^p$ es un entero.

$Z \subset D$. Todo entero es un decimal, pero no todo decimal es un entero.

Si p es negativo, el decimal $d = n.10^p$ es un racional que puede escribirse $d = \frac{n}{10^{-p}}$ ($-p$ es positivo).

Según la definición anterior, todo número decimal es un racional, pero hay números racionales que no son decimales. Por lo tanto: $D \subset Q$, pero $Q \not\subset D$. También es posible justificar la siguiente relación de inclusiones: $N \subset Z \subset D \subset Q \subset R$.

El Cuerpo Conmutativo de los Números Racionales

El conjunto de los Números Racionales se creó debido a las limitaciones de cálculo presentados en el conjunto de los Números Naturales y Números Enteros.

Q: Conjunto de los Números Racionales

$$Q = \left\{ \frac{a}{b} : a\ y\ b \in Z \wedge b \neq 0 \right\}$$

[1] En álgebra, un anillo es una estructura algebraica formada por un conjunto (A), y dos operaciones: suma y producto; de modo que (A,+) es un grupo conmutativo con elemento neutro (que designamos 0), y el producto es asociativo, posee neutro, llamado unidad (que designamos 1), y tiene la propiedad distributiva respecto de la suma. Si además el producto es conmutativo hablaremos de un anillo conmutativo.

Toda fracción es un número racional y cada número racional consta de infinitas fracciones equivalentes. De todas ellas se toma representante canónico de ese número racional a la fracción irreducible.

De ninguna manera un número racional es una fracción. Ésta lo representa y, por razones de simplicidad, se escribe $\frac{a}{b}$ para aludir a la clase $\left[\frac{a}{b}\right]$ denominada número racional.

Al conjunto de los racionales pertenecen los números decimales finitos, infinitos periódicos e infinitos periódicos mixtos que sí pueden transformarse en una fracción.

Los números racionales cumplen la propiedad arquimediana, esto es, para cualquier par de números racionales existe otro número racional situado entre ellos. Por eso se dice que los números racionales son densos, en la recta de los números reales.

Propiedades de la Adición de Racionales

Asociativa

Si $\frac{a}{b}, \frac{b}{c}\ y\ \frac{d}{e}\ \in Q$ se tiene que:

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c}\right) + \frac{d}{e} = \frac{a}{b} + \left(\frac{b}{c} + \frac{d}{e}\right)$$

Conmutativa

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c}\right) = \frac{b}{c} + \frac{a}{b}$$

Elemento neutro

$$\frac{a}{b} + 0 = 0 + \frac{a}{b} = \frac{a}{b}$$

Existencia del opuesto

$$\frac{a}{b} + \left(-\frac{a}{b}\right) = 0$$

Propiedades de la Multiplicación de Racionales

Asociativa

Si $\frac{a}{b}, \frac{b}{c}\ y\ \frac{d}{e}\ \in Q$ se tiene que:

$$\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c}\right) \cdot \frac{d}{e} = \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{b}{c} \cdot \frac{d}{e}\right)$$

Conmutativa

$$\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}\right)=\frac{b}{c}\cdot\frac{a}{b}$$

Elemento neutro

$$\frac{a}{b}+1=1+\frac{a}{b}=\frac{a}{b}$$

En el conjunto de los números racionales existe un número que, multiplicado por cualquier otro, da siempre este otro. A tal número se le llama elemento neutro respecto del producto. Es el representado por las fracciones del tipo $\frac{a}{a}=1$ (numerador y denominador iguales).

Inverso multiplicativo

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}=1$$

1.5. RAZONES Y PROPORCIONES

Una razón es la comparación de dos números por medio de un cociente. Este cociente se interpreta como el número de veces que uno de ellos es mayor que el otro, esto se expresa como:

$$\frac{a}{b}\ con\ b\neq 0$$

Al término a se le llama, antecedente y al término b, consecuente.

Se llama proporción a la equivalencia entre dos razones y, se expresa como:

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, donde b y d $\neq 0$, en las proporciones, los términos a y d se denominan extremos y b y c, medios.

Propiedad fundamental de las proporciones:

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, Si y solo si $ad=bc,$ donde b y d $\neq 0$

Ejemplo:

Hernán compró 3.5 m. de tubería y pagó por ella $\$14000$. Si necesita $8\,m.$ de la misma tubería, ¿cuánto deberá pagar?

Aplicando la propiedad fundamental de las proporciones y, efectuando las operaciones se tiene:

$$\frac{3.5\,m}{14000} = \frac{8\,m}{x}$$

$$3.5\,m \cdot x = 14000 \cdot 8\,m$$

Los 8 m de tubería cuestan $32000

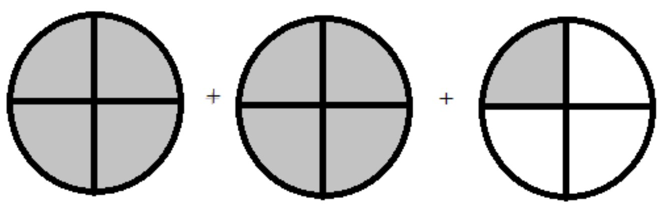
En toda proporción, un extremo es igual al producto de los medios entre el otro extremo, y un medio es igual al producto de los extremos entre el otro medio.

Dos razones forman una proporción, solamente cuando el producto de sus extremos es igual al producto de sus medios.

Fracción Mixta

Una fracción es mixta cuando está compuesta por un entero y un fraccionario.

Figura 1: Representación de fracción mixta



Fuente: Diseño del autor

La anterior figura $\quad \frac{4}{4} + \frac{4}{4} + \frac{1}{4}$

Corresponde a: $\quad = 1 + 1 + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}} = 2 + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}} = 2\ ¼$

2 enteros y $\frac{1}{4}$, es decir, es una fracción impropia (ya que es mayor que la unidad), que puede convertirse a una fracción mixta.

Porcentajes

Se llama tanto por ciento de un número a una o varias de las cien partes iguales en las cuales puede dividirse dicho número, es decir, uno o varios centésimos de un número. El signo de tanto por ciento es %.

Así, el 15% de 80 ó $\frac{15}{100}$ de 80 equivale a 15 centésimas partes de 80, es decir, que 80 se divide en cien partes iguales y de ellas se toman 15.

Entonces: el 52% de 548 es 0.52 x 548 = 284.96
el 22.5% de 589 es 0.225 x 589 = 132.5

el 2% de 459 es 0.02 x 459 = 9.18

Ejemplo:

¿Cuál es el número cuyo 25% es 425?

Solución: se dice que el 25% del número que se busca es 425; el 100%, o sea el número buscado será x.

La regla de tres sería: 425……………….25%

x…………………100%

Entonces: $x = \frac{425x100\%}{25\%} = 1700$

1.6. NÚMEROS IRRACIONALES

Un número irracional es aquel que no puede obtenerse como cociente de dos números enteros. Su expresión decimal es infinita no periódica.

Q*: es el conjunto de Números Decimales Infinitos no Periódicos.

Ejemplos:

La diagonal del cuadrado de lado 1

Si p no es cuadrado perfecto, $\sqrt{p}$

En general, si p es un número entero y $\sqrt[n]{p}$ no es un número entero (es decir, p no es una potencia n-ésima), entonces $\sqrt[n]{p}$ es irracional.

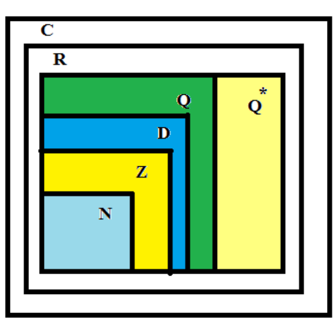
La diagonal de un pentágono de lado unidad: $\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ (Número áureo)

La relación entre la longitud de una circunferencia y su radio

1.7. NÚMEROS REALES

$$R = Q \cup Q^{*} \; y \; R \subset C$$

Figura 2: Diagramas de Conjuntos Numéricos



Fuente: Diseño del autor

Los Axiomas de Cuerpo

Junto con el conjunto R de los números reales se admite la existencia de dos operaciones, llamadas suma y multiplicación, tales que, para cada par de números reales x e y, la suma $x + y$ y el producto xy son números reales determinados unívocamente por x e y, satisfaciendo los siguientes axiomas. (En los axiomas que a continuación se exponen, x, y, z representan números reales arbitrarios).

Primer Axioma. $x + y = y + x,\ xy = yx$ (Leyes conmutativas).
Segundo Axioma. $x + (y + z) = (x + y) + z, x(yz) = (xy)z$ (Leyes asociativas).
Tercer Axioma. $x(y + z) = xy + xz$ (Ley distributiva).

Cuarto Axioma. Dados dos números reales cualesquiera x e y, existen un número real z tal que $x + z = y$. Dicho número z se designará por $y - x$; el numero $x - x$ se designará por 0. (Se puede demostrar que 0 es independiente de x.) Escribiremos $-x$ en vez de $0 - x$ y al número $-x$ lo llamaremos opuesto de x.
Quinto Axioma. Existe, por lo menor, un número real $x \neq 0$. Si x e y son dos números reales con $x \neq 0$, entonces existe un número z tal que $xz = y$. Dicho número z se designará por y/x; el numero x/x se designará por 1 y puede demostrarse que es independiente de x. Escribiremos x^{-1} en vez de $\frac{1}{x}$ si $x \neq 0$ y a x^{-1} lo llamaremos reciproco o inverso de x.

De estos axiomas pueden deducirse todas las leyes usuales de la Aritmética; por ejemplo, $-(-x) = x, (x^{-1})^{-1} = x, -(x - y) = y - x,\ x - y = x + (-y)$, otros.

Los Axiomas de Orden

Suponemos también la existencia de una relación $<$ que establece una ordenación entre los números reales y que satisface los axiomas siguientes:

El sistema de los números reales y el de los complejos

Sexto Axioma. Se verifica una y solo una de las relaciones $x = y, x < y, x > y$.
NOTA. $x > y$ significa lo mismo que $y < x$.

Séptimo Axioma. Si $x < y$, entonces, para cada z, es $x + z < y + z$.

Octavo Axioma. Si $x > 0$ e $y > 0$, entonces $xy > 0$.

Noveno Axioma. Si $x > y$ e $y > z$, entonces $x > z$.

NOTA. Un número real x se llama positivo si $x > 0$ y negativo si $x < 0$. Designaremos por R^+ el conjunto de todos los números reales positivos y por R^- el conjunto de todos los números reales negativos.

De estos axiomas pueden deducirse las reglas usuales que rigen las operaciones con desigualdades. Por ejemplo, si tenemos que $x < y$, entonces $xz < yz$ si z es positivo, mientras que $xz > yz$ si z es negativo. Además, si $x > y$ y $z > w$ con y y w positivos, entonces $xz > yw$.

Axioma 10: De completitud

Todo conjunto no vacío S de números reales que esté acotado superiormente admite un supremo; es decir, existe un número real b tal que $b = sup\ S$.

Como consecuencia de este axioma se obtiene que todo conjunto no vacío de números reales acotado inferiormente admite un ínfimo.

Tabla 1: Propiedades de los números reales

Propiedad	Operación	Definición	Que dice
Conmutativa	Suma Multiplicación	$a + b = b + a$ $ab = ba$	El orden, al multiplicar o sumar reales no afecta el resultado.
Asociativa	Suma Multiplicación	$a + (b + c) = (a + b) + c$ $a(bc) = (ab)c$	Puede hacerse diferentes asociaciones, al sumar o multiplicar reales y no se afecta el resultado.
Identidad	Suma Multiplicación	$a + 0 = 0 + a = a$ $ax1 = 1xa = a$	El 0 es la identidad aditiva El 1 es la identidad multiplicativa
Inversos	Suma Multiplicación	$a + (-a) = 0$ $a \cdot \frac{1}{a} = 1$	La suma de opuestos es cero. El producto de recíprocos es 1.
Distributiva	Suma respecto a la Multiplicación	$a(b + c) = ab + ac$	El factor se distribuye a cada sumando.

Fuente: Diseño del autor

1.7.1. FUNCIONES Y VARIACIONES

En el mundo actual, la Matemática es una estrategia básica para la comprensión y para el manejo de la realidad. Desde esta disciplina, las distintas Ciencias interpretan los fenómenos Físicos y Sociales, utilizando métodos cuantitativos y cualitativos que favorecen la resolución de problemas y la toma de decisiones.

> Según el Dr. Cantoral, el pensamiento variacional es parte del pensamiento matemático avanzado y comprende las relaciones entre la matemática de la variación y el cambio por un lado y los procesos del pensamiento por el otro. Implica la integración de los dominios numéricos, desde los naturales, hasta los complejos, conceptos de variable, función, derivada e integral, así mismo sus representaciones simbólicas, sus propiedades y el dominio de la modelación elemental de los fenómenos del cambio. (Dolores, Guerrero, Martínez y Medina, 2002, p. 73).

Conviene recordar que los conceptos básicos sobre los cuales se construye la Matemática de la variación y del cambio son: el de variable y el de función. Cuando dos variables están relacionadas mediante una función se puede estudiar el cambio de una de ellas con respecto a la otra. De otro lado, una de las habilidades básicas para el desarrollo del pensamiento y el lenguaje variacional, es poder analizar el comportamiento de funciones.

> Se dice que los rasgos característicos del comportamiento variacional de las funciones son: crecimiento, decrecimiento, puntos estacionarios; región donde la función es: positiva, negativa o nula. Estos rasgos pueden ser expresados (o mediatizados) en forma verbal, numérica, gráfica, analítica, etc. y se constituyen en los medios que adoptamos para explorar concepciones de los estudiantes sobre el comportamiento de funciones. (Dolores et al., 2002, p. 73).

Según los estándares curriculares, algunos aspectos esenciales del análisis funcional se tratan en la Escuela Secundaria y Media. Por ejemplo: la variación proporcional, la descripción de fenómenos por medio de una tabla o una gráfica, el estudio de casos sencillos de comportamiento local de funciones, estudio particular de familias de gráficas de la forma $y = mx + b$ o de la forma $y = ax^2 + bx + c$, estudio de fenómenos que varían con una tasa constante, diferencias entre el crecimiento aritmético y el crecimiento exponencial.

Según lo dispuesto en los estándares curriculares, al finalizar la Escuela Secundaria, los estudiantes deberían ser capaces de desarrollar modelos, a partir de su conocimiento de distintos tipos de funciones. Sin embargo, la experiencia muestra que el método de enseñanza que se utiliza sigue siendo en muchos casos el tradicional, con un manejo esencialmente algebraico y algorítmico, pudiendo, recurrir si los recursos existentes lo posibilitan, a la modelación o representación virtual.

Esto quiere decir que el estudio de la función cuadrática no debe centrarse solamente en la manipulación algebraica y la resolución mecánica de la ecuación asociada y del análisis gráfico, a la construcción de una tabla, asignando valores a la variable independiente para obtener los de la variable dependiente.

1.7.2. CLASES DE FUNCIONES

Función Constante

Puede considerarse la función constante como un caso particular de la función lineal cuando se hace $x = 0$. La función constante se define como:

$f(x) = k$, donde k es una constante y $k \in R$

Funciones de Potencia

Una función de la forma $f(x) = x^a$, donde a es una constante, se llama función de potencia. Se consideran algunos casos:

1. $a = n$, donde n es un entero positivo.

   La forma general de la gráfica $f(x) = x^n$, depende de si n es par o impar.

2. $a = \frac{1}{n}$, donde n es un entero positivo.
3. $a = -1$

   La gráfica de la función recíproca $f(x) = \frac{1}{x}$, es una hipérbola con los ejes de coordenadas como asíntotas.

Función Identidad

La función identidad es una función lineal con a = 1 y b = 0. La función lineal se define por: $f(x) = x$

Función Lineal

La función lineal (función polinomial de primer grado) es de la forma $f(x) = mx$, donde $m \in R$.

Función Cuadrática

La forma general de una función cuadrática es $y = f(x) = ax^2 + bx + c$

Valor máximo si $a < 0$
Valor mínimo si $a > 0$
Vértice = $\left(-\frac{b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a}\right)$

Función Polinómica

Una función se denomina polinómica, si está definida por: $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, donde los coeficentes $a_0, a_1, a_2, \ldots\ a_n$ son números reales y $n \in Z^+ \cup \{0\}$.

f se llama función polinomial de grado n
Funciones Racionales

Una función racional es aquella que puede expresarse como el cociente de dos funciones polinomiales. Esto es, una función racional es de la forma:

$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, donde P y Q son polinomios.

Función Exponencial

Sea a un número real positivo. La función que a cada número real x le hace corresponder la potencia a^x, se llama función exponencial de base a y exponente x.

Función Logarítmica

Sea $\boldsymbol{a}$ un real positivo fijo, $a \neq 1$ y sea $\boldsymbol{x}$ cualquier real positivo, entonces:
$y = Log_a x \leftrightarrow a^y = x$

Funciones Trigonométricas

Son de la forma:

$$y = Sen\,x \qquad y = Cos\,x \qquad y = Tan\,x \qquad y = Cot\,x \qquad y = Sec\,x \qquad y = Csc\,x$$

Función Valor Absoluto

La función valor absoluto se define por:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} -x \ si \ x < 0 \\ x \ si \ x \geq 0 \end{cases}$$

Función Mayor Entero Contenido

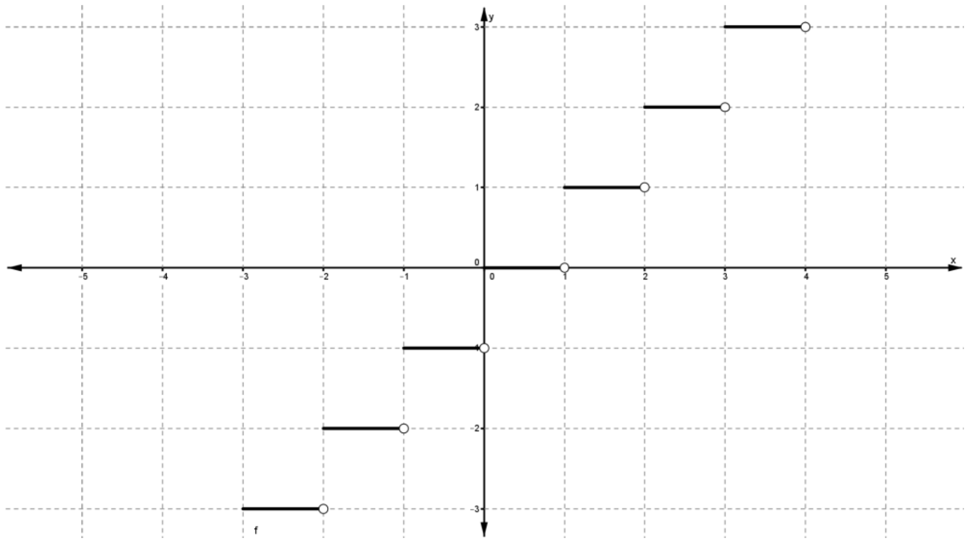
Para denotar el mayor entero contenido en un número real x, se usa el símbolo $[\![x]\!]$; es decir, $[\![x]\!] = z$ si $z \leq x \leq z + 1, z \in Z$

La función mayor entero, Z, se define así: $Z = \{(x, y)/\ y = [\![x]\!]\}$
$Dom\ Z = (-\infty, \infty) = R$
$Codom\ \ Z = Z$

Para calcular el valor de Z, se determinan algunos valores:

Sí $-3 \leq x < -2,\ [\![x]\!] = -3$
Sí $-2 \leq x < -1,\ [\![x]\!] = -2$
Sí $-1 \leq x < 0,\ [\![x]\!] = \ -1$

Figura 3: Función mayor entero contenido



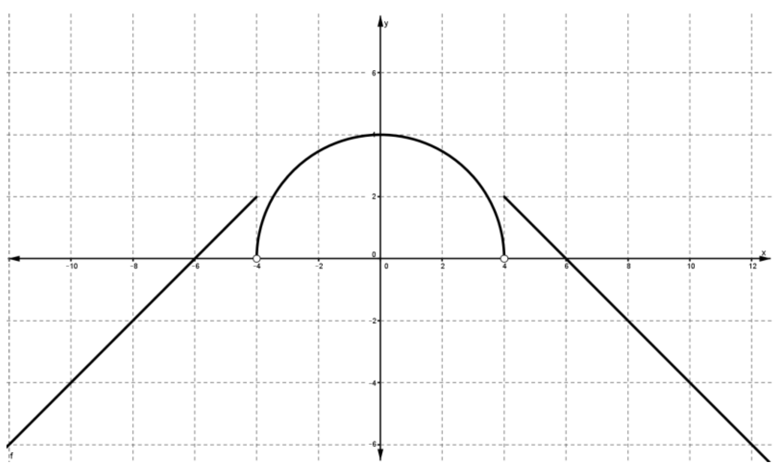
Fuente: Diseño del autor

Función Segmentada o por Tramos

Ejemplo:

$$f(x) = \begin{cases} x+6 & si\ x \leq -4 \\ \sqrt{16-x^2} & si -4 < x < 4 \\ 6-x & si\ x \geq 4 \end{cases}$$

Figura 4: Función por tramos o partes



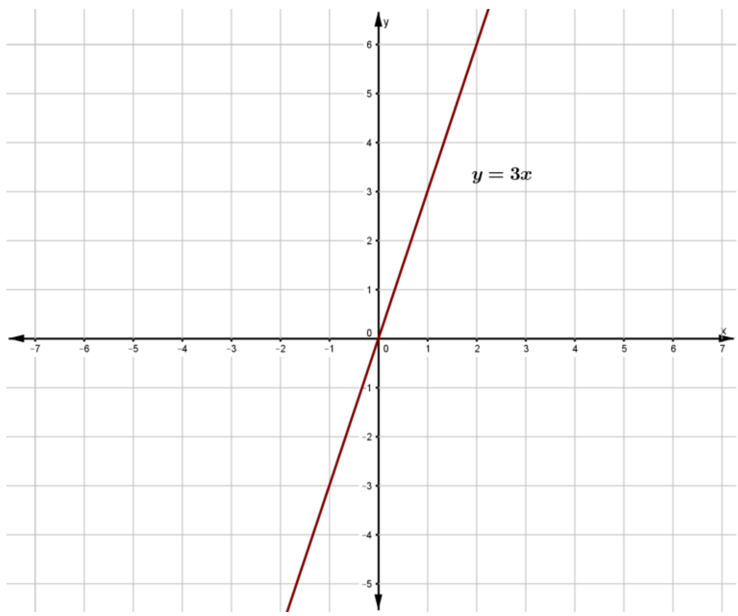
Fuente: Diseño del autor

1.7.3. VARIACIÓN

Existen dos tipos de variación: variación directa y variación inversa.

Variación Directa: es una función que se define por una ecuación que está en la forma $y = kx$, donde k es una constante no igual a cero. La variable y varía directamente de x. La constante k es llamada la constante de variación o de proporcionalidad. La variación directa establece un único valor de y para cada valor de x. En la variación directa las dos variables aumentan (o disminuyen), juntas. Cuando el dominio es un conjunto de números reales, la gráfica de la variación directa es una línea recta con pendiente k que pasa por el origen.

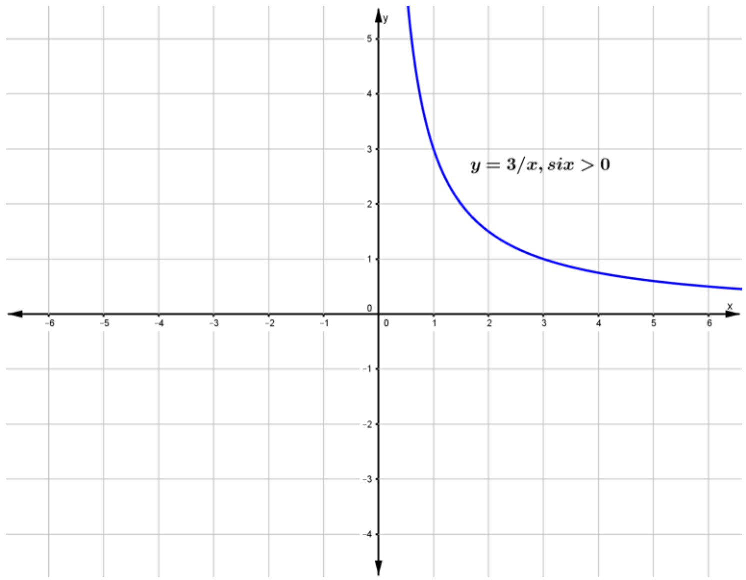
Figura 5: Función ejemplo de variación directa



Fuente: Diseño del autor

Variación Inversa: es una función que se define por una ecuación que está en la forma $y = \frac{k}{x}$, donde x no es igual a cero. La variable y varía a la inversa de x. En la variación inversa el aumento de una de las variables significa la disminución de la otra variable. La gráfica de esta variación es una hipérbola.

Figura 6: Función ejemplo de variación inversa



Fuente: Diseño del autor

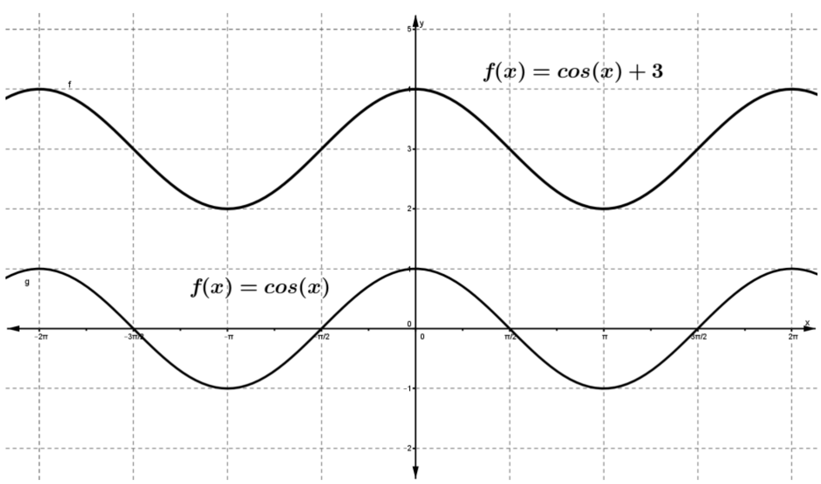
1.7.4. TRANSFORMACIONES DE FUNCIONES

Desplazamientos Verticales de Gráficas

Suponer que $c > 0$. Para graficar $y = f(x) + c$, se desplaza c unidades hacia arriba la gráfica de $y = f(x)$.

Para graficar $y = f(x) - c$, se desplaza c unidades hacia abajo la gráfica de $y = f(x)$

Figura 7: Desplazamiento vertical de la función $y = \cos(x)$



Fuente: Diseño del autor

Desplazamientos Horizontales de Gráficas

Suponer que $c > 0$. Para graficar $y = f(x - c)$ se desplaza la gráfica de $y = f(x)$ a la derecha unidades.

Para graficar $y = f(x + c)$ se desplaza la gráfica de $y = f(x)$ a la izquierda c unidades.

Reflexión de Gráficas

Para graficar $y = -f(x)$, refleje la gráfica de $y = f(x)$ en el eje x.

Para graficar $y = f(-x)$, refleje la gráfica de $y = f(x)$ en el eje y.

Estiramiento o Acortamiento (se dilata o se contrae) Vertical

Para graficar $y = cf(x)$ se presentan dos situaciones:

Si $c > 1$, se alarga verticalmente la gráfica de $y = f(x)$ por un factor c.
Si $0 < x < 1$, se acorta verticalmente la gráfica de $y = f(x)$ por un factor c.

Acortamiento y Alargamiento Horizontal de Gráficas

Para graficar $y = f(cx)$ se presentan dos situaciones:

Si $c > 1$, se acorta la gráfica de $y = f(x)$ horizontalmente por un factor de $\frac{1}{c}$.
Si $0 < x < 1$, se alarga la gráfica de $y = f(x)$ horizontalmente por un factor $\frac{1}{c}$.

1.7.5. FUNCIÓN PAR E IMPAR

Sea f una función.

f es par si $f(-x) = f(x)$ para toda x en el dominio de f.

f es impar si $f(-x) = -f(x)$ para toda x en el dominio de f.

La gráfica de una función par es simétrica con respecto al eje y.

La gráfica de una función impar es simétrica con respecto al origen.

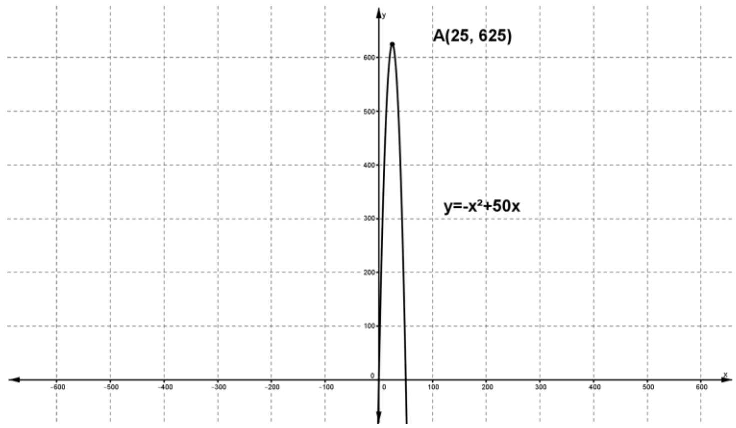
Situación Problema:

Contexto de optimización: Va a construirse un corral rectangular para zona de alimentación del ganado, utilizando 100 metros de cerca.

Si x representa el ancho del corral, exprese el área $A(x)$, en función de x.

a) Si x representa el ancho del corral, exprese el área $A(x)$, en función de x.
b) ¿Cuál es el dominio de la función A, teniendo en cuenta las restricciones físicas?
c) Trace la gráfica
d) ¿Qué dimensiones del corral producirán el área máxima? ¿Cuál es el área máxima?

Figura 8: Optimización del área



Fuente: Diseño del autor

Situación Problema:

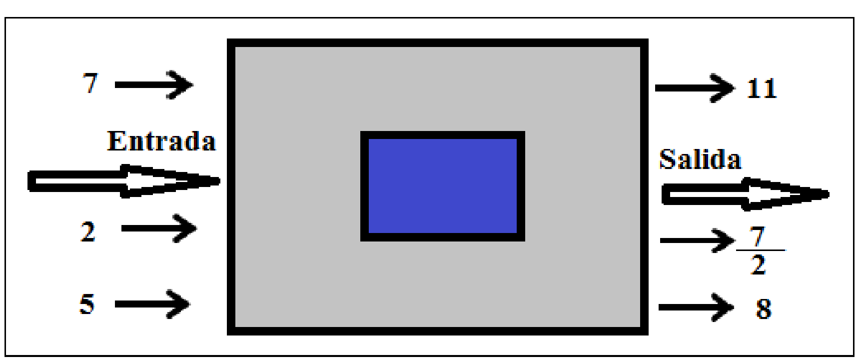
Después de varios días de observación, un biólogo planteo una hipótesis acerca del comportamiento de las mariposas. «El número de mariposas que se ven en el campo es proporcional al cuadrado de la temperatura». Para una temperatura de 90° F, el biólogo contó 81 mariposas.

¿Cuántas mariposas habrá cuando la temperatura sea de 70° F?

Ejemplo:

1.7.6. LA FUNCIÓN LINEAL COMO TRANSFORMACIÓN

Figura 9: «*Máquina*» de funciones



Fuente: Diseño del autor

1. Tenga presente los números que entran y salen en la máquina siguiente y especifique los cambios que sufren en su interior.
2. Exprese en una formula la regla que transforma las cantidades que entran en la máquina. Verificar para: -2, -5 y 150.
3. Explicar cómo encontró esta regla general. Exprésela verbalmente.
4. Identificar las cantidades constantes y variables de su regla general y juzgar el papel que juegan en la transformación.
5. Cómo obtiene los números de la entrada partir de los números de la salida. Plantee un ejemplo.

1.8. PRUEBA DE COMPETENCIAS DE MATEMÁTICAS

Ejemplo[2]:

Primera pregunta	Segunda pregunta
El número real $0,\overline{3}$ (I) Irracional mayor que $\frac{1}{3}$ (II) Racional menor que $\frac{4}{9}$ (III) racional menor que $\frac{3}{10000}$ (IV) Irracional mayor que $\frac{3}{10}$	El enunciado "existe por lo menos un número irracional mayor que $\sqrt{3}$ y menor que $\sqrt{3}$+1", es (I) falso, porque el siguiente de $\sqrt{3}$ es $\sqrt{3}$+1 (II) verdadero, porque $\frac{(\sqrt{3}+1)-\sqrt{3}}{2}$ es un irracional mayor que $\sqrt{3}$ y menor que $\sqrt{3}$+1 (III) falso, porque solamente hay números racionales (IV) verdadero, porque $\sqrt{3} < \sqrt{5} < \sqrt{3}$+1

La selección incorrecta y frecuente de la opción (IV) en la pregunta I, la opción (I) en la pregunta (II), le sugeriría a usted que debe diseñar actividades orientadas fundamentalmente al reforzar:

A. las operaciones básicas entre números reales
B. el procedimiento para pasar de la expresión decimal a la fracción
C. las clasificaciones de los números reales en racionales e irracionales
D. la representación decimal, el orden y las propiedades de los reales

Respuesta correcta: D

La pregunta indaga por la comprensión del concepto de número real, sus representaciones y propiedades (completez y densidad), aspectos incluidos en los estándares de calidad de los grados octavo a noveno. Está relacionada además con los diferentes significados de los números reales como objetos de enseñanza aprendizaje y exige reconocer estructuras y sistemas formales.

[2] Cuadernillo. *Entrenamiento para la Evaluación de Competencias* 2011. Docentes y Directivos regidos por el Decreto Ley 1278, de 2002. Pág. (33-34).

Ejemplo[3]:

Una profesora propone a los estudiantes el siguiente ejercicio:

Construye una situación problema que pueda resolverse con la ecuación $2x = 10$

¿Cuál de las siguientes situaciones presentadas por sus estudiantes es correcta?

A. Un número es divisor de 10 y de 2 ¿Cuál es el número?
B. El resultado de sumar dos veces un mismo número es 10. ¿Cuál es el número?
C. José tiene el doble de edad que pedro. Pedro tiene 10 años. ¿Cuántos años tiene José?
D. María tiene el doble de los dulces que tiene Juan. Juan tiene 10 dulces, ¿Cuántos tiene María?

Respuesta correcta:

La ecuación $2x = 10$ es equivalente a $x + x = 10$, por lo tanto, la respuesta correcta es: El resultado de sumar dos veces el mismo número es 10. ¿Cuál es el número?

Las otras opciones corresponden a interpretaciones incorrectas o dificultades en la traducción del lenguaje verbal al lenguaje algebraico.

Ejemplo:

¿Cuál de las situaciones dadas a continuación plantea el hecho de que la multiplicación es asimétrica, en el sentido que las cantidades que intervienen no pueden ser intercambiadas, por lo que desempeñan distintos papeles, pues al hacerlo, la situación perdería significado y sentido?

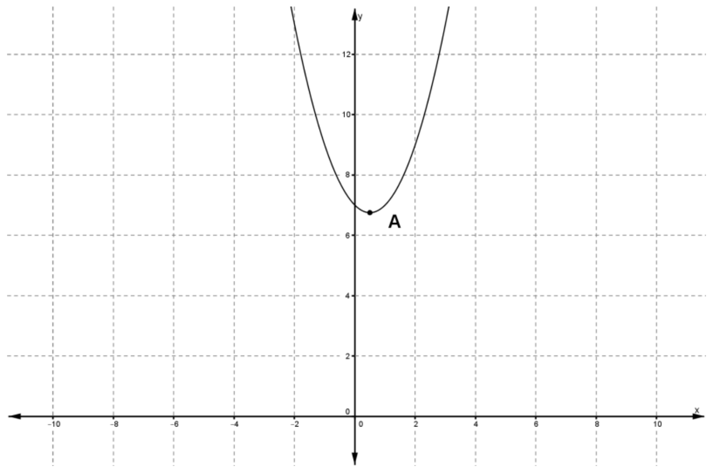
A. Si tres cajas contienen cada una cuatro lápices, ¿cuántos lápices hay en total?
B. Si el largo de un rectángulo mide tres metros y su ancho cuatro metros, ¿Cuál es el área del rectángulo?
C. De cuántas formas se puede vestir un hombre, si tiene tres pantalones de color: azul, negro y café y cuatro camisas de color: blanca, amarilla, verde y roja.
D. Si el área de un rectángulo es 12 metros cuadrados y su largo mide cuatro metros, ¿Cuánto mide su ancho?

Respuesta correcta: C

[3] Documento guía evaluación de competencias matemáticas (2011). MEN. Universidad Nacional de Colombia. Pág. 45.

Ejemplo:

Un estudiante, le pregunta a su profesor si es posible hallar la representación algebraica de una función con la siguiente gráfica, si se sabe que tiene mínimo en $\left(\frac{1}{2}, \frac{27}{4}\right)$ y corte con el eje y en $(0,7)$.



De las siguientes opciones, ¿Cuál considera debería ser la respuesta del docente?

A. Que no siempre es posible encontrar la representación algebraica de una función cuadrática a partir de su representación gráfica.
B. Que los datos no son suficientes, ya que lo único que podemos saber es que $\frac{1}{2} = \frac{-b}{2a}$ y que la constante de la función es 7.
C. Que es posible hallarla, pensando en resolver la ecuación $\frac{1}{2} = \frac{-b}{2a}$ y reemplazando el valor de a y b en la ecuación general de las funciones cuadráticas.
D. Que es posible hallarla con el punto de corte en el eje y, y cualquier otro punto, ya que a partir de ellos podemos saber las raíces de la ecuación.

Respuesta correcta: C

1.9. LA TRANSPOSICIÓN DIDÁCTICA

Es el mecanismo mediante el cual el maestro «toma» el conocimiento y lo transforma para presentárselo a sus estudiantes. El conocimiento humano se gesta en la Comunidad Científica, este es el saber o conocimiento o contenido que el docente debe manejar perfectamente para poder enseñárselo a éstos.

En este proceso, el camino inicial usualmente obedece a las preguntas que se debe plantear cualquier docente antes de enseñar:

EL QUÉ: ¿Qué voy a enseñar?

EL PARA QUÉ**:** ¿Para qué voy a enseñar?
EL CÓMO**:** ¿Cómo lo voy a enseñar?

La transposición didáctica permite el paso del «saber sabio» al «saber enseñado» y en este tránsito existen contradicciones o diferentes puntos de vista, planteando distancias entre unos y otros, lo cual hace más importante este debate. El didacta de las Matemáticas se preocupa por el juego que se despliega, que se observa y que se reconstruye en las aulas de clase, entre el docente, los estudiantes y el saber matemático. Esta relación ternaria define o da lugar al sistema didáctico, desde el cual la didáctica de las Matemáticas puede emprender la tarea de pensar su objeto, lo cual crea polémica y discusiones necesarias sobre esta concordancia, tan tradicionales e históricas como la relación entre el enseñante y lo enseñado. En tal sentido, se dice que el concepto de «transposición didáctica, en tanto remite al paso del saber sabio al saber enseñado, y por lo tanto a la distancia eventual, obligatoria que los separa, da testimonio de ese cuestionamiento necesario, al tiempo que se convierte en su primera herramienta» (Chevallard, 1998: p.4).

El maestro es portador de un saber sabio, y en el caso concreto de las Matemáticas, su esfuerzo se centra en tomar el conocimiento científico, comprender su significado e historia y buscar las estrategias que le permitan enseñarlo, de tal forma, que sus estudiante logren comprenderlo, lo cual no es una tarea fácil. Al respecto se afirma que:

> El objeto del saber sabio es reconocido como tal, en una comunidad científica, pero no es enseñable bajo esta forma. Se requiere de unos mecanismos de extracción de un dominio del saber sabio a la inserción dentro de un discurso didáctico. Una vez hecho este tratamiento; el saber a enseñar es diferente del saber sabio, pues este le sirve de referencia con su entorno epistemológico en particular y es diferente a la significación original ya que para introducirlo a la enseñanza se han incorporado una serie de conceptos que lo estructuran para hacerlo comprensible en la Escuela (Solarte, 2006, p.3)

Un proceso similar se evidencia en la prueba de competencias, propuestas por el ICFES para el ascenso y reubicación salarial o cualquier otra estrategia que se adopte para la evaluación de los docentes, por cuanto a los docentes se les presenta una situación concreta de aula, que tiene como referencia un contenido o saber matemático, que se ubica en un contexto determinado, con opciones de respuesta que dan cuenta de la búsqueda de la explicación más coherente conforme al dominio del saber específico. Por lo anterior, se propone a continuación preguntas relacionadas con esta intencionalidad.

1.10. PREGUNTAS PROPUESTAS

1. Una docente discute con su grupo acerca de la composición de funciones y le dice a sus estudiantes que se imaginen que un barco viaja a 40 millas/h en forma paralela a una ribera recta y que este se encuentra a 10 millas de la orilla, pasando por un faro a medio día. Si la distancia que ha recorrido es $d = g(t) = 40t$ y el Teorema de Pitágoras nos permite relacionar esta distancia d con la distancia $s = f(d)$ entre el faro y el barco después de un tiempo t, ¿entonces qué representa fog?

   Los estudiantes responden de manera acertada que esto significa que

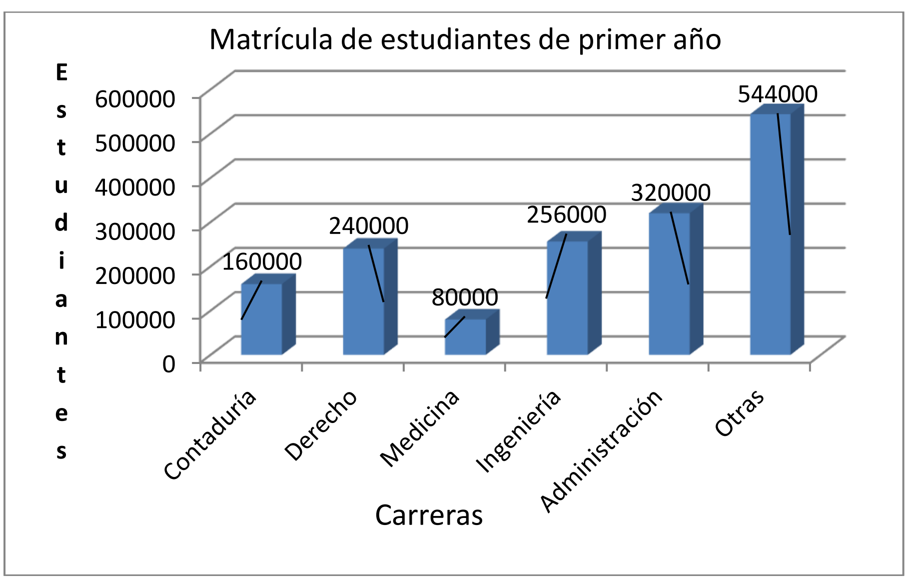
A. la nueva función $(fog)(t) = f[g(t)] = f(40t) = \sqrt{10 + (40t)^2}$.
B. la distancia entre el barco y el faro al mediodía.
C. la distancia del barco desde el faro como una función de tiempo.
D. la hipotenusa del triángulo rectángulo.

2. Con base en el enfoque metodológico para la resolución de problemas, que es tratado en los documentos: «*Ciudadanos Matemáticamente Competentes*» (MEN, 2014) y «*Estándares Curriculares de Matemáticas*» (MEN, 2006), tanto en el pensamiento numérico como en el pensamiento variacional, en la enseñanza y el aprendizaje de los números con signo positivo o negativo, en la clase, el docente debe seguir los siguientes pasos metodológicos:

I. Resolver problemas haciendo uso de la recta numérica para sumar y restar números enteros con signo positivo o negativo.
II. Tratar de generalizar mediante una regla que se proponga, como resultado de la discusión en el grupo.
III. Uso del algoritmo experimentado.
IV. Utilizar números fraccionarios con signo positivo, mediante el juego de los cuadros mágicos.

A. I, III, II, IV
B. I, IV, II, III
C. II, III, I, IV
D. II, IV, I, III

3. Un estudiante le pregunta a un docente cómo resolver el siguiente problema: «La siguiente gráfica muestra la matrícula de ingreso de estudiantes en una universidad. Si al año siguiente deserta el 13 % de los estudiantes de cada carrera aproximadamente», ¿Cuántos estudiantes de ingeniería permanecerán en la carrera en el segundo año escolar? El docente, acertadamente le expresa que:



A. 544.000 representa el 100%, si además en el segundo año deserta el 13% significa que permanecen estudiando en Ingeniería el 87%. Por lo que debes calcular el 87% de esa cantidad.
B. Nota que 256.000 representan el 100%, si en el segundo año deserta el 13% significa que se debe calcular el 13% de esta cantidad.
C. Nota que 600.000 representa el 100%, si en el segundo año deserta el 13% significan que permanecen estudiando Ingeniería el 87%. Por lo tanto, debes calcular el 87% de esta cantidad.
D. Nota que 256.000 representa el 100%, si en el segundo año deserta el 13% significa que permanecen estudiando Ingeniería el 87%. Por lo tanto, debes calcular el 87% de esta cantidad.

4. En la clase se está trabajando los números reales, mediante la solución de problemas de aplicación y se pone a consideración la siguiente situación: «en la *Librería Universal* cuando el precio de venta de un libro es 100 dólares se venden al mes 50 libros de medicina. Al aumentar el precio a 110 dólares se venden al mes 20 libros». Al obtener como resultado en este caso, una razón de cambio promedio de las ventas mensuales, con respecto al precio, con signo negativo.

El significado correcto dado por los estudiantes debería ser:

A. Que la razón de cambio promedio es encontrar un promedio en forma de cociente en donde el numerador y el denominador es resultado de incrementos.
B. Obedece a una resta de incrementos donde «x» representa el precio de venta y «$f(x)$» los libros vendidos al mes, mediante la expresión: $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = -3$.
C. Que por cada peso que se incrementó el precio, se vendieron en promedio unos tres libros menos.
D. Que se debe a que el algoritmo de razón de cambio promedio es similar a $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ el resultado es un número negativo, como cociente.

5. Una docente propone a sus estudiantes el siguiente ejercicio: a partir de la función original $y = sen(x)$, analiza y construye la gráfica de la función trigonométrica $y = -\frac{1}{2}sen\left(4x - \frac{\pi}{3}\right)$, de acuerdo con esta expresión, significa que se refleja con respecto al eje x debido a

¿Cuál de las siguientes situaciones presentadas por sus estudiantes es correcta?

A. a que su desfasamiento es negativo, es decir se desplaza horizontalmente hacia la derecha.
B. el efecto sobre la gráfica de una función cuando se le cambia su signo es reflejarse con respecto al eje x.
C. que su período es equivalente a $\frac{\pi}{2} rad$.
D. que se refleja con respecto a la función original $y = sen(x)$.

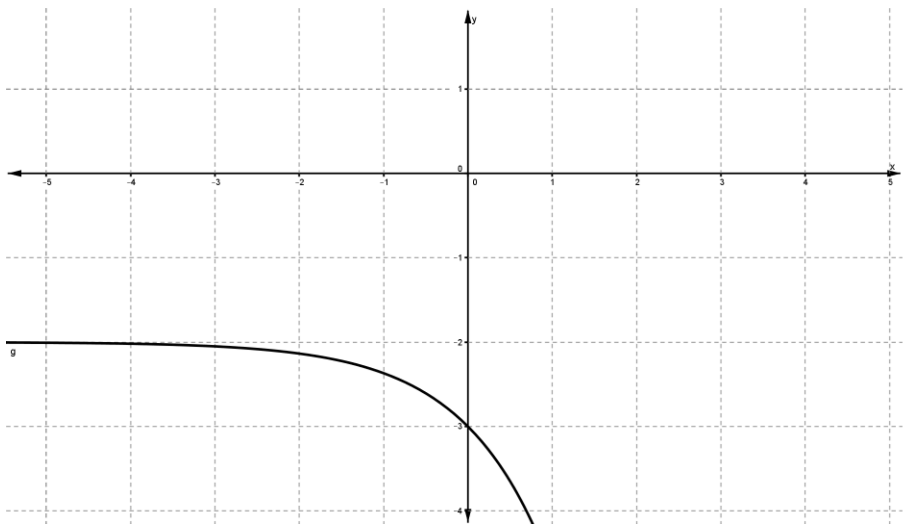
6. Un docente propone a los estudiantes el siguiente ejercicio:

   Construye una situación problema que pueda resolverse con la ecuación $L = \frac{1}{2}p + 5$, donde L representa la longitud en cm y, p el peso en gramos.

   ¿Cuál de las siguientes situaciones presentadas por sus estudiantes es correcta?

   A. La longitud de una planta es directamente proporcional al peso de la misma
   B. El doble de la longitud de una planta es equivalente a cinco cm
   C. La longitud de una planta aumentada en cinco cm, es igual a la mitad de su peso
   D. El doble de la longitud de una planta es equivalente a su peso aumentado en 10 cm

7. Un estudiante le pregunta a su profesor acerca de cuáles son las transformaciones que presenta la siguiente gráfica, a partir de la estudiada a comienzos de la clase, que en este caso fue $f(x) = e^x$



El docente responde que la operación aplicada a la función original $f(x)$ para obtener esta nueva función fue

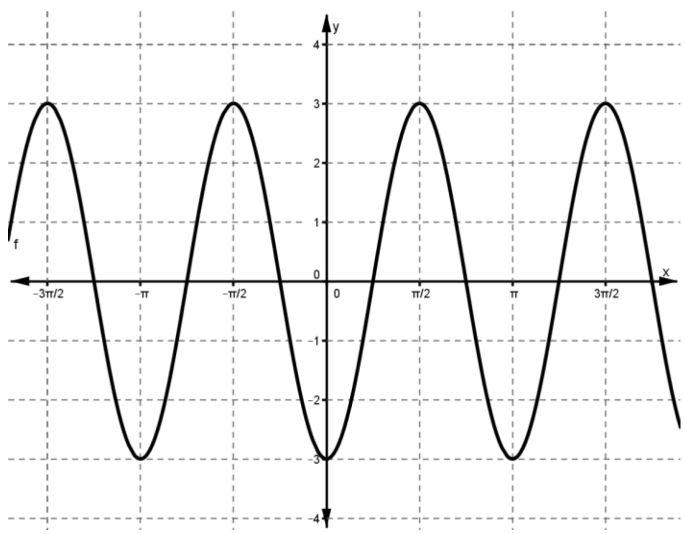
A. multiplicar por -1 y luego restar dos unidades a la variable x.
B. restar dos unidades.
C. multiplicar por -1 y luego sumar cuatro unidades.
D. multiplicar por -1 y luego restar dos unidades.

8. Una profesora propone a sus estudiantes la siguiente situación: «un microempresario estaba preocupado, porque según él, sus ventas habían disminuido en un 200%, puesto que en el mes de enero sus ventas fueron de $18'000.000 y en el mes de febrero, apenas llegaron a los $6'000.000». A partir de este enunciado pregunta: ¿qué tipo de problema es? y, si la conclusión es la correcta

   ¿Cuál de las siguientes explicaciones dadas por sus estudiantes es la correcta?

A. Es un problema de regla de tres simple y no es correcta su respuesta, porque la disminución excede el 100%, lo cual significa que le dio un resultado negativo
B. Es un problema de variación porcentual y es correcta su respuesta, porque cuando tenemos un valor y lo incrementamos un 100% obtendremos el doble
C. Es un problema de variación porcentual y no es correcta su respuesta, debido a que no puede asumir que los 6'000.000 representan el 100% y calcular la diferencia entre las ventas de enero y febrero
D. Es un problema de variación porcentual y no es correcta su respuesta, porque debe calcular el porcentaje de disminución, mediante la diferencia entre las ventas de enero y febrero

9. Un estudiante, le pregunta a su profesor si es posible hallar la representación algebraica de una función con la siguiente gráfica, si se sabe que su máximo es 3 y se desplaza 90° hacia la derecha.



De las siguientes opciones, ¿Cuál considera debería ser la respuesta del docente?

A. No es posible, porque existen infinitas funciones de forma senoidal que cumplen con estas características.
B. Si es posible porque por medio de su rango y dominio puede obtenerse su expresión algebraica y sustituir los valores en la ecuación transformada $y = A\ sen(ax - b)$ de la original $y = sen(x)$.
C. Si es posible porque se puede utilizar la ecuación del desfasamiento $D = \frac{b}{a} = -\frac{\pi}{4}$, período $P = \frac{2\pi}{a} = \pi$ y amplitud, para luego sustituir en la ecuación transformada de $y = sen(x)$.
D. Es posible hallarla con el intercepto de esta curva con el eje «y» y su amplitud, a partir de su observación.

10. Un docente pregunta a sus estudiantes si existe continuidad en la gráfica que se produce como resultado de graficar la siguiente situación y que tipo de función representa: «El costo de una llamada telefónica diurna de larga distancia desde New York a Colombia, es 79 centavos dólar para el primer minuto y 68 centavos de dólar por cada minuto adicional (o parte de un minuto), donde C representa el costo en dólares de la llamada y t, el tiempo en minutos».

    ¿Cuál de las siguientes explicaciones dadas por sus estudiantes es la correcta?

    A. Existe continuidad durante el tiempo que se tarde la persona en llamar y su gráfica es una línea recta porque siempre es creciente el consumo.
    B. Existe discontinuidad y su gráfica es una línea recta con puntos no solidos o «huecos», debido a que en cada punto de partida no se cobra, como es el caso de 0.
    C. Existe discontinuidad, su gráfica es escalonada, y el límite superior de cada intervalo de tiempo no está incluido.
    D. Existe discontinuidad, su gráfica es escalonada, y el límite superior de cada intervalo de tiempo está incluido.

11. Una profesora plantea a sus estudiantes la siguiente situación: «si se deja caer un objeto desde un edificio, entonces la distancia que ha descendido después de t segundos está dada por la función $d(t) = 16t^2$». De qué trata el problema y cómo se obtiene su velocidad promedio en el intervalo de $1s$ a $5s$.

    Uno de ellos responde correctamente que la situación planteada

    A. se trata de una velocidad promedio de un objeto en descenso.
    B. se debe calcular su tasa de cambio promedio, sustituyendo en la ecuación $d(t) = 16t^2$.
    C. de un cálculo de la tasa de cambio promedio, que se obtiene con la pendiente de la recta tangente.
    D. de un cálculo de la tasa de cambio promedio, que se obtiene con la pendiente de la recta secante.

12. En la clase el tópico a tratar es la función lineal, para lo cual se plantea como motivación el siguiente enunciado: «supongamos que un vehículo particular acaba de salir de una ciudad A situada a $750\ km$ de la nuestra B y se acerca hacia ésta a $200\ km/h$». El docente pregunta en consecuencia a sus estudiantes: ¿esta situación representa una función lineal?

    La inferencia correcta de sus estudiantes sería

    A. No, dado que los datos nos permiten deducir una ecuación lineal
    B. Si, dado que los datos nos permiten encontrar los interceptos de la recta con los ejes coordenados y, en consecuencia su dominio
    C. No, porque toda línea o segmento en un sistema de coordenadas cartesianas no representa una función lineal

D. No, dado que si la trayectoria del vehículo se pudiera representar mediante una función lineal, debería haber salido de nuestra ciudad

13. En la clase se está tratando las razones y las proporciones con números naturales y se dice que: «un carro grande recorre 360 kilómetros con 72 litros de gasolina y para recorrer la misma distancia, un automóvil pequeño requiere únicamente 40 litros. Si para recorrer una distancia mayor el auto pequeño requiere 60 litros». ¿Qué permite calcular el número de litros que requiere el carro grande para recorrer esa distancia?

    De las siguientes afirmaciones dadas por sus estudiantes cuál es la correcta

    A. El consumo final de litros de gasolina
    B. La velocidad de ambos vehículos
    C. La velocidad promedio de ambos vehículos
    D. La distancia recorrida por ambos vehículos

14. Un estudiante le pregunta a su profesor, acerca de la diferencia entre números decimales y números racionales Q y le dice que si $\frac{1}{2} = 0{,}5$ y $\frac{1}{3} = 0{,}333$ ... ambos son decimales sin importar que sean de la forma $\frac{a}{b}$ y se puede obtener su expresión decimal equivalente mediante la división. El profesor le responde que está equivocado y le argumenta que

    La respuesta correcta del docente en consecuencia es

    A. ambos son elementos de Q, pero mientras el primero es un racional decimal, el segundo es un racional no decimal, de la forma $decimal\ d = n.10^p$ donde $n\ y\ p$ son números enteros.
    B. porque en sentido estricto un número racional Q es el conjunto de todas las fracciones equivalentes a una dada.
    C. de ninguna manera un número racional es una fracción y por razones de abreviatura se escribe $\frac{a}{b}$, para aludir a la clase $\left[\frac{a}{b}\right]$.
    D. si ambos fueran decimales, entonces podrían expresarse de la forma $decimal\ d = n.10^p$ donde $n\ y\ p$ son números enteros. Si $p > 0$ se obtiene un entero y si $p < 0$ se obtiene un decimal.

15. Un docente asume la enseñanza de las Matemáticas a partir de nociones fundamentales de historia y hace una breve lectura sobre un importante personaje y su relación con los números perfectos. Pierre de Fermat (1601-1665), matemático francés, cuyo gran aporte que le concedió fama universal fue la teoría de números. Fermat escribió su famosa conjetura: la ecuación $x^n + y^n = z^n$ no tiene soluciones enteras positivas para $n > 2$. Lo cual no resultó nada fácil de demostrar, más tarde y solo para el caso de $n = 3$ dicho teorema 100 años más tarde fue demostrado por Euler. El siglo XIX vio la demostración de algunos casos particulares más, a cargo de grandes matemáticos como Lejeune-Dirichlet, Legendre, Lamé y Sophie Germain. Este docente decide enseñar este tópico adoptando la corriente filosófica del intuicionismo, en consecuencia propone a sus estudiantes la siguiente situación

A. utilizar un método de demostración para verificar la existencia de los números perfectos.
B. dictar a sus estudiantes el teorema que dice que: dice que si p es un número primo y a es primo con p, entonces $a\ p\ a\ (mod\ p)$, y luego hacer varios ejemplos en la pizarra.
C. mostrar ejemplos concretos de números que sean equivalentes a la suma de sus divisores a excepción de ellos mismos.
D. enseñar la descomposición en factores primos, de los números perfectos.

16. Las funciones tienen una aplicación directa sobre la vida real, de manera que un docente propone a sus estudiantes el siguiente problema, como aplicación de la función cuadrática tratada en la clase: «un proyectil se lanza hacia arriba de modo que su distancia (en m) sobre el suelo en t segundos, después que se dispara es, $h = s(t) = -16t^2 + 400t$. Encontrar la altura máxima que alcanza el proyectil y el número de segundos que tarda en alcanzar esa altura». Un estudiante dice que sólo es posible hallar la altura máxima al sustituir en la expresión $x = -\frac{b}{2a}$, obteniendo el tiempo que tarda en alcanzarla desde que sale del nivel piso. El docente dice que está equivocado, porque

A. el nivel del piso corresponde a una altura $h = 0$, de modo que se obtiene dos tiempos, el del inicio y el del regreso al mismo nivel.
B. a la altura máxima se llega solo una vez, por lo tanto la ecuación dada tiene una sola solución para t, esto también significa que el discriminante D de la ecuación es igual 0.
C. para calcular la altura máxima se debe tener en cuenta que la velocidad inicial es $v_0 = 400\ m/s$.
D. debe resolverse la ecuación planteada en el enunciado y no sustituir en la ecuación para hallar el máximo de esta trayectoria parabólica.

17. Para mejorar los problemas que se presentan históricamente en Colombia con respecto a la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas se han formulado desde el MEN programas y propuestas curriculares como: la *Renovación Curricular* (1978), los *Lineamientos Curriculares de Matemáticas* (1998) y los *Estándares Básicos de Competencias Matemáticas* (2006), buscando que las Matemáticas sean una estrategia útil, accesible e interesante para todos los estudiantes. Un docente, al hacer una lectura comprensiva de los *Estándares Curriculares de Matemáticas* concluye que las tres prioridades actuales del MEN para la formación de ciudadanos, matemáticamente competentes serian

A. el desarrollo de la capacidad de formular, transformar y resolver problemas por parte de los estudiantes, el dominio del lenguaje matemático y, una Educación Básica de calidad.
B. un sujeto con capacidad para razonar y para usar la argumentación, que sea capaz de dominar los algoritmos matemáticos y resuelva problemas a partir de situaciones de la vida.

C. la necesidad de una Educación Matemática Básica, de calidad para todos, la importancia de considerar la formación matemática como un valor social y el papel de la formación matemática en la consolidación de los valores democráticos.
D. una educación de calidad, que permita la inclusión y que obtenga resultados satisfactorios en pruebas censales o estandarizadas.

18. Durante la clase, un docente propone a sus estudiantes que un grupo familiar está integrado por cuatro personas: papá, mamá, hijo e hija, ordenados de mayor a menor conforme a su estatura. El papá mide 180 cm y la hija que es la menor de sus hijos mide 135 cm, según la siguiente figura. Pregunta a éstos que si para poder determinar la altura de la mamá y el hijo es necesario aplicar a la razón obtenida una función para evitar la obtención de un dato contradictorio. Uno de ellos responde adecuadamente, que

Fuente: http://es.123rf.com/imagenes-de-archivo/papa_y_mama_caricatura.html

A. tomando el primer y último dato se pueden intercalar las alturas de los que faltan, mediante el cálculo de su razón o diferencia «d», que para el caso sería $d = \frac{a_{n-}a_1}{n-1}$.
B. esta situación representa una progresión aritmética y basta con calcular el término enésimo a_n, para hallar las demás alturas.
C. puede calcularse la suma de dos términos equidistantes de los extremos, que en esta familia se corresponde con las alturas del papá y la hija, mediante la expresión $S_n = \frac{a_{1+}a_n}{2} \cdot n$.
D. independientemente de quien se asuma como primer o último término, debe obtenerse el valor absoluto de la razón o diferencia $|d|$, para luego proceder a hallar mediante una diferencia la altura de la mamá y el hijo respectivamente.

2. TÓPICO GEOMETRÍA Y MEDICIÓN

Se piensa que el Tópico Geometría y Medición, está relacionado con características y propiedades de los objetos del espacio físico y los conceptos, propiedades y relaciones del espacio geométrico. Las magnitudes, su cuantificación y su uso con sentido y significado, la medida, su estimación y aproximación (MEN, 2014: 26).

Los temas específicos propuesto por el MEN son: Reconocimiento y análisis de figuras geométricas, relaciones entre distintas familias de figuras, interpretación y uso de definiciones que describen interrelaciones, análisis de ejemplos y contraejemplos, relaciones intra e interfigurales, transformaciones. Construcción de magnitud, conservación de magnitudes, unidades y patrones, estimación de magnitudes.

2.1. EVOLUCIÓN DE LA GEOMETRÍA

> La geometría ilumina el intelecto y templa la mente. Todas sus pruebas son claras y ordenadas. Apenas caben errores en el razonamiento geométrico, pues está bien dispuesto y ordenado. Así, no es probable que la mente que se aplica a la geometría con regularidad cometa errores. De este modo, quien sabe geometría adquiere inteligencia. (Ibn Khaldun, 1332-1406).

La evolución de las Matemáticas depende del progreso del número y de la Geometría. Sin embargo, no puede decirse que estos elementos claves de las Matemáticas hayan progresado siempre, paralelamente. Frecuentemente el progreso ha sido competitivo y el avance de uno de los campos ha sido a expensas del otro. La historia de esta relación, a veces tensa entre dos disciplinas que de hecho tienen una finalidad común recuerda algo a los temas en contrapunto, en música.

El primer avance auténtico de la Matemática fue dado por la Geometría. Cierta matemática primitiva fue creada por los carpinteros y topógrafos egipcios y babilonios en los cuatro mil años que precedieron a la era cristiana; pero fueron los filósofos griegos clásicos quienes, entre el año 600 y 300 a. de C., dieron a las Matemáticas su arquitectura definitiva, de abstracción y de demostración deductiva, eligieron la amplia estructura de la geometría euclídea y aplicaron este campo al entendimiento y a la comprensión del Universo.

Entre las diversas fuerzas que encaminaron a los griegos hacia la Geometría, tal vez la más importante fue la dificultad de los filósofos griegos para tratar el concepto de número irracional, un número que no es un número entero, ni una razón de números enteros. La dificultad surgió en conexión con el famoso teorema de Pitágoras de que la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo es la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de los dos lados. En un triángulo rectángulo de lados de longitud uno, la hipotenusa tendría que ser entonces $\sqrt{2}$, un número irracional. Tal concepto sobrepasaba a los griegos. Para ellos, número había significado siempre número entero o una razón de números enteros. Resolvieron esta dificultad desterrándolo, produciendo una Geometría que establecía teoremas y ofrecía demostraciones, sin referencia alguna al número. Hoy, esta geometría se conoce como geometría pura o geometría sintética, siendo este último término bastante desafortunado, con una justificación, exclusivamente histórica.

Puesto que las Matemáticas de los griegos clásicos estaban orientadas a deducir verdades sobre la naturaleza, tenían que estar fundamentadas sobre verdades. Afortunadamente existían algunas verdades aparentemente evidentes a mano, entre ellas las siguientes: dos puntos determinan una línea, una línea recta se extiende idénticamente en cualquier dirección, todos los ángulos rectos son iguales, figuras que pueden hacerse coincidir son congruentes. Algunos de estos axiomas hacen afirmaciones, primariamente acerca del espacio mismo. Otros se refieren a figuras en el espacio.

Partiendo de estos axiomas, Euclides, en sus elementos, dedujo casi 500 teoremas. En otras obras él y sus sucesores, especialmente Arquímedes y Apolonio, dedujeron muchos cientos más. Como los griegos prefirieron trabajar puramente en Geometría, muchos de los teoremas establecidos constituyen resultados, que ahora se consideran como algebraicos. Por ejemplo, la solución de ecuaciones de segundo grado con una incógnita ($x^2 - 8x - 7 = 0$) es un ejemplo de ellas) fue aplicada geométricamente y la respuesta dada por Euclides no fue un número, sino un segmento. Así la Geometría Euclidea abarca el Álgebra conocida en aquel tiempo.

La variedad de teoremas pudiera sugerir que los griegos fueron pasando de un tema a otro. Esto sería impresión falsa. Las teorías que escogieron fueron básicas: rectas y curvas en una categoría y superficies en otra. En la primera categoría se encuentran tales figuras como el triángulo y las secciones cónicas, círculos, parábola, elipse e hipérbola. En la segunda categoría se encuentran figuras tales como el cubo, la esfera, el paraboloide, el elipsoide y el hiperboloide. Los geómetras griegos trataron problemas básicos a cerca de estas figuras. Por ejemplo, lo que uno ha de conocer acerca de dos figuras para poder afirmar que éstas son congruentes (idénticas excepto en posición), semejantes (es decir, que tienen la misma forma pero no el mismo tamaño) o equivalentes (que tienen la misma área. Así, la congruencia, semejanza y equivalencia son temas principales de la Geometría Euclidea y la mayor parte de los teoremas tratan de estas cuestiones.

La civilización griega clásica que dio origen a la Geometría Euclidea fue destruida por Alejandro Magno y reconstruida, según nuevas directrices, en Egipto. Alejandro trasladó el centro de su imperio de Atenas, a la ciudad que él modestamente llamó Alejandría, y proclamó como su objetivo el de fusionar las civilizaciones griegas y del oriente próximo. Este objetivo fue hábilmente ejecutado por sus sucesores, los Ptolomeos, que gobernaron Egipto desde el año 323 a. de C. hasta que el último miembro de la familia, Cleopatra fue seducida por los romanos. Bajo la influencia de las civilizaciones del Oriente próximo, especialmente la egipcia y la persa, la cultura de la civilización griego-alejandrina se orientó más bien con mentalidad ingenieril y práctica. Los matemáticos respondieron a los nuevos intereses.

La Ciencia Aplicada y la Ingeniería han de ser en gran parte cuantitativas, lo que los alejandrinos añadieron a la geometría euclídea, a fin de obtener resultados cuantitativos fue el número: la aritmética y el álgebra. Lo molesto en estos temas consistía en que carecía de fundamentos lógicos. Los alejandrinos, primeramente adoptaron el conocimiento aritmético de la base empírica obtenida de los egipcios y babilonios. Puesto que la geometría euclidiana ofrecía la seguridad de una demostración, continuó durante siglos dominando las

Matemáticas. Solo hasta el final del siglo XIX llegaron los matemáticos a resolver el problema de proporcionar una base axiomática para la Aritmética y para el Álgebra.

En realidad la geometría consta de diversas geometrías. El primer progreso en la dirección de una nueva geometría fue practicado por los pintores del renacimiento, que trataron de resolver el problema de pintar exactamente lo que los ojos veían. Puesto que las escenas reales son en tres dimensiones, mientras que una pintura es plana, parecía imposible pintar en forma real. Los pintores resolvieron el problema tras haber reconocido un hecho fundamental de la visión. Supongamos que un hombre, utilizando un solo ojo mira desde una ventana, una escena real. Ve la escena porque los puntos de la luz procedentes de varios puntos de ella llegan a su ojo. Esta colección de rayos de luz se llama una proyección. Puesto que los rayos pasan desde la ventana, es posible señalar un punto desde ésta, donde se incide cada uno de los rayos de luz. Esta colección de puntos se llama una sección. Lo que los pintores descubrieron fue que la sección crea la misma impresión sobre el ojo, que la escena misma.

La utilización de la proyección y de la sección dieron lugar a una cuestión geométrica básica, explicitada primero por los pintores y más tarde confirmada por los matemáticos, ¿Qué propiedades geométricas tienen en común la figura original y su sección que hacen que se produzca la misma impresión sobre el ojo? La respuesta a esta cuestión condujo al empleo de los conceptos y de los teoremas que, finalmente constituyeron una nueva rama de la geometría llamada Geometría Proyectiva. Algunos de tales conceptos y teoremas son como sigue. La sección de la proyección de una línea es una línea, y que si dos líneas se cortan, entonces una sección de la proyección de estas dos líneas que se cortan, si bien el ángulo entra en las dos líneas de la sección, no será generalmente el mismo que el ángulo entre las dos líneas en el original. De aquí se sigue que un triángulo dará lugar a una sección triangular y un cuadrilátero, dará lugar a una sección cuadrilátera.

Un ejemplo más significativo de las propiedades comunes a una figura y a una sección fue establecido en el siglo XVII por el arquitecto e ingeniero autodidacta francés, Gérard Desargues (1591-1661). En el teorema que ahora se llama Desargues, demostró que para cualquier triángulo y cualquier sección de cualquier proyecto de dicho triángulo un par cualquiera de lados correspondientes se encuentra en un punto y que los tres puntos de la intersección de los tres pares de lados correspondientes se encuentran sobre la misma línea recta. La significación de éste y de otros teoremas de la teoría proyectiva consiste en que esta geometría no se refiere ya a la congruencia, semejanza, equivalencia y otros conceptos de la geometría euclidiana, sino que en vez de esto trata de la colinealidad (puntos que están sobre una recta), concurrencia (líneas que pasan por un punto) y otras nociones que proceden de los conceptos de proyección y de sección.

> Confieso francamente que nunca he sentido gusto por el estudio o la investigación en física o en geometría, a no ser que pudiera servir como medio de llegar a algún tipo de conocimiento de las causas próximas... para el bien y la comodidad de la vida, el mantenimiento de la salud, la práctica de algún arte... pues he observado que una buena parte de las artes se basa en la geometría, como el de tallar la piedra en arquitectura, el de los relojes de sol, y el de la perspectiva en particular. (G. Desargues)

La geometría proyectiva se mantuvo floreciente más bien por corto tiempo y después fue dejada a un lado, temporalmente por una geometría rival que apareció en escena. Esta geometría rival, que incorporaba un tratamiento algebraico de la Geometría, se llama ahora geometría analítica. Tiene su motivación en una serie de sucesos y de descubrimientos en el siglo XVI y XVII, que iniciaron la era científica de Europa occidental y trajeron a primer plano el problema de deducir y de utilizar las propiedades de las curvas y de las superficies.

En primer lugar, la creación de la teoría heliocéntrica, por Nicolás Copernico (1473-1543) y Johannes Kepler (1571-1630), para el movimiento planetario hizo manifiesta la necesidad de métodos efectivos de trabajo con las secciones cónicas. Estas curvas son las trayectorias de los cuerpos celestes en tal sistema. Además, al hacer inválida la mecánica griega clásica, que presuponía una tierra estacionaria, la teoría heliocéntrica provoca una ciencia completamente nueva del movimiento y con ello el estatuto de curvas sobre las cuales se mueven los objetos.

Durante ciento cincuenta años los geómetras puros permanecieron en las sombras, sin embargo, en el siglo XIX hallaron el ánimo y la vitalidad necesaria para afirmarse. La revitalización de la Geometría fue iniciada por Gaspard Mongue (1746-1818), un matemático francés de primera línea y consejero de Napoleón. Mongue consideró que los análisis habían incapacitado al no interpretar geométricamente su análisis, ni usar imágenes geométricas como una ayuda a su pensamiento. Mongue era un maestro de tanta inspiración que alrededor de él se reunió un gran número de discípulos brillantes, entre ellos L.N.M. Carnot (1785-1823), Charles J. Brianchon (1785-1864) y Jean Víctor Poncelet (1788-1867). Estos hombres imbuidos de un fervor geométrico por Mongue, fueron incluso más allá de la intención de su maestro y trataron de mostrar que los métodos geométricos podían aplicarse tanto y más que los métodos algebraicos y analíticos. Su objetivo se convirtió en superar a Descartes o, como Carnot lo expresó *«liberar a la geometría de los jeroglíficos del análisis»*.

Los geómetras, dirigidos por Poncelet, se volvieron de nuevo a la geometría proyectiva, que había sido abandonada, tan sin compasión en el siglo XVII. Poncelet, siendo oficial del ejército de Napoleón, fue capturado por los rusos y pasó el año 1813-1814 en una prisión rusa. Allí reconstruyó, sin la ayuda de libros, todo lo que había aprendido de Mongue. Después continuó creando nuevos resultados en geometría proyectiva.

La geometría proyectiva fue practicada activamente durante todo el siglo XIX. Es curioso que se desarrolló un método algebraico, esencialmente una extensión del método de la geometría analítica, a fin de probar sus teoremas y en este respecto los intereses de los geómetras puros que habían reiniciado la revitalización de la Geometría resultaron en realidad adulterados. Pero la geometría proyectiva fue oscurecida de nuevo por otro desarrollo tan dramático y de tanta importancia como la creación de las Matemáticas por los griegos clásicos: la creación de la geometría no euclidea.

Las implicaciones de la geometría no euclidea son drásticas. Si ambas, geometría euclidea y no euclidea, pueden representar el espacio físico igualmente bien, ¿en qué consiste la verdad acerca del espacio y de las figuras en el espacio? No se puede decir. De hecho la elección pudiera no resultar limitada solo a estas dos geometrías. Pronto llegaron a percibirse los matemáticos de esta posibilidad. Los hechos le forzaron gradualmente a pensar que la geometría no es la verdad acerca del espacio físico, sino el estudio de los espacios posibles. Varios de estos espacios construidos matemáticamente, y que difieren profundamente unos de otros, podrían adaptarse al espacio físico, igualmente bien, en el grado en que la experiencia podría decidirlo.

El concepto de la Geometría debía entonces de ser revisado, pero esto mismo resultaba cierto para el concepto de las mismas Matemáticas. Puesto que por más de dos mil años las Matemáticas habían sido el bastión de la verdad, la geometría no euclidea, el triunfo de la razón, resultó ser un desastre intelectual. Esta nueva geometría provocó la idea de que las Matemáticas, a pesar de toda su utilidad en la organización del pensamiento y el progreso de la obra del hombre, no ofrecen verdades, sino que es una quimera, hecha a medida del hombre, que presenta apariencias de verdad.

El nuevo panorama inaugurado en geometría fue ampliado sin medida por la obra de Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866). Riemann era uno de los estudiantes de Gauss y sin duda alguna, de él adquirió su interés por el estudio del mundo físico.

Lo que Riemann tenía en la mente era una geometría para configuraciones variables. Supongamos que trataremos de diseñar una geometría que se adapte a la superficie de una región montañosa. En algunos lugares la superficie podría ser plana, en otros podría consistir en colinas cónicas, en otras colinas semiesféricas. El carácter de la Geometría cambia de un lugar a otro y así la fórmula de la distancia que determina la Geometría ha de cambiar de un sitio a otro. Riemann propuso, en otras palabras, espacios no homogéneos, espacios cuyas características varían de punto a punto o espacios de curvatura variable.

Riemann murió a la edad de cuarenta años y así solo pudo apenas esbozar el amplio panorama de su concepción del espacio, el progreso ulterior de la geometría riemanniana fue tarea de muchos, completamente.

La creación de la teoría general de la relatividad por Albert Einstein (1879-1955) no solamente estimuló el trabajo ulterior en geometría riemanniana, sino también sugirió el problema de unificar la gravitación y el electromagnetismo en un único esquema matemático. A este fin, Hermann Weyl, en 1818 introdujo lo que llamó espacios afinmente conexos, un concepto que utiliza la noción de Levi - Civita de paralelismo más bien que la noción de distancia, con el fin de relacionar los puntos del espacio mutuamente. Una expresión de distancia, incluso más generalizada que la de Riemann, dio lugar a espacios llamados espacios de Finsler.

Riemann fue también el fundador de la topología, otra rama de la Geometría, en la cual la investigación es actualmente, extraordinariamente activa. Durante los años 1850 fue trabajando con lo que ahora se llama funciones de una variable compleja, e introdujo una clase de superficie, llamada «*superficies de Riemann*», para representar tales funciones. Las propiedades de las funciones resultaron estar en conexión íntimas con las propiedades geométricas de las superficies. Para cualquier función dada, sin embargo, la forma precisa de la superficie no era importante, y así encontró útil clasificar las superficies según un nuevo principio.

El problema principal de la topología consiste en saber cuándo las figuras son topológicamente equivalentes. Esto puede ser difícil de determinar por inspección de las figuras, particularmente porque aquélla, considera figuras de tres dimensiones. Por ésta y por otras razones semejantes se trata de caracterizar figuras equivalentes mediante algunas propiedades particulares, de tal forma que las figuras que poseen estas propiedades hayan de ser topológicamente equivalentes, de la misma forma que la congruencia de dos triángulos está garantizada, si es que dos lados y el ángulo que forman en un triángulo son iguales a los respectivos del otro.

Si bien muchos problemas básicos de la topología permanecen aún abiertos, los matemáticos han aportado progreso, donde han podido, y en estas últimas décadas han venido a desarrollar la rama llamada topología diferencial con la esperanza de que los utensilios serán mejor que uno solo.

Otro campo enormemente activo, hoy, es la geometría algebraica. Hace doscientos años este tema consistía en una generalización de la geometría analítica y estaba dedicada al estudio de curvas que son más complicadas que las secciones cónicas y vienen representadas por ecuaciones de grado mayor que el segundo. Desde el final del siglo XIX, sin embargo, el dominio propio de la geometría algebraica ha sido considerada como el estudio de las propiedades curvas, superficies y estructuras de dimensión más elevada definidas por ecuaciones algebraicas invariantes bajo transformaciones racionales. Tales transformaciones desfiguran una figura geométrica, más que las transformaciones proyectivas y menos que las transformaciones topológicas.

Los matemáticos, cediendo a su propensión de complicar y de algebraizar, han permitido que las coordenadas en las ecuaciones de la geometría algebraica tomen valores complejos y aún valores en cuerpos algebraicos. Por consiguiente, inclusive la simple ecuación $x^2 + y^2 = 25$, que representa, cuando x e y toman valores reales, el círculo descrito previamente, puede representar una superficie de Riemann complicada o una estructura tan lejos de lo familiar que puede ser, difícilmente imaginada. La geometría sufre, pero el álgebra, florece.

Esta descripción de la geometría como el estudio del espacio y de las figuras en el espacio tal vez han llegado o presentan el crecimiento, la variedad y la vitalidad de la Geometría y las interrelaciones de las ramas diversas entre sí y con otros aspectos de las Matemáticas, pero no representa la naturaleza completa de la geometría moderna. Se dice a menudo que el álgebra es un lenguaje. También lo es la Geometría. Al respecto se dice que: *«La Geometría es la expresión más elaborada del pensamiento lógico en el lenguaje de las Matemáticas»* (Cosme Matías Burgos, 2003. I. S. P. Enrique José Varona, La Habana, Cuba).

Hoy, los matemáticos abordan el estudio de espacios abstractos y se pudiera concluir, a partir de tal término, que esta idea implica espacios altamente idealizados y enigmáticos. Esto es verdad; pero la utilización más importante de la teoría de espacios abstractos, más aún, la motivación histórica de este estudio, consiste en facilitar el uso de las clases de funciones en análisis. Los *«puntos»* de un espacio abstracto son ordinariamente funciones, y la distancia entre dos puntos es una especie de medida de la diferencia entre dos funciones. Así podría interesarnos el estudio de funciones tales como $x^2,\ 3x^2$ y $x^2 - 2xy$ en particular los valores que estas funciones toman a medida que x varía de 0 a 1. Se podría medir la distancia entre dos cualquiera de estas funciones, como la diferencia numérica máxima entre las dos para todos los valores de x entre 0 y 1. Tales espacios de funciones resultan ser de dimensión infinita. Los espacios de Hilbert y los espacios de Banach, sobre los cuales tanto se oye hoy día, son espacios funcionales. Desde el punto de vista matemático son importantes en el campo conocido como análisis funcional, que es ahora el utensilio principal de la mecánica cuántica, es decir, de los últimos desarrollos de la Física.

¿Por qué hablar de espacios, cuando lo que uno está manejando realmente son funciones? La razón estriba en que el modo geométrico de pensar es útil y aún sugiere teoremas sobre funciones. Lo que puede ser complicado y oscuro, cuando se formula analíticamente puede resultar en la interpretación geométrica.

Intuitivamente obvio. El estudio de espacios abstractos es, sorprendentemente, una parte de la topología, porque las propiedades de estas estructuras que son importantes, ya se consideran estas estructuras como espacios o como colecciones de funciones, son preservadas o invariantes bajo transformaciones topológicas. El campo de los espacios abstractos muestra claramente la abstracción de las Matemáticas modernas. La Geometría proporciona modelos no solamente del espacio físico, sino también de cualquier estructura, cuyos conceptos y propiedades se adapten al esquema geométrico.

La Geometría resulta ser más que el mero receptáculo de la materia en otro aspecto vital. El siglo presente está siendo testigo de la verificación de una afirmación de Descartes de que la Física podría ser geometrizada. En la teoría de la relatividad, uno de los dos progresos científicos más notables de este siglo (la teoría cuántica es el otro), el efecto gravitatorio de la materia ha sido reducido a la Geometría. De la misma forma que la Geometría de una región montañosa requiere una fórmula para la distancia que varía de un lugar a otro a fin de representar la forma variable de la tierra, de la misma forma la geometría de Einstein tiene una distancia variable para representar las diferentes masas en el espacio. La materia determina la Geometría y, la Geometría a su vez, explica fenómenos previamente atribuidos a la gravitación.

La geometría ha ingerido parte de la realidad y puede tal vez ingerir el resto de ella. En la actualidad, en la mecánica cuántica, los físicos están tratando de resolver el problema de las propiedades aparentemente contradictorias de la onda y de la partícula de la materia subatómica y tal vez hayan de reducir ambos a, cuantos, de espacio. Tal vez la materia misma llegará a disolverse en puro espacio.

Si se trata de evaluar la relación entre número y la Geometría, es necesario admitir que en lo que respecta a la metodología de la demostración ésta ha cedido el paso al Álgebra y al Análisis. El tratamiento geométrico de las estructuras complicadas y, por supuesto, de espacios de dimensión superior puede, como Descartes afirmaba en son de queja acerca de la geometría euclidea, *«ejercitar el entendimiento solamente a condición de fatigar enormemente la imaginación»*. Además, las necesidades cuantitativas de la ciencia, pueden ser satisfechas solo mediante el recurso final al número.

> «Sin embargo, la Geometría proporciona sustancia y significado a las fórmulas desnudas. La Geometría sigue siendo la fuente de mayor importancia de intuiciones ricas y fructíferas que

a su vez proporcionan potencia creadora a las Matemáticas. La mayor parte de los matemáticos piensan en término de esquemas geométricos, incluso aún no dejen traza alguna de ese andamiaje al presentar las estructuras analíticas complicadas. Todavía se puede asentir la afirmación de Platón de que *"la Geometría conduce el alma hacia la verdad»* (M. Kline, 1992).

Varias otras fuerzas impulsaron a la Geometría en la misma dirección. La utilización gradualmente creciente sobre la trayectoria de los proyectos. El descubrimiento del telescopio y del microscopio, motivó el estudio de los lentes. La exploración geográfica requirió mapas y en particular el estudio de la correlación de trayectorias sobre el globo con trayectorias sobre mapas planos. Todos estos problemas no solamente acrecentaron la necesidad del conocimiento de propiedades de curvas familiares, sino que también introdujeron curvas nuevas.

Apolonio hizo su contribución a la historia de las Matemáticas, al investigar todas las peculiaridades más importantes de una serie de curvas que descubrió en un libro llamado cónicas. Las denominó cónicas, debido a que las vio como secciones realizadas por una superficie llana o plana cuando intercepta la superficie de un cono. Depende de cómo se corte el cono para que las secciones resultantes sean círculos, elipses, parábolas e hipérbolas. Después de investigar las propiedades de cada sección cónica y demostrar de qué forma están interrelacionadas.

Aunque en las Matemáticas para todas estas ingeniosas creaciones no requieren ninguna justificación, han pasado, no obstante, a quedar noblemente justificadas por el hecho de que las secciones cónicas son los caminos que siguen los proyectiles, los satélites, la luna, la tierra bajo la influencia de la gravedad.

Se cuenta que el año 1616, un joven aristócrata francés, llamado René Descartes, se licenció en Derechos en la Universidad Portiers y se dispuso a rehacer el mundo. Estaba profundamente descontento de lo que había aprendido de los académicos, todavía esclavos de los pensadores de la antigüedad. Descartes confiaba en que podía remediar todo este enredo. Aunque tal ambición era poco común en un muchacho de veinte años, en sí, iba a tener un resultado muy poco común.

Figura 1. René Descartes.

Fuente: http://www.um.es/docencia/pherrero/mathis/descartes/rene.htm

Lo que todavía es más original: Iba a llevar a cabo su resolución por medio de una filosofía fresca, que surgió de las Matemáticas. Esta fue *«la Geometría Analítica»*, que unificó toda la Aritmética, el Álgebra y la Geometría anteriores, en una técnica unitaria, una técnica que consideraba los números como puntos en un gráfico, las ecuaciones como forma geométrica y la forma como ecuaciones.

La geometría analítica se transformó en los cimientos sobre los que se construyeron la mayor parte de las matemáticas superiores actuales y gran parte de las Ciencias Exactas.

De otro lado, algunos hechos notables en la Historia del año 1616 fueron:

- Protestantes proclamando sus austeros patrones de conciencia individual.
- Naciones rivales proyectando imperios en el extranjero.
- Comerciantes holandeses de pieles, haciendo tratos en Manhattan.
- Los amantes del teatro de Londres lamentaban la reciente muerte de Shakespeare.
- William Harvey había, justamente iniciado las conferencias en que describía el corazón, no como en un centro de emociones, sino como una bomba para la sangre.
- Kepler preparaba la publicación para la tercera y última de sus leyes. La idea de que el sol es el centro de nuestro sistema solar - enunciada por el astrónomo Copérnico - había sido precisamente calificada de herejía por la Santa Iglesia en Roma.

Galileo, ocupado con el telescopio que acababa de descubrir había sido prevenido de que cesara en su entusiasta apoyo de la idea, que iba en contra del pensar tradicional.

En medio de esta amplia onda de creatividad, el joven Descartes llegó al convencimiento que el mundo necesitaba una fórmula que disciplinara el pensamiento racional y unificara el conocimiento. Se dispuso a encontrarla en el *«conocimiento de mí mismo»* y en el *«gran libro del mundo»*. Mientras fue soldado pasó la mayor parte del tiempo *«con la cabeza y las orejas en el estudio de las matemáticas»*, rama del conocimiento que le encantaba debido a la certidumbre de sus pruebas y la evidencia de sus razonamientos.

En el espacio de dos años, a la edad de 22, empezó a desarrollar su «Geometría Analítica». En un año más había ideado «el discurso del método» que iba hacerlo famoso como filósofo.

Se dice que en un campamento militar a orillas del Danubio. Descartes la pasó meditando en una habitación pequeña y caliente conocida en aquellos tiempos por el nombre de «estufa». Lo que concibió allí, fue la doctrina de que todo el conocimiento - tanto pasado como futuro - debía plantearse en términos de razonamiento matemático.

Descartes propuso que los intelectuales contemporáneos dejaran de fiarse tan profundamente de las ideas antiguas y que empezaran de nuevo. Indicó la posibilidad de explicar toda la naturaleza desde un esquema científico deductivo. Este consideró que debía empezar con verdades axiomáticas simples y proseguir hasta los conceptos difíciles.

Las largas cadenas de racionamientos simples y fáciles desde los cuales los geómetras están acostumbrados a alcanzar las conclusiones más difíciles de sus demostraciones – escribió - me habían llevado a imaginar que todas las cosas de cuyo conocimiento son capaces los hombres están mutuamente conectadas entre sí de la misma forma y manera. Esta visión de Descartes sigue siendo la ambición de la ciencia moderna.

Pero el propio Descartes tuvo la dificultad en establecer los axiomas básicos desde los cuales, tenía que partir su gran diseño. Cuando más buscaba verdades fundamentales, menos la encontraba. Al final no pudo encontrar ninguna a excepción de la simple afirmación, «Cogito, ergo sum» - «pienso, por lo tanto, existo» - con la que podía decir que no podía hallar bases mejores para empezar a comprender el mundo real que la habilidad del hombre para utilizar su propia mente.

18 años después de la revelación en la estufa, Descartes compartió su filosofía con el público. En 1637, publica «El discurso sobre el método», para dirigir correctamente la razón. Obra fundamental en filosofía, inmediatamente los situó como uno de los grandes pensadores de la época.

Descartes concluyó el método con tres ejemplos concretos sobre como podría ser aplicado. Los dos primeros pretenden explicar el comportamiento de las lentes y el movimiento de los astros. El tercer fue una nota marginal de 106 páginas, *La Geometría*, a la cual los matemáticos todavía se refieren afectuosamente por su nombre en francés, La Géométrie. Este extenso apéndice constituía, según el filósofo ingles del siglo XIX, Johnn Stuart Mill, «el mayor paso unitario jamás dado en el progreso de las ciencias exactas».

En los tres siglos siguientes la geometría analítica iba a dejar atrás la filosofía como base de la creación de la Ciencia, que había señalado Descartes, no obstante la geometría propugnaba la idea de que un par de números pueden determinar una posición en una superficie: un número como una distancia medida, horizontalmente, el otro como una distancia medida, verticalmente.

Descartes mostró que con un par de líneas rectas que se corten como varas de medir se podía construir toda una red de líneas de referencia, en la que los números se podían designar por puntos; que si las ecuaciones eran representadas como secuencias de puntos, aparecerían como formas geométricas, a su vez, podían traducirse en secuencias de números representados por ecuaciones.

En honor a Descartes denominamos a las primitivas líneas que se cortan, el sistema de «Coordenadas Cartesianas». Mediante el concepto de coordenadas con que expuso su geometría, Descartes dio a los matemáticos, nuevo enfoque para el tratamiento de la información matemática.

Mostró que todas las ecuaciones de segundo grado o cuadráticas, cuando se representan como puntos unidos, se convertían en líneas rectas, círculos, elipses, parábolas e hipérbolas - las secciones cónicas en las que Apolonio había derrochado tanto ingenio unos 1900 años antes. Así cuando la ecuación $x^2 - y^2 = 0$ se representa gráficamente, se transforma en dos líneas rectas que se cortan, la ecuación $x^2 + y^2 = 9$ se transforma en un círculo, $x^2 - y^2 = 9$ en una hipérbola, $x^2 + 2y^2 = 9$ en una elipse, $x^2 = 9y$ en una parábola.

Descartes continuo hasta demostrar que la ecuación general que representa a todas las cuadráticas $ax^2 + bxy + cy^2 = d$, se transforma inevitablemente en una curva cónica. El grado de una ecuación determina el número máximo de puntos de intersección que la curva representativa de la ecuación puede tener con una línea recta. De esta manera, gracias a la Geometría Analítica, cada ecuación puede convertirse en una forma geométrica, y toda forma geométrica en una ecuación.

Es por ello que en su contenido totalmente comprensivo del conocimiento matemático pasado, la Geometría Analítica iba a crecer mucho más allá de la breve presentación de Descartes, y no iba a tocar nada de las matemáticas sin transformarlo. Ramas del pensamiento matemático que parecían diferentes fueron conducidas ahora a su vertiente principal. Una fue la antigua técnica de la Trigonometría.

Así pues, la geometría - el estudio de los triángulos - había servido, desde los primitivos babilonios hasta justamente antes de Descartes, como un auxiliar puramente práctico de la agrimensura, la astronomía y la navegación. Los astrólogos y los navegantes necesitaban calcular distancias no mensurables con reglas o cintas métricas. La Trigonometría les permitió realizar tales cálculos aplicando determinadas reglas básicas acerca de las relaciones entre los lados y los ángulos de cualquier triángulo, por grande o pequeño que fuera. Estas relaciones, o proporciones, fueron establecidas inicialmente por los griegos para analizar los arcos de los círculos.

El primer hombre, que se sabe empleó estas relaciones fue el astrónomo Hiparco, quien la utilizó al rededor del año 140 a. de C., para encontrar distancias en líneas rectas en la bóveda celeste. En la actualidad las tres relaciones más utilizadas se refieren al triángulo y son denominadas: seno (abreviatura sen.), coseno (cos.) y tangente (tan).

Por consiguiente, las relaciones representadas por seno, coseno y tangente de un ángulo, varían en valor numérico a medida que varía la abertura de los ángulos. Los griegos calcularon dichos valores y los dispusieron en tablas trigonométricas que los matemáticos más tarde perfeccionaron y ampliaron.

También, el algebrista, francés Francis Vieta, que precedió a Descartes en medio siglo, hizo una observación vital. Encontró que una relación o razón trigonométrica podía utilizarse para resolver una ecuación algebraica, que además una serie de números de una tabla podía representar los valores sucesivos tomados por una incógnita. La proposición de que «seno del ángulo x es y» puede también escribirse así: «$y = sen\ x$».

La forma cómo el descubrimiento de Vieta amplió el alcance de la Trigonometría, se aclaró más cuando Descartes introdujo su técnica de los gráficos. Una ecuación como $y = sen\ x$, podía ahora representarse de hecho punto por punto, para crear una curva en un papel. Incidentalmente, constituye una línea ondulada sin fin - el equivalente gráfico del flujo y reflujo de la corriente eléctrica en un cable de corriente alterna.

Es por ello que, al hacer posible que tales ecuaciones, así como todas las ecuaciones algebraicas, se expresan por medio de líneas y puntos visibles y viables, el gráfico cartesiano, en efecto, captó y concibió las cambiantes relaciones entre cantidades interrelacionadas, y se desarrolló el concepto fundamental aplicable a todas las matemáticas superiores: *«variables»* y *«funciones»*.

Si x e y pueden relacionarse a través de una ecuación o gráfico, se denominan «variables», es decir, una cambia de valor cuando la otra varía. Las dos tienen lo que se conoce por relación funcional. En el caso de un sen, o cos, o una tangente de un ángulo, es una función de aquel ángulo. En una ecuación, y es una función de x si los valores de y varían cuando lo hacen los de x.

Más allá de dar impulso al concepto de variables y funciones, de hacer posible un alcance más completo a los anteriores descubrimientos matemáticos, la contribución básica del sistema cartesiano a las Ciencias Exactas fue sustancialmente filosófica, dando lugar a la matemática conocida ahora como *«Análisis»*.

Con estos procedimientos se logra una perfecta relación entre el número y la Geometría. Los griegos clásicos habían enterrado el Álgebra en la Geometría, pero ahora es la Geometría la que resultó eclipsada por el Álgebra. Como los matemáticos lo expresan, la geometría fue aritmetizada.

Descartes y Fermat no tenían razón del todo al esperar que técnicas algebraicas pudieran proveer una metodología efectiva para trabajar con curvas. Por ejemplo, estas técnicas no podrían llevar a cabo el estudio de la tangente y la curvatura, que son propiedades fundamentales de las curvas. La inclinación o tangente es la proporción con la cual una curva se eleva o baja por cualquier unidad horizontal. La curvatura es la proporción con la que la dirección de la curva cambia por unidad de longitud a lo largo de una curva. Ambas proporciones varían de punto a punto a lo largo de todas las curvas, excepto la línea recta y el círculo. A fin de calcular proporciones de cambio que varían de punto a punto, las técnicas puramente algebraicas de Descartes y Fermat no son adecuadas. Ha de ser empleado el cálculo diferencial. Es más, la característica distintiva del cálculo en su potencia para obtener tales proporciones de cambio o derivadas.

Con la ayuda del cálculo diferencial, el estudio de las curvas y de las superficies fue hecho tan fácil que se introdujo un nuevo término, geometría diferencial, a fin de designarlo. La geometría diferencial considera una gran variedad de problemas más allá del cálculo de la tangente y de la curvatura. Considera en particular el problema enormemente importante de las geodésicas o de la distancia más corta entre dos puntos sobre una superficie.

Entre las ocupaciones de la geometría diferencial se incluye el estudio de las curvaturas de la superficie, el trazado de mapas y el estudio de las superficies de área mínima limitadas por curvas en el espacio, las cuales pueden formarse tan elegantemente por medio de películas de jabón.

Desde el punto de vista de la geometría pura, las metodologías de la geometría analítica y la geometría diferencial fueron enormemente útiles. Si bien estos dos temas trataban de problemas geométricos, la representación de las curvas venía dada por ecuaciones; los métodos de demostración eran algebraicos o analíticos (es decir, aplicaban el uso del cálculo).

El bello razonamiento geométrico se abandonó y la geometría quedó sumergida en el océano de fórmulas. El espíritu de la geometría antigua fue desterrado.

Finalmente, después de esta breve reseña histórica de la Geometría, se presentan los contenidos fundamentales propuestos de manera histórica por parte del MEN y del ICFES, para la aplicación de la prueba de competencias en este tópico y al final se plantean algunos modelos de preguntas que sirven de reflexión para la fundamentación conceptual en el campo específico de las Matemáticas, de esta manera, independientemente de la forma de evaluación y el mecanismo empleado para ello, un buen dominio del contenido, favorece el desarrollo de nuevas formas de enseñanza que los mismos docentes pueden proponer, crear y aplicar en sus contextos educativos.

2.2. DEFINICIÓN Y CONCEPTOS GEOMÉTRICOS

Rama de las Matemáticas que se dedica a analizar las propiedades y medidas de las figuras en el espacio o en el plano.

Las figuras geométricas son un conjunto no vacío cuyos elementos son puntos y son objeto de estudio de la Geometría.

2.3. CONCEPTOS GEOMÉTRICOS PRIMITIVOS

En esencia los conceptos de punto, línea, superficie y cuerpo geométrico son considerados indefinibles, sin embargo, para el desarrollo de la geometría en el ámbito escolar estos se abordan de forma deductiva o inductiva, esto es, como conceptualizaciones intuitivas, desde el activismo pedagógico, o conceptualizaciones formales lógicas, que versan sobre entes de razón.

Conceptualización Intuicionista Deductiva

Cuerpo geométrico: abstracción de cuerpos físicos.

Superficie: abstracción de la frontera de un cuerpo.

Línea: abstracción de la frontera de una superficie. Se obtiene de la intersección de dos superficies.

Punto: frontera de una línea. Se obtiene por la intersección de tres superficies.

Conceptualización Formalista Inductiva

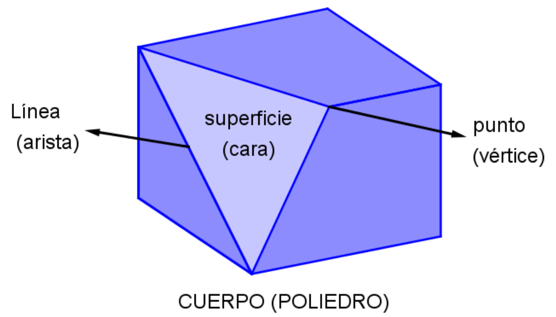
Punto: mínima figura geométrica. Se considera sin dimensión.

Línea: huella dejada por el desplazamiento de un punto. Se considera de dimensión uno.

Superficie: huella dejada por el desplazamiento de una línea. Se considera de dimensión dos.

Cuerpo geométrico: huella dejada por el desplazamiento de una superficie. Se considera de dimensión tres.

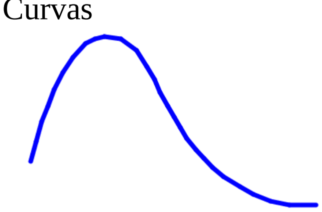
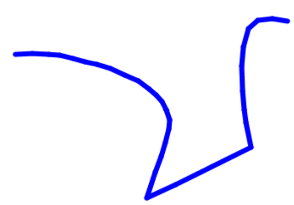
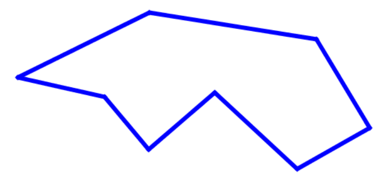
Tabla 1: Superficie, línea y cuerpo

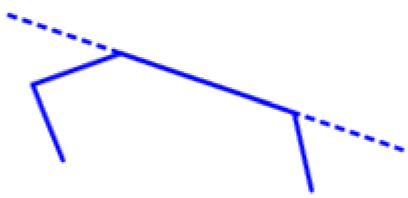
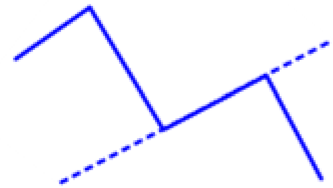
	
Conceptualización intuitiva a partir del recorrido con las manos por los elementos del objeto.	Conceptualización formal de la línea.
	
Conceptualización formal de superficie	Conceptualización formal de cuerpo

Diseño del autor

2.4. CLASIFICACIÓN DE LAS FIGURAS GEOMÉTRICAS

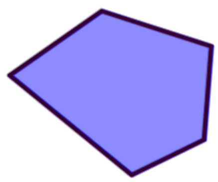
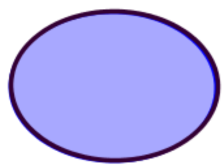
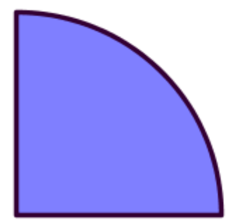
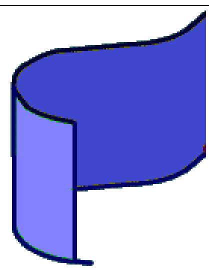
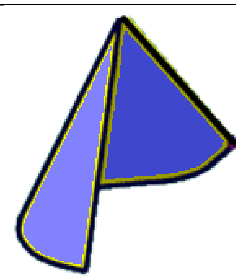
Tabla 2: Líneas

<table>
<tr><td>Rectas
</td><td>Curvas
</td><td>Mixtas
</td></tr>
<tr><td colspan="3">Poligonal: Conformada por segmentos de línea recta</td></tr>
<tr><td>Poligonal abierta
</td><td colspan="2">Poligonal cerrada
</td></tr>
</table>

Poligonal convexa	Poligonal cóncava
	

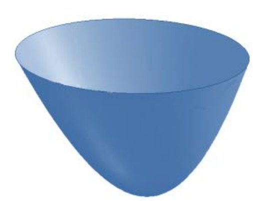
Fuente: http://www.escolares.net/geometria/tipos-de-lineas/. http://www.escolares.net/matematicas/linea-poligonal/

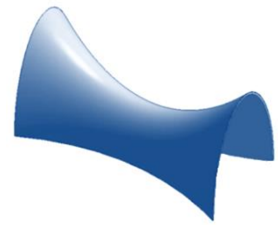
Tabla 3: Superficies

<table>
<tr><td colspan="6">Superficies Planas: Superficie en la cual una recta puede ser contenida en toda dirección.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Poligonales
</td><td colspan="2">Redondas (cónicas)
</td><td colspan="2">Mixtas
</td></tr>
<tr><td colspan="6">Superficies Curvas: Superficie en la cual una recta no puede ser contenida en toda dirección.</td></tr>
<tr><td colspan="3"></td><td colspan="3"></td></tr>
</table>

Fuente: Imágenes adaptadas de: http://webdelprofesor.ula.ve/nucleotrujillo/alperez/teoria/cap_01a-conceptos_geometricos/05-superficie.htm

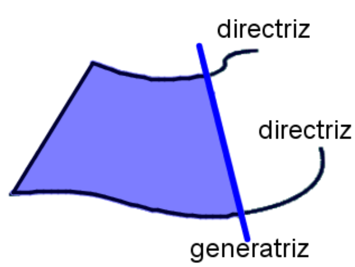
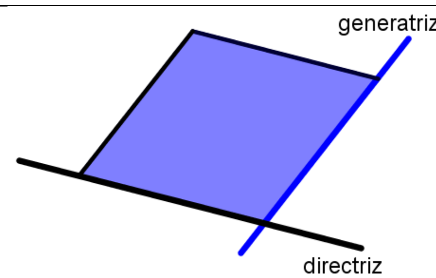
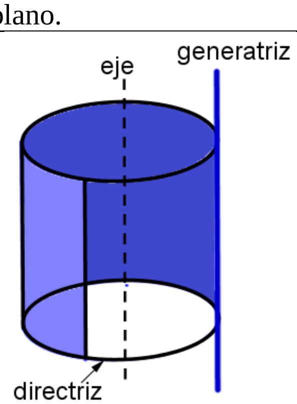
Tabla 4: Curvatura de una superficie

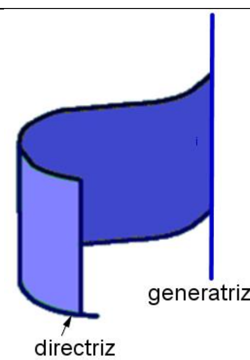
Curvatura Positiva: Una superficie tiene curvatura positiva si ésta es cóncavo-cóncava o convexo-convexa, esto es, al trazar dos líneas que se crucen una a otra en ángulos rectos las dos están curvadas en la misma dirección (paraboloide elíptico).	

Curvatura Negativa: Una superficie tiene una curvatura negativa si ésta es cóncavo-convexa o convexo-cóncava, esto es, al trazar dos líneas que se crucen una a otra en ángulos rectos las dos están curvadas en direcciones opuestas (paraboloide hiperbolico).	
Curvatura Cero: Una superficie tiene curvatura cero si al trazar dos líneas que se crucen una a otra en ángulos rectos, una de ellas es realmente recta (cilindro).	

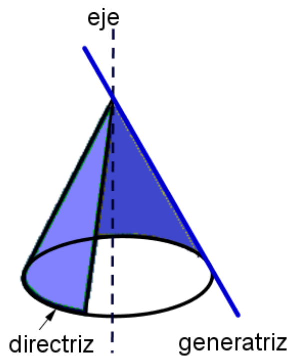
Fuente: Imágenes adaptadas de http://www.taringa.net/posts/hazlo-tu-mismo/16714813/Graficando-superficies-en-el-espacio.html
http://www.tvplayvideos.com/1,7-n5yhci5gs/PARABOLOIDE/Roof-Paraboloide-Hiperb%C3%B3lica-Revit-2013-Por-Mateus-Azevedo
http://ditbutec.es.tl/CILINDROS.htm

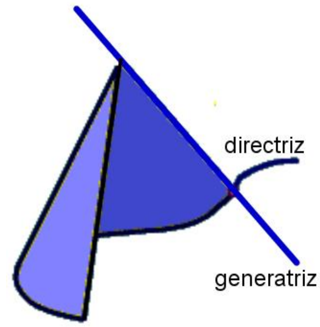
Tabla 5: Superficies regladas y no regladas

<table>
<tr><td colspan="2">Superficie Reglada</td></tr>
<tr><td colspan="2">Es la generada por una recta, denominada generatriz, al desplazarse sobre una recta, una curva o varias, denominadas directrices.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">Superficies Regladas de Curvatura Simple</td></tr>
<tr><td colspan="2">Las superficies de curvatura simple son superficies desarrollables, es decir, pueden extenderse sobre un plano.</td></tr>
<tr><td>

Superficie cilindrica de revolución</td><td>

Superficie cilindrica de no revolución</td></tr>
</table>

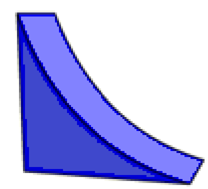
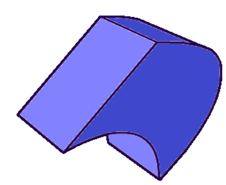
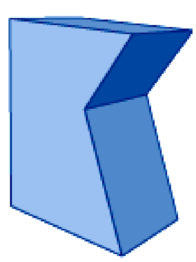
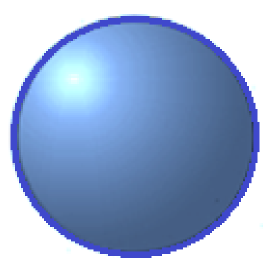
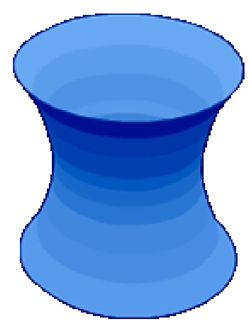
<table>
<tr>
<td>

Superficie cónica de revolución</td>
<td>

Superficie cónica de no revolución</td>
</tr>
<tr><td colspan="2">Superficie Alabeada</td></tr>
<tr><td colspan="2">Es una superficie reglada no desarrollable, es decir, en la cual, dos posiciones sucesivas de la generatriz no son coplanares.</td></tr>
</table>

Fuente: Imágenes adaptadas de
http://webdelprofesor.ula.ve/nucleotrujillo/alperez/teoria/cap_01a-conceptos_geometricos/05-superficie.htm

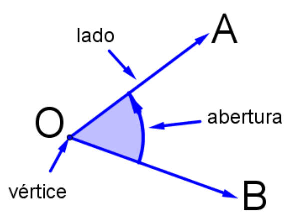
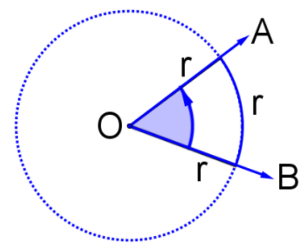
Tabla 6: Cuerpo geométrico

<table>
<tr><td>Poliedros</td><td colspan="2">Redondos</td><td>Mixtos</td></tr>
<tr><td></td><td>Convexos</td><td>Cóncavos</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Cuerpo formado únicamente por superficies poligonales</td><td>Cuerpo formado por una única superficie curva o por una porción de curva convexa</td><td>Cuerpo formado por una porción de curva cóncava</td><td>Cuerpo formado por combinación de superficies poligonales y superficies curvas</td></tr>
</table>

Fuente: http://curioseandoyaprendiendo.blogspot.com/2014/06/cuerpos-redondos.html
http://www.ugr.es/~amartine/dibujos/dibujosweb/CGC3.JPG
http://webdelprofesor.ula.ve/nucleotrujillo/alperez/teoria/cap_01a-conceptos_geometricos/05-superficie.htm

2.5. CLASIFICACIÓN DE ÁNGULOS

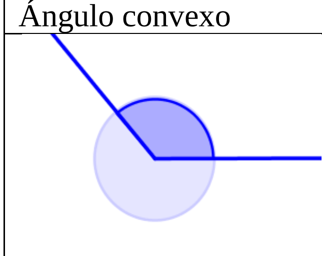
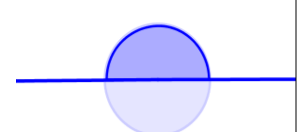
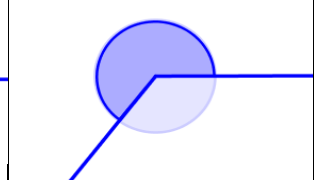
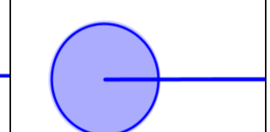
Tabla 7: Concepto y medida de ángulos

Concepto	Medida	
	Grado sexagesimal	Radianes
Un ángulo es la región del plano comprendida entre dos semirrectas con origen común.  A las semirrectas se las llama lados del ángulo. El origen común es el vértice.	Es la amplitud del ángulo resultante de dividir la circunferencia en 360 partes iguales. $1^o = 60' = 3600''$ $1' = 60''$	Un radián (rad) es la medida del ángulo central de una circunferencia cuya longitud de arco coincide con la longitud de su radio.  $1\, rad = 57°\, 17'\, 44$

Fuente: Diseño del autor

Clasificaciones de los Ángulos

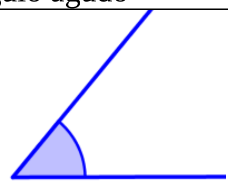
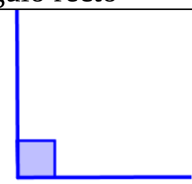
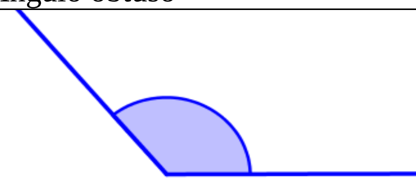
Tabla 8: Clasificación de los ángulos según la región del plano que cubre.

Ángulo convexo	Ángulo llano	Ángulo cóncavo	Angulo completo
			
Ángulo que cubre una región menor que un semiplano.	Ángulo que cubre una región igual a un semiplano. Su medida en grados sexagesimales es 180°.	Ángulo que cubre una región mayor que un semiplano, pero menor que la región de un plano.	Ángulo que cubre la región de un plano.

Fuente: Diseño del autor

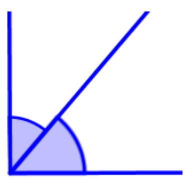
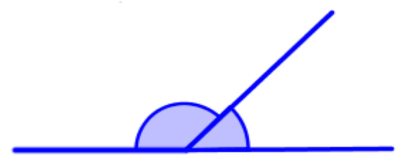
Clasificaciones de los Ángulos Convexos

Tabla 9: Clasificación según su abertura.

Ángulo agudo	Ángulo recto	Ángulo obtuso
		
Ángulo cuya abertura es menor que la de un ángulo recto.	Ángulo cuya abertura es la mitad de un ángulo llano. Su medida en grados sexagesimales es 90°.	Ángulo cuya abertura es mayor que la de un águlo recto pero menor que la de un ángulo llano.

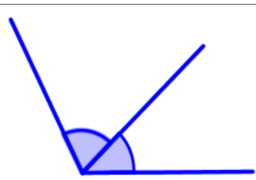
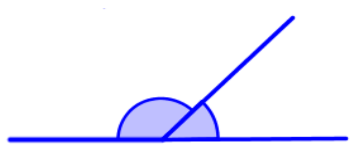
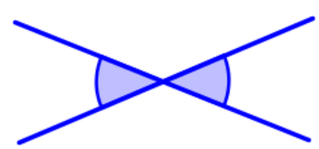
Fuente: Diseño del autor

Tabla 10: Clasificación según la suma de la medida de sus aberturas.

Ángulos complementarios	Ángulos suplementarios
	
Ángulos cuya suma de la medida de sus aberturas es igual a la medida de la abertura de un ángulo recto.	Ángulos cuya suma de la medida de sus aberturas es igual a la medida de la abertura de un ángulo llano.

Fuente: Diseño del autor

Tabla 11: Según su posición relativa

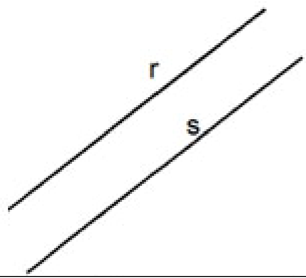
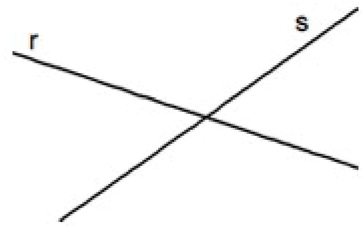
ANGULOS CONSECUTIVOS	PAR LINEAL	OPUESTOS POR EL VÉRTICE
		
Son los ángulos que comparten un lado y el vértice.	Son ángulos consecutivos que a su vez son suplementarios.	Son los ángulos que comparten el vértice y los lados de uno son la prolongación de los las del otro.

Fuente: Diseño del autor

2.6. ÁNGULOS ENTRE RECTAS CORTADAS POR UNA SECANTE

Relaciones entre Rectas

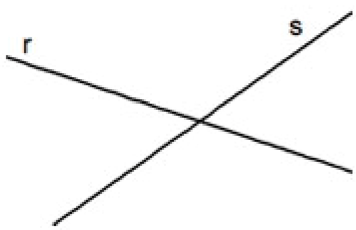
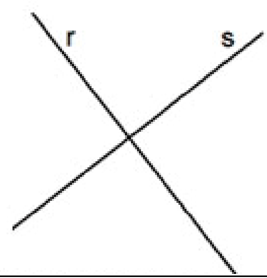
Tabla 12: Rectas

Rectas paralelas	Rectas secantes
	
Rectas que no se cortan.	Rectas que se cortan.

Fuente: Diseño del autor

Clasificación de las Rectas Secantes

Tabla 13: Rectas secantes

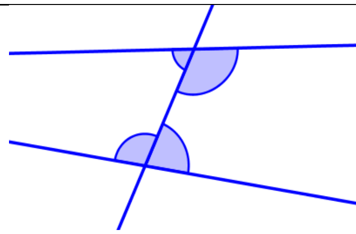
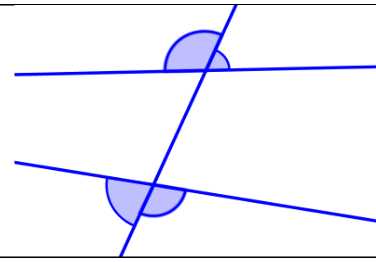
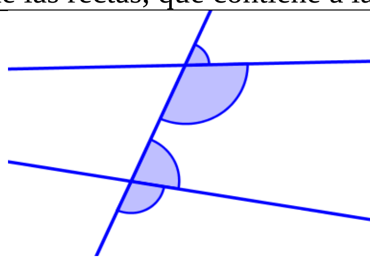
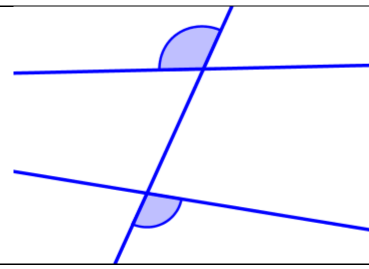
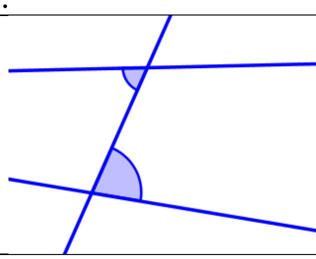
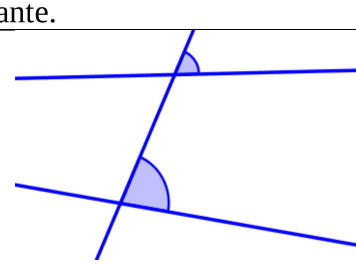
Rectas oblicuas	Rectas perpendiculares
	
Se cortan, formando pares de ángulos opuestos congruentes denominados ángulos opuestos por el vértice.	Rectas que se cortan, formando cuatro ángulos congruentes, denominados ángulos rectos.

Fuente: Diseño del autor

Ángulos entre Rectas Cortados por una Secante

Al ser cortadas dos rectas por una tercera (secante) se obtienen ocho ángulos, cuyas relaciones entre ellos se describen a continuación.

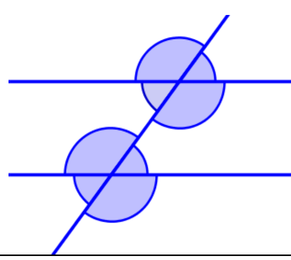
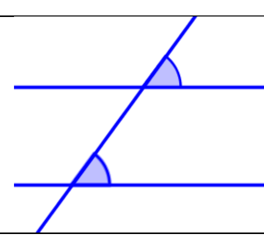
Tabla 14: Rectas cortadas por una secante.

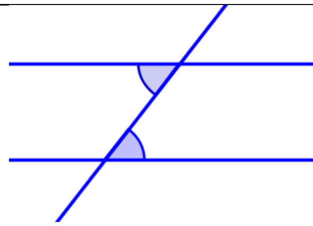
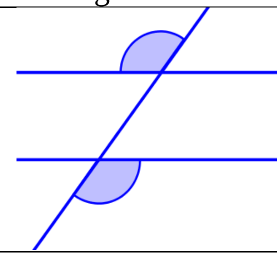
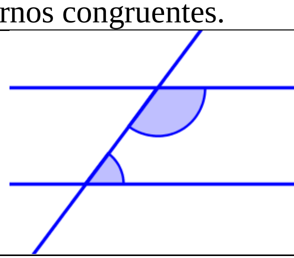
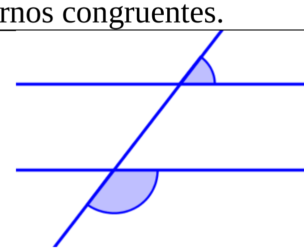
	
Ángulos Internos: Ángulos determinados por la secante y situados en la parte común de los semiplanos determinados por cada una de las rectas, que contiene a la otra.	Ángulos Externos: Ángulos determinados por la secante y situados en los semiplanos determinados por cada una de las rectas, que no contiene a la otra.
	
Ángulos Colaterales o Conjugados: Ángulos situados en el mismo semiplano respecto de la secante.	Ángulos Alternos Externos: Ángulos externos situados en semiplanos distintos rede la secante.
	
Ángulos Alternos Internos: Ángulos internos situados en semiplanos distintos de la secante.	Ángulos Correspondientes: Ángulos colaterales, siendo uno interno y el otro externo.

Fuente: Diseño del autor

Ángulos Formados por dos Paralelas Cortadas por una Secante

Tabla 15: Paralelas cortadas por una transversal.

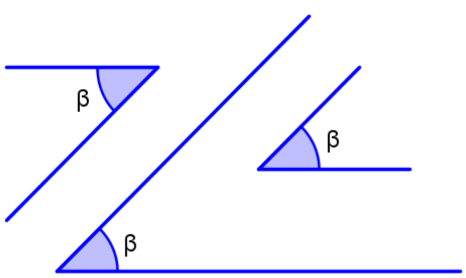
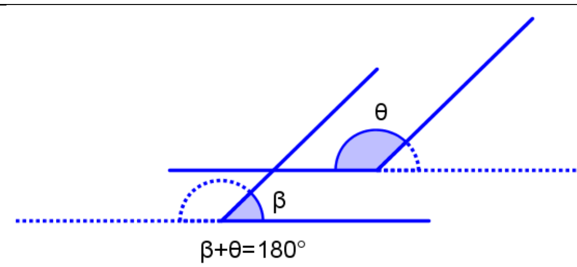
	
	Ángulos Correspondientes:

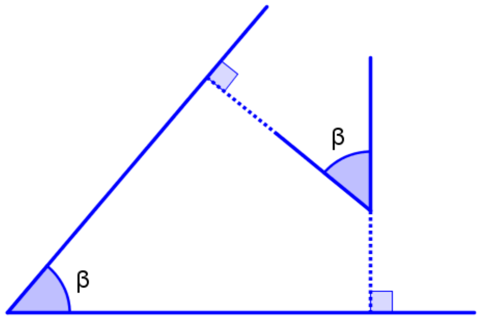
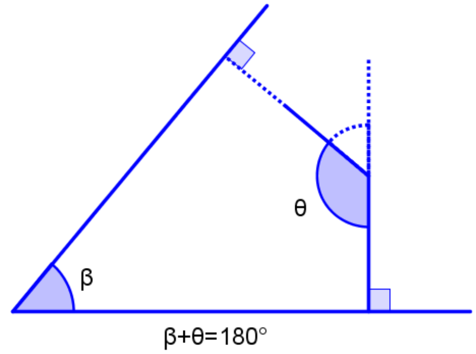
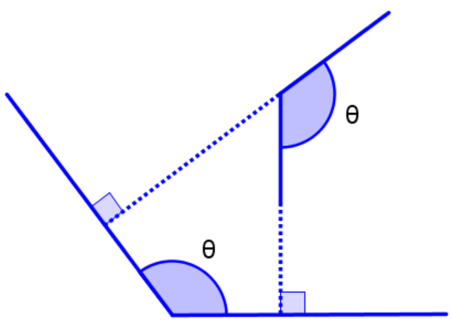
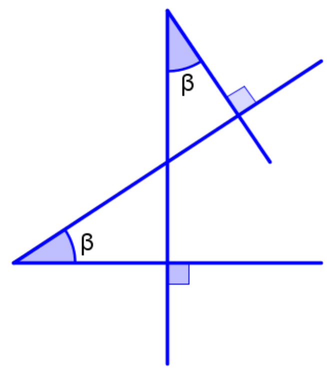
	Toda secante forma con dos paralelas ángulos correspondientes congruentes.
	
Ángulos Alternos Internos: Toda secante forma con dos paralelas ángulos alternos internos congruentes.	Ángulos Alternos Externos: Toda secante forma con dos paralelas ángulos alternos externos congruentes.
	
Ángulos Conjugados Internos: Toda secante forma con dos paralelas ángulos conjugados internos suplementarios.	Ángulos Conjugados Externos: Toda secante forma con dos paralelas ángulos conjugados externos suplementarios.

Fuente: Diseño del autor

Ángulos con Lados Paralelos y Perpendiculares

Tabla 16: Otros tipos de ángulos.

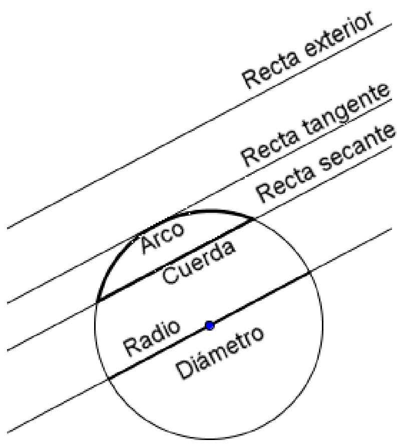
	
Dos ángulos que tienen sus lados paralelos y dirigidos en el mismo sentido o en sentido contrario son congruentes.	Si dos ángulos tienen sus lados paralelos, dos de ellos dirigidos en el mismo sentido y los otros dos en sentido contrario, dichos ángulos son suplementarios.

	
Dos ángulos agudos cuyos lados son respectivamente perpendiculares son congruentes.	Dos ángulos, uno obtuso y el otro agudo, que tienen sus lados respectivamente perpendiculares son suplementarios.
	
Dos ángulos obtusos cuyos lados son respectivamente perpendiculares son congruentes.	

Fuente: Adaptado de:
http://www.cepazahar.org/recursos/file.php/57/Proyectos1/angulos_y_rectas_juan_jose_jorda/propiedades_de_ngulos_con_lados_perpendiculares_o_paralelos.html

2.7. CIRCUNFERENCIA Y CÍRCULO

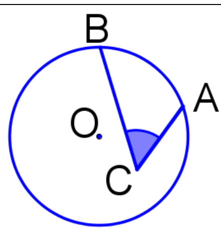
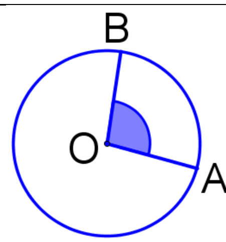
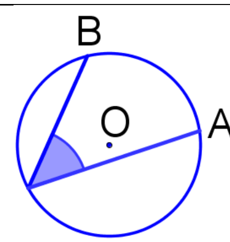
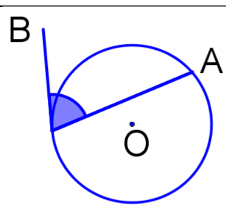
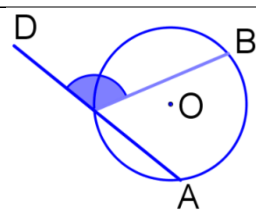
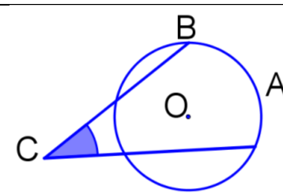
Tabla 17: Elementos de la circunferencia.

Circunferencia	Círculo
	

Fuente: Diseño del autor

Ángulos y Circunferencia

Tabla 18: Clases de ángulos en una circunferencia.

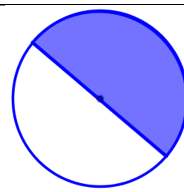
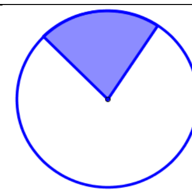
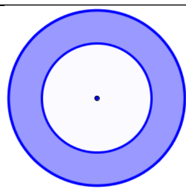
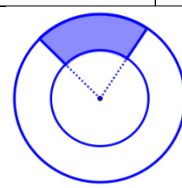
		
Ángulo Interior	Ángulo Central	Ángulo Inscrito
Ángulo en el cual el vértice es un punto interior a la circunferencia y sus lados son secantes a ésta.	Ángulo interior, cuyo vértice es el centro de la circunferencia.	Ángulo cuyo vértice es un punto de la circunferencia y sus lados son secantes a la circunferencia.
		
Ángulo Semiinscrito	Ángulos Exinscrito	Ángulo Exterior
Ángulo cuyo vértice es un punto de la circunferencia, uno de sus lados secante a la	Ángulo adyacente a un ángulo inscrito.	Ángulo en el cual el vértice es un punto exterior a la circunferencia y sus lados

circunferencia y el otro tangente a ésta.		son secantes a la circunferencia.

Fuente: Diseño del autor

Regiones Circulares

Tabla 19: Clases de regiones circulares.

		
Segmento Circular	Semicirculo	Sector Circular
Región del círculo limitada por una cuerda y un arco de circunferencia.	Región del círculo limitada por el diámetro y una semicircunferencia. Corresponde a medio círculo.	Región del círculo limitada por dos radios y un arco de circunferencia.
		
Corona Circular	Trapecio Circular	
Región del círculo limitada por dos circunferencias concéntricas.	Región del círculo limitada por dos circunferencias concéntricas y dos radios de la circunferencia mayor.	

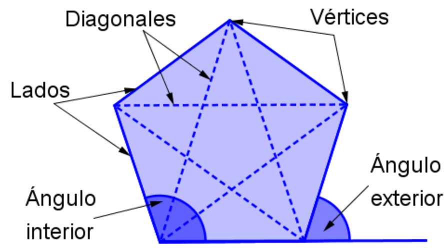
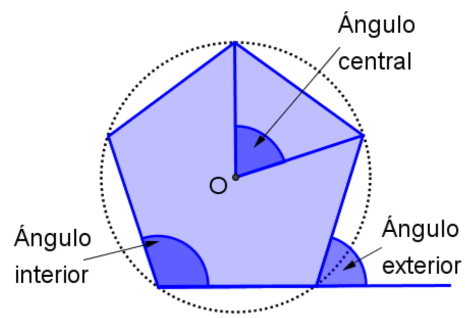
Fuente: Diseño del autor

2.8. CLASIFICACIÓN DE POLÍGONOS

Polígonos: figuras geométricas planas cuyos lados son segmentos de recta o línea poligonal.

Tabla 20: Polígonos.

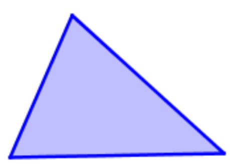
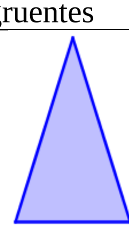
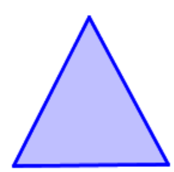
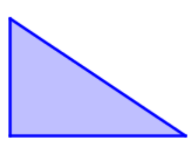
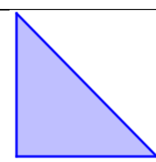
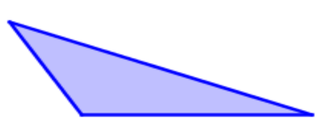
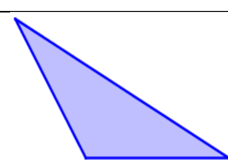
Número de Lados n	Nombre del polígono	Número total de diagonales $N_d = \frac{n \cdot (n-3)}{2}$	Número de triángulos (triangulación) $N_t = n - 2$	Número de diagonales desde un vértice $d_v = n - 3$
3	Triángulo			

4 5 6 7 8 9 10 11 12	Cuadrilátero Pentágono Hexágono Heptágono Octágono Nonágono Decágono Endecágono Dodecágono	Elementos de un Polígono 	Suma de los ángulos exteriores $S_e = 360°$	Suma de ángulos interiores $S_i = (n-2) \cdot 180°$
Polígonos Regulares: Polígonos con lados y ángulos interiores congruentes				
Ángulo central de un polígono regular $\theta_c = \frac{360°}{n}$	Ángulo interior de un polígono regular $\theta_i = \frac{(n-2) \cdot 180°}{n}$	Ángulo exterior de un polígono regular $\theta_e = \frac{360°}{n}$		

Fuente: Diseño del autor

2.9. CLASIFICACIÓN DE TRIÁNGULOS

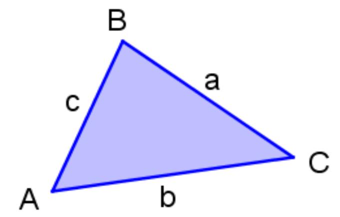
Tabla 21: Triángulos.

Triángulo	Escaleno No posee lados congruentes	Isósceles Posee dos lados congruentes	Equilátero Posee tres lados congruentes
Acutángulo Posee tres ángulos agudos			
Rectángulo Posee un ángulo recto			No es posible su construcción
Obtusángulo Posee un ángulo obtuso			No es posible construcción

Fuente: Diseño del autor

Desigualdad Triangular

Tabla 22: Teorema de la desigualdad triangular.

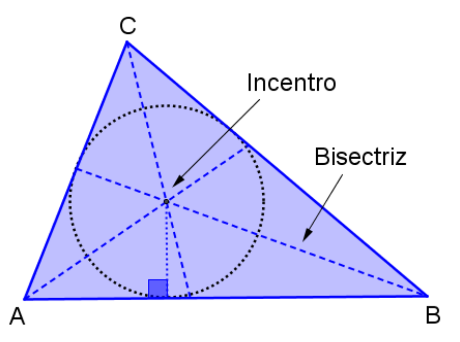
Teorema: En todo triángulo la suma de las longitudes de dos lados cualquiera es siempre mayor a la longitud del lado restante.	
Matemáticamente: Dado el triángulo de lados a, b y c $(b+c) > a,$ $(a+c) > b,$ $(a+b) > c$	

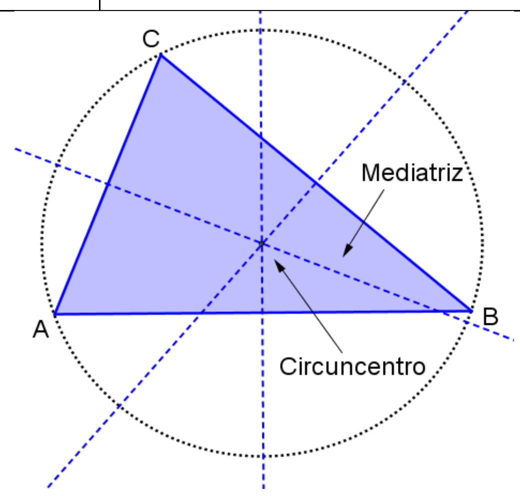
Fuente: Diseño del autor

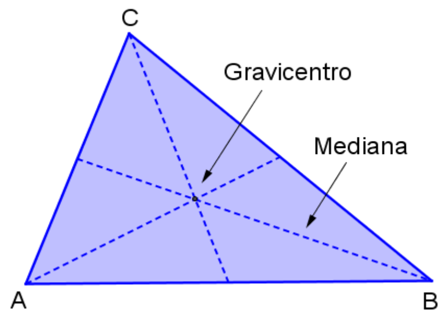
2.10. LÍNEAS Y PUNTOS NOTABLES RESPECTO DE UN TRIÁNGULO

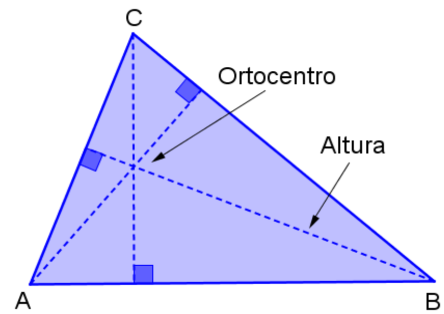
Tabla 23: Líneas y puntos notables.

Línea Notable	Definición	Punto de Encuentro (Punto Notable)
Bisectriz	Semirrecta que divide a un ángulo en dos partes congruentes	Incentro *Centro de la circunferencia inscrita*
Mediatriz	Recta perpendicular a un lado del triángulo por su punto medio	Circuncentro *Centro de la circunferencia circunscrita*
Mediana	Segmento comprendido entre un vértice y el punto medio del lado opuesto	Gravicentro (Baricentro) *Centro de gravedad del triángulo*
Altura	Segmento perpendicular comprendido entre un vértice y el lado opuesto	Ortocentro





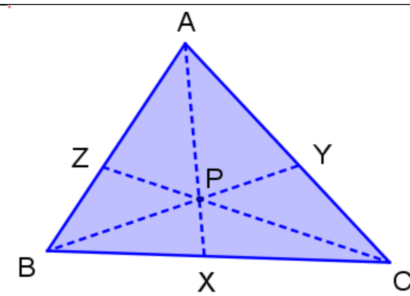




Fuente: Diseño del autor

Ceviana

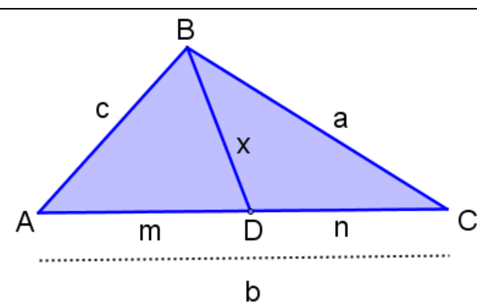
Tabla 24: Definición de Ceviana.

Una Ceviana es una recta que pasan por un vértice de un triángulo y corta al lado opuesto o su prolongación en un punto distinto a los otros vértices (ejemplos: la altura, la bisectriz y la mediana).	
Teorema de Ceva (*Giovanni Ceva 1647-1734*) En un triángulo arbitrario, tres cevianas $\overline{AX}, \overline{BY}, \overline{CZ}$ son concurrentes en el punto P, si y sólo si $$\frac{\overline{BX}}{\overline{XC}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{YA}} \cdot \frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}} = 1$$	

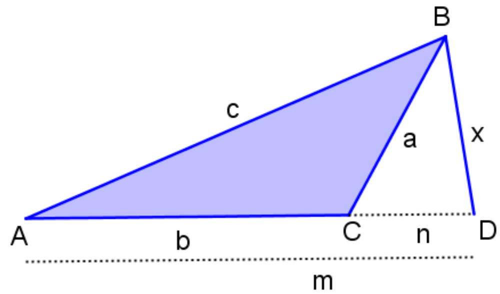
Fuente: Diseño del autor

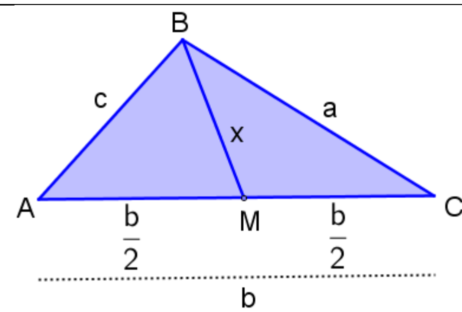
2.11. TEOREMAS SOBRE LÍNEAS NOTABLES DE UN TRIÁNGULO

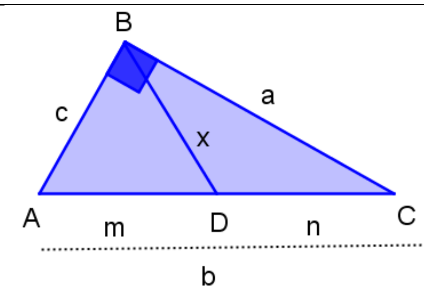
Tabla 25: Líneas notables de un triángulo.

Teorema de Stewart (Cálculo de la Ceviana) $$c^2n + a^2m = x^2b + bnm$$	

<table>
<tr>
<td>Teorema de Stewart para la Ceviana exterior

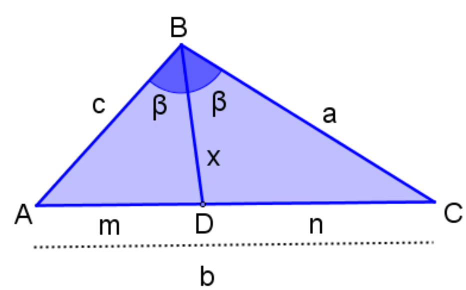
$$c^2n + a^2m = x^2b - bnm$$</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Teorema de Apolonio (Teorema de la mediana)

Para todo triángulo la suma de los cuadrados de dos lados cualesquiera, es igual a la mitad del cuadrado del tercer lado más el doble del cuadrado de su mediana correspondiente.
$$a^2 + c^2 = \frac{1}{2}b^2 + 2x^2$$</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>En un triángulo rectángulo la mediana relativa a la hipotenusa es igual a la mitad de esta. Donde M es la mediana correspondiente a la hipotenusa denominada.

$$M_c = \frac{c}{2}$$</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Teorema de la bisectriz interior

En un triángulo, la razón entre dos lados es igual a la razón de las partes en las que queda dividido el tercer lado por la bisectriz de ángulo interno opuesto.

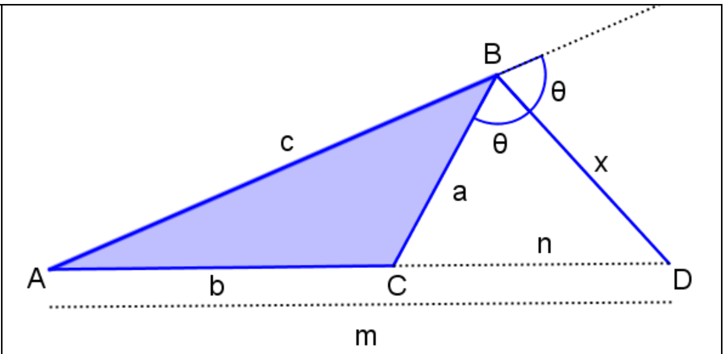
Dado el triángulo ABC, sea x la bisectriz del ángulo interno $\angle B$, entonces se cumple la proporción:

$$\frac{c}{a} = \frac{m}{n}$$</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">La bisectriz interior de un triángulo al cuadrado es igual al producto de los lados menos el producto de los segmentos de la base determinados por la bisectriz.

$$x^2 = ac - mn$$</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><td>Teorema de la bisectriz interior

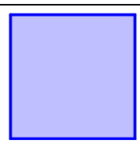
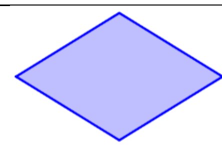
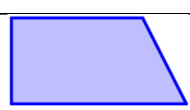
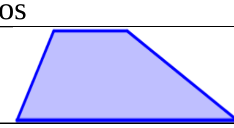
La bisectriz exterior de un triángulo al cuadrado es igual al producto de los segmentos determinados por la bisectriz menos el producto de los lados.

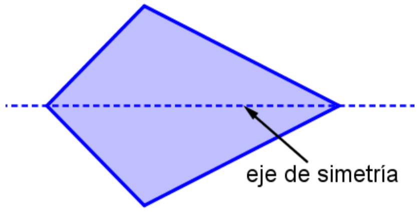
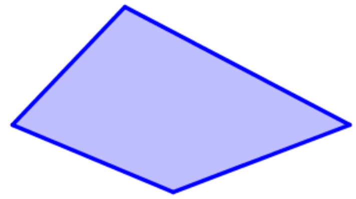
$$x^2 = mn - ac$$</td><td>
</td></tr>
</table>

Fuente: http://cepre.uni.edu.pe/pdf/SEMEJANZA%20DE%20TRI%C1NGULOS.pdf

2.12. CLASIFICACIÓN DE LOS CUADRILÁTEROS

Tabla 26: Paralelogramos.

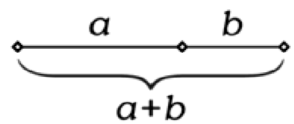
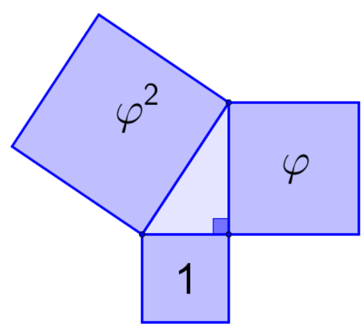
<table>
<tr><td colspan="12">Los lados son paralelos dos a dos</td></tr>
<tr><td colspan="3">Cuadrado</td><td colspan="3">Rectángulo</td><td colspan="3">Rombo</td><td colspan="3">Romboide</td></tr>
<tr><td colspan="3">Cuatro lados congruentes. Cuatro ángulos rectos.</td><td colspan="3">Lados congruentes dos a dos. Cuatro ángulos rectos.</td><td colspan="3">Cuatro lados congruentes. Ángulos congruentes dos a dos.</td><td colspan="3">Lados congruentes dos a dos. Ángulos congruentes dos a dos.</td></tr>
<tr><td colspan="3"></td><td colspan="3"></td><td colspan="3"></td><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td colspan="12">Las diagonales se cortan en su punto medio (se dimidian).</td></tr>
<tr><td colspan="12">Trapecios:
Sólo tiene un par de lados paralelos.</td></tr>
<tr><td colspan="4">Trapecio Rectángulo</td><td colspan="4">Trapecio Isósceles</td><td colspan="4">Trapecio Escaleno</td></tr>
<tr><td colspan="4">Un lado no paralelo perpendicular a los lados paralelos</td><td colspan="4">Lados no paralelos congruentes</td><td colspan="4">Lados no paralelos no congruentes y no perpendiculares a los lados paralelos</td></tr>
<tr><td colspan="4"></td><td colspan="4"></td><td colspan="4"></td></tr>
<tr><td colspan="12">Trapezoides:
No tiene lados paralelos.</td></tr>
<tr><td colspan="6">Trapezoide Simétrico o Deltoide</td><td colspan="6">Trapezoide Asimétrico</td></tr>
<tr><td colspan="6">Posee un eje de simetría.</td><td colspan="6">No posee eje de simetría.</td></tr>
</table>

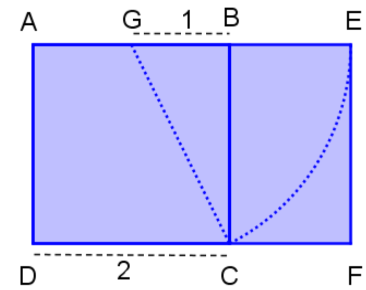
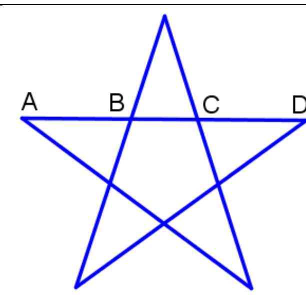
	

Fuente: Adaptado de http://www.educacionprimariaparapadres.com/moodle/mod/page/view.php?id=440

2.13. EL NÚMERO ÁUREO

Tabla 27: Cálculo del número áureo.

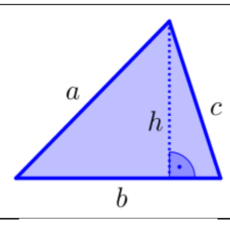
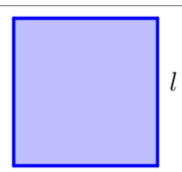
El número áureo surge de la división en dos, de un segmento guardando las siguientes proporciones:	
La longitud total $a+b$ es al segmento más largo a, como a es al segmento más corto b	$\frac{a+b}{a}=\frac{a}{b}$
Número áureo	$\varphi=\frac{a}{b}$
cálculo del valor del número áureo	
	$1+\varphi^{-1}=\varphi$
Multiplicando ambos miembros por φ, obtenemos:	$\varphi+1=\varphi^2$
Igualamos a cero:	$\varphi^2-\varphi-1=0$
La solución positiva de la ecuación de segundo grado es:	$\varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=1.618033..$
El Triángulo de Kepler	
$\varphi+1=\varphi^2$	

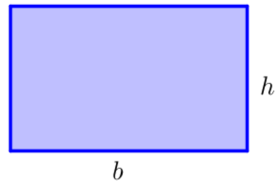
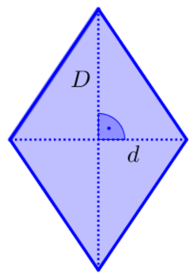
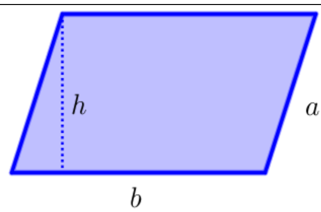
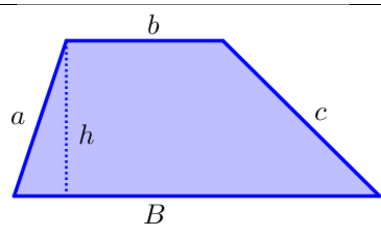
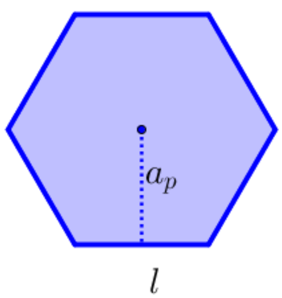
El Rectángulo Áureo de Euclides	
El rectángulo $AEFD$ es áureo porque sus lados $\overline{AE}$ y $\overline{AD}$ están en la proporción del número áureo. Euclides, en su proposición 2.11 de *Los elementos*, obtiene su construcción. Euclides obtiene el rectángulo áureo $AEFD$ a partir del cuadrado $ABCD$. El rectángulo $BEFC$ es así mismo áureo.	
Con centro en G se obtiene el punto E, y por lo tanto:	$\overline{GC} = \sqrt{5}$ $\overline{GE} = \overline{GC} = \sqrt{5}$
con lo que resulta evidente que	$\overline{AE} = \overline{AG} + \overline{GE} = 1 + \sqrt{5}$
de donde, finalmente,	$\frac{\overline{AE}}{\overline{AD}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi$
Por otra parte, los rectángulos $AEFD$ y $BEFC$ son semejantes, de modo que este último es asimismo un rectángulo áureo	
La Razón Áurea y el Pentagrama	
$\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{BC}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$	

Fuente: Adaptado de
http://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/fchamizo/asignaturas/calc1inf1011/apjperez/calculo_cap01.pdf

2.14. PERÍMETRO Y ÁREAS DE LAS FIGURAS PLANAS

Tabla 28: Perímetros y áreas.

Figura plana	Dimensiones	Perímetro	Área
Triángulo		$P = a + b + c$	$A = \frac{b \cdot h}{2}$
Cuadrado		$P = 4 \cdot l$	$A = l^2$

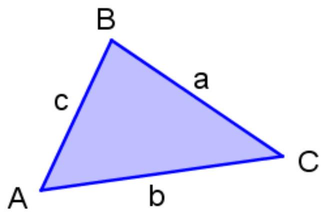
Rectángulo		$P = 2 \cdot (b + h)$	$A = b \cdot h$
Rombo		$P = 4 \cdot l$	$A = \frac{D \cdot d}{2}$
Romboide		$P = 2 \cdot (a + b)$	$A = b \cdot h$
Trapecio		$P = B + b + a + c$	$A = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$
Polígono regular de lado n		$P = n \cdot l$	$A = \frac{Perímetro \cdot apotema}{2}$ $A = \frac{n \cdot l \cdot a_p}{2}$

Fuente: Diseño del autor

Fórmula de Herón

Tabla 29: Área de un triángulo

Conocidas las longitudes de los lados de un triángulo (a, b, c) es posible calcular su área, haciendo uso de la fórmula de Herón.

	$A = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)}$ Donde s es el semiperímetro del triángulo $s = \dfrac{a+b+c}{2}$

Fuente: Diseño del autor

2.15. MEDIDAS DE LA CIRCUNFERENCIA Y DEL CÍRCULO

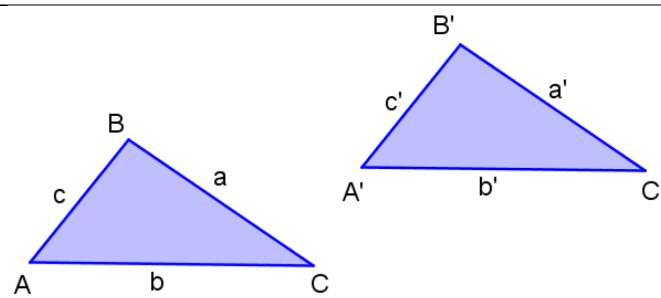
Tabla 30: Circunferencia y círculo.

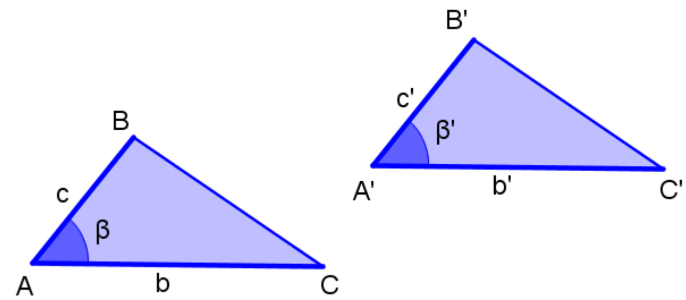
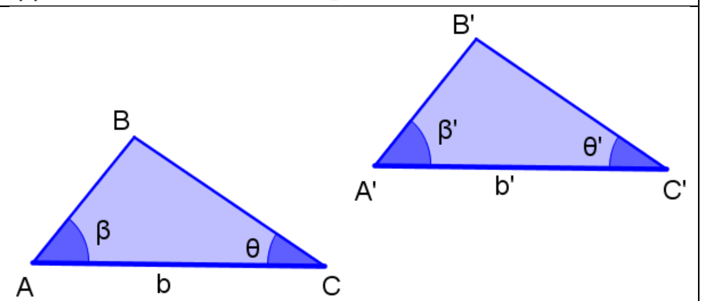
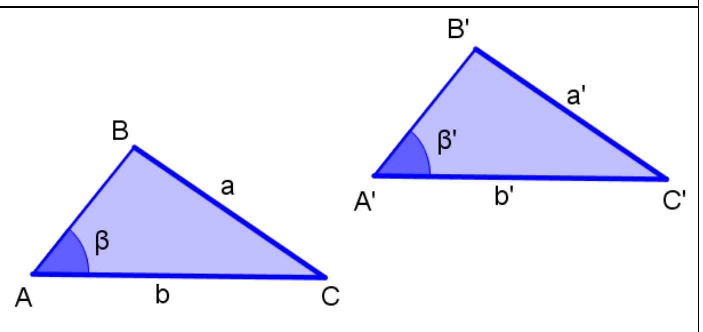
Longitud de la circunferencia	$L = 2\pi R$	Área de un círculo	$A = \pi R^2$
Longitud de un arco de circunferencia	$S = R \cdot \theta$	Área de un sector circular	$A = \dfrac{R^2 \cdot \theta}{2}$
Área de una corona circular	$A = \pi(R^2 - r^2)$	Área de un trapecio circular	$A = \dfrac{(R^2 - r^2) \cdot \theta}{2}$
Área de un segmento circular	$A = \dfrac{R^2 \cdot (\theta - sen\theta)}{2}$		
$\acute{A}ngulo\ \ central\ \ \theta\ dado\ en\ radianes$			

Fuente: Diseño del autor

2.16. CRITERIOS DE CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS

Tabla 31: Criterios de congruencia.

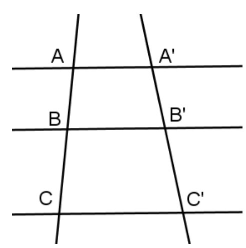
L.L.L Dos triángulos son congruentes si tienen sus lados respectivamente congruentes (≅)	$a \cong a'$ $b \cong b'$ $c \cong c'$ ΔABC $\cong \Delta A'B'C'$	

L.A.L Dos triángulos son congruentes si dos de sus lados y el ángulo entre ellos son respectivamente congruentes (≅)	$c \cong c'$ $\beta \cong \beta'$ $b \cong b'$ $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$	
A.L.A Dos triángulos son congruentes si tienen dos ángulos y el lado común entre ellos respectivamente congruentes (≅)	$\beta \cong \beta'$ $b \cong b'$ $\theta \cong \theta'$ $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$	
L.L.A Dos triángulos son congruentes si tiene dos lados y los ángulos opuestos. correspondientemente a uno de esos lados, respectivamente congruentes (≅)	$b \cong b'$ $a \cong a'$ $\beta \cong \beta'$ $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$	

Fuente: http://www.roberprof.com/2009/08/31/criterios-de-congruencia-de-triangulos/

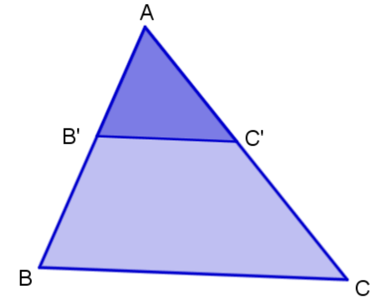
2.17. TEOREMA DE THALES

Tabla 32: Teorema de Thales en un triángulo.

Si dos rectas cualesquiera se cortan por varias paralelas, los segmentos determinados en una de las rectas son proporcionales a los segmentos correspondientes, en la otra. $$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$$	

<table>
<tr>
<td>Teorema de Thales en un triángulo

Dado un triángulo ABC, si se traza un segmento paralelo, $B'C'$, a uno de los lados del triángulo, se obtiene otro triángulo $AB'C'$, cuyos lados son proporcionales a los del triángulo ABC.

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}$$</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

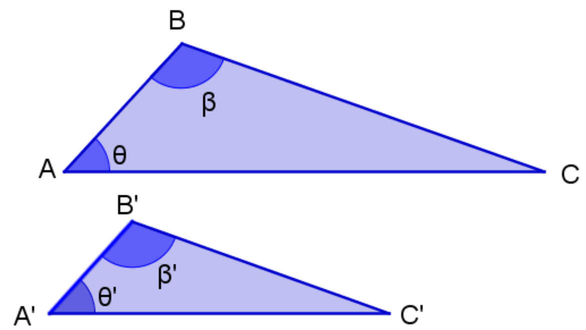
Fuente: Diseño del autor

2.18. CRITERIOS DE SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

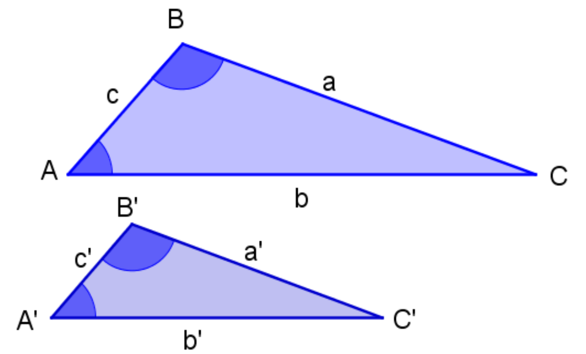
Tabla 33: Semejanza de triángulos.

<table>
<tr>
<td>A.A

Dos triángulos son semejantes si tiene dos ángulos correspondientes congruentes (≅)</td>
<td>$\theta \cong \theta'$
$\beta \cong \beta'$

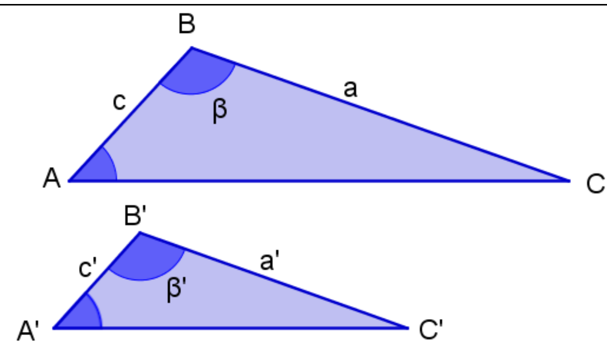
$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>L.L.L

Dos triángulos son semejantes si tiene sus lados correspondientes congruentes (≅)</td>
<td>$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$

$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>L.A.L

Dos triángulos son semejantes si tiene dos lados correspondientes proporcionales y el ángulo comprendido entre ellos congruentes (≅)</td>
<td>$\beta \cong \beta'$

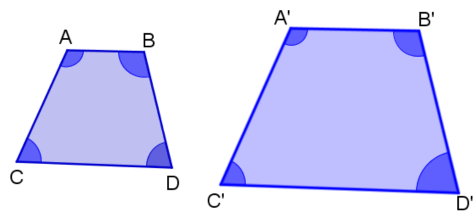
$\frac{a}{a'}=\frac{c}{c'}$

$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

Fuente: http://www.vitutor.com/geo/eso/ss_3.html

2.19. CRITERIOS DE SEMEJANZA DE POLÍGONOS EN GENERAL

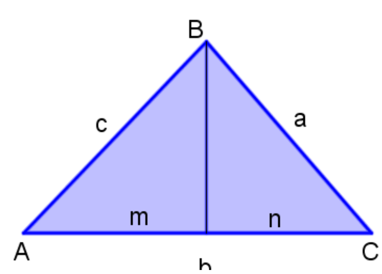
Tabla 34: Criterios de semejanza.

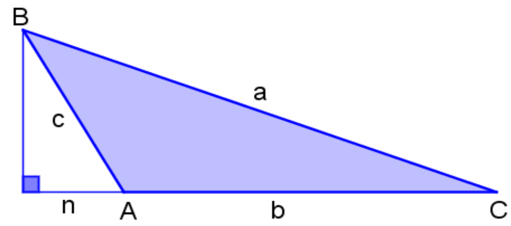
Dos polígonos son semejantes si tiene sus ángulos interiores correspondientes congruentes (≅) y sus lados homólogos son proporcionales.	$\angle A \cong \angle A'$ $\angle B \cong \angle B'$ $\angle C \cong \angle C'$ $\angle D \cong \angle D'$ $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{C'D'}} = \frac{\overline{DA}}{\overline{D'A'}}$ $ABCD \sim A'B'C'D'$	
Perímetros de Polígonos Semejantes Los perímetros de polígonos semejantes están en la razón que hay entre cualquier par de lados homólogos. $\frac{Perímetro(ABCD)}{Perímetro(A'B'C'D')} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{C'D'}} = \frac{\overline{DA}}{\overline{D'A'}}$		
Área de Polígonos Semejantes Las áreas de polígonos semejantes están en el cuadrado de la razón de cualquier par de lados homólogos. $\frac{Área\ ABDC}{Área\ A'B'C'D'} = \left(\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}\right)^2$		

Fuente: Diseño del autor

2.20. TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS

Tabla 35: Triángulo acutángulo y obtusángulo.

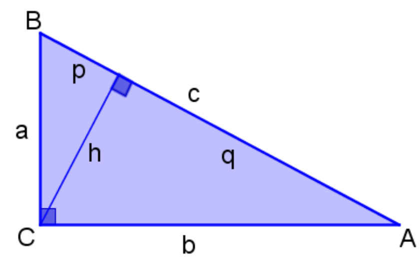
El cuadrado de uno de los lados de un triángulo acutángulo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados menos el doble del lado relativo a la altura por la proyección del lado opuesto al que se quiere hallar. $a^2 = c^2 + b^2 - 2bn$	

En un triángulo obtusángulo, el lado opuesto al ángulo obtuso al cuadrado es igual a la suma de los cuadrados de los catetos más el doble de la base por la proyección de la altura trazada desde uno de los ángulos menores. $$a^2 = c^2 + b^2 + 2bn$$	

Fuente: Diseño del autor

2.21. TRIÁNGULO RECTÁNGULO

Tabla 36: Teorema de Pitágoras

El cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos. $$c^2 = a^2 + b^2$$ Fórmulas para calcular un lado desconocido en función de los otros dos, donde a y b son catetos y c hipotenusa. $c = \sqrt{a^2 + b^2}$; $a = \sqrt{c^2 - b^2}$; $b = \sqrt{c^2 - a^2}$	
El cuadrado de un cateto es igual al producto de la hipotenusa, por la proyección ortogonal de este mismo cateto sobre la hipotenusa.	$a^2 = c \cdot p$; $b^2 = c \cdot q$
El cuadrado de la medida de la altura es igual al producto de las proyecciones ortogonales de los catetos sobre la hipotenusa.	$h^2 = p \cdot q$
El producto de los catetos es igual al producto de la hipotenusa por su altura.	$a \cdot b = h \cdot c$
El inverso del cuadrado de la altura relativa a la hipotenusa es igual a la suma de los inversos de los cuadrados de los catetos.	$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$

Fuente: Diseño del autor

2.22. TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS

Las transformaciones geométricas hacen referencia a los movimientos de figuras geométricas en el plano, desde una posición inicial ***P*** hasta una posición final ***P'***.

2.22.1. MOVIMIENTOS ISOMÉTRICOS O RÍGIDOS

Se denominan *movimientos isométricos o rígidos* a aquellos en los cuales no se presenta deformación de la figura, esto es, son transformaciones de figuras en el plano que se aplican, sin variar las dimensiones ni el área de las mismas; la figura inicial y final son congruentes.

La palabra isometría tiene su origen en el griego iso (igual o mismo) y metría (medir), una definición cercana es igual a medida. Existen tres tipos de isometrías: *traslación, rotación* o *simetría*.

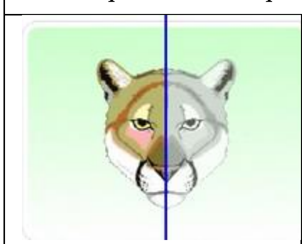
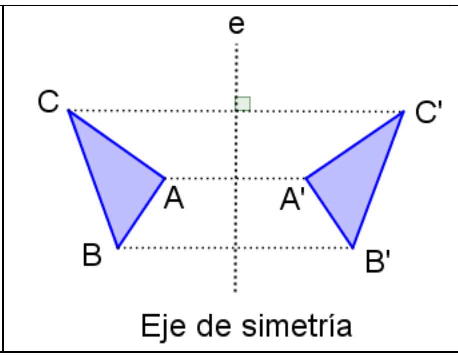
Propiedades de las Isometrías

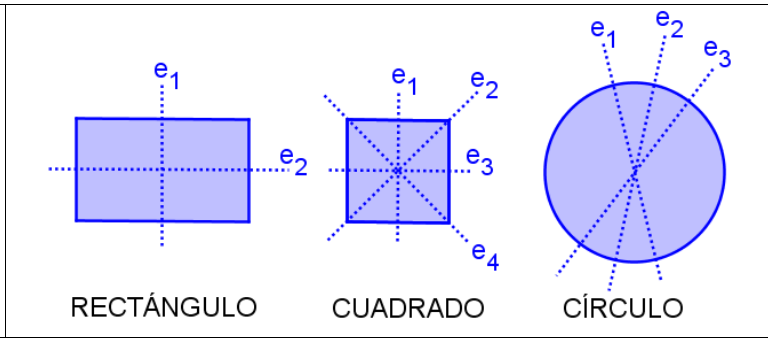
- Mantienen las distancias entre puntos.
- Conservan los ángulos.
- Una isometría que cambie el sentido del plano (la figura original y la transformada no pueden hacerse coincidir sin salirse del plano) se dice que es indirecta, en caso contrario se dice que directa.
- Cuando a un punto del plano una isometría le hace corresponder consigo mismo, se dice que dicho punto es fijo, en esa isometría.
- La transformación resultante en el plano de aplicar sucesivamente dos o más isometrías es otra isometría denominada composición de isometrías.
- La identidad es una isometría que deja a todos los puntos del plano fijo.
- Dos simetrías se dicen inversas, si y solo si la composición entre ellas da como resultado la Identidad.

  La reflexión deslizante está compuesta por una reflexión y una traslación. Estas dos transformaciones conservan el tamaño y la forma de la figura, por lo tanto la combinación de reflexión y deslizamiento es una isometría.

Simetría Axial o de Reflexión

Tabla 37: Simetría axial.

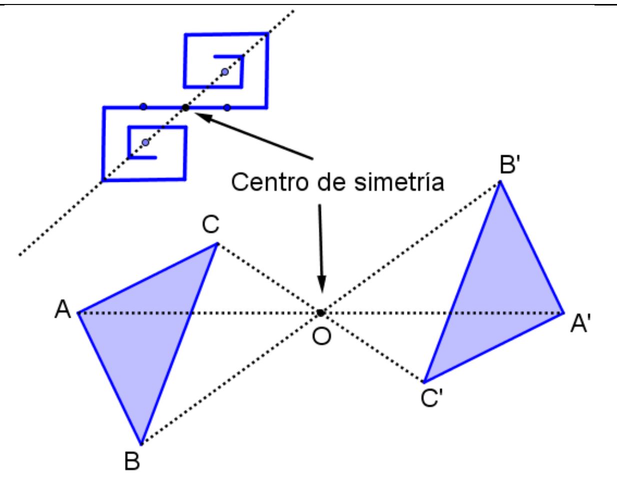
Dada una recta e en el plano, se llama simetría respecto del eje e o simetría axial de eje e, y se denota por S_e, a la transformación geométrica que asocia a cada punto P del plano otro punto $P' = S_e(P)$, de modo que se verifique que la recta e es la mediatriz del segmento PP'.		
	Cumple con las siguientes condiciones: -La distancia de un punto y su imagen al eje de simetría es la misma -El segmento que une un punto con su imagen, es perpendicular al eje de simetría -La simetría axial conserva, longitudes, ángulos, áreas y forma. Forma imágenes espejo.	

Hay figuras que tienen varios ejes de simetría. Ejemplo, un rectángulo tiene dos, un cuadrado cuatro, y un círculo tiene infinitos (cualquier recta que pasa por su centro es eje de simetría)	

Fuente: Diseño del autor

Simetría Central o Simetría con Respecto a un Punto

Tabla 38: Simetría Central.

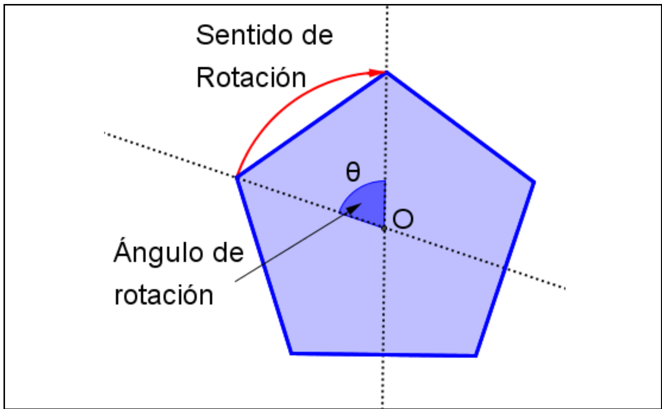
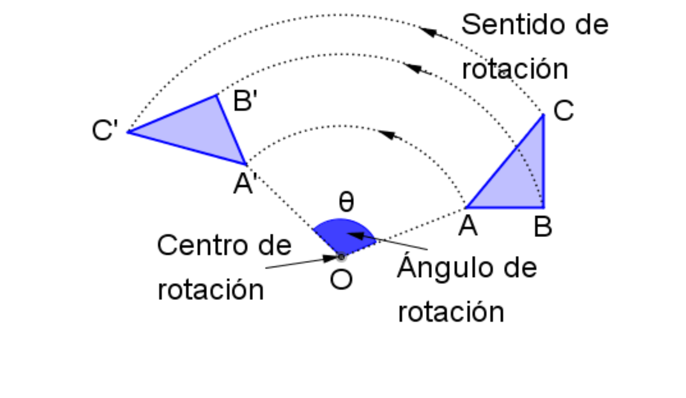
Dado un punto O del plano, se llama simetría central, de centro O, y se denota por S_O, a la transformación geométrica que asocia a cada punto P del plano otro punto $P' = S_O(P)$, de forma que se verifique que: -O sea el punto medio de $\overline{PP'}$. O se llama centro de simetría. -El punto de simetría, su imagen y el centro pertenecen a una misma recta. Una simetría central es una simetría rotacional de 180 grados	

Fuente: Diseño del autor

Simetría Rotacional

Tabla 39: Rotación

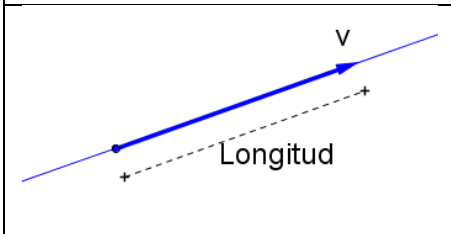
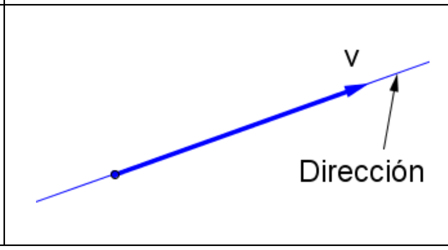
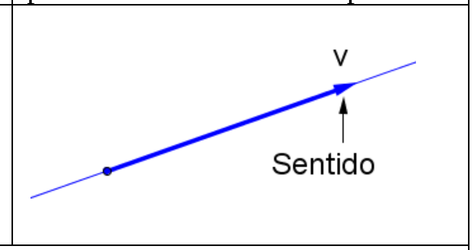
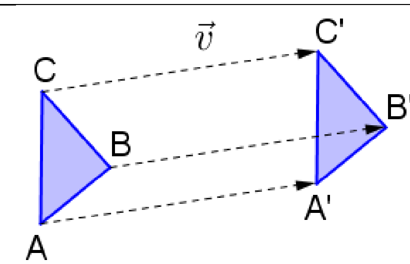
Dado un punto O del plano y un ángulo θ, se llama rotación, o giro, de centro O y amplitud θ, y se denota por $R_{(O,\theta)}$, a la transformación geométrica que asocia a cada punto P del plano otro punto $P' = R_{(O,\theta)}(P)$.	La simetría rotacional es un movimiento de cambio de orientación en la cual se cumple que: $d(O,P) = d(O,P')$ $\angle POP' = \angle\theta$

Fuente: Diseño del autor

Simetría de Traslación

Tabla 40: Simetría y traslación.

Vector: Un vector es un segmento de recta orientado, esto es, tiene longitud, dirección y sentido.		
La longitud o amplitud proporcional al valor del vector.	La dirección o recta soporte, sobre la que se traza el vector.	El sentido, indicado por la punta de flecha, siendo uno de los dos posibles sobre la recta soporte
		
Dado un vector $\vec{v}$, se llama traslación de vector $\vec{v}$, y se denota por $T_{\vec{v}}$, a la transformación geométrica que asocia a cada punto P del plano otro punto $P' = T_{\vec{v}}(P)$, de modo que se verifique $\overrightarrow{PP'} = \vec{v}$. Simetría que tiene una figura si puede hacerse coincidir exactamente en la original cuando se traslada una distancia dada en una dirección dada. Movimiento directo cuando la figura original y la figura transformada por el movimiento se pueden hacer coincidir sin salir del plano.		
La traslación conserva los ángulos, las longitudes, las áreas y la forma. El sentido de los vértices de la figura original y la figura imagen es el mismo. Un segmento, una semirrecta, una recta son paralelos a sus imágenes. Un punto y su trasladado se dice que son homólogos.		

Fuente: Adaptado de http://es.slideshare.net/anacely/geometria-simetrias.

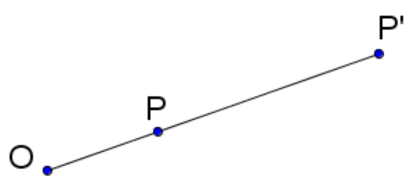
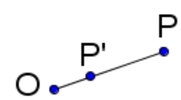
2.22.2. MOVIMIENTOS NO RÍGIDOS

Se denominan *movimientos no rígidos* a aquellos en los cuales se presenta deformación de la figura. La *homotecia* corresponde a uno de tales movimientos.

Concepto de Homotecia

Dado un punto O del plano y un número real $k \neq 0$, se llama homotecia de centro O y razón k, y se denota por $H_{(O,k)}$, a la transformación geométrica que asocia a cada punto P del plano otro punto P' de la semirrecta que definen O y P, de modo que $P' = H_{(O,k)}(P)$, donde $\overline{OP'} = k \cdot \overline{OP}$

Al punto P' se le denomina homólogo de P.

Homotecia de centro O y razón 3	Homotecia de centro O y razón $1/3$
	

Propiedades de las Homotecias

- Ninguna homotecia (con $k \neq 1$) es una isometría.
- Toda homotecia transforma puntos alineados en puntos alineados.
- Toda homotecia conserva el valor absoluto y la orientación de los ángulos.
- El único punto doble de una homotecia de razón $k \neq 1$ es su centro.
- Las rectas que pasan por el centro son rectas dobles.
- Una homotecia queda determinada si conocemos el centro, un punto y su imagen, o bien si conocemos dos puntos y sus respectivos transformados.

En caso de figuras poligonales sometidas a homotecia:

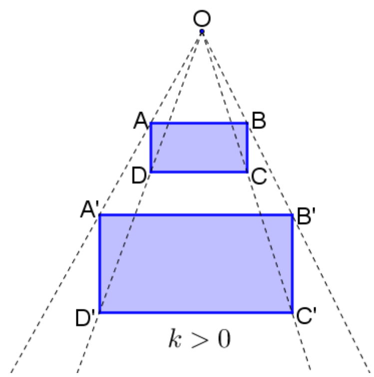
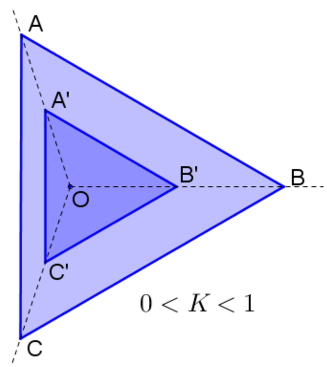
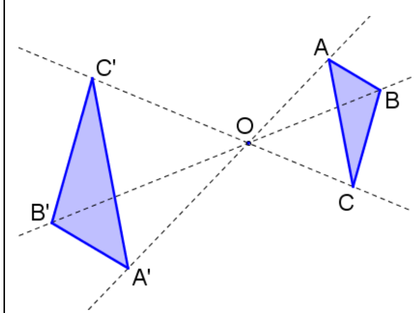
- Los ángulos son iguales, ya que tienen la misma medida.
- Los segmentos son paralelos.

Las dimensiones de las figuras son directamente proporcionales; esta proporción es fijada por la razón de homotecia.

Aquellas figuras que no cumplen con la propiedad de ser paralelos los segmentos se les denominan figuras semejantes, aquellas que cumplen con todas las propiedades, se les denomina figuras homotéticas.

Tipos de Homotecia de Centro 0 y razón K

Tabla 41: Homotecia.

Si $k > 0$, A y A' están al mismo lado de O, y se dice que la homotecia es directa	Si $0 < k < 1$, el punto A' queda situado entre O y A.	Si $k < 0$, A y A' están a distinto lado de O, y se dice que la homotecia es inversa.
		
La razón de homotecia se calcula hallando el cociente entre OA y OA', siendo A un punto cualquiera. El signo de ésta dependerá de la posición de O respecto de A y A'.		

Fuente: Adaptado de http://apuntestercergrado.blogspot.com/2011/12/homotecia.html
http://ra.sav.us.es/pruebas/172164/transformaciones_geometricas.pdf

2.23. COMPOSICIÓN DE TRANSFORMACIONES

La composición de transformaciones corresponde a movimientos sucesivos. Pueden ser varias traslaciones, rotaciones, simetrías, homotecias o combinaciones de estos movimientos.

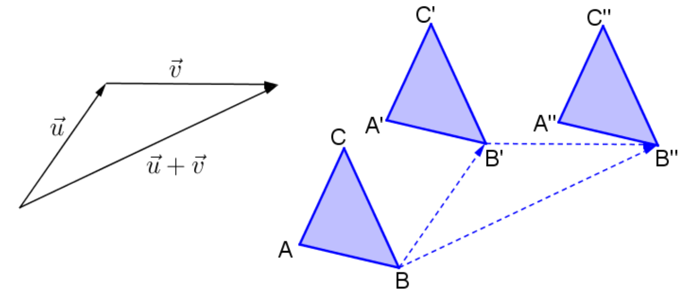
Cuando a una figura plana le aplicamos dos o más movimientos sucesivos, se dice que se ha efectuado una composición (o producto) de transformaciones.

Si se asume un movimiento M_1 que transforme a una figura F en F' y luego otro movimiento M_2 que transforme F' en F'', entonces F'' es la imagen de la figura F mediante la composición de los movimientos M_1 y M_2, la cual se simboliza por $(M_2 \circ M_1)F = F''$ o $M_2\left(M_1\,(F)\right) = F''$

2.23.1. COMPOSICIÓN DE TRANSFORMACIONES RÍGIDAS

Composición de Traslaciones

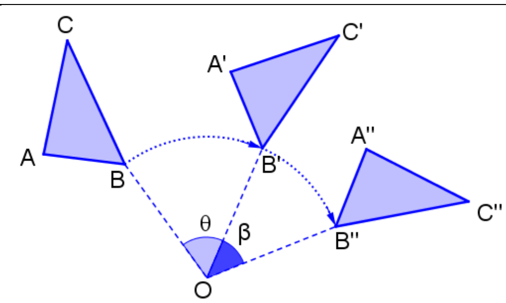
Tabla 42: Traslaciones y vectores.

La composición de dos traslaciones es otra traslación cuyo vector es la suma de los vectores de las traslaciones dadas: $T_{\vec{u}} \circ T_{\vec{v}} = T_{\vec{u}+\vec{v}}$ $P' = T_{\vec{v}}(P)$ $P'' = T_{\vec{u}}(P')$ $P'' = (T_{\vec{u}} \circ T_{\vec{v}})(P)$ $P'' = T_{\vec{u}+\vec{v}}(P)$	

Fuente: Diseño del autor

Composición de Rotaciones Concéntricas

Tabla 43: Rotaciones.

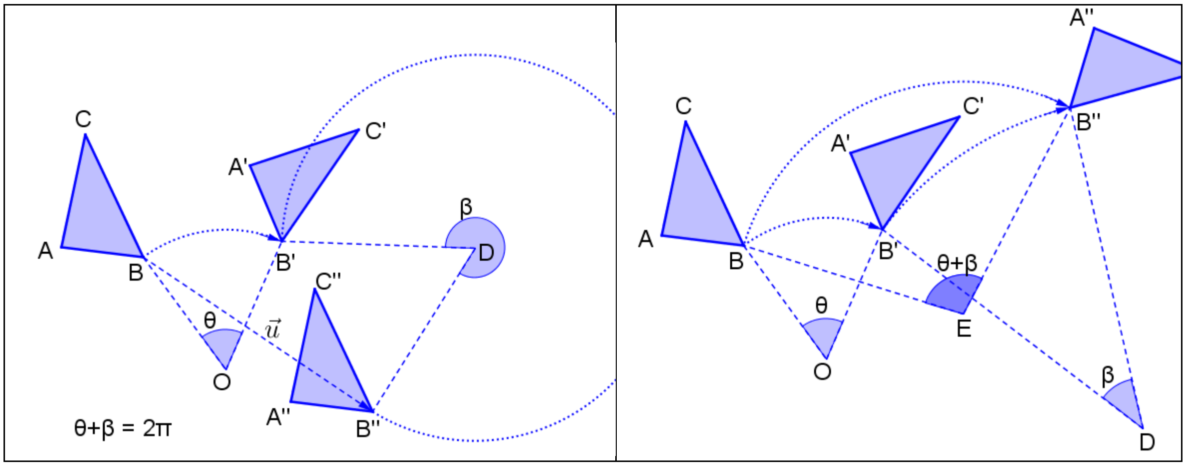
La composición de dos rotaciones concéntricas es otra rotación del mismo centro y cuya amplitud es la suma de las amplitudes de las rotaciones dadas. Es decir: $R_{(O,\theta)} \circ R_{(O,\beta)} = R_{(O,\theta+\beta)}$	

Fuente: Diseño del autor

Composición de Rotaciones no Concéntricas

Tabla 44: Composición de rotaciones.

La composición de dos rotaciones no concéntricas $R_{(C,\theta)} \circ R_{(D,\beta)}$ es: -Una traslación si $\theta + \beta = 2k\pi$	-Otra rotación $R_{(E,\theta+\beta)}$ de distinto centro y amplitud $\theta + \beta$, si $\theta + \beta \neq 2k\pi$



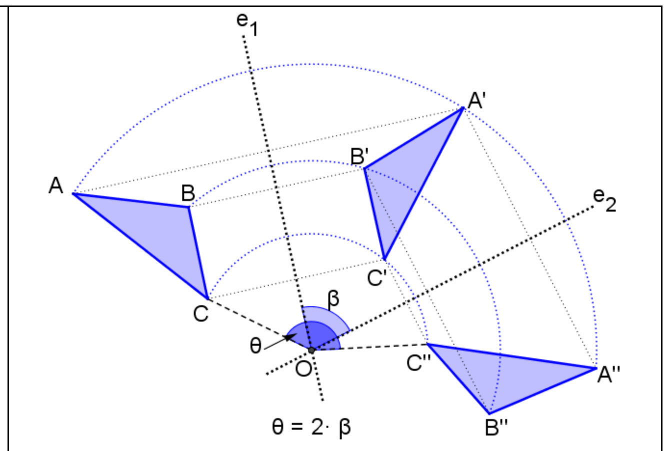
Fuente: Diseño del autor

Composición de Simetrías Axiales de Ejes Concurrentes

Tabla 45: Simetrías axiales

<table>
<tr>
<td>
La composición de dos simetrías de ejes concurrentes, $S_{e2} \circ S_{e1}$, es una rotación de centro el punto de intersección de ambos ejes, $O = e_1 \cap e_2$, y de amplitud el doble del ángulo que va del eje de la primera simetría que se aplica hacia el eje de la segunda simetría que se aplica.

$$\theta = 2 \cdot \angle e_1 O\, e_2$$

$$S_{e2} \circ S_{e1} = R_{(O,\theta)}$$
</td>
<td>


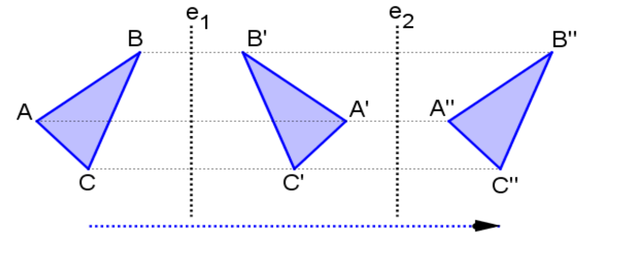
</td>
</tr>
</table>

Fuente: Diseño del autor

Composición de Simetrías Axiales de Ejes Paralelos

Tabla 46: Simetrías de ejes paralelos.

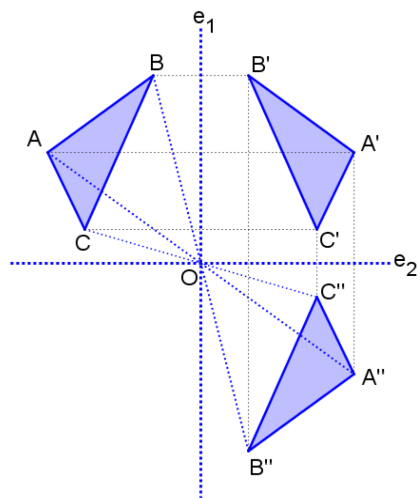
La composición de dos simetrías de ejes paralelos, $S_{e2} \circ S_{e1}$, es una traslación $T_{\vec{v}}$ cuyo vector $\vec{v}$ es perpendicular a ambos ejes, su módulo es el doble de la distancia entre ambos ejes, $\lvert\vec{v}\rvert = 2d(e_1, e_2)$,	

y su sentido es el que va desde el eje de la primera simetría, aplicada hacia el eje de la segunda simetría que se aplica. $S_{e2} \circ S_{e1} = T_{\vec{v}}$	

Fuente: Diseño del autor

Composición de Simetrías Axiales de Ejes Perpendiculares

Tabla 47: Composición de simetrías.

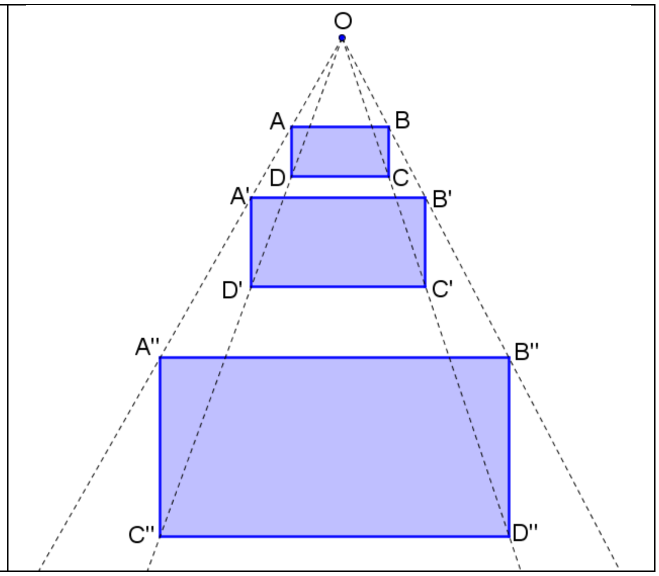
La composición de dos simetrías de ejes perpendiculares, $S_{e2} \circ S_{e1}$, es una simetría central respecto del punto de intersección de los dos ejes de simetría $C = e_1 \cap e_2$. $S_{e2} \circ S_{e1} = S_O$	

Fuente: Diseño del autor

2.23.2. COMPOSICIÓN DE TRANSFORMACIONES NO RÍGIDAS

Composición de Homotecias del Mismo Centro

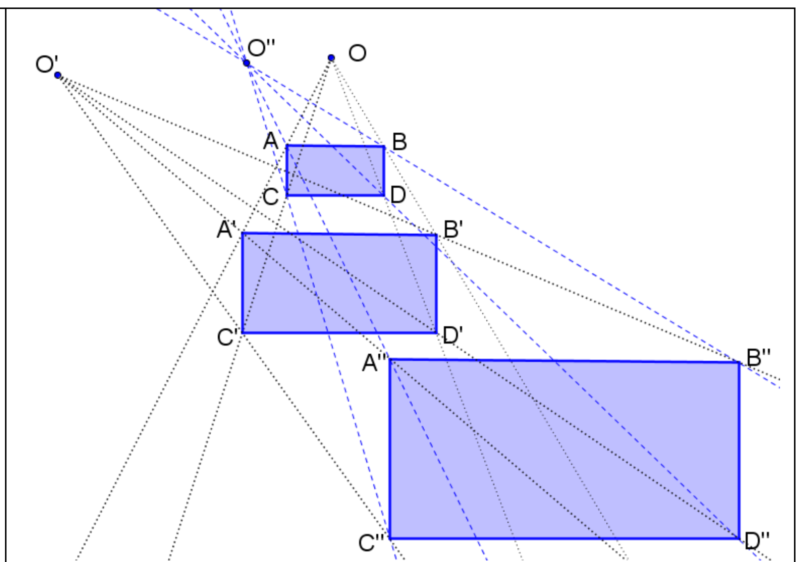
Tabla 48: Homotecias.

La composición de dos homotecias del mismo centro $H_{(C,k1)} \circ H_{(C,k2)}$ es otra homotecia del mismo centro y de razón $k_1 \cdot k_2$. $A'B'C'D' = H_{(O,k1)}(ABCD)$ $A''B''C''D'' = H_{(O,k2)}(A'B'C'D')$ $A''B''C''D'' = H_{(O,k1 \cdot k2)}(ABCD)$	

Fuente: Diseño del autor

Composición de Homotecias de Distinto Centro

Tabla 49: Composición de homotecias.

La composición de dos homotecias de distinto centro $H_{(C,k1)} \circ H_{(D,k2)}$ es: -Otra homotecia de distinto centro y de razón $k_1 \cdot k_2$ si $k_1 \cdot k_2 \neq 1$. -Una traslación si $k_1 \cdot k_2 = 1$. $A'B'C'D'$ $= H_{(O,k1)}(ABCD)$ $A''B''C''D''$ $= H_{(O\prime,k2)}(A'B'C'D')$ $A''B''C''D''$ $= H_{(O\prime\prime,k1 \cdot k2)}(ABCD)$	

Fuente: Diseño del autor

Semejanza

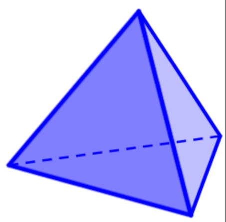
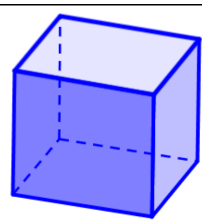
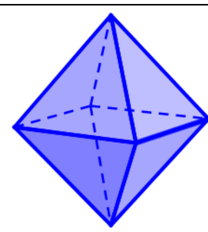
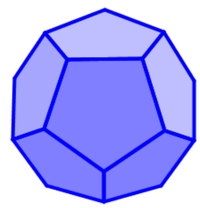
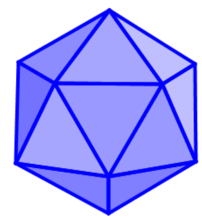
Se llama semejanza a la composición de un movimiento por una homotecia o de una homotecia por un movimiento.

2.24. CUERPOS GEOMÉTRICOS

Cuerpos Geométricos Regulares

Figuras geométricas, cuyas caras son polígonos regulares.

Tabla 50: Poliedros regulares.

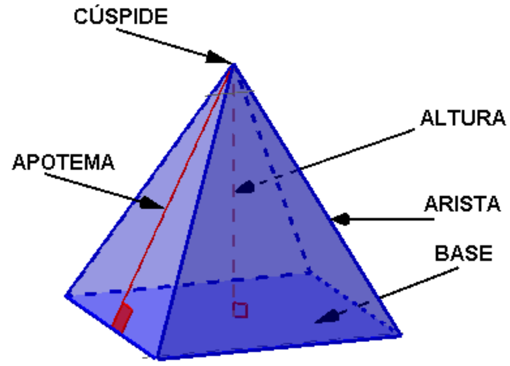
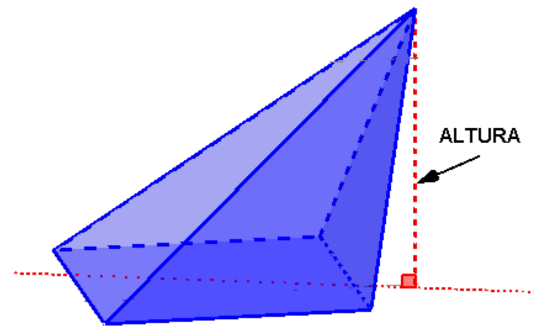
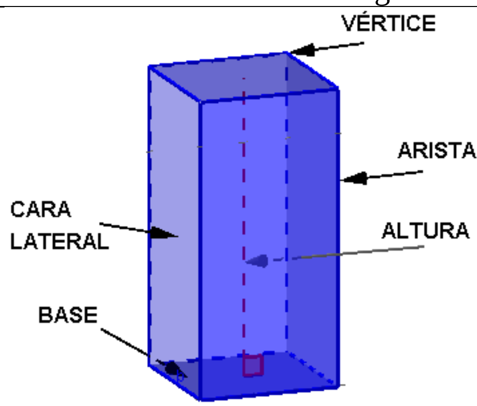
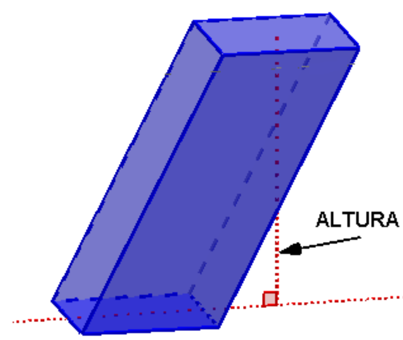
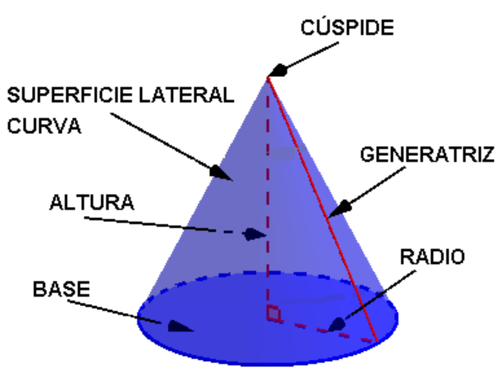
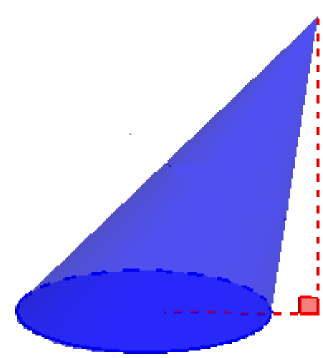
				
Tetraedro	Hexaedro	Octaedro	Dodecaedro	Icosaedro
Cuatro caras (triángulos equiláteros congruentes)	Seis caras (cuadrados congruentes)	Ocho caras (triángulos equiláteros congruentes)	12 caras (pentágonos regulares congruentes)	20 caras (triángulos equiláteros congruentes)
Cuatro vértices	Ocho vértices	Seis vértices	20 vértices	12 vértices
Seis aristas	12 aristas	12 aristas	30 aristas	30 aristas
Relación de Euler: $Número\ de\ caras + Número\ de\ vértices - Número\ de\ aristas = Dos$				
Área superficie exterior				
$\sqrt{3}\cdot a^2$	$6\cdot a^2$	$2\sqrt{3}\cdot a^2$	$3\sqrt{25+10\sqrt{5}}\cdot a^2$	$5\sqrt{3}\cdot a^2$
Volumen				
$\frac{\sqrt{3}}{12}\cdot a^3$	a^3	$\frac{\sqrt{2}}{3}\cdot a^3$	$\frac{\sqrt{15+7\sqrt{5}}}{4}\cdot a^3$	$\frac{5\sqrt{3+\sqrt{5}}}{12}\cdot a^3$

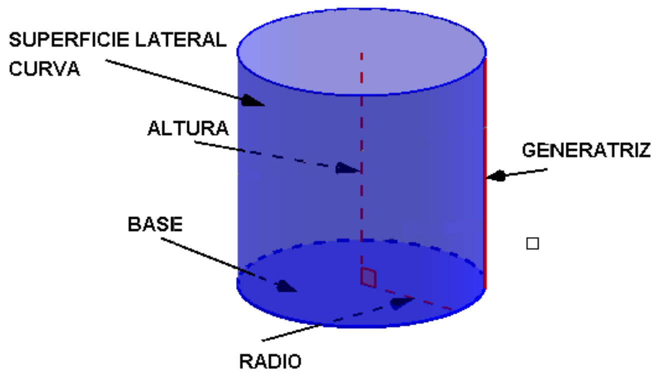
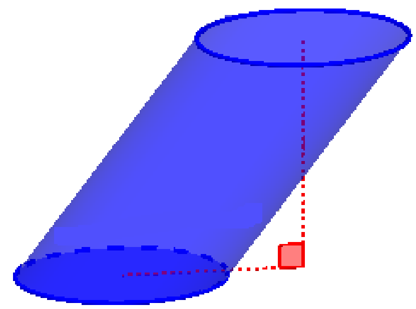
Fuente: Adaptado de http://webdelprofesor.ula.ve/nucleotrujillo/alperez/teoria/cap_01a-conceptos_geometricos/06a-solido-poliedro.htm

Otros Cuerpos Geométricos

Tabla 51: Cuerpos geométricos.

Pirámide: Cuerpo geométrico, cuyas caras son todas polígonos, tiene una base que puede ser cualquier polígono y el resto de caras son triángulos.	
Pirámide Recta:	Pirámide Oblicua:

<table>
<tr><td>Todas las aristas de las caras laterales son congruentes.</td><td>No todas las aristas de las caras laterales son congruentes.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">Prisma:
Cuerpo geométrico cuyas caras son polígonos, tiene dos caras paralelas iguales, llamadas bases, y el resto de sus caras son paralelogramos.</td></tr>
<tr><td>Prisma Recto:
Las caras laterales son rectángulos.</td><td>Prisma Oblicuo:
Algunas de las caras laterales no son rectángulos.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">Cono:
Cuerpo geométrico que tiene una base circular y un solo vértice</td></tr>
<tr><td>Cono Recto:
La altura cae en el centro del círculo de la base.</td><td>Cono Oblicuo:
La altura cae en sitio diferente al centro del círculo de la base.</td></tr>
<tr><td>
</td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2">Cilindro:
Cuerpo geométrico con dos extremos planos circulares o elípticos idénticos y un lado curvo.</td></tr>
<tr><td>Cilindro Recto:
La línea que une el centro de las bases es perpendicular a ellas.</td><td>Cilindro Oblicuo:
La línea que une el centro de las bases no es perpendicular a ellas.</td></tr>
<tr><td>
</td><td></td></tr>
</table>

Fuente: Diseño del autor

2.25. UNIDADES DE LONGITUD

Sistema Métrico Decimal

Tabla 52: Unidades del Sistema Métrico Decimal.

Múltiplos del metro			Submúltiplos del metro		
yottametro	(Ym):	10^{24} m	decímetro	(dm):	10^{-1} m
zettametro	(Zm):	10^{21} m	centímetro	(cm):	10^{-2} m
exámetro	(Em):	10^{18} m	milímetro	(mm):	10^{-3} m
petámetro	(Pm):	10^{15} m	micrómetro	(µm):	10^{-6} m
terámetro	(Tm):	10^{12} m	nanómetro	(nm):	10^{-9} m
gigámetro	(Gm):	10^{9} m	ångström	(Å):	10^{-10} m
megámetro	(Mm):	10^{6} m	picómetro	(pm):	10^{-12} m
miriámetro	(Mam):	10^{4} m	femtómetro o fermi	(fm):	10^{-15} m
kilómetro	(km):	10^{3} m	attómetro	(am):	10^{-18} m
hectómetro	(hm):	10^{2} m	zeptómetro	(zm):	10^{-21} m
decámetro	(dam):	10^{1} m	yoctómetro	(ym):	10^{-24} m

Fuente: Diseño del autor

Sistema Inglés de Medidas

Tabla 53: Medidas inglesas.

	millas	furlong	cadenas	rods	yardas	pies	pulgadas	miles	
1 legua	3	24	240	960	5280	15 840	190 080	$1{,}9008\text{x}10^{8}$	4,828032 km
1 milla		8	80	320	1 760	5 280	63 360	$6{,}336\text{x}10^{7}$	1,609344 m

1 furlong			10	40	220	660	7 920	$7{,}92 \times 10^6$	201,168 m
1 cadena				4	22	66	792	792000	20,1168 m
1 rod (vara)					5.5	16,5	198	198 000	5,0292 m
1 yarda						3	36	36 000	0,9144 m
1 pie							12	12 000	30,48 cm
1 pulgada								1 000	2,54 cm
1 mil									0,0254 mm

Fuente: Diseño del autor

Sistema Náutico

Tabla 54: Medidas náuticas.

	leguas náuticas	millas náuticas	cables	fathoms	yardas	pies	metros
1 grado de latitud	20	60	607,5	60 750	121 500	364 500	
1 legua náutica		3	30,375	3 037,5	6 075	18 225	5 558
1 milla náutica			10	1 012,6859	2 025,372	6 076,115	1 852
1 cable				100	200	600	
1 fathom (brazas inglesas)					2	6	
1 yarda						3	

Fuente: Diseño del autor

Unidades Astronómicas

Tabla 55: Medidas astronómicas.

Unidad astronómica	UA	$1{,}495979 \cdot 10^{11}$ m		
año luz	ly	$9{,}46052840488 \cdot 10^{15}$ m		
pársec	pc	$3{,}08568 \cdot 10^{16}$ m	206 265 UA	3.26 ly

Fuente: Diseño del autor

2.26. UNIDADES DE SUPERFICIE

Sistema Métrico Decimal

Tabla 56: Múltiplos y submúltiplos del metro cuadrado.

Nombre	Abreviatura	m^2
kilómetro cuadrado	km^2	1 000 000

hectómetro cuadrado	hm^2	10 000
decámetro cuadrado	dam^2	100
metro cuadrado	m^2	1
decímetro cuadrado	dm^2	0.01
centímetro cuadrado	cm^2	0.0001
milímetro cuadrado	mm^2	0.000001

Fuente: Diseño del autor

Sistema de Medida Inglés

Tabla 57: Unidades de superficie inglés y sus equivalencias.

Unidades de superficie	Equivalencia sistema inglés	Equivalencia sistema métrico decimal
Pulgada cuadrada	1 in^2	6,4516 cm^2
Pie cuadrado	1 ft^2 = 144 in^2	929,0304 cm^2
Yarda cuadrada	1 yd^2 = 9 ft^2 = 1.296 in^2	0,83612736 m^2
Acre	1 ac = 4.840 yd^2 = 43.560 ft^2 = 6.272.640 in^2	4.046,8564224 m^2
Milla cuadrada	1 mi^2 = 3.097.600 yd^2 = 27.878.400 ft^2 = 4.014.489.600 in^2	2,589988110336 km^2
Legua cuadrada	9 mi^2 = 27.878.400 yd^2 = 250.905.600 ft^2 = 36.130.406.400 in^2	23,309892993024 km^2

Fuente: Diseño del autor

Medidas de Superficie Agrarias

Tabla 58: Medidas agrarias.

hectárea	1 Ha = 1 hm^2	10000 m^2
área	1 a = 1 dam^2	100 m^2
centiárea	1 ca = 1 m^2	

Fuente: Diseño del autor

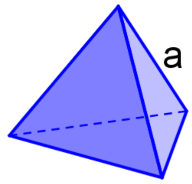
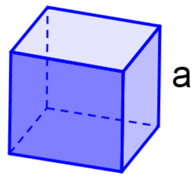
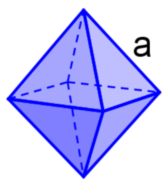
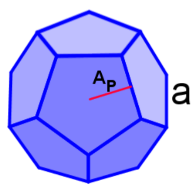
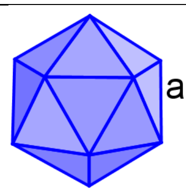
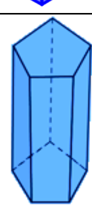
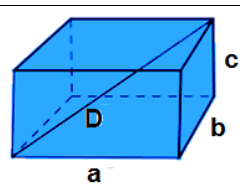
2.27. ÁREAS Y VOLÚMENES DE CUERPOS GEOMÉTRICOS

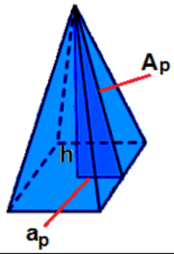
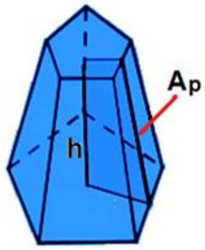
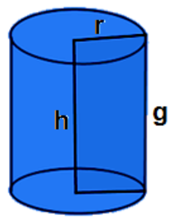
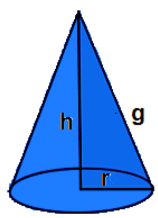
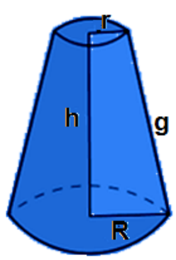
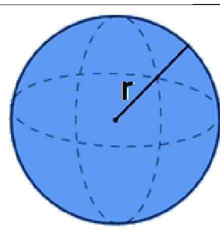
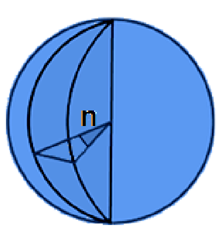
Fórmulas para el Cálculo de Áreas y Volúmenes de Cuerpos Geométricos

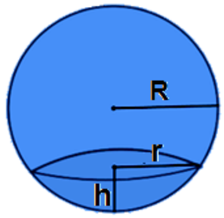
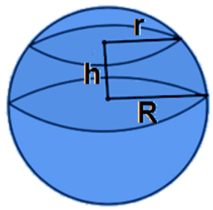
El área es la medida de la región o superficie encerrada por el contorno de una figura geométrica.

El volumen es el espacio que ocupa un cuerpo.

Tabla 59: Áreas y volúmenes.

Nombre	Figura	Área	Volumen
Tetraedro		$A = \sqrt{3}a^2$	$V = \frac{\sqrt{2}}{12}a^3$
Cubo		$A_T = 6a^2$	$V = a^3$
Octaedro		$A = 2\sqrt{3}a^2$	$V = \frac{\sqrt{2}}{3}a^3$
Dodecaedro		$A = 30aA_p$	$V = \frac{1}{4}(15 + 7\sqrt{5})a^3$
Icosaedro		$A = 5\sqrt{3}a^2$	$V = \frac{5}{12}(3 + \sqrt{5})a^3$
Prisma		$A_L = P_B h$ $A_T = A_L + 2A_B$	$V = A_B h$
Ortoedro		$A = 2(ab + ac + bc)$	$V = A_B h$ $V = abc$

Pirámide		$A_L = \frac{P_B A_P}{2}$ $A_T = A_L + A_B$	$V = \frac{A_B h}{3}$
Tronco de pirámide		$P = perímetro\ de\ la\ base\ mayor$ $P' = perímetro\ de\ la\ base\ menor$ $A_p = apotema\ del\ tronco\ de\ pirámide$ $A_L = \frac{P + P'}{2} A_p$ $A_T = \frac{P + P'}{2} A_p + A + A'$	$A = área\ de\ la\ base\ mayor$ $A' = área\ de\ la\ base\ menor$ $V = \frac{h}{3} \cdot \left(A + A' + \sqrt{A \cdot A'}\right)$
Cilindro		$A_L = 2\pi r h$ $A_T = 2\pi r(h + r)$	$V = \pi r^2 h$
Cono		$A_L = \pi r g$ $A_T = \pi r(g + r)$	$V = \frac{\pi r^2 h}{3}$
Tronco de cono		$A_L = \pi(R + r)g$ $A_T = \pi[g(R + r) + R^2 + r^2]$	$V = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + r^2 + Rr)$
Esfera		$A = 4\pi r^2$	$V = \frac{4}{3}\pi r^3$
Huso esférico		$A_L = \frac{4\pi r^2}{360} n$	$A_L = \frac{4}{3} \cdot \frac{\pi r^3}{360} n$

Casquete esférico		$A_L = 2\pi Rh$	$V = \frac{1}{3}\pi h^2(3R - h)$
Zona esférica		$A_L = 2\pi Rh$	$V = \frac{1}{6}\pi h(h^2 + 3R^2 + 3r^2)$
$P_B = perímetro\ de\ la\ base$ $A_B = área\ de\ la\ base$		$A_P = apotema$	

Fuente: http://www.ditutor.com/geometria_espacio/volumen.html

Unidades de Volumen

Sistema Métrico Decimal

Tabla 60: Múltiplos y submúltiplos del metro cúbico.

Nombre	Abreviatura	m^3
kilómetro cúbico	km^3	1 000 000 000
hectómetro cúbico	hm^3	1 000 000
decámetro cúbico	dam^3	1 000
metro cúbico	m^3	1
decímetro cúbico	dm^3	0.001
centímetro cúbico	cm^3	0.000001
milímetro cúbico	mm^3	0.000000001

Fuente: Diseño del autor

Sistema de Medida Inglés

Tabla 61: Unidades de volumen inglés y sus equivalencias.

Unidades de volumen	Equivalencia sistema inglés	Equivalencia sistema métrico decimal
Pulgada cúbica	1 in^3	16,387064 cm^3
Pie cúbico	1 ft^3 = 1.728 in^3	28,316846592 dm^3
Yarda cúbica	1 yd^3 = 27 ft^3 = 46.656 in^3	764,554857984dm^3
Acre-pie	43.560 ft^3 = 75.271.680 in^3	33,3040096137830 m^3
Milla cúbica	5.451.776.000 yd^3 = 147.197.952.000 ft^3	4,1681818254406 km^3

	= 254.358.061.056.000 in³	

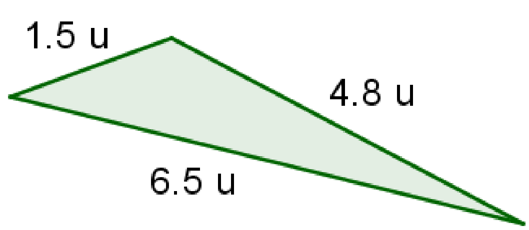
Fuente: Diseño del autor

2.28. PREGUNTAS PROPUESTAS

1. Al considerar la construcción de una figura geométrica cuya área sea igual a $1\ cm^2$ y cuyo perímetro sea mayor que $4\ cms$, el modelo usado de manera inadecuado en su justificación es

   A. un triángulo, dado que para un área constante la altura y la base son inversamente proporcionales y podría considerarse una altura de longitud $1\ cm$ y una base de longitud igual a $2\ cm$.
   B. un rectángulo, dado que para un área constante la altura y la base son inversamente proporcionales y podría considerarse una altura de longitud $\frac{1}{2}\ cm$ y una base de longitud igual a $2\ cm$.
   C. un rombo, dado que para un área constante la diagonal menor y la diagonal mayor son inversamente proporcionales y podría considerarse la diagonal menor de longitud $1\ cm$ y una diagonal mayor de longitud igual a $2\ cm$.
   D. un hexágono, dado que para un área constante la apotema y el perímetro son inversamente proporcionales y podría considerarse una apotema de longitud $\frac{1}{3} cm$ y un perímetro de longitud igual a $6\ cm$.

2. Para introducir el concepto de perímetro de una figura geométrica, un docente propone el siguiente esquema:



$$
\begin{aligned}
Perímetro &= 1.5u + 4.8u + 6.5u \\
&= 12.8u
\end{aligned}
$$

   Respecto del esquema utilizado, se presenta una dificultad didáctica, dado que

   A. no se tuvo en cuenta que la forma de la figura no coincide con la medida real asignada a la longitud de los lados.
   B. no se asignaron unidades de medida que den cuenta del sistema métrico utilizado.
   C. no se tuvo presente el cumplimiento de las relaciones de la desigualdad triangular.
   D. para hallar el perímetro de cualquier polígono solo basta sumar la longitud de los lados.

3. El siguiente ejercicio fue propuesto a un grupo de estudiantes:

En un almacén de telas, dos cortadores son encargados de despachar dos pedidos en igual cantidad para cada uno. El primer pedido fue de telas de tamaño $5{,}0\ m$ de largo por $2{,}5\ m$ de ancho. El segundo pedido fue de telas de tamaño $7{,}0\ m$ de largo por $2{,}5\ m$ de ancho. Si al medir, el cortador A tuvo un error por exceso en la medida del largo de $0{,}02\ m$ y el cortador B tuvo un error por exceso en la medida del ancho de $0{,}02\ m$. Indique cuál de las afirmaciones es cierta.

I. La cantidad de metros cuadrados despachados por el cortador A en el primer pedido fue mayor que la despachada en el segundo pedido.
II. En el primer pedido la cantidad de metros cuadrados despachados por el cortador A fue mayor que la cantidad de metros cuadrados despachados por el cortador B.
III. La cantidad de metros cuadrados despachados por el cortador B en el primer pedido fue menor que la despachada en el segundo pedido.
IV. En el segundo pedido la cantidad de metros cuadrados despachados por el cortador A fue mayor que la cantidad de metros cuadrados despachados por el cortador B.

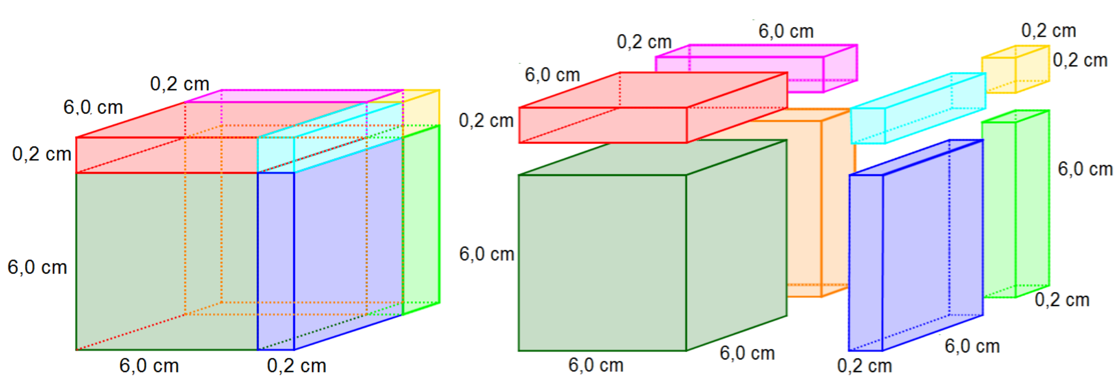
Con este ejercicio plantea que el error en la medida del área de un rectángulo

A. es mayor cuando tiene que ver con el error en la medida del lado de menor longitud.
B. es mayor cuando tiene que ver con el error en la medida del lado de mayor longitud.
C. es indiferente en cuál de los lados del rectángulo se dé el error.
D. depende de la razón entre las longitudes del rectángulo.

4. Cuál de los siguientes conocimientos previos no se considera requisito fundamental para que un estudiante pueda dar respuesta a la pregunta formulada por el docente, respecto de ¿cuánto suman los ángulos interiores de un dodecágono regular?

   A. El cálculo del número de diagonales que es posible trazar desde un vértice.
   B. El cálculo del ángulo central de un polígono regular.
   C. Las propiedades del triángulo isósceles.
   D. El cálculo de funciones trigonométricas.

5. Un ebanista, al cortar un ortoedro de madera de 60 cm de ancho, 48 cm de largo y 36 cm de alto, con el propósito de obtener cubos de 6 cm de lado, cometió un error por exceso en la medida de 0,2 cm. Para determinar el aumento del volumen de un cubo obtenido respecto del volumen esperado, un docente propone el siguiente modelo.

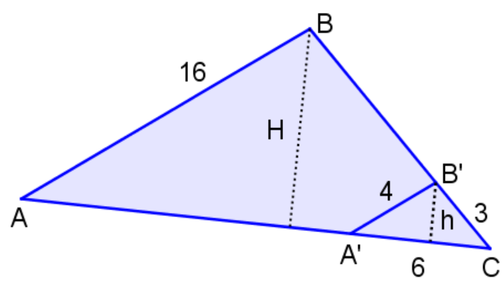


Haciendo uso del modelo propuesto, el docente no puede hacer una intervención pedagógica donde

A. se haga énfasis en la composición y descomposición de sólidos geométricos.
B. se muestre una aplicación geométrica de la identidad
$6{,}2^3 - 6{,}0^3 = (6{,}2 - 6{,}0)(6{,}2^2 + 6{,}2 \cdot 6{,}0 + 6{,}0^2)$.
C. se muestre una aplicación geométrica de la identidad
$(6{,}0 + 0{,}2)^3 = 6{,}0^3 + 3 \cdot 6^2 \cdot 0{,}2 + 3 \cdot 6{,}0 \cdot 0{,}2^2 + 0{,}2^3$.
D. se muestre una aplicación geométrica de la identidad
$(6{,}2 - 0{,}2)^3 = 6{,}2^3 - 3 \cdot 6{,}2^2 \cdot 0{,}2 + 3 \cdot 6{,}2 \cdot 0{,}2^2 - 0{,}2^3$.

6. Un docente propone a sus estudiantes calcular el área del triángulo ABC, haciendo uso del siguiente esquema, donde el segmento AB es paralelo al segmento A'B'.

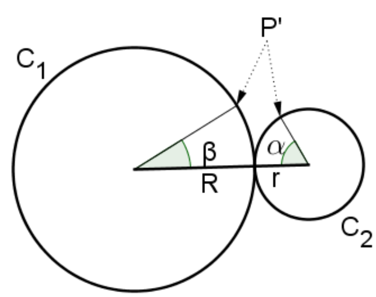
Del ejercicio puede aseverarse que la información proporcionada por el docente es



A. insuficiente ya que se requiere saber el valor de AA'.
B. suficiente dado que es posible determinar que la constante de proporcionalidad entre las áreas de los de los triángulos ABC y A'B'C es 16.
C. suficiente dado que es posible determinar que la constante de proporcionalidad entre los perímetros de los de los triángulos ABC y A'B'C es cuatro.
D. insuficiente ya que se requiere saber la relación entre área y perímetro.

7. Un docente propone a un grupo de estudiantes el modelo dado en la figura, en el cual, dos circunferencias están en contacto, con $R > r$, indicando que al girar una de ellas, la otra también gira.

   Para indagar sobre la comprensión que los estudiantes tienen acerca de la relación angular entre las circunferencias en el punto de contacto P', luego de cierta magnitud de giro el docente pregunta por la opción incorrecta entre las siguientes:



   I. Para una longitud constante de la circunferencia C_1 y para un ángulo β fijo, a mayor radio r de la circunferencia C_2, mayor será el valor del ángulo α.
   II. El ángulo β nunca podrá ser mayor que el ángulo α.
   III. Para que el valor del ángulo α sea el doble del ángulo β, el área del sector circular correspondiente en C_1 debe ser el doble del área del sector circular correspondiente en C_2.

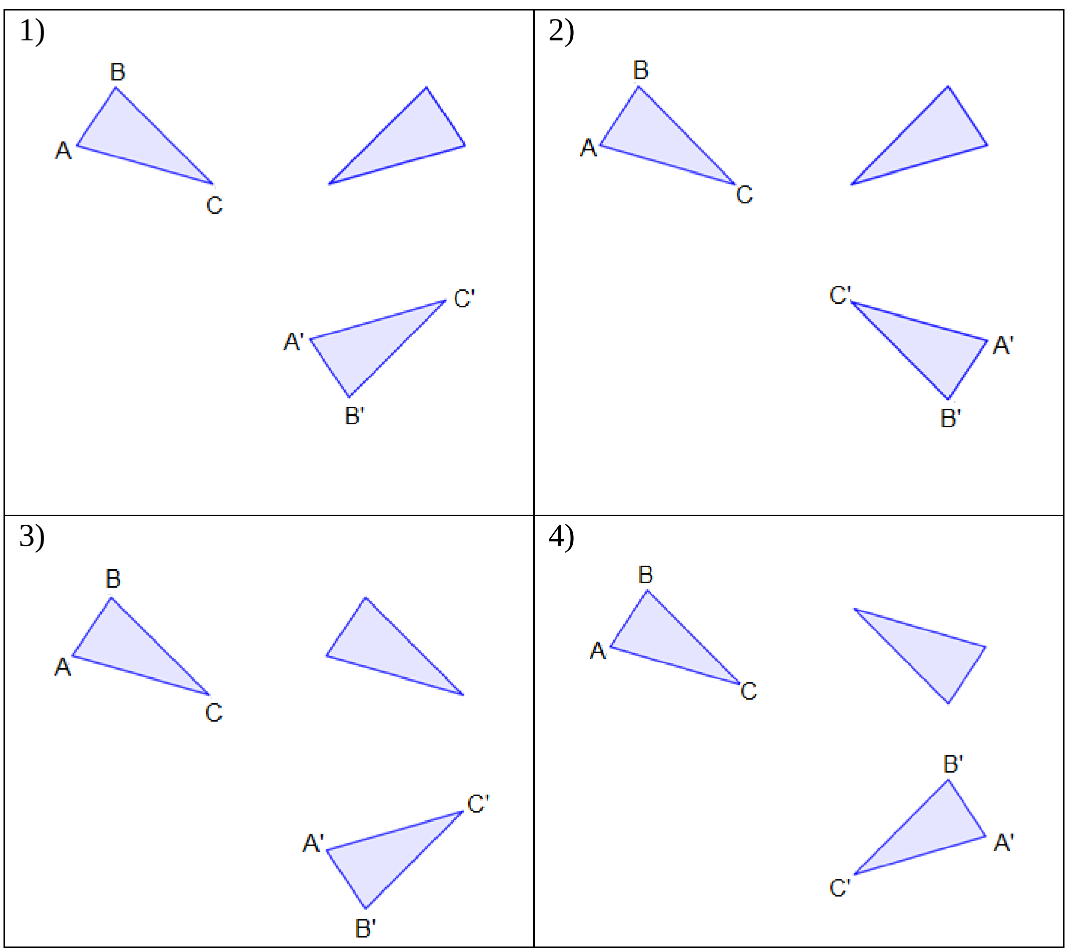
IV. Para que el valor del ángulo α sea el doble del ángulo β, el radio de la circunferencia C_1 debe ser el doble del radio de la circunferencia C_2.

Al no ubicar la respuesta correcta, el docente puede inferir que el estudiante asume equivocadamente que para las condiciones del problema

A. la medida del ángulo α es directamente proporcional a la medida del radio r.
B. a mayor diferencia $R - r$, mayor diferencia $\alpha - \beta$.
C. la razón entre las áreas de los círculos encerrados por las circunferencias es equivalente a la razón entre los ángulos centrales.
D. la razón entre los ángulos $\frac{\alpha}{\beta}$ es equivalente a la razón entre los radios $\frac{R}{r}$.

8. En un ejercicio de clase, un docente presenta a sus estudiantes los siguientes esquemas para que determinen la composición de transformaciones geométricas que, ejecutada sobre el triángulo ABC, lleva a obtener el triángulo A'B'C', cuya notación para las transformaciones es:

T: Traslación, $R_{180°}$: Rotación de 180° o Simetría central, H_{-1}: Homotecia con $K = -1$, S: Simetría axial.



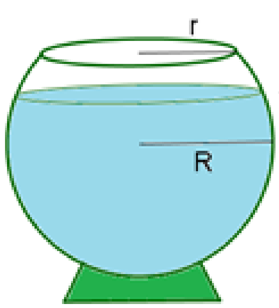
A partir de estos esquemas dados, el docente pregunta por la composición de transformaciones que no es posible visualizarse entre las siguientes opciones:

I. $\mathrm{R}_{180°} \circ \mathrm{S}$
II. $\mathrm{S} \circ \mathrm{T}$
III. $\mathrm{T} \circ \mathrm{S}$
IV. $\mathrm{S} \circ \mathrm{H}_{-1}$

A partir del análisis de la pregunta y de las opciones de respuesta se puede inferir, que el propósito fundamental que persigue el docente es asegurarse que los estudiantes

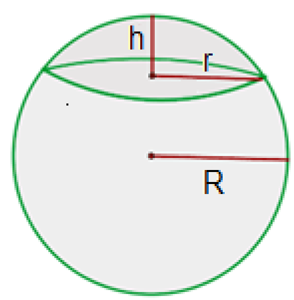
A. reconocen la trasformación de Rotación de 180° a partir del paralelismo de los lados de la Figura.
B. identifican una Homotecia con $K = -1$ como una Rotación de 180° o Simetría central.
C. Aplican, acertadamente el orden de las transformaciones a ejecutar en una composición.
D. diferencian la simetría axial de la Simetría central.

9. Un docente propone en clase el siguiente ejercicio: «una pecera de forma esférica, de radio 10 cm, está llena hasta las $\frac{3}{4}$ partes de sus capacidades. Si la boquilla de entrada es de forma circular con radio 6 cm ¿Cuál es el volumen de agua en la pecera?». Para este ejercicio el docente proporciona la fórmula del volumen de la esfera y la del casco esférico.



$V_{esfera} = \frac{4\pi}{3}R^3$;

$V_{casco\ esférico} = \frac{\pi}{3}h^3(3R - h)$



Las opciones de respuesta dadas por el docente son:

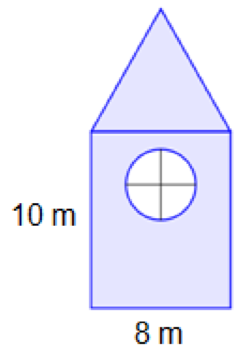
I. El volumen de agua es $944\,\pi\ cm^3$.
II. El volumen de agua es $56\,\pi\ cm^3$.
III. No se puede resolver porque los datos dados son insuficientes.
IV. El volumen de agua es $1000\,\pi\ cm^3$.

Según el ejercicio el estudiante deberá percibir que

A. en la solución del ejercicio no se requiere de la fórmula del volumen del casco esférico.

B. efectivamente el problema no se puede realizar dado que falta el dato de la altura del casco esférico.
C. en la solución del problema se debe calcular información no directamente proporcionada.
D. en la solución del ejercicio no se requiere de la información sobre le radio de la boquilla.

10. Al considerar la construcción de un dibujo a escala 1:200 de una fachada de forma rectangular, de base 8 m y altura 10 m, con una ventana circular de radio 2 m y coronada con un triángulo equilátero, como se muestra en la figura, un docente pregunta a sus estudiantes ¿cuál será la razón entre el área real de la fachada y el área de la figura resultante en el dibujo?



Ante la pregunta un estudiante habilidoso en cálculos matemáticos encuentra, rápidamente, que el área de la figura resultante en el dibujo será 40000 veces menor que el área real de la fachada.

El estudiante pudo haber encontrado rápidamente la respuesta al considerar que

A. el factor de escala para áreas es la constante de homotecia elevada al cuadrado.
B. el área real del triángulo es $16\sqrt{3}\, m^2$ y el área del triángulo del dibujo a escala es $0.0004\,\sqrt{3}\, m^2$, luego la razón entre áreas es 40000.
C. el área real del rectángulo es $80\, m^2$ y el área del rectángulo del dibujo a escala es $0.0002\, m^2$, luego la razón entre áreas es 40000.
D. el área real del círculo es $4\pi\, m^2$ y el área del círculo del dibujo a escala es $0.0001\, m^2$, luego la razón entre áreas es 40000.

11. En clase, un docente propone a sus estudiantes el siguiente ejercicio: Si se tiene un recipiente cilíndrico de perímetro C y altura H, ¿cuántos nuevos recipientes de igual forma, de perímetro igual a la mitad (C/2) y altura igual a la mitad (H/2) se requieren de modo que puedan cubrir el volumen de éste?

Opciones de respuesta dados por el docente

I. 4 recipientes
II. 8 recipientes

III. 16 recipientes
IV. 24 recipientes

Para dar respuesta a este ejercicio se requiere que el estudiante tenga claro que

A. un círculo de perímetro igual a la mitad de otro tiene un área igual a la mitad de éste.
B. un recipiente cilíndrico de altura igual a la mitad y perímetro igual a la mitad tiene un cuarto del volumen.
C. un círculo de perímetro igual a la mitad de otro tiene un área igual a un cuarto de éste.
D. un recipiente cilíndrico de altura igual a la mitad y perímetro igual a la mitad tiene un dieciseisavo del volumen.

12. En un texto de matemáticas escolares se encuentra la siguiente afirmación: “un centímetro cuadrado es un cuadradito de un centímetro de lado”. Al respecto se puede afirmar que:

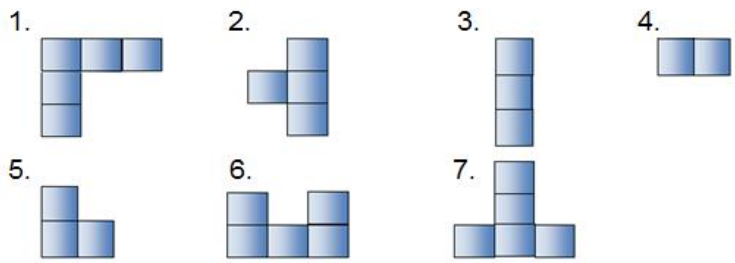
A. El texto presenta un error conceptual porque confunde el patrón de medida con la unidad de medida.
B. La afirmación dada en el texto es correcta ya que guarda correspondencia con la unidad de medida del sistema métrico decimal.
C. La afirmación es correcta ya que no sería adecuado utilizar como unidad de medida un disco de un centímetro cuadrado.
D. La afirmación dada en el texto es correcta porque, efectivamente, un cuadradito de un centímetro de lado cubre un área de un centímetro cuadrado.

13. Un docente propone a sus estudiantes analizar la ubicación de un poste de energía, de modo que quede a igual distancia de la entrada de tres viviendas, considerando para ello que cada entrada corresponde a un vértice de un triángulo y el punto de ubicación del poste es el circuncentro de este. A partir de esta experiencia los estudiantes podrán establecer que

A. el poste quedará en el segmento que une las entradas de las casas más distantes entre sí, si el triángulo formado es obtusángulo.
B. el poste quedará en el exterior del triángulo formado, si éste es acutángulo.
C. el poste quedará en el segmento que une las entradas de las casas más distantes entre sí, si el triángulo formado es rectángulo.
D. el poste quedará en el interior del triángulo formado, si éste es obtusángulo.

14. Un docente propone a sus estudiantes la construcción de una lista de rectángulos, haciendo uso de las siguientes figuras rígidas, las cuales pueden ser rotadas.

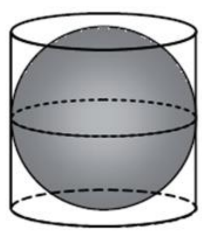
Lista de rectángulos a construir: 3×4, 3×5 y 4×5



De la actividad propuesta los estudiantes podrán concluir que

A. no puede construirse un rectángulo 3×4 con las figuras 1, 4 y 7.
B. puede construirse un rectángulo 4×5 con las figuras 1, 3, 5, 6 y 7.
C. no puede construirse un rectángulo 3×4 con las figuras 1, 2 y 5.
D. puede construirse un rectángulo 3×5 con las figuras 1, 4, 5 y 6.

15. Según la siguiente figura, correspondiente a una esfera inscrita en un cilindro



De las siguientes afirmaciones la que no es correcta es:

A. El área lateral del cilindro es igual área de la esfera.
B. Al reducir a la mitad la altura del cilindro el volumen de la esfera disminuye ocho veces.
C. La razón entre el volumen del cilindro y el volumen de la esfera es 3/4.
D. El área total del cilindro es el doble del área de la esfera.

16. Como preparación para las pruebas de ingreso a la universidad, un docente toma como referencia el siguiente problema.

Una fábrica requiere producir tres tipos de copas: una semiesférica, una cónica de borde circular y una cilíndrica de borde circular, como aparecen en la figura siguiente, de modo que puedan contener el mismo volúmen de líquido.

El docente plantea a los estudiantes indicar cuál de las siguientes opciones de respuesta, es la incorrecta.

I. Si las tres copas tienen el mismo borde circular, entonces la altura de copa cónica es dos veces la altura de la copa cilíndrica.
II. Si las tres copas tienen el mismo borde circular, entonces la altura de la copa semiesférica es 1.5 veces la altura de la copa cilíndrica.
III. Si las tres copas tienen el mismo borde circular, entonces la altura de la copa cónica es dos veces la altura de la copa semiesférica.
IV. Si el radio del borde circular de la copa cónica es la mitad del de la semiesférica, su altura corresponde a ocho veces la de ésta.

Al dar con la respuesta acertada, un estudiante aventajado estaría dando cuenta de que:

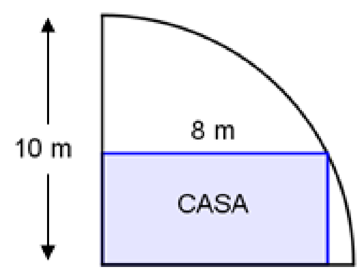
A. Reconoce que el volumen de un cilindro es tres veces el volumen de un cono de igual base y altura.
B. Reconoce que el volumen de una semiesfera es dos veces el volumen de un cono de base y altura, igual al radio de la semiesfera.
C. Reconoce que el volumen de un cilindro es 1.5 veces el volumen de una semiesfera de radio igual, a la base y altura del cilindro.
D. Reconoce que no se puede construir un cono de volumen igual, al de una semiesfera.

2.29. EJERCICIOS PROPUESTOS PARA SELECCIÓN DE OPCIONES

1. Un docente propone el siguiente ejercicio a sus estudiantes: «una persona dispone de un terreno en forma de sector circular de radio $10\,m$, si construye su casa de forma rectangular de largo $8\,m$, como ilustra la figura, el área que queda libre es»

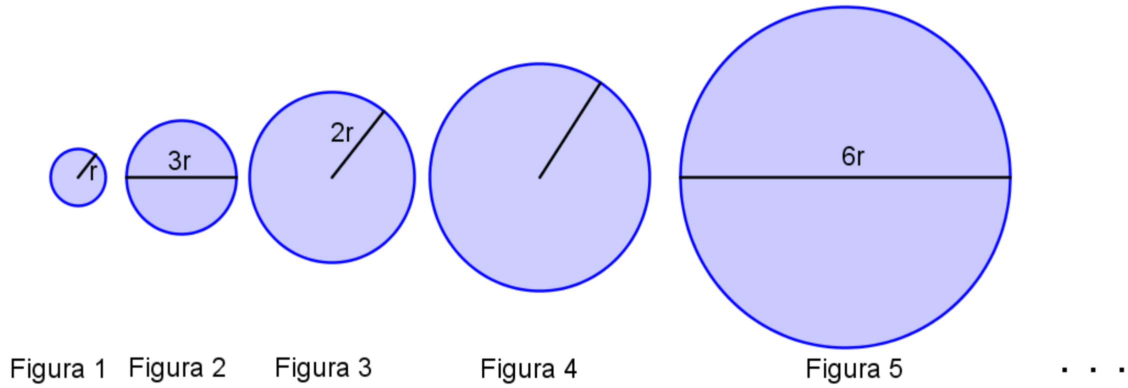
   El docente ofrece las siguientes opciones de respuestas

   I. $(100\pi - 48)m$
   II. $(25\pi - 48)m$
   III. $(50\,\pi - 48)m$
   IV. $(25\pi - 40)m$



Planteamiento sobre análisis conceptual, pedagógico o didáctico

2. En la prueba saber aplicada en el año 2002 se propuso a los estudiantes de grado noveno la siguiente secuencia de figuras



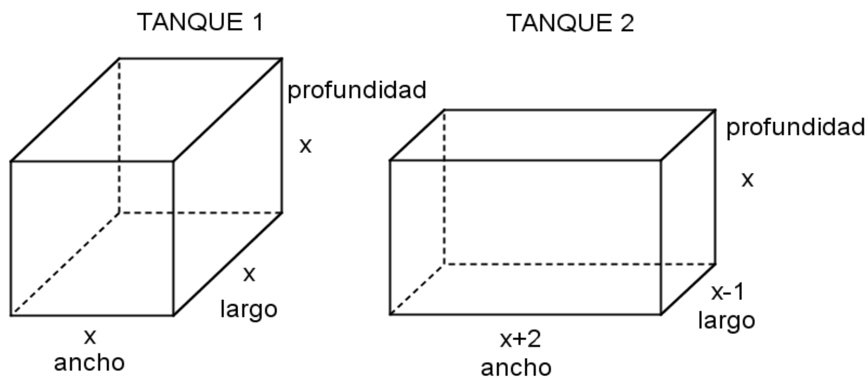
A partir de dicha secuencia se indaga por

- El radio de la figura 4
- El incremento de la longitud de la circunferencia
- La expresión que representa el radio de la circunferencia de la figura n
- La posición de la figura cuyo radio de la circunferencia es 10 r

En este ejercicio se integra el pensamiento geométrico con el variacional

Planteamiento sobre análisis conceptual, pedagógico o didáctico

3. En la prueba saber aplicada en el año 2005 se propuso a los estudiantes de grado noveno la siguiente figura que muestra las dimensiones de 2 estanques de almacenamiento que se van a construir para mantener reservas de agua potable en las viviendas



A partir de dicha figura se indaga por

- El área de la base y la profundidad del tanque 1 si se quiere que tenga una capacidad de 72,000 litros
- Las medidas de la profundidad, el largo y el ancho, en metros, de los tanques para que tengan la misma capacidad según las especificaciones dadas
- Medidas del largo y el ancho si se quiere conservar el volumen del tanque 1, pero duplicar su profundidad

Planteamiento sobre análisis conceptual, pedagógico o didáctico

3. TÓPICO PENSAMIENTO ALEATORIO

Hace referencia a los conceptos o procedimientos de la teoría de la probabilidad y de la estadística inferencial y descriptiva que permiten modelar situaciones de incertidumbre, de azar o de riesgo (MEN, 2014: 26).

Los temas específicos por abordar serán: Lectura e interpretación de diversas formas de representación de información numérica, análisis cualitativo de regularidades, tendencias, tipos de crecimiento, formulación de inferencias usando medidas de tendencia central y de dispersión que permiten modelar y comprender fenómenos caracterizados por la incertidumbre; diferenciación entre lo posible y lo dado; conceptos básicos de aleatoriedad y probabilidad y representaciones asociadas.

3.1. ALGUNOS ELEMENTOS HISTÓRICOS

La Estadística es muy antigua e inclusive parece haberse iniciado hace unos 7.000 años con la invención del dado, el desarrollo de las probabilidades tuvo sus tropiezos, con algunos problemas, unos relacionados con la notación matemática, otros de tipo religioso y otras especulaciones más, pero todas estas dificultades se fueron resolviendo con la aparición del tratado: «*Liber de Ludo Aleae*» (El libro sobre el juego de dados) publicado por Girolamo Cardano, en el año 1525.

Posiblemente la palabra *statisticus* se originó en el siglo XVII del italiano *statista* que se refiere a la persona ocupada con asuntos del Estado (*ragione di Stato*), pero fue Gotfried A. Achenwall, en 1752, quien le dio el uso actual a la palabra estadística. Fundó la Escuela de Gottingen, se le conoce en Alemania como el padre de la Estadística, en tanto que a Ronald Fisher se le ha considerado por muchos como el padre de la Estadística moderna, por colaborar notablemente en el desarrollo de la misma, junto con los investigadores Karl y Egon Pearson, Gossett, Neyman.

3.2. ¿QUÉ SON LAS ESTADÍSTICAS?

Ideas y acercamientos. Algunas expresiones notables sobre la Estadística:

- William Edwards Deming (1900-1993), considerado por los japoneses como *El padre del milagro japonés*, expresaba que: «*Ningún recurso es tan escaso en las empresas como el conocimiento estadístico. No hay conocimiento que pueda contribuir tanto a mejorar la calidad, la productividad y la competitividad de las empresas como el de los métodos estadísticos*».

- Kaoru Ishikawa (1915- 1989), otra figura clave en el desarrollo industrial japonés, quien decía que: «*Las herramientas estadísticas básicas deben ser conocidas y utilizadas por todo el mundo en una empresa, desde la alta gerencia hasta los operarios en las líneas*».

Algunas definiciones sobre la Estadística:

Karl Pearson (Matemático Británico, 1857- 1936): La Estadística trata de las aplicaciones de la teoría matemática, a la interpretación de observaciones masivas.

Jerzy Neyman (Matemático y estadístico ruso, 1894 -1981): La Estadística está incluida dentro del cálculo de probabilidades.

Alexander Mood (Estadista 1934 – 2009): La estadística, no es otra cosa que la tecnología del método científico.

Puede decirse que la Estadística es la ciencia de la recolección y análisis de datos para la toma de decisiones. La estadística transforma datos, en información.

La Estadística apoya la investigación en las demás disciplinas, especialmente en la recolección y el análisis de datos para verificar o formular nuevas hipótesis. A su vez, los procesos comerciales, administrativos y tecnológicos necesitan estos métodos para tomar decisiones y hacer predicciones de valores futuros. Obtienen, además, indicaciones y conclusiones con rigurosidad, pasando por un proceso de establecimiento y verificación de hipótesis, porque trabaja con base en modelos (expresiones matemáticas) que, potencialmente siguen las variables en estudio y que se comprueban y utiliza los datos recogidos, es el quid del asunto.

¿Qué clase de Ciencia es la Estadística?

UNESCO[4]: la clasifica dentro de las Ciencias Sociales.
FONDECYT[5]: la incluye dentro de las Matemáticas y a ésta en las Ciencias Exactas y Naturales.

3.3. APLICACIONES DE LA ESTADÍSTICA

Los estadísticos profesionales trabajan, por lo común, en equipos mixtos. Lo hacen en Investigación Científica Estadística, Biología, Negocios, Demografía, Economía, Educación, Ingeniería, Salud, Seguros, Investigaciones de Mercado y del Consumidor, Medicina, Operaciones y Administración, Sicología, Sicometría, Ciencias Espaciales y, muchas otras. La mayoría de las personas procuran planificar para el futuro y necesitan de los estadísticos. La Estadística pretende descubrir las características esenciales del pasado y, apoyándose en ellas, predecir el futuro.

Muchas decisiones económicas, sociales, políticas y militares no pueden tomarse objetivamente, sin el empleo adecuado de la Estadística. En nuestro medio profesional o en la sociedad en general se requiere solucionar un problema o verificar un supuesto, para desarrollar la Ciencia, la Técnica y la Educación

Las aplicaciones de la Estadística son tan amplias que se tiende a incluirlas parcialmente dentro de otras disciplinas, fueron además utilizadas en la revolución industrial para controlar

[4] UNESCO: Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura.
[5] FONDECYT: Fondo de Desarrollo Científico y Tecnológico.

la calidad de la producción y más tarde, la planificación de experimentos para obtener productos nuevos y más baratos.

Más concretamente, la Estadística se aplica en:

Medicina: para determinar el mejor efecto de una droga nueva, probada en una muestra de pacientes.

Sicología: ayuda a la calibración de test.

Geografía: colabora en el diseño de mapas y de estudios de migraciones.

Educación: permite formular modelos de respuesta en ítems, a fin de estudiar efectos demográficos y evaluar pruebas con respecto a su discriminación.

Letras: tiene su aporte en estudios sociolingüísticos.

Economía: en la Econometría, determinando parámetros de modelos económicos y, evaluando su adecuación a la realidad.

Agronomía: los ingenieros forestales, los biólogos, además de los médicos, hacen uso de la biometría, en especial con el mejoramiento de la calidad y la productividad.

Uno de los usos más conocidos de la Estadística se observa en la aplicación de encuestas de investigación de mercados, de preferencias de consumo, de opiniones políticas, otros. Una encuesta pretende reflejar, mediante entrevistas a un grupo de personas, las opiniones o preferencias de toda una población.

3.4. ALGUNOS ELEMENTOS BÁSICOS DE LA ESTADÍSTICA

- Censo o Muestreo: Corresponde a la extracción de datos de un conjunto. «La muestra que se toma», es la reunión de datos que se desea estudiar, obtenidos de una proporción reducida y representativa de la población.

- Muestra: Es un conjunto representativo de la población de referencia, el número de individuos de una muestra es menor que el de la población.

- Población: Conjunto al cual se le aplica el censo o muestreo es el conjunto de todos los elementos a los cuales se somete a un estudio estadístico.

- Individuo: Cada uno de los elementos que componen la población.

- Valor: Cada uno de los distintos resultados que pueden obtenerse en un estudio estadístico. Si lanzamos una moneda al aire 5 veces obtendremos dos valores: cara y cruz.

- Dato ($\boldsymbol{X_n}$): resultado particular obtenido en el censo o muestreo de un elemento de la población, es cada uno de los valores que se ha obtenido, al iniciar un estudio estadístico. Si lanzamos una moneda al aire 5 veces obtenemos 5 datos: cara, cara, cruz, cara, cruz.

- Datos totales (N): Número total de datos de la muestra.

- Frecuencia Absoluta (F): Cantidad de veces que aparece un mismo dato en la muestra.

- Moda (M): Dato que tiene mayor Frecuencia Absoluta, o sea el dato que más se repite en la muestra

- Frecuencia Relativa (f): La frecuencia relativa de un dato, es el cociente entre la frecuencia absoluta y el número total de datos.

$$f = \frac{F}{N}$$

  f : Frecuencia relativa
  F: Frecuencia absoluta
  N: Número total de datos del censo o muestreo

- Variable estadística: Cada una de las características o cualidades que poseen los individuos de una población.

- Ítems: (n): número de datos o valores que la variable estadística tomó.

- Promedio o media ($\bar{X}$): El cociente entre la suma de todos los datos tomados y la cantidad de los mismos.

$$(\bar{X}) = \frac{\sum_{n-1}^{N} (X_n \cdot F_n)}{N}$$

  $(\bar{X})$: Dato particular.
  F_n: Frecuencia absoluta del dato X_n
  n: Número de ítems
  N: Número total de datos

- Mediana (Med): La mediana de los datos de un censo o muestreo, organizados en forma creciente, es el dato que ocupa la posición central. Si la cantidad de datos es impar, existe un solo dato central, pero si es par. La mediana es el promedio entre los datos centrales. Más adelante retomaremos la Mediana con más detenimiento. Más adelante retomaremos la Mediana con más detenimiento.

- Recorrido: Diferencia (o resta) entre el mayor y el menor de los datos, en el censo o muestreo.

- Desviación (D): la desviación de un dato X con respeto al promedio $\bar{X}$, es la diferencia: El signo del resultado, siempre se toma en cuenta: $D = (X - \bar{X})$.

3.5. EJERCICIO DE APLICACIÓN

En la siguiente tabla se presentan las edades de un grupo de personas seleccionadas, que estudian en una misma Institución Educativa. Unos son jóvenes de bachillerato en la jornada diurna (En este caso los seleccionados en total fueron 50 estudiantes) y otros son mayores de edad (de 18 años en adelante) que estudian en la jornada nocturna. Es de observar que en dicha Institución, en la jornada diurna se aceptan estudiantes que tengan edades máximo, hasta los 18 años cumplidos.

Tabla 1: Edades de un grupo

EDAD (En años)	NÚMERO DE PERSONAS (Con dicha edad)	FRECUENCIA RELATIVA	FRECUENCIA ABSOLUTA	DESVIACIÓN
15	12			
16	14			
17	23			
18	2			
19	7			
20	5			
25	10			
28	15			
30	10			
32	2			

Fuente: Diseño del autor

Completar la tabla y determinar:

1. La variable estadística.
2. La población.
3. Cantidad de Ítems.
4. La Moda.
5. La mediana.
6. El recorrido.
7. El promedio o la media.
8. Desviación.

3.6. VARIABLES ESTADÍSTICAS

Variable cuantitativa: se expresa mediante un número, por tanto puede aplicarse operaciones aritméticas con ella.

Puede distinguirse dos tipos:

Variable continua: Aquella que puede tomar valores comprendidos entre dos números.

Variable discreta: Aquella que toma valores aislados, es decir no admite valores intermedios entre dos valores específicos.

Variable cualitativa: Las variables cualitativas se refieren a características o cualidades que no pueden ser medidas con números.

Pueden distinguirse dos tipos:

Variable cualitativa nominal: Presenta modalidades no numéricas que no admiten un criterio de orden.

Variable cualitativa ordinal o variable cuasi cuantitativa: Presenta modalidades no numéricas, en las cuales existe un orden.

3.7. TIPOS DE REPRESENTACIONES ESTADÍSTICAS

Distribución de frecuencias: la distribución de frecuencias o tabla de frecuencias es una ordenación en forma de tabla de los datos estadísticos, asignando a cada dato su frecuencia correspondiente.

Diagrama de barras: un diagrama de barras se utiliza para representar datos cualitativos o datos cuantitativos de tipo discreto, y los datos se representan mediante barras de una altura proporcional a la frecuencia.

Polígonos de frecuencias: Éste se forma, uniendo los extremos de las barras mediante segmentos y también puede dibujarse trazando los puntos que representan las frecuencias y uniéndolos mediante segmentos.

Diagrama de sectores: un diagrama de sectores puede utilizarse para todo tipo de variables, pero se usa frecuentemente para las variables cualitativas.

Los datos se representan en un círculo, de modo que el ángulo de cada sector es proporcional a la frecuencia absoluta correspondiente.

$$\alpha = \frac{360°}{N} \cdot f_i$$

Histograma: un histograma es una representación gráfica de una variable en forma de barras.

Se utilizan para variables continuas o para variables discretas, con un gran número de datos, que se han agrupado en clases.

En el eje abscisas se construyen unos rectángulos que tienen por base la amplitud del intervalo, y por altura, la frecuencia absoluta de cada intervalo.

3.8. DEFINICIÓN DE PARÁMETRO ESTADÍSTICO

Un parámetro estadístico es un número obtenido, a partir de los datos de una distribución estadística.

Los parámetros estadísticos sirven para sintetizar la información dada por una tabla o por una gráfica.

Tipos de Parámetros Estadísticos

De centralización.
De posición
De dispersión.

3.9. MEDIDAS DE CENTRALIZACIÓN

Nos indican en torno a qué valor (centro) se distribuyen los datos. Las medidas de centralización son:

Media aritmética ($\bar{X}$): La media es el valor promedio de la distribución.

La media aritmética es el valor obtenido al sumar todos los datos y al dividir el resultado entre el número total de datos y $\bar{X}$ es el símbolo de la media aritmética. (1) y para datos agrupados en tablas de frecuencias (2).

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{N} \quad (1)$$

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i f_i}{N} \quad (2)$$

Mediana (Me): la mediana es la puntación de la escala que separa la mitad superior de la distribución y la inferior, es decir divide la serie de datos en dos partes iguales y es el valor que ocupa el lugar central de todos los datos cuando éstos están ordenados de menor a mayor.

La mediana se representa por $M_{e}.$
La mediana se puede hallar sólo para variables cuantitativas.

Cálculo de la mediana:

Ordenamos los datos de menor a mayor.
Si la serie tiene un número impar de medidas la mediana es la puntuación central de la misma.

Si la serie tiene un número par de puntuaciones la mediana es la media entre las dos puntuaciones centrales.

Cálculo de la mediana para datos agrupados:

La mediana se encuentra en el intervalo donde la frecuencia acumulada llega hasta la mitad de la suma de las frecuencias absolutas, Es decir tenemos que buscar el intervalo en el que se encuentre $\frac{N}{2}$.

$$M_e = L_i + \frac{\frac{N}{2} - F_{i-1}}{f_i} \cdot a_i$$

Moda (M_o): la moda es el valor que más se repite en una distribución. La moda es el valor que tiene mayor frecuencia absoluta y se representa por M_o.

Se puede hallar la moda para variables cualitativas y cuantitativas.

Cálculo de la moda para datos agrupados:

Todos los intervalos tienen la misma amplitud.

$$M_o = L_i + \frac{f_{i+1}}{f_{i-1} + f_{i+1}} \cdot a_i$$

Los intervalos tienen amplitudes distintas.

En primer lugar tenemos que hallar las alturas.

$$h_i = \frac{f_i}{a_i}$$

La clase modal es la que tiene mayor altura.

$$M_o = L_i + \frac{h_{i+1}}{h_{i-1} + h_{i+1}} \cdot a_i$$

L_i : Límite inferior de la clase modal.
f_i : Frecuencia absoluta de la clase modal.
f_{i-1}: Frecuencia absoluta inmediatamente inferior a la clase modal.
f_{i+1}: Frecuencia absoluta inmediatamente posterior a la clase modal.
a_i: Amplitud de la clase.

3.10. MEDIDAS DE DISPERSIÓN

Las medidas de dispersión nos informan sobre cuanto se alejan del centro los valores de la distribución.

Las medidas de dispersión son:

Rango o recorrido (R): el rango es la diferencia entre el mayor y el menor de los datos de una distribución estadística.

Desviación media ($D_{\bar{X}}$): la desviación media es la media aritmética de los valores absolutos de las desviaciones respecto a la Media.

La desviación media es la media aritmética de los valores absolutos de las desviaciones respecto a la Media.

La desviación media se representa por $D_{\bar{X}}$ (1) y para datos agrupados (2)

$$D_{\bar{X}} = \frac{\sum_{i=1}^{n}|X_i - \bar{X}|}{N} \quad (1) \qquad D_{\bar{X}} = \frac{\sum_{i=1}^{n}|X_i - \bar{X}|f_i}{N} \quad (2)$$

Varianza: (σ^2): la varianza es la media aritmética del cuadrado de las desviaciones respecto a la Media.

La varianza se representa por σ^2 (1) y para datos agrupados (2), pero se simplifican los cálculos, si utilizamos expresiones equivalentes (3) y para datos agrupados (4).

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{N} \quad (1) \qquad \sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 f_i}{N} \quad (2)$$

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n}\frac{X_i^2}{N} - \bar{X}^2 \quad (3) \qquad \sigma^2 = \sum_{i=1}^{n}\frac{X_i^2 f_i}{N} - \bar{X}^2 \quad (4)$$

Desviación típica: (σ): la desviación típica es la raíz cuadrada de la varianza.

Cuanto más pequeña sea la desviación típica, mayor será la concentración de datos alrededor de la Media.

La desviación típica se representa por σ (1) y para datos agrupados (2), pero para simplificar los cálculos, utilizamos expresiones equivalentes (3) y para datos agrupados (4).

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{N}} \quad (1) \qquad \sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 f_i}{N}} \quad (2)$$

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{X_i^2}{N} - \bar{X}^2} \quad (3) \quad \sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{X_i^2 f_i}{N} - \bar{X}^2} \quad (4)$$

Coeficiente de variación (C.V): La relación entre la desviación típica de una muestra y su Media, y también suele expresarse en porcentajes.

$$C.V = \frac{\sigma}{\bar{X}} \qquad C.V = \frac{\sigma}{\bar{X}} \cdot 100$$

El coeficiente de variación permite comparar las dispersiones de dos distribuciones distintas, siempre que sus Medias sean positivas.

Se calcula para cada una de las distribuciones y los valores obtenidos se comparan entre sí.

La mayor dispersión corresponderá al valor del coeficiente de variación mayor.

Puntuaciones típicas o tipificación (Z)

Puntuaciones diferenciales: resultan de restarles a las puntuaciones directas la media aritmética.

$$x_i = X_i - X$$

Puntuaciones típicas: Son el resultado de dividir las puntuaciones diferenciales entre la desviación típica. Este proceso se llama tipificación y se representa por Z.

$$Z = \frac{X_i - \bar{X}}{\sigma}$$

Cuando en una distribución estadística el número de valores que toma la variable es muy grande, conviene diseñar una tabla de frecuencias, agrupándolos en intervalos. Para ello:

- Se localizan los valores externos a y b y se halla su diferencia $r = b - a$.
- Se decide el número de intervalos que se quiere formar, teniendo en cuenta el número de datos que se poseen. Este número no debe ser inferior a seis ni superior a 15.
- Se toma un intervalo, r', de longitud algo mayor que es recorrido r y que sea múltiplo del número de intervalos, con objeto de que éstos tengan una longitud entera.
- Se forman los intervalos de modo que el extremo inferior del primero sea algo menor que a y el extremo superior del último sea algo superior a b. Es deseable que los extremos de los intervalos no coincidan con ninguno de los datos. Para ello, puede convenir que dichos extremos tengan valores no enteros.

- Cuando se diseña una tabla con datos agrupados, se pierde algo de información (pues en ella se ignora cada valor concreto, que se difumina dentro de un intervalo). A cambio se gana en claridad y eficacia.

3.11. ¿CÓMO AGRUPAR LOS DATOS EN INTERVALOS?

Ejemplo:

Diseñar una tabla de frecuencias con la estatura de 40 adolescentes.

Tabla 2: Estatura de estudiantes

168	160	167	175	175
167	168	158	149	160
178	166	158	163	171
162	165	163	156	174
160	165	154	163	165
161	162	166	163	159
170	165	150	167	164
165	173	164	169	170

Fuente: http://www3.gobiernodecanarias.org/medusa/ecoblog/froddel/

El número de valores distintos que hay es extenso (mayor que 20). Por eso, lo adecuado es clasificarlos en intervalos. Para ello se procede así:

- Se localizan los valores extremos: el menor (149) y el mayor (178). Se halla su diferencia: $178 - 149 = 29$ (este valor es el recorrido).
- Puesto que el número de datos es pequeño (solo 40), se decide que el número de intervalos sea pequeño. Por ejemplo, seis. Se busca un número algo mayor que el recorrido ($r = 29$) y que sea múltiplo de 6. Por ejemplo, $r = 30$. De este modo, cada uno de los seis intervalos tendrá una longitud igual a cinco.
- Se forman los intervalos, comenzando por un número algo menor que el 149 y de modo que los seis intervalos abarquen a la totalidad de los datos (ver tabla).
- Se reparten los cuarenta datos, en los seis intervalos.

Tabla 3: Frecuencias

INTERVALOS	FRECUENCIAS
148,5-153,5	2
153,5-158,5	4
158,5-163,5	11
163,5-168,5	14
168,5-173,5	5
173,5-178,5	4

Fuente: http://www3.gobiernodecanarias.org/medusa/ecoblog/froddel/

Es conveniente tomar los intervalos con extremos no enteros, para que no haya duda de si un valor pertenece a un intervalo o al siguiente.

3.12. COMBINACIONES, VARIACIONES Y PERMUTACIONES

Para aplicar la Regla de Laplace, el cálculo de los sucesos favorables y de los sucesos posibles a veces no plantea ningún problema, ya que son un número reducido y pueden calcularse con facilidad.

Por ejemplo: probabilidad de que al lanzar un dado salga el número 2. Tan solo hay un caso favorable, mientras que los casos posibles son seis.

Sin embargo, a veces calcular el número de casos favorables y casos posibles es complejo y hay que aplicar reglas matemáticas.

El cálculo de combinaciones, el cálculo de variaciones y el cálculo de permutaciones, son reglas matemáticas, que pueden ayudar.

Combinaciones

Determina el número de subgrupos de 1, 2, 3 y otros elementos que pueden formarse con los "n" elementos de una nuestra. Cada subgrupo se diferencia del resto en los elementos que lo componen, sin que influya el orden.

Por ejemplo, calcular las posibles combinaciones de dos elementos que se pueden formar con los números 1, 2 y 3.

Pueden establecerse tres parejas diferentes: $(1,2), (1,3)\ y\ (2,3)$. En el cálculo de combinaciones las parejas $(1,2)\ y\ (2,1)$ se consideran idénticas, porque solo se cuentan una vez.

Para calcular el número de combinaciones se aplica la siguiente fórmula:

$$C_{m,n} = \frac{m!}{n! \cdot (m-n)!}$$

El término «$n!$» se denomina «*factorial de* n» y es la multiplicación de todos los números que van desde «n» hasta 1.

Por ejemplo: $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

La expresión «$C_{m,n}$» representa las combinaciones de «m» elementos, formando subgrupos de «n» elementos.

Ejemplo: $C_{10,4}$ son las combinaciones de 10 elementos, agrupándolos en subgrupos de 4 elementos:

$$C_{10,4} = \frac{10!}{4! \cdot (10-4)!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) \cdot (6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)} = 210$$

Es decir, podríamos formar 210 subgrupos diferentes de cuatro elementos, a partir de los 10 elementos.

Variaciones

Calcula el número de subgrupos de 1, 2, 3 y otros elementos que pueden establecerse con los «n» elementos de una muestra. Cada subgrupo se diferencia del resto en los elementos que lo componen o en el orden de dichos elementos (es lo que le diferencia de las combinaciones).

Por ejemplo, calcular las posibles variaciones de dos elementos que se pueden establecer con los números 1, 2 y 3.

Ahora tendríamos seis posibles parejas: (1,2), (1,3), (2,1), (2,3), (3,1) y (3,3). En este caso los subgrupos (1,2) y (2,1) se consideran distintos.

Para calcular el número de variaciones se aplica la siguiente fórmula:

$$V_{m,n} = \frac{m!}{(m-n)!}$$

La expresión «$V_{m,n}$» representa las variaciones de «m» elementos, formando subgrupos de «n» elementos. En este caso, como vimos en la lección anterior, un subgrupo se diferenciará del resto, bien por los elementos que lo forman, o bien por el orden de dichos elementos.

Ejemplo: $V_{10,4}$ son las variaciones de 10 elementos agrupándolos en subgrupos de cuatro elementos:

$$V_{10,4} = \frac{10!}{(10-4)!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)} = 5040$$

Es decir, podríamos formar 5.040 subgrupos diferentes de cuatro elementos, a partir de los 10 elementos.

Permutaciones

Calcula las posibles agrupaciones que pueden establecerse con todos los elementos de un grupo, por lo tanto, lo que diferencia a cada subgrupo del resto es el orden de los elementos.

Por ejemplo, calcular las posibles formas cómo pueden ordenarse los números 1, 2 y 3.

Hay seis posibles agrupaciones: (1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2) y (3, 2, 1).

Para calcular el número de permutaciones se aplica la siguiente fórmula:

$$P_m = m!$$

La expresión «P_m» representa las permutaciones de «m» elementos, tomando todos los elementos. Los subgrupos se diferenciarán únicamente por el orden de los elementos.

Ejemplo: P_{10} son las permutaciones de 10 elementos:

$$P_{10} = 10! = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3'628.800$$

Es decir, tendríamos 3’628.800 formas diferentes de agrupar 10 elementos.

Combinaciones con Repetición:

Se analiza ahora que ocurriría con el cálculo de las combinaciones, de las variaciones o de las permutaciones en el supuesto de que, al formar los subgrupos los elementos pudieran repetirse.

Por ejemplo: tenemos bolas de seis colores diferentes y queremos formar subgrupos en los que pudiera darse el caso de que dos, tres, cuatro o todas las bolas del subgrupo tuvieran el mismo color. En este caso no podríamos utilizar las fórmulas ya vistas.

Para calcular el número de combinaciones con repetición se aplica la siguiente fórmula:

$$C'_{m,n} = \frac{(m+n-1)!}{n! \cdot (m-1)!}$$

Ejemplo: $C'_{10,4}$ son las combinaciones de 10 elementos con repetición, agrupándolos en subgrupos de cuatro, en los que dos, tres o los cuatro elementos podrían estar repetidos:

$$C'_{10,4} = \frac{13!}{4!\,9!} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) \cdot (9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)} = 715$$

Es decir, podríamos formar 715 subgrupos diferentes de cuatro elementos.

Variaciones con repetición:

Para calcular el número de variaciones con repetición se aplica la siguiente fórmula:

$$V'_{m,n} = m^n$$

Ejemplo: $V'_{10,4}$ son las variaciones de 10 elementos con repetición, agrupándolos en subgrupos de 4 elementos:

$$V'_{10,4} = 10^4 = 10.000$$

Es decir, podríamos formar 10.000 subgrupos diferentes de cuatro elementos.

Permutaciones con repetición:

Para calcular el número de permutaciones con repetición se aplica la siguiente fórmula:

$$P'^{\,x_1,x_2,\ldots x_k}_{m} = \frac{m!}{x_1! \cdot x_2! \cdot \ldots \cdot x_k}$$

Son permutaciones de «m» elementos, en los que uno de ellos se repite «x_1» veces, otro «x_2» veces y así... hasta uno que se repite «x_k» veces.

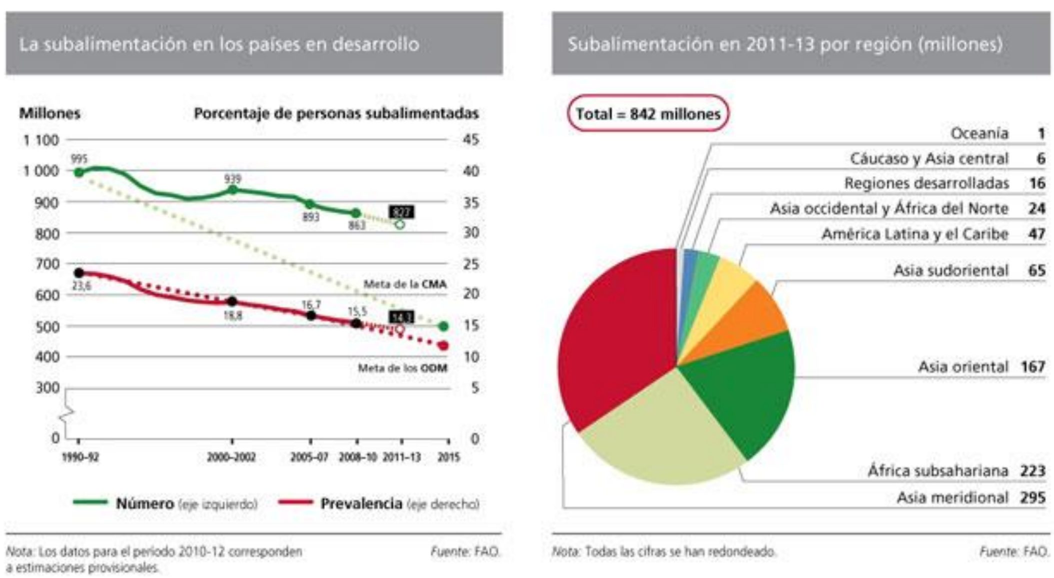
Ejemplo: calcular las permutaciones de 10 elementos, en los que uno de ellos se repite en dos ocasiones y otro se repite en tres ocasiones:

$$P'^{\,2,3}_{10} = \frac{10!}{2! \cdot 3!} = 302.400$$

Es decir, tendríamos 302.400 formas diferentes de agrupar estos 10 elementos.

3.13. PREGUNTAS PROPUESTAS

Teniendo en cuenta la siguiente gráfica:



Fuente: Estado de seguridad alimentaria en el mundo. www.fao.org/3/a-i3434s.pdf

Resuelva los siguientes dos puntos:

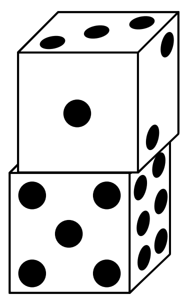
1. Según la gráfica de “Subalimentación en 2011 – 2013 por región (millones)”. Es cierto que:

A. Entre las Regiones Desarrolladas y Asia Meridional existe una diferencia, en 289 millones de personas subalimentadas.
B. Entre Asia oriental y Asia meridional existe una diferencia, en 71 millones de personas subalimentadas.
C. Entre Asia oriental y Asia subsahariana existe una diferencia, en 55 millones de personas subalimentadas.
D. Existe una inconsistencia en los datos presentados.

2. Según la gráfica de “Subalimentación en 2011 – 2013 por región (millones)”. Es cierto que:

A. En los valores presentados entre las regiones de Asia meridional y Asia oriental existe una diferencia aproximada del 15% de personas subalimentadas.
B. En los valores presentados entre las regiones de Asia meridional y Asia oriental existe una diferencia de 128 millones de personas subalimentadas.
C. Entre Oceanía y Asia oriental y Regiones Desarrolladas existe una diferencia, en 16 millones de personas subalimentadas.
D. Existe una inconsistencia en los datos presentados.

3. Se quiere evaluar a un estudiante, sobre el tema de lógica y de probabilidad, para lo cual se le pide que lance dos dados, por pura casualidad, cae un dado encima del otro, como se muestra a continuación:



El docente le pide al estudiante, que formule una afirmación, relacionada con dicho lanzamiento y los datos obtenidos. Algunas de las afirmaciones escritas por los estudiantes son las siguientes:

1. La suma de los puntos de las caras opuestas en un dado es igual a siete.
2. La probabilidad de que al lanzar un dado se obtengan tres puntos es igual a $\frac{1}{6}$.
3. La probabilidad de que al lanzar dos dados, la suma obtenida sea de seis puntos es $\frac{5}{36}$.
4. La probabilidad de que al lanzar dos dados, la suma obtenida sea de siete puntos es $\frac{1}{6}$.

De las afirmaciones anteriores, la que permite evaluar bien al estudiante es

A. la afirmación 1, porque es cierto que en cualquier dado, la suma de las caras opuestas es igual a siete para que los dados estén “equilibrados” y así tengan igual opción de probabilidad.
B. la opción dos, porque al lanzar un dado la probabilidad de obtener tres puntos es $\frac{1}{6}$, porque son 6 caras y la cantidad de puntos están de 1 a 6. Los casos favorables es 1 y los casos posibles es 6.

C. la opción tres, porque al lanzar dos dados hay cinco posibilidades que suman seis, y los casos posibles son 36.

D. la opción cuatro, porque el valor escondido en la cara superior del primer dado (el que presenta las caras con 5 y 6 puntos) es 4, 3 + 4 es igual a siete. Hay seis casos favorables de parejas en los dados que suman siete y los casos posibles son 36.

4. En la clase de Estadística, el profesor plantea el siguiente ejercicio sobre la Media Aritmética: El promedio de las edades de Isabel, Cristina, Viviana y Andrea es 27años, pero al llegar las gemelas Olga y Helena, el promedio entre todas ellas sería de 35 años. Para hallar correctamente la edad de cada una de las gemelas, cuatro estudiantes describen el siguiente procedimiento:

   Valeria: La semidiferencia entre los productos 35 y 6 con 27 y 4
   Karen: La diferencia entre los productos 35 y 6 con 27 y 4
   Kevin: La semidiferencia entre los productos de los promedios
   Tomás: La semisuma entre las sumas de los dos promedios

   El procedimiento correcto es el descrito por

   A. Valeria, porque al llegar las gemelas se aumentan en dos la cantidad de personas, y el promedio es 35 años. Inicialmente se tenían cuatro personas y el promedio era 27 años.
   B. Karen, porque los promedios son 35 para seis personas y 27 para cuatro personas. Las gemelas tienen igual número de años.
   C. Kevin, porque la diferencia entre los productos de los promedios corresponde al valor de la suma de las edades de las gemelas y al dividir dicho resultado por dos se obtiene el valor de la edad de cada una.
   D. Tomás, porque para hallar el promedio final se debe sumar los promedios parciales y se divide por dos (semisuma), porque se trata de gemelas.

5. En una clase de Estadística, sobre el tema de probabilidades, un docente propone los siguientes datos (o enunciados):

1. En una convocatoria para docentes se inscriben 250 mujeres y 350 hombres
2. Una urna que contiene balotas, contiene tres blancas, cuatro azules, siete rojas y 10 verdes.
3. Se lanzan dos dados normales (con sus seis caras con puntos del 1 al 6) y “equilibrado”

Los estudiantes deben construir una afirmación, que pueda deducirse de dichos datos. Algunas de las afirmaciones dadas son las siguientes:

1. Al sacar una balota de la urna, la probabilidad de obtener una balota blanca o roja es equivalente a la probabilidad que se obtiene al lanzar los dos dados de obtener una suma mayor que seis y menor que 10

2. Al sacar una balota de la urna, la probabilidad de obtener una balota blanca o roja, es equivalente a la probabilidad que se obtiene al elegir un docente de los inscritos y que este no sea hombre

3. La probabilidad, que al lanzar los dos dados, se obtenga el mismo valor en ambos dados, equivale a la probabilidad de sacar una balota azul de la urna

4. La probabilidad, que al sacar una balota verde sea igual que la probabilidad al lanzar los dos dados, y obtener una suma mayor o igual que seis y menor que 10

La afirmación que no corresponde al pedido del docente es

A. La primera, porque, utilizando la probabilidad de la suma, al sacar una balota de la urna, la probabilidad de obtener una balota blanca o roja es numéricamente equivalente a la probabilidad que se obtiene al lanzar los dos dados de obtener una suma mayor que seis y menor que 10.

B. Utilizando la probabilidad en ambos casos, al sacar una balota de la urna, los valores numéricos en la probabilidad de obtener una balota blanca o roja es equivalente a la probabilidad que se obtiene al elegir un docente de los inscritos y que este no sea hombre.

C. Teniendo en cuenta el espacio muestral, la probabilidad, de que al lanzar los dos dados, se obtenga el mismo valor en ambos dados, equivale a la probabilidad de sacar una balota azul de la urna.

D. Según el espacio muestral en cada caso, la probabilidad, de que al sacar una balota verde sea igual que la probabilidad al lanzar los dos dados, y obtener una suma mayor o igual que seis y menor que 10.

6. Alejandro y Luisa conciertan una apuesta, Alejandro tira una moneda al aire, en tanto que Luisa lanza un dado. Alejandro dice que caerá cara y Luisa dice que saldrá un número de puntos menor o igual que cuatro.

En este caso resulta ganador Alejandro. y Tomás explica porque ha sucedido esto. Su explicación es la siguiente:

Aunque Luisa tenía una mayor probabilidad de ganar, en este caso, la poca probabilidad que tenía Alejandro podría favorecerlo, como en efecto ocurrió. Con relación a la explicación de Tomás se puede decir que:

A. Es cierta porque, aunque Luisa tiene mayor probabilidad de ganar, por el concepto de probabilidad, en este caso, permite que aunque Alejandro tiene menos probabilidad de ganar lo pueda lograr.
B. Es cierta porque ambos tienen la misma posibilidad de ganar, aunque la probabilidad sea diferente.
C. Es falsa porque los experimentos son diferentes y no pueden compararse.
D. Es falsa porque en probabilidades no existe el favoritismo.

ANEXO 1:

DERECHOS BASICOS DE APRENDIZAJE. ÁREA DE MATEMÁTICAS

El Ministerio de Educación Nacional, MEN (2015) expresa que los DBA tienen como «finalidad presentar al país un conjunto de aprendizajes fundamentales, alineados con los Estándares Básicos de Competencias, que pueden utilizarse como base para el diseño de programas de estudio coherentes, secuenciados y articulados en todos los grados y que a su vez, tengan en cuenta las particularidades de la Comunidad Educativa, como la diversidad cultural, étnica, geográfica y social (p. 3)».

También se plantea que son un conjunto de saberes fundamentales dirigidos a aquella, y que deben ser incorporados en los procesos de enseñanza y que además deben promover las condiciones de igualdad educativa de todos los estudiantes del país (MEN, 2015). Con esto se quiere decir que las instituciones educativas gozan de autonomía curricular para proponer su propio currículo, con base en la realidad y en necesidades del contexto educativo. Por lo tanto, los DBA son un referente por considerar, pero no sustituyen el contenido propuesto desde cada Escuela en su respectivo Plan de Estudio, dado que este debe abordar de manera concreta los diferentes conceptos matemáticos que se requieren para lograr mejores procesos de enseñanza aprendizaje.

A continuación se hace un paralelo entre los DBA, los conceptos implícitos declarados en estos y los estándares básicos de competencias en Matemáticas formulados por el MEN, desvelando que no existe un enfoque sistémico en la presente propuesta del MEN, la cual no conserva una secuencialidad en la enseñanza del contenido matemático y requiere de ajustes. Igualmente, no se encuentra correspondencia entre los estándares básicos de competencia formulados con mucha anterioridad en 2003 y los actuales Desempeños Básicos de Aprendizaje, además de que los primeros fueron construidos por conjuntos de grado y estos últimos para cada grado.

PARALELO DBA-CONTENIDOS-ESTÁNDARES BÁSICOS DE COMPETENCIAS

DBA	CONTENIDOS Y CONCEPTOS	ESTÁNDARES BÁSICOS DE COMPETENCIAS
MATEMÁTICAS GRADO UNO		
Sabe contar de 0 a 99	Concepto de número. Conteo, lectura y escritura de números.	NUMÉRICO: Reconoce significados del número en diferentes contextos (medición, conteo, comparación, codificación, localización, entre otros).

DBA	CONTENIDOS Y CONCEPTOS	ESTÁNDARES BÁSICOS DE COMPETENCIAS
Puede determinar cuántos elementos hay en una colección de menos de 100 elementos.	Cardinalidad y ordinalidad. Relación de orden en los Naturales.	
Puede numerar una secuencia de eventos en el tiempo.	Eventos en el tiempo: antes y después.	
Resuelve distintos tipos de problemas sencillos que involucren sumas y restas con números de 0 a 99.	Suma y resta. Significado de los símbolos: "=", "+" y " − ".	
Reconoce características en objetos.	Características de los objetos: color, forma, tamaño, longitud, peso, entre otros.	MÉTRICO: Compara y ordena objetos respecto a atributos medibles.
Reconoce en su entorno formas geométricas sólidas y planas básicas.	Sólidos geométricos: conos, cilindros, esferas y cubos. Figuras geométricas planas: triángulos, cuadrados y círculos. Clasificación según sus características.	ESPACIAL: Diferencia atributos y propiedades de objetos tridimensionales.
Utiliza los meses del año y los días de la semana para especificar momentos en el tiempo.	Meses de año. Días de la semana.	
Mide el largo de objetos o trayectos con unidades no estándar.	Unidades no estándar: palos, dedos, pasos, lápiz, entre otros.	NUMÉRICO: Describe situaciones que requieren el uso de medidas relativas.
Comunica la posición de un objeto en relación con otro o con relación a sí mismo, utilizando las palabras: arriba, abajo, detrás, delante, dentro, fuera, izquierda, derecha, entre otros.	Posición de un objeto con respecto a otro.	

DBA	CONTENIDOS Y CONCEPTOS	ESTÁNDARES BÁSICOS DE COMPETENCIAS
Reconoce y propone patrones simples con números, ritmos, o figuras geométricas.	Patrones y sucesiones, mediante números o figuras.	VARIACIONAL: Reconoce y describe regularidades y patrones en distintos contextos (numérico, geométrico, musical, entre otros).
MATEMÁTICAS GRADO DOS		
Sabe contar de 0 a 999.	Conteo de números. Escritura de números.	NUMÉRICO: Describo, comparo y cuantifico situaciones con números, en diferentes contextos y con diversas representaciones.
Tiene claro el concepto de unidad, decena y centena.	Unidades, decenas y centenas. Orden de los números: antes y después. Número mayor que. Número menor que.	NUMÉRICO: Uso representaciones –principalmente concretas y pictóricas– para explicar el valor de posición en el sistema de numeración decimal.
Resuelve distintos tipos de problemas que involucren sumas y restas con números de 0 a 999.	Problemas de aplicación sobre sumas o restas.	
Ordena objetos o eventos de acuerdo a su longitud, distancia, área, capacidad, peso, duración, etc.	Ordenamiento de objetos o eventos.	
Comprende que multiplicar por un número corresponde a sumar repetidas veces.	Multiplicación de números naturales. Tablas de multiplicar de 0 a 10.	
Puede hacer repartos equitativos.	Divisiones por una cifra.	
Puede hacer dibujos sencillos donde representa un lugar y la posición de los objetos en ese lugar.	Bosquejo de un lugar y sus objetos. Esquema o croquis.	ESPACIAL: Represento el espacio circundante para establecer relaciones espaciales.
Reconoce figuras planas y sólidas simples y utiliza estas figuras para formar figuras más complejas.	Triángulos, rectángulos, esferas, cilindros, cubos y conos.	ESPACIAL: Dibujo y describo cuerpos o figuras tridimensionales, en distintas posiciones y tamaños.

DBA	CONTENIDOS Y CONCEPTOS	ESTÁNDARES BÁSICOS DE COMPETENCIAS
Utiliza direcciones y unidades de desplazamiento para especificar posiciones.	Dirección y unidad de desplazamiento.	
Mide el largo de objetos o trayectos con unidades estándar (metros, centímetros) y no estándar (paso, pie, dedo) sin fracciones ni decimales. Realiza también estimaciones del área de una figura por medio de recubrimientos.	Unidades estándar. El metro. Unidades no estándar. Área o superficie por medio de recubrimientos.	MÉTRICO: Aplico y describo procesos de medición con patrones arbitrarios y algunos estandarizados, según el contexto.
Sabe leer la hora en relojes digitales y de manecillas.	La hora.	
Representa de forma gráfica grupos de objetos de acuerdo a cierta característica.	Característica común a grupos de objetos: los que ruedan, los que no ruedan, entre otros.	
Reconoce y propone patrones simples con números, ritmos o figuras geométricas.	Series por medio de números o figuras geométricas.	VARIACIONAL: Describo cualitativamente situaciones de cambio y variación utilizando el lenguaje natural, dibujos y gráficas.
Comprende nociones como: horizontal, vertical, paralelo y perpendicular.	Posición de objetos.	ESPACIAL: Reconozco nociones de horizontalidad, verticalidad, paralelismo y perpendicularidad en distintos contextos y su condición relativa con respecto a diferentes sistemas de referencia.
MATEMÁTICAS GRADO TRES		
Usa números de 0 a 999 999.	Unidad, decena, centena, unidades de mil, decenas de mil y centenas de mil. Número mayor que otro. Número menor que otro.	NUMÉRICO: Uso representaciones –principalmente concretas y pictóricas– para explicar el valor de posición en el sistema de numeración decimal.

DBA	CONTENIDOS Y CONCEPTOS	ESTÁNDARES BÁSICOS DE COMPETENCIAS
Resuelve distintos tipos de problemas que involucren sumas, restas, multiplicaciones y divisiones.	Problemas de aplicación con operaciones básicas.	NUMÉRICO: Reconozco propiedades de los números (ser par, ser impar, etc.) y relaciones entre ellos (ser mayor que, ser menor que, ser múltiplo de, ser divisible por, etc.) en diferentes contextos.
Entiende que dividir corresponde a hacer repartos equitativos.	División de un número de tres cifras entre un número de una cifra.	
Multiplica números de hasta tres cifras.	Multiplicación de un número de tres cifras por un número de una cifra.	NUMÉRICO: Uso diversas estrategias de cálculo (especialmente cálculo mental) y de estimación para resolver problemas en situaciones aditivas y multiplicativas.
Comprende la relación entre la multiplicación y la división.	Multiplicación y división de naturales.	
Comprende el uso de fracciones para describir situaciones en las que una unidad se divide en partes iguales.	Concepto de fracción. Representación gráfica de fracciones propias.	NUMÉRICO: Describo situaciones de medición, utilizando fracciones comunes.
Compara fracciones sencillas y reconoce fracciones que aunque se vean distintas, representan la misma cantidad.	Fracciones equivalentes. Fracción mayor que otra. Fracción menor que otra. Representación gráfica.	NUMÉRICO: Resuelvo y formulo problemas en situaciones de variación proporcional.
Comprende el significado de la igualdad y utiliza el símbolo " = " de forma correcta.	Igualdad entre números naturales.	VARIACIONAL: Reconozco y propongo equivalencias entre expresiones numéricas y describo cómo cambian los símbolos, aunque el valor siga igual.
Puede ampliar o reducir figuras en una cuadrícula.	Figuras y objetos simétricos. Figuras geométricas. Ampliar y reflejar figuras. Dibujos con ejes de simetría.	ESPACIAL: Reconozco y valoro simetrías en distintos aspectos del arte y del diseño. ESPACIAL: Reconozco congruencia y semejanza entre figuras (ampliar, reducir).

DBA	CONTENIDOS Y CONCEPTOS	ESTÁNDARES BÁSICOS DE COMPETENCIAS
Ubica lugares en mapas y describe trayectos.	Dibujo y descripción de trayectos, basados en el contexto.	ESPACIAL: Desarrollo habilidades para relacionar dirección, distancia y posición en el espacio.
Mide y estima longitud, distancia, área, capacidad, peso, duración, otro, en objetos y/o eventos.	Instrumentos de medición: balanza, regla, reloj, entre otros.	ESPACIAL: Ejecuto construcciones y diseños, utilizando cuerpos y figuras geométricas tridimensionales y dibujos o figuras geométricas bidimensionales. MÉTRICO: Reconozco el uso de las magnitudes y sus unidades de medida en situaciones aditivas y multiplicativas.
Interpreta y representa datos dados de diferentes maneras.	Representación gráfica de datos.	ALEATORIO: Represento datos relativos a mi entorno usando objetos concretos, pictogramas y diagramas de barras. ALEATORIO: Identifico regularidades y tendencias en un conjunto de datos.
Usa correctamente las expresiones posible, imposible, muy posible y poco posible.	Descripción de fenómenos o situaciones simples de probabilidad.	ALEATORIO: Explico –desde mi experiencia– la posibilidad o imposibilidad de ocurrencia de eventos cotidianos. ALEATORIO: Predigo, si la posibilidad de ocurrencia de un evento es mayor que la de otro.
Puede describir variaciones.	Descripción de variaciones en canciones o en ritmos musicales.	
Reconoce y propone patrones con números o figuras geométricas.	Patrón numérico. Patrón por medio de figuras geométricas.	VARIACIONAL: Construyo secuencias numéricas y geométricas, utilizando propiedades de los números y de las figuras geométricas.

DBA	CONTENIDOS Y CONCEPTOS	ESTÁNDARES BÁSICOS DE COMPETENCIAS
MATEMÁTICAS GRADO CUARTO		
Conoce los números naturales.	Operaciones de suma, resta, multiplicación y división de números naturales. Máximo cuatro cifras por una cifra. Tres cifras por dos cifras. Divisiones de un número de cuatro cifras por un número de una cifra. Algunas propiedades de los naturales.	NUMÉRICO: Resuelvo y formulo problemas cuya estrategia de solución requiera de las relaciones y de las propiedades de los números naturales y sus operaciones.
Entiende los conceptos de múltiplos y divisores. Entiende los conceptos de múltiplos y divisores.	Múltiplos y divisores de un número natural.	
Comprende que el residuo en una división corresponde a lo que sobra al efectuar un reparto equitativo.	División inexacta entre naturales.	
Comprende la relación entre fracción y decimal. Comprende que las fracciones sirven para referirse a una parte de una colección de objetos.	Expresión de un decimal exacto como la suma de una parte entera con una parte decimal. Decimal exacto como fracción. La suma de un entero con una fracción como un número mixto. El número mixto como una fracción. La conversión de una fracción en decimal por medio de la división. Características comunes en una colección de objetos.	NUMÉRICO: Interpreto las fracciones en diferentes contextos: situaciones de medición, relaciones parte todo, cociente, razones y proporciones.

DBA	CONTENIDOS Y CONCEPTOS	ESTÁNDARES BÁSICOS DE COMPETENCIAS
Identifica fracciones equivalentes y simplifica fracciones.	Amplificación y simplificación de fracciones.	
Realiza sumas y restas de fracciones.	Suma y resta de fracciones homogéneas entre números naturales. Cuando uno de los denominadores es múltiplo del otro.	
Calcula el área y el perímetro de un rectángulo a partir de su base y su altura usando números naturales, decimales o fraccionarios.	Área y perímetro. Área de otras figuras a partir del área de un rectángulo.	
Multiplica fracciones.	Representación gráfica de multiplicación de fracciones.	
Reconoce fracciones y números decimales positivos.	Números decimales con una sola cifra después de la coma. Números naturales, fracciones y decimales positivos en la recta numérica.	NUMÉRICO: Justifico el valor de posición en el sistema de numeración decimal, en relación con el conteo recurrente de unidades.
Reconoce y utiliza porcentajes sencillos.	Correspondencia entre el porcentaje y la fracción que representa.	
Usa los términos: norte, sur, oriente y occidente para describir desplazamientos en un mapa.	Desplazamientos en un mapa o croquis, a partir de un punto de referencia.	
Practica mediciones con unidades de medida estándar de: longitud (metros, centímetros, etc), masa (gramo, kilogramo, etc.), área (centímetros cuadrados, etc.), capacidad (litros, galones, etc.) y tiempo	Aplicaciones de unidades de medida estándar.	MÉTRICO: Diferencio y ordeno, en objetos y eventos, propiedades o atributos que se puedan medir (longitudes, distancias, áreas de superficies, volúmenes de cuerpos sólidos, volúmenes de líquidos y capacidades de recipientes; pesos y

DBA	CONTENIDOS Y CONCEPTOS	ESTÁNDARES BÁSICOS DE COMPETENCIAS
(segundos, minutos, etc.), usando números naturales, fraccionarios y números decimales.		masa de cuerpos sólidos; duración de eventos o procesos; amplitud de ángulos).
Describe cómo se vería un objeto desde distintos puntos de vista.	Vistas de un objeto tridimensional.	ESPACIAL: Comparo y clasifico objetos tridimensionales de acuerdo con componentes (caras, lados) y propiedades.
Clasifica polígonos según sus lados y sus ángulos.	Clasificación de polígonos.	ESPACIAL: Comparo y clasifico figuras bidimensionales según sus componentes (ángulos, vértices) y características.
Usa el transportador para medir ángulos y los clasifica dependiendo de si son mayores o menores a un ángulo recto.	Medición de ángulos por medio del transportador.	ESPACIAL: Identifico, represento y utilizo ángulos en giros, aberturas, inclinaciones, figuras, puntas y esquinas en situaciones estáticas y dinámicas.
Entiende unos datos representados de cierta forma y los representa de otra.	Representación de datos.	ALEATORIO: Represento datos, usando tablas y gráficas (pictogramas, gráficas de barras, diagramas de líneas, diagramas circulares). VARIACIONAL: Describo e interpreto variaciones representadas en gráficos.
Interpreta y representa datos descritos como puntos en el primer cuadrante del plano cartesiano.	Interpretación de datos.	ESPACIAL: Utilizo sistemas de coordenadas para especificar localizaciones y describir relaciones espaciales. MÉTRICO: Utilizo y justifico el uso de la estimación, en la resolución de problemas relativos a la vida social, económica y de las ciencias, utilizando rangos de variación.

DBA	CONTENIDOS Y CONCEPTOS	ESTÁNDARES BÁSICOS DE COMPETENCIAS
		ALEATORIO: Interpreto información presentada en tablas y gráficas. (Pictogramas, gráficas de barras, diagramas de líneas, diagramas circulares). VARIACIONAL: Represento y relaciono patrones numéricos con tablas y con reglas verbales.
MATEMÁTICAS GRADO QUINTO		
Usa números decimales de hasta tres cifras después de la coma teniendo claro el concepto de décima, centésima y milésima.	Números decimales. Las décimas, centésimas y milésimas.	NUMÉRICO: Justifico el valor de posición en el sistema de numeración decimal en relación con el conteo recurrente de unidades.
Resuelve problemas que involucran sumas, restas, multiplicaciones y divisiones con números decimales.	Problemas de aplicación con números decimales.	
Comprende que elevar un número a una cierta potencia corresponde a multiplicar repetidas veces el número.	Potenciación con números naturales. Relación entre la potenciación y la radicación.	NUMÉRICO: Identifico la potenciación y la radicación en contextos matemáticos y no matemáticos.
Puede estimar el resultado de un cálculo sin necesidad de calcularlo con exactitud.	Cálculo numérico y aproximación.	NUMÉRICO: Identifico, en el contexto de una situación, la necesidad de un cálculo exacto o aproximado y lo razonable de los resultados obtenidos.
Escribe fracciones como decimales y viceversa.	Convertir fracciones en decimales y viceversa. Porcentaje como fraccionario y decimales.	NUMÉRICO: Utilizo la notación decimal para expresar fracciones en diferentes contextos y relaciono estas dos notaciones con la de los porcentajes. VARIACIONAL: Construyo igualdades y desigualdades numéricas como representación de relaciones entre distintos datos.

DBA	CONTENIDOS Y CONCEPTOS	ESTÁNDARES BÁSICOS DE COMPETENCIAS
Interpreta datos que involucran porcentajes.	Representación de porcentajes. Problemas de aplicación.	ALEATORIO: Comparo diferentes representaciones del mismo conjunto de datos. VARIACIONAL: Represento y relaciono patrones numéricos con tablas y reglas verbales.
Reconoce la jerarquía de las operaciones al escribir y evaluar expresiones numéricas que involucran: paréntesis, sumas, restas, multiplicaciones, divisiones y potencias.	Jerarquía en las operaciones.	NUMÉRICO: Uso diversas estrategias de cálculo y de estimación para resolver problemas en situaciones aditivas y multiplicativas.
Multiplica o divide el numerador y el denominador de una fracción por un mismo número para hacerla equivalente a otra y comprende la equivalencia en distintos contextos.	Fracciones equivalentes.	
Divide una fracción por un número natural.	División de una fracción. Representación gráfica.	
Resuelve problemas de proporcionalidad directa.	Proporcionalidad directa.	NUMÉRICO: Modelo situaciones de dependencia mediante la proporcionalidad directa e inversa.
Construye objetos sencillos a partir de moldes.	Noción intuitiva de volumen.	ESPACIAL: Construyo y descompongo figuras y sólidos a partir de condiciones dadas.
Resuelve problemas que involucran los conceptos de volumen, área y perímetro.	Volumen, área y perímetro.	ESPACIAL: Conjeturo y verifico los resultados de aplicar transformaciones a figuras en el plano para construir diseños. ESPACIAL: Construyo objetos tridimensionales a partir de representaciones bidimensionales y puedo realizar el proceso contrario en contextos de arte, diseño y arquitectura. MÉTRICO: Justifico relaciones de dependencia del área y volumen, respecto a las dimensiones de fi guras y sólidos.

DBA	CONTENIDOS Y CONCEPTOS	ESTÁNDARES BÁSICOS DE COMPETENCIAS
		MÉTRICO: Utilizo diferentes procedimientos de cálculo para hallar el área de la superficie exterior y el volumen de algunos cuerpos sólidos.
Comprende por qué funcionan las fórmulas para calcular áreas de triángulos y paralelogramos.	Área de triángulos y paralelogramos. Representación gráfica.	MÉTRICO: Describo y argumento relaciones entre el perímetro y el área de figuras diferentes, cuando se fija una de estas medidas.
Hace conversiones entre distintas unidades de medida.	Conversión de unidades de medida.	MÉTRICO: Reconozco el uso de algunas magnitudes (longitud, área, volumen, capacidad, peso y masa, duración, rapidez, temperatura) y de algunas de las unidades que se usan para medir cantidades de la magnitud respectiva en situaciones aditivas y multiplicativas.
Calcula el promedio (la media) e identifica la moda en un conjunto de datos.	La Media o Promedio. La Moda.	ALEATORIO: Describo la manera como parecen distribuirse los distintos datos de un conjunto de ellos y la comparo con la manera como se distribuyen en otros conjuntos de datos. ALEATORIO: Uso e interpreto la media (o promedio) y la mediana y comparo lo que indican.
Comprende la probabilidad de obtener ciertos resultados en situaciones sencillas.	Probabilidad con situaciones simples.	ALEATORIO: Conjeturo y pongo a prueba predicciones acerca de la posibilidad de ocurrencia de eventos.
Lee e interpreta gráficas de línea.	Interpretación de gráficas lineales.	ALEATORIO: Resuelvo y formulo problemas a partir de un conjunto de datos provenientes de observaciones, consultas o experimentos.
MATEMÁTICAS GRADO SEXTO		
Resuelve problemas en los que debe dividir un entero entre una fracción o una fracción entre una fracción.	Ejercicios de división de fracciones.	NUMÉRICO: Formulo y resuelvo problemas en situaciones aditivas y multiplicativas, en diferentes contextos y dominios numéricos.

DBA	CONTENIDOS Y CONCEPTOS	ESTÁNDARES BÁSICOS DE COMPETENCIAS
Resuelve problemas que involucran números racionales positivos	Resolución de problemas con fracciones.	NUMÉRICO: Utilizo números racionales, en sus distintas expresiones (fracciones, razones, decimales o porcentajes) para resolver problemas en contextos de medida.
Aproxima, dependiendo de la necesidad.	Aproximación de números decimales.	
Resuelve problemas, utilizando porcentajes.	Resolución de problemas con porcentajes (descuentos).	NUMÉRICO: Utilizo números racionales, en sus distintas expresiones (fracciones, razones, decimales o porcentajes) para resolver problemas en contextos de medida.
Comprende en qué situaciones necesita un cálculo exacto y en qué situaciones puede estimar	Cálculos exactos y aproximados.	NUMÉRICO: Justifico la pertinencia de un cálculo exacto o aproximado en la solución de un problema y lo razonable o no de las respuestas obtenidas.
Comprende el significado de los números negativos en diferentes contextos.	Significado de números enteros en distintos contextos.	
Soluciona problemas que integran proporción directa y puede representarla de distintas formas.	Problemas con proporcionalidad directa y representación en porcentaje.	NUMÉRICO: Utilizo números racionales, en sus distintas expresiones (fracciones, razones, decimales o porcentajes) para resolver problemas en contextos de medida. NUMÉRICO: Justifico el uso de representaciones y procedimientos en situaciones de proporcionalidad directa e inversa.
Usa razones (con cantidades y unidades) para solucionar problemas de proporcionalidad.	Problemas con proporcionalidad directa.	NUMÉRICO: Utilizo números racionales, en sus distintas expresiones (fracciones, razones, decimales o porcentajes) para resolver problemas en contextos de medida.

DBA	CONTENIDOS Y CONCEPTOS	ESTÁNDARES BÁSICOS DE COMPETENCIAS
Representa cubos, cajas, conos, cilindros, prismas y pirámides en forma bidimensional.	Representación bidimensional de cuerpos geométricos.	ESPACIAL: Represento objetos tridimensionales desde diferentes posiciones y vistas.
Construye moldes para cubos, cajas, prismas o pirámides dadas sus dimensiones y justifica cuando cierto molde no resulta en ningún objeto.	Moldes de cuerpos geométricos.	MÉTRICO: Calculo áreas y volúmenes a través de composición y descomposición de figuras y cuerpos. MÉTRICO: Utilizo técnicas y herramientas para la construcción de fi guras planas y cuerpos con medidas dadas.
Soluciona problemas que contengan el área de superficie y el volumen de una caja.	Área superficial y volumen de cuerpos geométricos.	NUMÉRICO: Utilizo números racionales, en sus distintas expresiones (fracciones, razones, decimales o porcentajes) para resolver problemas en contextos de medida.
Identifica ángulos faltantes tanto en triángulos equiláteros, isósceles y rectos, como en paralelogramos, rombos y rectángulos.	Cálculo ángulos faltantes.	
Usando regla y transportador, construye triángulos con dimensiones dadas.	Construcción de triángulos con regla y compás.	MÉTRICO: Utilizo técnicas e instrumentos para la construcción de figuras planas y cuerpos con medidas dadas.
Usa las fórmulas del perímetro, longitud de la circunferencia y el área de un círculo para calcular la longitud del borde y el área de figuras compuestas por triángulos, rectángulos y porciones de círculo.	Cálculo longitud del borde y área de figuras compuestas.	
Usa el transportador para diseñar con precisión diagramas circulares, a partir de datos y porcentajes.	Diagramas circulares. Datos y porcentajes	

DBA	CONTENIDOS Y CONCEPTOS	ESTÁNDARES BÁSICOS DE COMPETENCIAS
Usa letras para representar cantidades y las usa en expresiones sencillas para representar situaciones.	Uso de símbolos literales para representar situaciones.	VARIACIONAL: Reconozco el conjunto de valores de cada una de las cantidades variables ligadas entre sí en situaciones concretas de cambio (variación).
Relaciona información proveniente de distintas fuentes de datos.	Análisis de datos estadísticos a partir de distinta representación gráfica.	ALEATORIO: Interpreto, produzco y comparo representaciones gráficas adecuadas para presentar diversos tipos de datos. (Diagramas de barras, diagramas circulares). ALEATORIO: Resuelvo y formulo problemas a partir de un conjunto de datos presentados en tablas, diagramas de barras, diagramas circulares.
Calcula la media (el promedio), la mediana y la moda de un conjunto de datos.	Medidas de tendencia central para datos discretos.	ALEATORIO: Uso medidas de tendencia central (media, mediana, moda) para interpretar comportamiento de un conjunto de datos.
MATEMÁTICAS GRADO SÉPTIMO		
Resuelve problemas que contengan números racionales positivos y negativos (fracciones, decimales o números mixtos).	Resuelve operaciones con enteros, representación en recta numérica y plano cartesiano, comparación de fracciones con enteros.	NUMÉRICO: Utilizo números racionales, en sus distintas expresiones (fracciones, razones, decimales o porcentajes) para resolver problemas en contextos de medida. VARIACIONAL: Identifico las características de las diversas gráficas cartesianas (de puntos, continuas, formadas por segmentos, etc.) en relación con la situación que representan.
Identifica si en una situación dada las variables son directamente proporcionales o inversamente proporcionales o ninguna de las dos.	Representación gráfica de magnitudes directamente proporcionales y a escalas.	NUMÉRICO: Justifico el uso de representaciones y procedimientos en situaciones de proporcionalidad directa e inversa. MÉTRICO: Resuelvo y formulo problemas que contengan factores escalares (diseño de maquetas, mapas).

DBA	CONTENIDOS Y CONCEPTOS	ESTÁNDARES BÁSICOS DE COMPETENCIAS
Descompone cualquier número entero en factores primos.	Descomposición de un número en factores primos y su uso para la solución de operaciones (radicación y suma con mcm).	
Comprende y calcula incrementos y reducciones porcentuales en diversos contextos.	Relaciones porcentuales entre cantidades (% más. % menos).	
Usa las relaciones entre velocidad, distancia y tiempo para solucionar problemas.	Calculo de velocidad en la solución de problemas.	VARIACIONAL: Reconozco el conjunto de valores de cada una de las cantidades variables ligadas entre sí en situaciones concretas de cambio (variación).
Hace dos copias iguales de dos rectas paralelas cortadas por una secante, y por medio de superposiciones, descubre la relación entre los ángulos formados.	Construcción de paralelogramos iguales y determinación de ángulos faltantes.	MÉTRICO: Utilizo técnicas y herramientas para la construcción de fi guras planas y cuerpos con medidas dadas.
Manipula expresiones lineales (del tipo ax + b, donde a y b son números dados), las representa usando gráficas o tablas y las usa para modelar situaciones.	Uso de expresiones lineales para modelar situaciones.	VARIACIONAL: Identifico las características de las diversas gráficas cartesianas (de puntos, continuas, formadas por segmentos, etc.) en relación con la situación que representan.
Dada una expresión de la forma $ax^2 + bx + c$ (donde a, b y c son números dados), calcula el valor de la expresión para distintos valores de x (positivos y negativos) y presenta sus resultados en forma de tabla o gráfica de puntos.	Cálculo de valores y representación gráfica de expresiones cuadráticas.	VARIACIONAL: Identifico las características de las diversas gráficas cartesianas (de puntos, continuas, formadas por segmentos, etc.) en relación con la situación que representan.
Predice el resultado de rotar, reflejar, transladar, ampliar o reducir una figura.	Transformaciones geométricas.	ESPACIAL: Predigo y comparo los resultados de aplicar transformaciones rígidas (traslaciones, rotaciones, reflexiones) y homotecias

DBA	CONTENIDOS Y CONCEPTOS	ESTÁNDARES BÁSICOS DE COMPETENCIAS
		(ampliaciones y reducciones) sobre figuras bidimensionales en situaciones matemáticas y en el arte.
Comprende que algunos conjuntos de datos pueden representarse con histogramas y que distintos intervalos producen distintas representaciones.	Histogramas de frecuencias con variación de intervalos y diagrama circular para la representación de datos.	ALEATORIO: Interpreto, produzco y comparo representaciones gráficas pertinentes para presentar diversos tipos de datos. (Diagramas de barras, diagramas circulares).
A partir de una gráfica de puntos o de línea, identifica e interpreta los puntos máximos y mínimos y el cambio entre dos puntos de la Gráfica.	Interpretación de gráficas como representación de variaciones. Interpretación del máximo y el mínimo.	ALEATORIO: Interpreto, produzco y comparo representaciones gráficas para presentar diversos tipos de datos. (Diagramas de barras, diagramas circulares).
Comprende cómo la distribución de los datos afecta la media (promedio), la mediana y la moda.	Interpretación de resultados de las medidas de tendencia central.	ALEATORIO: Uso medidas de tendencia central (Media, Mediana, Moda) para interpretar comportamiento de un conjunto de datos.
Entiende la diferencia entre la probabilidad teórica y el resultado de un experimento.	Análisis de probabilidad teórica y experimental. Diagrama de árbol para determinación de casos favorables y posibles. Representación porcentual de probabilidad.	ALEATORIO: Uso modelos (diagramas de árbol, por ejemplo) para discutir y predecir posibilidad de ocurrencia de un evento. ALEATORIO: Conjeturo acerca del resultado de un experimento aleatorio, usando proporcionalidad y nociones básicas de probabilidad.
Imagina y describe la figura que resultaría al sacarle tajadas a un objeto.	Relación forma tridimensional de un cuerpo y sus cortes bidimensionales.	ESPACIAL: Represento objetos tridimensionales desde diferentes posiciones y vistas. ESPACIAL: Identifico y describo figuras y cuerpos originados por cortes rectos y transversales de objetos tridimensionales.
En una serie sencilla identifica el patrón y expresa la n-ésima posición en términos de n.	Series y patrones.	

DBA	CONTENIDOS Y CONCEPTOS	ESTÁNDARES BÁSICOS DE COMPETENCIAS
MATEMÁTICAS GRADO OCTAVO		
Comprende sin un lenguaje formal la noción de función como una regla *f*, que a cada valor *x*, le asigna un único valor *f* (*x*) y reconoce que su gráfica está conformada por todos los puntos (*x*, *f* (*x*)).	Modelación de situaciones mediante funciones.	VARIACIONAL: Identifico las características de las diversas gráficas cartesianas (de puntos, continuas, formadas por segmentos, etc.) en relación con la situación que representan. (6º-7º). VARIACIONAL: Modelo situaciones de variación con funciones polinómicas.
Resuelve problemas de proporcionalidad directa e inversa, usando razones o proporciones, tablas, gráficas o ecuaciones.	Solución de problemas con relaciones de proporcionalidad directa e inversa.	NUMÉRICO: Utilizo números racionales, en sus distintas expresiones (fracciones, razones, decimales o porcentajes) para resolver problemas en contextos de medida. (6º-7º). NUMÉRICO: Justifico el uso de representaciones y procedimientos en situaciones de proporcionalidad directa e inversa. (6º-7º). NUMÉRICO: Resuelvo problemas y simplifico cálculos, usando propiedades y relaciones de los números reales y de las relaciones y operaciones entre ellos.
Realiza diagramas y maquetas estableciendo una escala y, explicando su procedimiento. Comprende cómo se transforma el área de una región o el volumen de cierto objeto dada cierta escala.	Diseño de maquetas a escala y determinación de variación de áreas y de volumen.	MÉTRICO: Resuelvo y formulo problemas que involucren factores escalares (diseño de maquetas, mapas). (6º-7º). NUMÉRICO: Resuelvo problemas y simplifico cálculos, usando propiedades y relaciones de los números reales y de las relaciones y operaciones entre ellos. MÉTRICO: Generalizo procedimientos de cálculo válidos para encontrar el área de regiones planas y el volumen de sólidos.

DBA	CONTENIDOS Y CONCEPTOS	ESTÁNDARES BÁSICOS DE COMPETENCIAS
Usa distintos criterios para identificar cuando dos triángulos son semejantes.	Criterios de semejanza.	ESPACIAL: Resuelvo y formulo problemas que involucren relaciones y propiedades de semejanza y congruencia, usando representaciones visuales. (6º-7º). ESPACIAL: Conjeturo y verifico propiedades de congruencias y semejanzas entre fi guras bidimensionales y entre objetos tridimensionales en la solución de problemas.
Utiliza transformaciones rígidas para justificar que dos figuras son congruentes.	Transformaciones geométricas y congruencia de figuras.	ESPACIAL: Predigo y comparo los resultados de aplicar transformaciones rígidas (traslaciones, rotaciones, reflexiones) y homotecias (ampliaciones y reducciones) sobre fi guras bidimensionales, en situaciones matemáticas y en el arte. (6º-7º). ESPACIAL: Conjeturo y verifico propiedades de congruencias y semejanzas entre figuras bidimensionales y entre objetos tridimensionales en la solución de problemas.
Diseña construcciones geométricas, usando regla y compás.	Construcciones geométricas con regla y compás.	MÉTRICO: Utilizo técnicas e instrumentos para la construcción de figuras planas y cuerpos con medidas dadas. (6º-7º).
Reconoce que la gráfica de $y = mx + b$ es una línea recta.	Geometría analítica, parámetros de la línea recta: pendiente y ecuación general.	VARIACIONAL: Identifico las características de las diversas gráficas cartesianas (de puntos, continuas, formadas por segmentos, etc.) en relación con la situación que representan. (6º-7º). VARIACIONAL: Identifico y utilizo diferentes maneras de definir y medir la pendiente de una curva que representa en el plano cartesiano situaciones de variación.

DBA	CONTENIDOS Y CONCEPTOS	ESTÁNDARES BÁSICOS DE COMPETENCIAS
Usa su conocimiento sobre funciones lineales ($f(x) = mx + b$)para plantear y solucionar problemas.	Resolución de problemas de aplicación de la línea recta.	NUMÉRICO: Utilizo números racionales, en sus distintas expresiones (fracciones, razones, decimales o porcentajes) para resolver problemas en contextos de medida. (6º-7º). VARIACIONAL: Identifico las características de las diversas gráficas cartesianas (de puntos, continuas, formadas por segmentos, etc.) en relación con la situación que representan. (6º-7º).
Aplica la propiedad distributiva en expresiones simples como $(Ax + B)(Cx + D)$.	Resolución de problemas de aplicación de ecuaciones de segundo grado.	NUMÉRICO: Utilizo números racionales, en sus distintas expresiones (fracciones, razones, decimales o porcentajes) para resolver problemas en contextos de medida. (6º-7º). VARIACIONAL: Analizo en representaciones gráficas cartesianas los comportamientos de cambio de funciones específicas pertenecientes a familias de funciones polinómicas, racionales, exponenciales y logarítmicas.
Reconoce que la gráfica de una función cuadrática (de la forma $g(x) = ax^2$, donde a es un número dado) es una parábola.	Geometría analítica, parámetros de la parábola: ecuación general. Solución de ecuaciones cuadráticas.	VARIACIONAL: Identifico las características de las diversas gráficas cartesianas (de puntos, continuas, formadas por segmentos, etc.) en relación con la situación que representan. (6º-7º).
Utiliza identidades como: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$	Identidades algebraicas.	VARIACIONAL: Reconozco el conjunto de valores de cada una de las cantidades variables ligadas entre sí en situaciones concretas de cambio (variación). (6º-7º). VARIACIONAL: Construyo expresiones algebraicas equivalentes a una expresión algebraica dada.

DBA	CONTENIDOS Y CONCEPTOS	ESTÁNDARES BÁSICOS DE COMPETENCIAS
Multiplica, divide, suma y resta fracciones que involucran variables (fracciones algebraicas) en la resolución de problemas.	Resolución de problemas con fracciones utilizando expresiones algebraicas.	NUMÉRICO: Utilizo números racionales, en sus distintas expresiones (fracciones, razones, decimales o porcentajes) para resolver problemas en contextos de medida. (6º-7º). NUMÉRICO: Utilizo números reales en sus diferentes representaciones y en diversos contextos.
Conoce el teorema de Pitágoras y alguna prueba gráfica del mismo.	Teorema de Pitágoras, prueba gráfica y solución de ejercicios.	MÉTRICO: Utilizo técnicas y herramientas para la construcción de fi guras planas y cuerpos con medidas dadas. (6º-7º). ESPACIAL: Reconozco y contrasto propiedades y relaciones geométricas, utilizadas en demostración de teoremas básicos (Pitágoras y Tales).
Conoce las fórmulas para calcular áreas de superficie y volúmenes de cilindros y prismas.	Reconocimiento de fórmulas de áreas y volúmenes de figuras geométricas.	VARIACIONAL: Reconozco el conjunto de valores de cada una de las cantidades variables ligadas entre sí en situaciones concretas de cambio (variación). (6º-7º). NUMÉRICO: Resuelvo problemas y simplifico cálculos, usando propiedades y relaciones de los números reales y de las relaciones y operaciones entre ellos. MÉTRICO: Generalizo procedimientos de cálculo válidos para encontrar el área de regiones planas y el volumen de sólidos.
Usa representaciones bidimensionales de objetos tridimensionales para solucionar problemas geométricos.	Representación bidimensional de objetos tridimensionales (vistas).	ESPACIAL: Represento objetos tridimensionales desde diferentes posiciones y vistas. (6º-7º).

DBA	CONTENIDOS Y CONCEPTOS	ESTÁNDARES BÁSICOS DE COMPETENCIAS
		ESPACIAL: Selecciono y uso técnicas e instrumentos para medir longitudes, áreas de superficies, volúmenes y ángulos con niveles de precisión apropiados.
Usa el teorema de Tales (sobre semejanza) para solucionar problemas.	Teorema de Thales (semejanza) y solución de ejercicios.	ESPACIAL: Reconozco y contrasto propiedades y relaciones geométricas utilizadas en demostración de teoremas básicos (Pitágoras y Tales).
Calcula la media de datos agrupados e identifica la mediana y la moda.	Medidas de tendencia central e interpretación de resultados.	ALEATORIO: Uso medidas de tendencia central (media, mediana, moda) para interpretar comportamiento de un conjunto de datos. (6º-7º). ALEATORIO: Interpreto y utilizo conceptos de media, mediana y moda y explicito sus diferencias en distribuciones de distinta dispersión y asimetría.
Comprende que distintas representaciones de los mismos datos se prestan para distintas interpretaciones.	Interpretaciones diferentes para variadas representaciones gráficas de la misma información estadística.	ALEATORIO: Interpreto, produzco y comparo representaciones gráficas adecuadas para presentar diversos tipos de datos. (Diagramas de barras, diagramas circulares). (6º-7º). ALEATORIO: Resuelvo y formulo problemas a partir de un conjunto de datos presentados en tablas, diagramas de barras, diagramas circulares. (6º-7º). ALEATORIO: Reconozco cómo diferentes maneras de presentación de información pueden originar distintas interpretaciones.

DBA	CONTENIDOS Y CONCEPTOS	ESTÁNDARES BÁSICOS DE COMPETENCIAS
MATEMÁTICAS GRADO NOVENO		
Reconoce el significado de los exponentes racionales positivos y negativos, y utiliza las leyes de los exponentes. Utiliza la notación científica para representar y operar con magnitudes en distintos contextos. Utiliza las leyes de los exponentes en diversas situaciones, incluyendo la simplificación de expresiones.	Leyes de los exponentes. Notación científica. Simplificación de expresiones que impliquen uso de exponentes.	NUMÉRICO: Resuelvo problemas y simplifico cálculos, usando propiedades y relaciones de los números reales y de las relaciones y operaciones entre ellos. NUMÉRICO: Utilizo la notación científica para representar medidas de cantidades de diferentes magnitudes.
Reconoce el significado del logaritmo de un número positivo en cualquier base y lo calcula sin calculadora en casos simples y con calculadora cuando es necesario, utilizando la relación con el logaritmo en base 10 (log) o el logaritmo en base e (ln). Utiliza y comprende las leyes de los logaritmos a partir de las leyes de los exponentes de las que provienen.	Logaritmo común o de base 10. Logaritmo natural o de base e. Leyes de los logaritmos.	NUMÉRICO: Identifico y utilizo la potenciación, la radicación y la logaritmación para representar situaciones matemáticas y no matemáticas y para resolver problemas.
Identifica cuando una relación es una función, reconoce que una función puede representarse de diversas maneras, y encuentra su dominio y su rango.	Definición de relación. Definición y representación de una función. Dominio y rango de una función.	VARIACIONAL: Identifico relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas. VARIACIONAL: Analizo en representaciones gráficas cartesianas los comportamientos de cambio de funciones específicas pertenecientes a

DBA	CONTENIDOS Y CONCEPTOS	ESTÁNDARES BÁSICOS DE COMPETENCIAS
		familias de funciones polinómicas, racionales, exponenciales y logarítmicas.
Realiza conversiones de unidades de una magnitud que incluye potencias y razones.	Conversión de unidades en diferentes sistemas de medida.	MÉTRICO: Justifico la pertinencia de utilizar unidades de medida estandarizadas en situaciones tomadas de distintas ciencias.
Conoce las propiedades y las representaciones gráficas de las familias de funciones lineales $f(x) = mx + b$ al igual que los cambios que los parámetros m y b producen en la forma de sus gráficas. Reconoce que las ecuaciones $ax + by = c$ definen líneas rectas en el plano e identifica que las que no son verticales, siempre pueden escribirse en la forma $y = mx + b$. Comprende que las funciones lineales modelan situaciones con razón de cambio constante. Plantea sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas y los resuelve, utilizando diferentes estrategias. Reconoce cuándo un sistema de ecuaciones lineales no tiene solución.	Función lineal. Análisis de la gráfica de una función lineal. Ecuaciones lineales y representación geométrica. Razón de cambio. Métodos de solución de ecuaciones lineales. Representación analítica y gráfica de rectas paralelas en el plano cartesiano.	VARIACIONAL: Identifico la relación entre los cambios en los parámetros de la representación algebraica de una familia de funciones y los cambios en las gráficas que las representan. VARIACIONAL: Identifico y utilizo diferentes maneras de definir y de medir la pendiente de una curva que representa en el plano cartesiano situaciones de variación. VARIACIONAL: Identifico diferentes métodos para solucionar sistemas de ecuaciones lineales.

DBA	CONTENIDOS Y CONCEPTOS	ESTÁNDARES BÁSICOS DE COMPETENCIAS
Describe características de la relación entre dos variables a partir de una gráfica.	Análisis de gráficas y sus variables respectivas.	VARIACIONAL: Identifico la relación entre los cambios en los parámetros de la representación algebraica de una familia de funciones y los cambios en las gráficas que las representan.
Conoce las propiedades y las representaciones gráficas de la familia de funciones $g(x) = ax^n$ con n entero positivo o negativo.	Propiedades de la función potencia.	
Comprende la noción de intervalo en la recta numérica, y representa intervalos de diversas formas (verbal, inecuaciones, de forma gráfica y con notación de intervalo). Resuelve y formula problemas que contengan inecuaciones lineales de una variable, utilizando las propiedades básicas de las desigualdades y representando su solución de forma gráfica en la recta numérica.	Intervalo. Clases de Intervalos. Operaciones con intervalos. Inecuaciones lineales y representación geométrica.	NUMÉRICO: Utilizo números reales en sus diferentes representaciones y en diversos contextos. NUMÉRICO: Resuelvo problemas y simplifico cálculos usando propiedades y relaciones de los números reales y de las relaciones y operaciones entre ellos.
Calcula el área de superficie y el volumen de pirámides, conos y esferas. Entiende que es posible determinar el volumen o área de superficie de un cuerpo a partir de la descomposición del mismo en sólidos conocidos.	Volumen. Sólidos geométricos. Área de la superficie de un cuerpo geométrico.	MÉTRICO: Generalizo procedimientos de cálculo válidos para encontrar el área de regiones planas y el volumen de sólidos. MÉTRICO: Selecciono y uso técnicas e instrumentos para medir longitudes, áreas de superficies, volúmenes y ángulos con niveles de precisión apropiados. ESPACIAL: Conjeturo y verifico propiedades de congruencias y semejanzas entre figuras

DBA	CONTENIDOS Y CONCEPTOS	ESTÁNDARES BÁSICOS DE COMPETENCIAS
		bidimensionales y entre objetos tridimensionales, en la solución de problemas.
Expresa una función cuadrática ($y = ax^2 + bx + c$) de distintas formas ($y = a(x + d)^2 + e, o\ y = a(x - f)(x - g)$) y reconoce el significado de los parámetros $a, c, d, e, f\ y\ g$, y su simetría en la gráfica. Utiliza distintos métodos para solucionar ecuaciones cuadráticas.	Función cuadrática. Representación gráfica y simetría. Ecuaciones cuadráticas.	
Conoce las propiedades y las representaciones gráficas de la familia de funciones exponenciales $h(x) = ka^x$ con a >0 y distinto de 1, al igual que los cambios de los parámetros a y k producen en la forma de sus gráficas. En general comprende las propiedades y características de las gráficas para todos los casos. Utiliza funciones exponenciales para modelar situaciones y resolver problemas.	Función exponencial. Propiedades de la función exponencial. Representación gráfica de la función exponencial. Transformaciones de funciones. Problemas de aplicación sobre la función exponencial.	
Conoce las razones trigonométricas seno, coseno y tangente en triángulos rectángulos. Utiliza el seno, el coseno y la tangente para solucionar problemas que contengan triángulos rectángulos.	Razones trigonométricas, aplicadas a triángulos rectángulos. Resolución de triángulos rectángulos.	

DBA	CONTENIDOS Y CONCEPTOS	ESTÁNDARES BÁSICOS DE COMPETENCIAS
Justifica geométrica o algebraicamente propiedades de las razones trigonométricas.	Propiedades de las razones trigonométricas.	
Realiza demostraciones geométricas sencillas a partir de principios que conoce.	Demostración geométrica.	ESPACIAL: Reconozco y contrasto propiedades y relaciones geométricas utilizadas en demostración de teoremas básicos (Pitágoras y Tales).
Resuelve problemas, utilizando principios básicos de conteo (multiplicación y suma).	Principios básicos de conteo.	
Reconoce las nociones de espacio muestral y de evento, al igual que la notación P(A) en la probabilidad de que ocurra un evento A.	Espacio muestral. Evento y probabilidad.	ALEATORIO: Comparo resultados de experimentos aleatorios con los resultados previstos por un modelo matemático probabilístico. ALEATORIO: Calculo probabilidad de eventos simples, usando métodos diversos (listados, diagramas de árbol, técnicas de conteo). ALEATORIO: Uso conceptos básicos de probabilidad (espacio muestral, evento, independencia, etc.).
Reconoce los conceptos de distribución y asimetría de un conjunto de datos, y reconoce las relaciones entre la Media, Mediana y Moda en relación con la distribución en casos sencillos.	Distribución de datos. Medidas de tendencia central.	ALEATORIO: Interpreto y utilizo conceptos de Media, Mediana y Moda y explicito sus diferencias en distribuciones de distinta dispersión y asimetría.
Realiza inferencias simples, a partir de información estadística de distintas fuentes.	Inferencia estadística, a partir de datos.	ALEATORIO: Interpreto analítica y críticamente información estadística proveniente de diversas

DBA	CONTENIDOS Y CONCEPTOS	ESTÁNDARES BÁSICOS DE COMPETENCIAS
		fuentes (prensa, revistas, televisión, experimentos, consultas, entrevistas. ALEATORIO: Resuelvo y formulo problemas seleccionando información relevante en conjuntos de datos provenientes de fuentes diversas. (prensa, revistas, televisión, experimentos, consultas, entrevistas).
MATEMÁTICAS GRADO DÉCIMO		
Reconoce que no todos los números son racionales, es decir, no todos los números se pueden escribir como una fracción de enteros $\frac{a}{b}$.	Números Irracionales.	NUMÉRICO: Analizo representaciones decimales de los números reales para diferenciar entre racionales e irracionales.
Comprende el concepto de límite de una sucesión.	Límite de una sucesión.	NUMÉRICO: Utilizo argumentos de la teoría de números para justificar relaciones que involucran números naturales.
Reconoce la familia de funciones logarítmicas $f(x) = \log_a x$ junto con su dominio, rango, propiedades y gráficas.	Función logarítmica. Dominio y rango de funciones logarítmicas.	
Comprende el significado de la razón de cambio promedio de una función en un intervalo, (a partir de gráficas, tablas o expresiones) y la calcula.	Razón de cambio promedio de una función.	
Reconoce la noción razón de cambio instantáneo de una función en un punto $x = a$: como la pendiente de la recta tangente a la gráfica en el punto A y como el valor al que tienden las razones de cambio promedio	Razón de cambio instantáneo.	VARIACIONAL: Utilizo las técnicas de aproximación en procesos infinitos numéricos.

DBA	CONTENIDOS Y CONCEPTOS	ESTÁNDARES BÁSICOS DE COMPETENCIAS
de la función entre $x = a$ y puntos cada vez más cercanos a éste.		
Reconoce los cambios generados en las gráficas de funciones cuando su expresión algebraica presenta variaciones como: $y = f(x) + a, y = bf(x), y = f(x + c), y = f(dx)$.	Transformaciones de funciones. Desplazamientos verticales de gráficas. Desplazamientos horizontales de gráficas. Estiramiento o acortamiento (se dilata o se contrae) vertical. Acortamiento y alargamiento horizontal de gráficas.	
Soluciona problemas geométricos en el plano cartesiano.	Coordenadas del punto medio. Distancia entre dos puntos. Teorema de paralelismo. Teorema de perpendicularidad. Puntos colineales. Ecuación de la circunferencia.	
Reconoce características generales de las gráficas de las funciones polinómicas, observando regularidades.	Suma, resta, multiplicación y división de polinomios. División sintética. Teorema del residuo. Teorema del factor.	
Soluciona inecuaciones del tipo $f(x) > g(x)$ o $f(x) \leq g(x)$, donde f y g son funciones dadas de forma gráfica o algebraica.	Inecuaciones de segundo grado.	
Compara y comprende la diferencia entre la variación exponencial y lineal.	Función lineal. Función exponencial.	

DBA	CONTENIDOS Y CONCEPTOS	ESTÁNDARES BÁSICOS DE COMPETENCIAS
	Problemas de aplicación.	
Utiliza calculadoras y software para encontrar un ángulo en un triángulo rectángulo, conociendo su seno, coseno o tangente.	Función trigonométrica inversa.	
Comprende y utiliza la ley del seno y el coseno para resolver problemas de matemáticas y otras disciplinas que involucren triángulos no rectángulos.	Ley de los Senos. Les de los Cosenos.	
Reconoce el radián como unidad de medida angular y conoce su significado geométrico.	Radián. Factores de conversión. Arco de una circunferencia. Área de un sector circular.	
Comprende la definición de las funciones trigonométricas $sen(x)\ y\ cos(x)$, en las cuales x puede ser cualquier número real y calcula a partir del círculo unitario, el valor aproximado de $sen(x)\ y\ cos(x)$.	Función seno y coseno. Dominio y rango. Período. Gráficas de las funciones seno y coseno.	
Utiliza el sistema de coordenadas polares y realiza conversiones entre éste y el sistema cartesiano, haciendo uso de argumentos geométricos y de sus conocimientos sobre las funciones trigonométricas.	Sistema de coordenadas cartesianas. Sistema de coordenadas polares. Conversión de coordenadas polares en cartesianas.	
Calcula e interpreta la probabilidad de que un evento ocurra o no ocurra en situaciones que involucran conteos con combinaciones y permutaciones.	Espacio muestral. Conectores lógicos. Operaciones entre conjuntos. Permutaciones. Combinaciones. Variaciones.	ALEATORIO: Resuelvo y planteo problemas, usando conceptos básicos de conteo y probabilidad (combinaciones, permutaciones, espacio muestral, muestreo aleatorio, muestreo con remplazo).

DBA	CONTENIDOS Y CONCEPTOS	ESTÁNDARES BÁSICOS DE COMPETENCIAS
Calcula y utiliza los percentiles para describir la posición de un dato con respecto a otros.	Percentiles.	ALEATORIO: Uso comprensivamente algunas medidas de centralización, de localización, de dispersión y de correlación (percentiles, cuartiles, centralidad, distancia, rango, varianza, covarianza y normalidad).
MATEMÁTICAS GRADO UNDÉCIMO		
Comprende que entre cualesquiera dos números reales hay infinitos números reales.	Números reales.	NUMÉRICO: Reconozco la densidad e incompletitud de los números racionales a través de métodos numéricos, geométricos y algebraicos. NUMÉRICO: Comparo y contrasto las propiedades de los números (naturales, enteros, racionales y reales) y las de sus relaciones y operaciones para construir, manejar y utilizar apropiadamente los distintos sistemas numéricos.
Estima el tamaño de ciertas cantidades y juzga, si los cálculos numéricos y sus resultados son razonables. Estima el error posible en un cálculo.	Unidades de medida.	
Interpreta la pendiente de la recta tangente a la gráfica de una función f(x) en un punto A = (a, f (a)) como el límite de las pendientes de las rectas secantes entre el punto A y puntos sobre la gráfica que se acercan a A.	Pendiente de la recta tangente a una curva, en un punto dado. Razón de cambio instantánea.	VARIACIONAL: Interpreto la noción de derivada como razón de cambio y como valor de la pendiente de la tangente a una curva y desarrollo métodos, para hallar las derivadas de algunas funciones básicas en contextos matemáticos y no matemáticos.
Reconoce la derivada de una función como la función de razón de cambio instantáneo.	Derivada de una función.	

DBA	CONTENIDOS Y CONCEPTOS	ESTÁNDARES BÁSICOS DE COMPETENCIAS
Conoce las fórmulas de las derivadas de funciones polinomiales, trigonométricas, potencias, exponenciales y logarítmicas y las utiliza para resolver problemas.	Fórmulas de derivación. Fórmulas de las derivadas de funciones polinómicas, trigonométricas, potencia, exponencial y logarítmica.	ESPACIAL: Describo y modelo fenómenos periódicos del mundo real usando relaciones y funciones trigonométricas.
Modela situaciones haciendo uso de funciones definidas a trozos.	Función por tramos. Problemas de aplicación.	
Analiza algebraicamente funciones racionales y encuentra su dominio y sus asíntotas.	Función racional. Dominio y rango de funciones racionales. Asíntotas.	VARIACIONAL: Analizo las relaciones y propiedades entre las expresiones algebraicas y las gráficas de funciones polinómicas y racionales y de sus derivadas.
Reconoce las propiedades básicas que diferencian las familias de funciones exponenciales, lineales, logarítmicas, polinómicas, etc., e identifica cuáles puede utilizar para modelar situaciones específicas.	Propiedades básicas de los diferentes tipos de funciones. Problemas de aplicación.	VARIACIONAL: Modelo situaciones de variación periódica con funciones trigonométricas e interpreto y utilizo sus derivadas.
Reconoce cuándo una función tiene o no una función inversa.	Función inversa.	
Conoce las funciones trigonométricas inversas (arcoseno, arcocoseno y arcotangente) junto con sus gráficas, dominio y rango.	Funciones trigonométricas inversas.	
Conoce las propiedades geométricas que definen distintos tipos de cónicas (parábolas, elipses e hipérbolas) en el plano y las utiliza para encontrar las ecuaciones generales de este tipo de curvas.	Secciones cónicas. Aplicaciones de las curvas cónicas.	ESPACIAL: Identifico en forma visual, gráfica y algebraica, algunas propiedades de las curvas que se observan en los bordes obtenidos por cortes longitudinales, diagonales y transversales en un cilindro y en un cono.

DBA	CONTENIDOS Y CONCEPTOS	ESTÁNDARES BÁSICOS DE COMPETENCIAS
		ESPACIAL: Resuelvo problemas en los cuales se usen las propiedades geométricas de figuras cónicas por medio de transformaciones de las representaciones algebraicas de esas figuras.
Utiliza los sistemas de coordenadas espaciales cartesiano y esférico para especificar la localización de objetos en el espacio.	Sistema de coordenadas espaciales cartesiano y esférico.	ESPACIAL: Reconozco y describo curvas y o lugares geométricos.
Razona geométrica y algebraicamente para resolver problemas y para encontrar fórmulas que relacionan magnitudes en diversos contextos.	Problemas que relacionan magnitudes.	ESPACIAL: Uso argumentos geométricos para resolver y formular problemas en contextos matemáticos y en otras ciencias. MÉTRICO: Resuelvo y formulo problemas que contengan magnitudes cuyos valores medios se suelen definir indirectamente como razones entre valores de otras magnitudes, como la velocidad media, la aceleración media y la densidad media.
Utiliza nociones básicas relacionadas con el manejo y recolección de información como población, muestra y muestreo aleatorio.	Población. Muestra. Muestreo aleatorio.	ALEATORIO: Interpreto nociones básicas relacionadas con el manejo de información como población, muestra, variable aleatoria, distribución de frecuencias, parámetros y estadígrafos).
Conoce el significado de la probabilidad condicional y su relación con la probabilidad de la intersección: $P(A/B) = P(A \cap B) \,/\, P(B)$. Utiliza la probabilidad condicional para hacer inferencias sobre muestras aleatorias.	Probabilidad condicional.	ALEATORIO: Interpreto conceptos de probabilidad condicional e independencia de eventos.

DBA	CONTENIDOS Y CONCEPTOS	ESTÁNDARES BÁSICOS DE COMPETENCIAS
Determina si dos eventos son dependientes o independientes, utilizando la noción de probabilidad condicional.	Eventos dependientes o independientes.	ALEATORIO: Propongo inferencias a partir del estudio de muestras probabilísticas.
Reconoce la desviación estándar como una medida de dispersión de un conjunto de datos.	Desviación estándar.	

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Apostol, T. (2006). *Análisis Matemático*. Reverté S.A.: Barcelona.

Batanero, C. (2001). Didáctica de la Estadística. Grupo de Investigación en Educación Estadística. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Bedoya, E. (2002) *Formación Inicial de Profesores de Matemáticas: Enseñanza de Funciones, Sistemas de Representación y Calculadoras Graficadoras*. Granada: Universidad de Granada.

Chevallard, Y. (1991). La transposición didáctica. *Del saber sabio al saber enseñado, 3*.

Dolores, C.; Guerrero, L.; Martínez, M. y Medina, M. (2002). Un estudio acerca de las concepciones de los estudiantes sobre el comportamiento variacional de funciones elementales. En C. Crespo Crespo (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *15* (1) 73–84. México: Grupo Editorial Iberoamericana.

López, J. y Sosa, L. (2008). Dificultades conceptuales y procedimentales en el estudio de funciones en estudiantes de bachillerato. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 21*, 308–318. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Ministerio de Educación Nacional [MEN]. (2006). Documento No. 3. Estándares Básicos de Competencia en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas. Bogotá: MEN.

Ministerio de Educación Nacional [MEN]. (2008). Guía No. 31. Evaluación Anual de Desempeño de Docentes y Directivos Docentes. Bogotá: MEN.

Ministerio de Educación Nacional [MEN]. (2014). Documento Guía. Evaluación de competencias para el ascenso o reubicación de nivel salarial en el Escalafón de Profesionalización Docente de los docentes y directivos docentes regidos por el Decreto Ley 1278 de 2002. Bogotá: MEN.

Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos curriculares de Matemáticas*. Bogotá: MEN.

M. Kline. El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días. (vol. I). Alianza Universidad. 1992.

Rico, L. (2004). *La evaluación de matemáticas en el proyecto PISA. Aproximación a un modelo de evaluación: el proyecto PISA 2000.* Madrid: Ministerio de Educación, Cultura y Deporte.

Secretaría de Educación Municipal de Medellín. (2013). Olimpiadas del conocimiento. Módulo para el desarrollo de competencias Matemáticas 10 y 11. Medellín: Alcaldía de Medellín.

Stewart, J. et al. (2007). *Precálculo. Matemáticas para el Cálculo*. Thomson Editores: México.

Stewart, J. et ál. (2007). Precálculo. Matemáticas para el Cálculo. Bogotá: Thomson Learning.

Uribe, J. (2011). Matemática Experimental. Medellín: Uros Editores.

CIBERGRAFÍA:

Aguilar, A. (2007). *Probabilidad y Estadística*. Recuperado el 24 de julio de 2014 de: http://www.cecytebc.edu.mx/HD/archivos/antologias/probabilidad_y_estadistica.pdf

Algoritmo de Euclides. Recuperado el 6 de julio de 2014 de: http://huitoto.udea.edu.co/SistemasDiscretos/contenido/alg_euclides.html

Aplicaciones de la función lineal. (2010). Recuperado el 28 de julio de 2014 de: http://maralboran.org/web_ma/Anaya/USB/3ESO/documents/mat3eso_ac_82.pdf

Batanero, C. y Díaz, C. (2011). *Estadística con Proyectos*. Recuperado el 18 de julio de 2014 de: http://www.ugr.es/~batanero/ARTICULOS/Libroproyectos.pdf

Bergamini, D. Matemáticas Colección Científica Life-Time. Recuperado del 16 de noviembre de 2014 de: http://es.scribd.com/doc/235519033/4/Capitulo-4-Un-enlace-feliz-entre-curvas-y-cantidades

Cabra, M. y Gómez, J. (2006). *La función lineal en diferentes contextos*. Recuperado el 28 de julio de 2014 de: http://www.colombiaaprende.edu.co/html/mediateca/1607/articles-110456_archivo.pdf

Coriat, M. y Scaglia, S. (2010). *Representación de los números reales en la recta*. Recuperado el 8 de julio de 2014 de: http://ddd.uab.es/pub/edlc/02124521v18n1p25.pdf

Cubero, J. (2001). *Dados y Datos*. Institut Balear d'Estadística. Recuperado el 24 de julio de 2014 de: http://www.ibestat.com/ibfiles/DIDcast.pdf

Cubero, J. (2010). *Dados y Datos III. El paso de la incertidumbre al riesgo*. Recuperado el 20 de julio de 2014 de: http://www.ibestat.com/ibfiles/DadosDatos3_CAST.pdf

Figura Geométrica. Wikipedia. Recuperado el 16 de noviembre de 2014 de: http://es.wikipedia.org/wiki/Figura_geom%C3%A9trica

Introducción a la simetría. (2012). Recuperado el 16 de noviembre de 2014 de: http://es.slideshare.net/reinaf/introduccin-a-la-simetra

La tecla de escape. Recuperado el 7 de julio de 2014 de: http://latecladeescape.com/t/Algoritmo+de+Euclides

Pavía, J. et al. (2013). Docencia en Estadística. Experiencias de innovación. Recuperado el 15 de julio de 2014 de: http://www.uv.es/jidere/files/libro_jidere_13.pdf

Pierre de Fermat. Recuperado el 2 de agosto de 2014 de: http://mimosa.pntic.mec.es/jgomez53/matema/conocer/fermat.htm

Posada, H. y Buitrago, M. (2008). *Estadística. Guía Didáctica y Módulo*. FUNLAM. Recuperado el 17 de julio de 2014 de: http://www.funlam.edu.co/administracion.modulo/NIVEL-03/Estadistica.pdf

Rodríguez, O. (2007). *Probabilidad y Estadística Básica para Ingenieros*. Recuperado el 21 de julio de 2014 de: http://www.icm.espol.edu.ec/icmweb/servicios/Actualizacion_Libros_Nov_2012/PROBABILIDAD%20Y%20ESTADISTICA%20BASICA%20PARA%20INGENIEROS.pdf

Sistemas numéricos. (2009). *Revista Matemática Digital No. 18*. Recuperado el 29 de julio de 2014 de: http://www.mendomatica.mendoza.edu.ar/nro18/Losnrosracionales_S1_18.pdf

Solarte, M. Los conceptos científicos presentados en los textos escolares: son consecuencia de la transposición didáctica. En: Revista ieRed: Revista Electrónica de la Red de Investigación Educativa [en línea]. Vol.1, No.4 (Enero-Junio de 2006). Disponible en Internet: <http://revista.iered.org>. ISSN 1794-8061

Villaraga, S. (2012). *La función cuadrática y la modelación de fenómenos físicos o situaciones de la vida real utilizando herramientas tecnológicas como instrumentos de mediación. UN. Facultad de Ciencias*. Recuperado el 29 de julio de 2014 de: http://www.bdigital.unal.edu.co/9004/1/Sandrapatriciavillarragaperlaza.2012.pdf

El principal referente conceptual del proceso de evaluación de competencias que fue aplicado a los docentes en Colombia hasta el año 2015, lo proporciona el Decreto Ley 1278 de 2002. Esta norma en su artículo 35 define una competencia como

> **“ una característica subyacente en una persona causalmente relacionada con su desempeño y actuación exitosa en un puesto de trabajo. ”**

Igualmente, se plantea que la Evaluación de Competencias valora la interacción de disposiciones, conocimientos y habilidades, interiorizados en cada persona, para abordar y solucionar situaciones concretas; y además se desarrolla con el aprendizaje y la práctica, lo cual conlleva a lograr mejores niveles de desempeño (MEN, 2008, p. 13).

En el presente documento, se plantean como estructura interna unas definiciones o conceptos básicos, algunos referentes históricos en cada uno de los tópicos: numérico, geométrico y aleatorio y finalmente un conjunto de modelos de preguntas que se pueden aplicar en la evaluación por competencias, específicamente en el área de las Matemáticas. Estos últimos pueden constituirse en un insumo para la preparación del proceso curricular, que permita al lector obtener un mejor desempeño en la actual evaluación propuesta por el MEN, para ascenso y reubicación salarial.

ELIME
Equipo línea de investigación matemática educativa y escolar

CEID ADIDA
CENTRO DE ESTUDIOS E INVESTIGACIONES DOCENTES