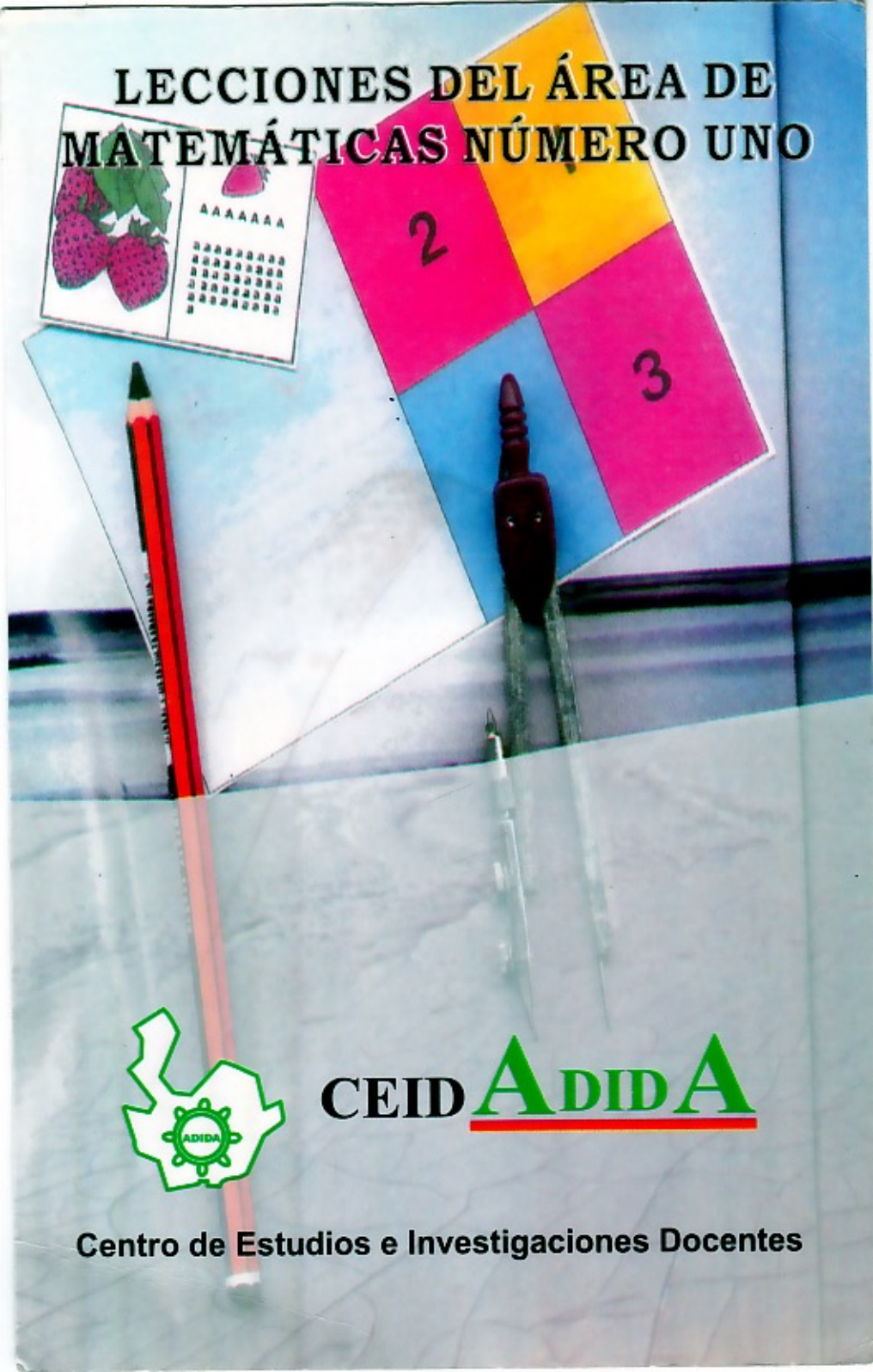
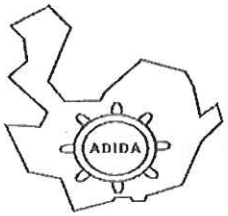
LECCIONES DEL ÁREA DE MATEMÁTICAS NÚMERO UNO



CEID ADIDA

Centro de Estudios e Investigaciones Docentes

LECCIONES DEL ÁREA DE MATEMÁTICAS
NÚMERO UNO



CEIDADIDA

Centro de Estudios e Investigaciones Docentes

LECCIONES DEL ÁREA DE MATEMÁTICAS NÚMERO UNO

LUIS GONZAGA DE J. RESTREPO RAMÍREZ
Coordinador del Área de Matemáticas

EQUIPO PEDAGÓGICO

JORGE CARDEÑO ESPINOSA
Director CEID ADIDA
LUZ AMERICA FERNÁNDEZ ZEA
MAGDALENA LÓPEZ VALENCIA
CARLOS HUMBERTO OSPINA
JUAN SEBASTIAN MENA MOSQUERA
SEGUNDO JAVIER ARTEAGA
ERASMO PUERTA GÓMEZ

Medellín
Abril de 2001

®CENTRO DE ESTUDIOS E INVESTIGACIONES DOCENTES
CEID – ADIDA

ÁREA DE INVESTIGACIÓN DE MATEMÁTICAS

ISBN_____

JORGE ALIRIO CARDEÑO ESPINOSA
Director CEID ADIDA

EQUIPO PEDAGÓGICO

Primera Edición: abril de 2001; 1500 Ejemplares

Diseño de Carátula: Saúl Salazar Montoya
Diseño de Interiores: Emely Ardila Benitez
Digitación: Diego Hernán Giraldo V. - Jorge Cardeño E.

Comité Técnico de Revisión: Primera Revisión

Jorge Cardeño Espinosa
Director CEID – ADIDA
Luis Gonzaga de J. Restrepo Ramírez
Coordinador Área de Matemáticas. CEID – ADIDA
Luz América Fernández Zea
Lic. En Matemáticas – Física. U. de A.
Magdalena López Valencia
Ms. En Educación y Desarrollo Comunitario.
Segundo Javier Arteaga
Lic. En Electrotecnia. U. de A.
Luis Alonso Londoño Zapata
Secretario de Asuntos Pedagógicos y
Educación Sindical. ADIDA

Impreso y hecho en Colombia/ printed and made in Colombia.

En la imprenta: Editorial Aires Litográficos E.U.
Cra 39A N° 66c-25 teléfonos 254 28 85 Fax 254 27 85

Se puede reproducir parcial o totalmente sin fines comerciales.
CEID – ADIDA. Calle 57 N° 42-70 Teléfonos 2291020
extensión 020 Fax. 2291031- 2291032

"Hay verdaderamente dos cosas bien diferentes:
Saber y creer que se sabe. La ciencia consiste en saber; en creer que se sabe reside la ignorancia"

HIPÓCRATES

"El factor más importante que influye en el aprendizaje es lo que el alumno ya sabe. Averíguese eso y enséñese en consecuencia"

AUSUBEL

"Un hombre llega a ser comunista solo cuando enriquece su mente con todos los tesoros fomentados por la humanidad"

V.I. LENIN

CONTENIDO

Pág.

1. LA FORMACIÓN DE CONCEPTOS MATEMÁTICOS 15
1.1. TIPOS DE CONCEPTOS 19
1.1.1. CONCEPTO DE OBJETO 19
1.1.2. CONCEPTO DE OPERACIÓN 19
1.1.3. CONCEPTO DE RELACIÓN 19
1.2. PROCESO DE ELABORACIÓN DEL CONCEPTO . 21
1.2.1. CONSIDERACIONES Y EJERCICIOS PREPARATORIOS 21
1.2.2. FORMACIÓN DEL CONCEPTO 21
1.2.3. ASIMILACIÓN O FIJACIÓN DEL CONCEPTO 21
1.3. ASPECTOS METODOLÓGICOS EN LA FORMACIÓN DE CONCEPTOS 21
1.3.1. VIA INDUCTIVA 21
1.3.2. VIA DEDUCTIVA 22
2. TENDENCIAS ACTUALES EN LA ENSEÑANZA APRENDIZAJE DE LA GEOMETRÍA BÁSICA .. 23
2.1. FORMACIÓN DEL CONCEPTO PERÍMETRO MEDIANTE LA VÍA INDUCTIVA 27
2.1.1. NIVEL DE PARTIDA 27
2.1.2. ASEGURAMIENTO DEL NIVEL DE PARTIDA 28
2.1.3. ORIENTACIÓN HACIA EL OBJETIVO 31
2.1.4. CONSIDERACIONES Y EJERCICIOS PREPARATORIOS 32
2.1.5. ASIMILACIÓN O FIJACIÓN DEL CONCEPTO 34
2.1.6. CONSIDERACIONES METODOLÓGICAS Y CIENTÍFICAS 35
2.2. EXPERIENCIA PEDAGÓGICA DE INVESTIGACIÓN ... 37
2.2.1. GRUPO UNO: RECTÁNGULO DE 13 CM X 4 CM. 38
2.2.2. GRUPO DOS: RECTÁNGULO DE 12.7 CM X 4.3 CM 41
2.2.3. CONCLUSIONES 45
2.3. PENSAMIENTO GEOMÉTRICO 46
2.4. REFLEXIONES METODOLÓGICAS 49

3. INDICADORES DE LOGRO DE LA ASIGNATURA DE GEOMETRÍA 56
3.1. INDICADORES DE LOGRO PARA EL NIVEL PREESCOLAR 57
3.2. INDICADORES DE LOGRO EN BÁSICA PRIMARIA 58
3.2.1. GRADOS 1, 2 Y 3 58
3.2.2. GRADOS 4. 5 Y 6 58
3.3. EL CONTENIDO DE LA ASIGNATURA DE GEOMETRÍA EN EL NIVEL PREESCOLAR 59
4. PROPUESTA DE CONTENIDOS GEOMÉTRICO EN PRIMARIA 60
4.1. INTRODUCCIÓN 60
4.2. CONTENIDO: SISTEMAS GEOMÉTRICOS Y SISTEMAS MÉTRICOS 61
4.2.1. GRADO PRIMERO 61
4.2.2. GRADO SEGUNDO 61
4.2.3. GRADO TERCERO 62
4.2.4. GRADO CUARTO 63
4.2.5. GRADO QUINTO 64
4.3. SITUACIÓN COMPARATIVA 66
4.4. DIFICULTADES 67
4.5. SUGERENCIAS 68
5. LOS MEDIOS EN LA GEOMETRÍA 68
6. PROBLEMAS ELEMENTALES EN GEOMETRÍA 68
REFLEXIONES METODOLÓGICO - DIDÁCTICAS 72
6.1. OBJETIVOS PLANTEADOS CON LOS EJERCICIOS DE APLICACIÓN Y PROBLEMAS 73
6.2. PROBLEMAS ELEMENTALES EN GEOMETRÍA 74
6.3. PROBLEMAS METODOLÓGICOS EN LA ELABORACIÓN DE LOS CONCEPTOS Y EN EL TRATAMIENTO DE LAS FÓRMULAS 75
7. EVALUACIÓN 77
8. REPORTAJE A LA HISTORIA 79
9. GEOMETRÍA FÍSICA Y GEOMETRÍA PURA 86
10. EL PARQUÉS. UNA ESTRATEGIA PEDAGÓGICA..... 87
10.1 INTRODUCCIÓN 88

10.2 PROBLEMA 88
10.3 OBJETIVO 88
10.4 CONTENIDOS 89
10.5 MÉTODO 89
10.6 EJEMPLOS Y EXPLICACIÓN 91
10.7 LA FORMA 94
10.8 MEDIOS O RECURSOS 94
10.9 EVALUACIÓN 94
11. PROPUESTA DIDÁCTICA PARA LA ENSEÑANZA DE LA DIVISIÓN EN EL GRADO SEGUNDO (BÁSICA PRIMARIA) 95
11.1. OBJETIVOS GENERALES 95
11.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS 95
11.3. RESUMEN 95
11.4. GENERALIDADES SOBRE LA DIVISIÓN: ANP..... 96
11.5. ASEGURAMIENTO DEL NIVEL DE PARTIDA..... 96
11.6. REPARTAMOS 99
11.7. ESTAMOS DIVIDIENDO 99
12. LOS PROCEDIMIENTOS DE SOLUCIÓN CON CARÁCTER HEURÍSTICO EN LAS CLASES DE MATEMÁTICA 101
12.1. LA HEURÍSTICA Y SU UTILIDAD EN LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA 101
12.2. LOS PRINCIPIOS HEURÍSTICOS 103
12.2.1.PRINCIPIO DE ANALOGÍA 104
12.2.2.PRINCIPIO DE REDUCCIÓN 106
12.2.3.PRINCIPIO DE INDUCCIÓN INCOMPLETA 108
12.2.4.PRINCIPIO DE GENERALIZACIÓN 108
12.2.5.PRINCIPIO DE MOVILIDAD 109
12.2.6.PRINCIPIO DE MEDIR Y PROBAR 109
12.2.7.PRINCIPIO DE LA CONSIDERACIÓN DE LOS CASOS ESPECIALES Y CASOS LÍMITES..... 109
12.3. LAS ESTRATEGIAS HEURÍSTICAS 110
12.3.1.LA ESTRATEGIA DE TRABAJO HACIA ADELANTE.. 110
12.3.2. EL TRABAJO HACIA ATRÁS 112
12.4. LAS REGLAS HEURÍSTICAS 114

12.4.1. EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EXTRAMATEMÁTICOS 116
12.4.2. EN LA RESOLUCIÓN DE EJERCICIOS DE CONSTRUCCIÓN 116
12.4.3. EN LA DEMOSTRACIÓN DE TEOREMAS 117
12.4.4. EN LA DEDUCCIÓN DE TEOREMAS 117
12.5. EL PROGRAMA HEURÍSTICO GENERAL 118
13. EL MÉTODO HEURÍSTICO UNA ALTERNATIVA PARA GUIAR EL PROCESO DE ENSEÑANZA APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS..... 124
13.1. ¿QUÉ ES HEURÍSTICA? 124
13.2. VENTAJAS DE LA UTILIZACIÓN DEL MÉTODO HEURÍSTICO 125
13.3. DIFICULTADES DE LA UTILIZACIÓN DEL MÉTODO HEURÍSTICO 126
13.4. ESQUEMA DEL PROGRAMA HEURÍSTICO GENERAL 127
13.4.1. ORIENTACIÓN HACIA EL PROBLEMA 127
13.4.2. TRABAJO EN EL PROBLEMA 127
13.4.3. SOLUCIÓN DEL PROBLEMA 127
13.4.4. EVALUACIÓN DE LA SOLUCIÓN Y DE LA VÍA 127
13.5. RECOMENDACIONES PARA LA UTILIZACIÓN DEL MÉTODO HEURÍSTICO 128
13.6. EJEMPLOS DE LA UTILIZACIÓN DEL MÉTODO HEURÍSTICO EN EL PROCESO ENSEÑANZA APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA 128
13.6.1. CLASE DE GEOMETRÍA 128
13.6.2. CLASE DE ÁLGEBRA 132
14. LA COMPRENSIÓN, FORMULACIÓN Y SOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS..... 136
14.1. ¿QUÉ ES COMPRENSIÓN? 137
14.2. PROCEDIMIENTO GENERALIZADO PARA LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS 137
14.3. EJEMPLIFICACIÓN DEL PROCEDIMIENTO GENERADO PARA LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS. 139

15. LA CREACIÓN DE UNA MOTIVACIÓN 141
15.1. FUNCIÓN DIDÁCTICA: INTRODUCCIÓN A LA NUEVA MATERIA 142
15.1.1. ASPECTO:CREACIÓN DE UNA MOTIVACIÓN..... 142
15.2. CONCLUSIONES 147
16. EL PENSAMIENTO METAFÓRICO 149
16.1. APUNTES 149
16.2. LA METÁFORA 150
16.2.1. USO DE LA METÁFORA 152
16.2.2. LA METÁFORA COMO MOTIVACIÓN 155
16.2.3. EL PENSAMIENTO METAFÓRICO 156
16.3. ELABORACIÓN DE CONCEPTOS 157
16.4. EL CAMPO ASOCIATIVO 158
16.5. INTERDISCIPLINARIEDAD E INTERTEXTUA LIDAD. 159
16.6. L A ARGUMENTACIÓN 160
16.7. CONCLUSIÓN 162

PRESENTACIÓN

La Junta Directiva de la Asociación de Institutores de Antioquia ADIDA se complace en presentar a la comunidad académica del departamento de Antioquia y del país, el segundo texto de Lecciones del Centro de Estudios e Investigaciones Docentes CEID.

Las "Lecciones de Área" tienen como propósito fundamental aportar a la reflexión pedagógica, metodológica y de investigación alrededor de los distintos saberes específicos, buscando la profundización en la didáctica y en el contenido de las ciencias, asignaturas y disciplinas mediante lo cual este texto se constituye en una herramienta metodológica de trabajo para los maestros y maestras del Área de Matemáticas en los diferentes escenarios escolares.

Éste texto está construido a partir de los seminarios en Didáctica de las Matemáticas y Microcurrículos de Matemáticas realizado por los educadores durante los años 1999 y 2000; sistematizado por el Equipo de Investigación del Área de Matemáticas.

La sistematización realizada por los colegas pretende hacer una reflexión alrededor de cómo se vivencian las prácticas pedagógicas cotidianas en las aulas escolares y como los docentes construyen un discurso pedagógico con relación a su disciplina del conocimiento.

En tal sentido el primer título aborda la formación de los Conceptos Matemáticos, pues es a partir de allí, que se logra edificar el soporte conceptual de los demás textos, artículos o experiencias pedagógicas que se proponen por parte de los autores.

El segundo título explica las Tendencias Actuales en la Enseñanza Aprendizaje de la Geometría Básica y presenta resultados de investigación de pruebas efectuadas a docentes, con la finalidad de determinar el dominio del

contenido geométrico por parte de estos, obteniendo algunas conclusiones y reflexiones metodológicas.

Del tercer al séptimo título y conforme a una de las líneas de investigación del Área de Matemáticas del CEID - ADIDA, que se ha trabajado con profundidad desde hace varios años, "La Geometría Básica", se desarrollan como Categorías Didácticas referidas a esta asignatura: Indicadores de logros, contenidos, medios, problemas y reflexiones metodológicas y Evaluación.

En el octavo y noveno título se vuelve sobre un elemento esencial en las nuevas tendencias de la Educación Matemática y es la necesidad de introducir el componente histórico en los procesos de enseñanza aprendizaje de ésta ciencia.

Los títulos décimo y undécimo proponen estrategias pedagógicas y metodológicas conducentes a la comprensión de las operaciones básicas en el nivel preescolar y ciclo de primaria a través del "Parqués una estrategia pedagógica" y "propuesta didáctica para la enseñanza de la división en el grado segundo".

En décimo segundo y tercer título, desarrolla una propuesta metodológica con base en la Heurística para la aplicación directa en el aula de clase y de igual manera presenta una fundamentación del Método Heurístico.

Desde el Área de Matemáticas del CEID proponemos la heurística como propuesta metodológica para el desarrollo y comprensión de los contenidos matemáticos y en particular los geométricos.

Conscientes de las dificultades a las que se enfrentan maestros y estudiantes en el tratamiento didáctico de los problemas matemáticos en el aula, el título décimo cuarto explica y ejemplifica algunos procedimientos generalizados para la solución de éstos.

Es necesario tener y generar interés en cualquier proceso

de aprendizaje que conlleve a la solución de ejercicios, problemas y tareas; por tal motivo el título décimo quinto "La Creación de una Motivación" propone la discusión rigurosa de las funciones didácticas (determinados modos de actuación profesional).

Pero no solo existe actualmente preocupación por los procesos de motivación, los cuales se evidencian con frecuencia en consideraciones de nuestros estudiantes cuando se refieren a la Matemática como una materia "difícil", sino también el bajo dominio en la comprensión de textos globales. (Desarrollo del Lenguaje), por ello la importancia de vincular la Matemática con la lengua materna.

Ésta es la importancia del último título décimo sexto cuando expresa "el pensamiento metafórico" como una estrategia pedagógica mediante la cual se puede enseñar y aprender Matemáticas, particularmente la metáfora se constituye en un elemento de motivación y desarrollo del pensamiento en nuestros alumnos.

Algo si es claro en el mundo de hoy y es que ya nadie puede dominar todos los aspectos de su ciencia, lo cual significa que los que se dedican a la investigación, cada vez son un círculo más reducido.

Debemos volver sobre los pasos intermedios que aparecen una y otra vez, y no optar por presuponer su validez algo así como la frase "Eso es trivial o lógico", familiarizar nuestros estudiantes con el lenguaje, (código de escritura) y ayudar a la formación de mentes con un sentido permanente de curiosidad y descubrimiento.

Sea bienvenida esta producción intelectual de los educadores del Área de Matemáticas como un aporte a la calidad de la enseñanza y como una demostración tangible de que es posible construir reflexión pedagógica, a partir de nosotros mismos sin la ofensiva periodística de los medios de comunicación de considerar a los docentes como los únicos responsables de los males educativos del país.

En horabuena, colegas matemáticos, les auguramos éxitos y bienvenida a la crítica pedagógica.

"La enseñanza tradicional de las Matemáticas no solo es aburridora; lo grave es que ni siquiera tiene en cuenta la inteligencia del alumno. Parece una idea fija de la pedagogía creer que los niños no están capacitados para pensar de manera abstracta[1]".

Fraternalmente,

LUIS ALONSO LONDOÑO Z.
Secretario de Asuntos Pedagógicos y Educación Sindical.
JORGE CARDEÑO ESPINOSA
Director CEID - ADIDA

[1] Hans Magnus Enzens Berger, Puentes levadizos fuera de servicio: Las Matemáticas allende la cultura. Revista el malpensante, 31 de enero de 2001 pág. 29

AGRADECIMIENTOS

A la Junta Directiva de ADIDA y en particular al Secretario de Asuntos Pedagógicos y Educación Sindical, quien ha orientado en forma permanente y consecutiva la producción intelectual de los docentes integrantes del Equipo Pedagógico del Centro de Estudios e Investigaciones Docentes CEID, a través de la línea de trabajo de las Lecciones de cada una de las Áreas de Investigación Educativa.

Al Director del CEID ADIDA Jorge Cardeño, quien es el autor material del presente libro y logró con su trabajo académico e intelectual entusiasmar otros compañeros, como en el mío propio en la materialización del presente trabajo, el cual el inicio desde 1999 como coordinador del Área de Matemáticas.

A los maestros que creyeron en este sueño y dedicaron horas y horas a la corrección e inventiva de este texto, conscientes de su responsabilidad histórica en la primera producción de las Lecciones del Área de investigación de Matemáticas del CEID, Luz América Fernández, Magdalena López, Carlos Humberto Ospina, Juan Sebastian Mena y Segundo Javier Arteaga y Erasmo Puerta mis mas sinceras felicitaciones.

A todos los compañeros integrantes del Equipo Pedagógico de Matemáticas y a todos aquellos maestros que en ésta primera oportunidad fueron seleccionados y dan a conocer sus propuestas metodológicas entorno a la Ciencia Matemática y sus diversas posibilidades de enseñanza.

Al Ingeniero Mecánico Diego Hernán Giraldo Vásquez de la Universidad Nacional por su valioso colaboración en el proceso de digitación y estudio estadístico de los datos.

Fraternalmente,

LUIS GONZAGA DE J. RESTREPO RAMÍREZ
Coordinador Área de Matemáticas
1999 - 2000

1. LA FORMACIÓN DE CONCEPTOS MATEMÁTICOS

LUZ AMÉRICA FERNÁNDEZ
Licenciada en Matemáticas y Física. U. de A.
Integrante Equipo Pedagógico CEID - ADIDA

Este trabajo tiene por objetivo, desde el punto de vista de la Didáctica de las Matemáticas, brindar algunos elementos teórico-prácticos, sobre la formación de los conceptos matemáticos.

Con la elaboración de conceptos se busca que el alumno identifique las características esenciales y las utilice correctamente en distintas situaciones, permitiendo de esta forma ampliar la extensión de dicho concepto; por lo tanto se hace necesario enfatizar que no se trata de memorizar ni las características esenciales ni la definición de un concepto.

Los conceptos son una categoría especial en la enseñanza de la Matemática. Con su formación se pretende encontrar la relación existente entre la matemática y la realidad objetiva, lo que nos conduce a reflexionar sobre, cómo podemos lograr que los alumnos reconozcan que tanto los conceptos como las formas de trabajo matemático, se originaron en las necesidades que al hombre se le han presentado en la lucha por transformar la realidad.

Con las Matemáticas, por una parte se desarrollan habilidades y destrezas para resolver problemas de la vida práctica, a través de la interpretación y el uso del lenguaje simbólico, los procedimientos y los algoritmos; y por otra parte se contribuye al desarrollo del pensamiento lógico.

Sin embargo, los resultados arrojados en las diferentes investigaciones, como los TIMSS (Third International Mathematics and Science Study) Tercer Estudio Internacional de Matemáticas y Ciencias, muestran la gran diferencia entre el currículo que se propone, el que se desarrolla en las clases y el logrado por los alumnos; determinando el bajo rendimiento y la baja eficiencia de la educación matemática en nuestro país.

En el presente trabajo centraremos la atención en un primer momento sobre pensamiento lógico, ya que constantemente se manifiesta la necesidad del desarrollo de éste en nuestros alumnos, para lo cual es necesario referirse en primera instancia al pensamiento.

Este es útil cuando en la vida del ser humano se presenta un problema o situación donde, los métodos y medios conocidos, no son suficientes para resolverlo.

«El pensamiento es el proceso psíquico socialmente condicionado de búsqueda y descubrimiento de lo esencialmente nuevo y está indisolublemente ligado al lenguaje». (Manual didáctico para los institutos de pedagogía. Ed. Progreso, Moscú, 1976. P. 292).

También se plantea que: "el pensamiento es el proceso cognoscitivo que está dirigido a la búsqueda de lo esencialmente nuevo y que constituye el reflejo mediato y generalizado de la realidad". (González Maura, Viviana. 1995, pág. 172).

El pensamiento, surge del conocimiento tanto sensorial como racional.

El conocimiento sensorial se da en la medida en que el sujeto Interactúa con el objeto de conocimiento obteniendo como resultado un reflejo superficial de las características externas de éste.

El conocimiento racional se da a partir del conocimiento sensorial, pero profundiza encontrando las relaciones entre dichas características, por lo que es la forma superior y más compleja del conocimiento humano que le permite al hombre formular conceptos, establecer relaciones, realizar descubrimientos; lo cual logra a través del pensamiento.

El pensamiento ha sido estudiado por dos ciencias: la psicología y la lógica.

La Psicología se ha ocupado del estudio del proceso de

pensar, mientras que la Lógica estudia los resultados de este proceso, llamados formas lógicas del pensamiento.

Las formas lógicas del pensamiento son: los **conceptos**, los juicios y los razonamientos.

Al hablar del Pensamiento Lógico se hace referencia al proceso cognoscitivo que permite al ser humano adquirir conocimientos estructurados y sistémicos del medio que lo rodea, en aras de transformarlo apoyado en los supuestos de la lógica formal.[2]

La formación de conceptos, contribuye al desarrollo del Pensamiento Lógico de los alumnos, ya que son la base para la construcción de las otras formas lógicas del pensamiento (los juicios y los razonamientos) y la forma fundamental con que opera el pensamiento.

Se centrará la atención en los **conceptos** (para nuestro caso en los conceptos matemáticos) ya que éstos « son una condición previa importante para desarrollar la capacidad de aplicar lo aprendido, en forma segura y creadora» (W. Jungk, 1979, pg.58).

A la pregunta formulada a algunos profesores (P) y alumnos(A), sobre ¿qué es un concepto?, se encontró entre otras, textualmente las siguientes respuestas:

P: "Un concepto es la definición de un objeto"
"Un concepto es un juicio que se emite sobre algo"
"Un concepto es la expresión a través de la cual se quiere representar algo"
"Un concepto es la imagen mental que tengo respecto a algo"

A: "Un concepto es el significado que se le da a algo"
"Un concepto es una opinión personal"
"Un concepto es un pensamiento que se tiene so bre algo"
"Un concepto es algo que se refiere a algo".

[2] Lógica Formal: Disciplina científica cuyo objeto de estudio son las operaciones con las formas lógicas del pensamiento.

Lo anterior, es una mínima muestra sobre lo que algunos profesores y alumnos consideran que es un concepto.

Veamos, desde el punto de vista de la Didáctica de las Matemáticas, qué es un concepto y sean ustedes queridos lectores, quienes basados en los siguientes elementos teóricos, reflexionen y valoren las anteriores respuestas.

«Por concepto se entiende el reflejo mental de una clase de cosas, procesos, relaciones de una realidad objetiva o de la conciencia (o el reflejo de una clase de clases) sobre la base de sus características invariantes (W. Jungk, p. 58).

«El concepto es la idea en que se reflejan las características generales, sustanciales, diferenciales (específicas) de los objetos y fenómenos de la realidad» (Manual Didáctico para los Institutos de Pedagogía, p. 297)

Todo concepto tiene intención o contenido y extensión.

La intención o contenido son aquellas características esenciales que lo hacen diferente de otro concepto.

Por ejemplo con relación a la intención del concepto Triángulo Isósceles: «Polígono de tres lados en el cual dos de sus lados son congruentes». Este concepto presentado así no queda bien determinado, no es suficiente con decir que tiene dos lados congruentes, pues los triángulos equiláteros también tienen dos lados congruentes, sino que es necesario indicar además que el tercer lado no es congruente.

La extensión se refiere a aquellos objetos que cumplen unas características esenciales dadas. Por ejemplo: Si damos como características esenciales «ser cuadrilátero y tener sus lados opuestos paralelos», estamos haciendo referencia al contenido del concepto Paralelogramo, si además nombramos aquellos objetos que cumplen éstas características: el cuadrado, el rectángulo, el rombo y el romboide; encontramos la extensión del concepto paralelogramo.

La intención y la extensión de un concepto se relacionan en forma inversa, a medida que aumentan las características de un concepto va disminuyendo la cantidad de elementos que las cumplen, y viceversa.

De acuerdo, con el ejemplo anterior:

Concepto de Paralelogramo	
Contenido	**Extensión**
- cuadrilátero - lados opuestos paralelos	- el cuadrado - el rectángulo - el rombo - el romboide

Si aumentamos el contenido del concepto paralelogramo, adicionándole la característica «los cuatro ángulos rectos», la extensión de dicho concepto se disminuye solo al cuadrado y al rectángulo, que son los únicos paralelogramos que cumplen estas características.

1.1. TIPOS DE CONCEPTOS

En la enseñanza de las Matemáticas, se ha establecido desde el punto de vista metodológico, los tipos de conceptos que se estudian en ésta ciencia, ellos son:

1.1.1. Concepto de Objeto: se refieren a aquellos objetos reales que se pueden caracterizar por medio de representante. Ejemplo: el círculo, el número entero, el número compuesto, entre otros.

1.1.2. Concepto de Operación: indican las acciones que se pueden efectuar con los objetos. Ejemplo: la adición, la sustracción, la multiplicación, otros.

1.1.3. Concepto de Relación: permite reconocer las relaciones que existen entre los objetos. Ejemplo: mayor que, paralela a, límite de, otros.

Se abordará ahora una de las operaciones asociadas a los conceptos, **la definición**, la cual ha sido objeto de confusión: a veces cuando se pide el concepto de algo, se da la definición y viceversa.

Definir un objeto o fenómeno es expresar por medio del lenguaje aquellas características esenciales que lo diferencian de otro. Para definir se utiliza el lenguaje común, el lenguaje propio de una ciencia o el lenguaje simbólico.

En la enseñanza de la Matemática, entendemos por definición:

- Una determinación de qué es un objeto, cómo se origina o cómo se reconoce; o
- una regla que establece como se utiliza un signo verbal; o
- una determinación o una regla, que indica o esta blece qué significa o debe significar un signo verbal. (W. Jungk, pág. 59).

Desde el punto de vista metodológico, existen algunos conceptos que no se deben definir (según el nivel en que se trabaje) sino realizar una descripción explicativa.

Por ejemplo, el concepto de «número» en básica primaria, solo se da una explicación sobre lo que es un «número». Cuando se hace esto, se dice que el concepto se ha introducido.

Por lo tanto, como docentes, se debe tener claro si el concepto que se va a trabajar, debe ser definido o solamente explicado.

Hasta aquí solo se han expuesto algunos fundamentos científico - lógicos sobre qué es un concepto, sus características: la intención o contenido y la extensión, además la definición como operación asociada a los conceptos.

1.2. PROCESO DE ELABORACION DEL CONCEPTO.

Se presenta a continuación el proceso que se debe tener en cuenta en la formación de conceptos matemáticos:

1.2.1. Consideraciones y ejercicios preparatorios: se trata de aquellos conceptos que los alumnos muchas veces conocen parcialmente antes de haber sido trabajados en la clase, que han sido adquiridos de su entorno mediante el lenguaje común.

1.2.2. Formación del concepto: es el proceso que se inicia desde la creación del nivel de partida hasta llegar a la definición o explicación del concepto, teniendo en cuenta la motivación, la orientación hacia el objetivo y la separación de las características comunes y no comunes.

1.2.3. Asimilación o fijación del concepto: es en este momento en que nos damos cuenta si el alumno asimiló el concepto y lo incorporó a la serie de conocimientos que ya tiene; mediante ejercitaciones, profundizaciones, sistematizaciones y aplicaciones.

1.3. ASPECTOS METODOLÓGICOS EN LA FORMACIÓN DE CONCEPTOS

Lo fundamental en la formación de un concepto es la identificación de sus características necesarias y suficientes, de lo cual depende que su asimilación sea correcta.

Desde el punto de vista de la teoría del conocimiento, se diferencian dos vías para formar un concepto:

1.3.1. VIA INDUCTIVA: en ésta, la definición del concepto se elabora paso a paso. Se parte de ejemplos y explicaciones que faciliten la búsqueda de las características comunes y que permitan identificar las características esenciales. (Forma de aplicación del método inductivo).

Al utilizar esta vía se debe tener en cuenta la siguiente secuencia:

1.3.1.1. Aseguramiento del nivel de partida (ANP): consiste en activar los conocimientos que debe tener el estudiante y que son necesarios para adquirir el nuevo concepto; "la enseñanza de conceptos solo podrá ser eficaz si parte de los conocimientos previos de los alumnos y logra activarlos y conectarlos adecuadamente con el material de aprendizaje" (Juan Ignacio Pozo, 1992).

1.3.1.2. Motivación: Se motiva al crear contradicciones y necesidades a partir de lo que conocen y debería conocer. "El hombre comienza a pensar cuando tiene la necesidad de comprender algo" (Rubinstein)

1.3.1.3. Orientación hacia el objetivo (OHO) : de acuerdo a la motivación precisar lo que se pretende encontrar, es decir, explicar en términos conocidos a lo que se aspira, más que declarar formalmente éste.

1.3.1.4. Observar varios objetos representantes y no representantes del concepto a trabajar.

1.3.1.5. Comparar los objetos y determinar las características comunes y no comunes.

1.3.1.6. Establecer un sistema de características esenciales.

1.3.1.7. Formular la definición o explicación.

1.3.1.8. Realizar consideraciones perspectivas y retrospectivas o sea analizar el procedimiento desarrollado para que el alumno determine si se logró darle solución a la situación planteada en la motivación.

1.3.2. VIA DEDUCTIVA.

Se parte de la definición y mediante el análisis de ejemplos se descubre el contenido y la extensión del concepto. (de lo general a lo particular).

Los pasos a seguir son los siguientes:

1.3.2.1. ANP – Motivación– OHO.

1.3.2.2. Definir el concepto y analizar cada una de sus partes: el definiendum (lo que se define) y el definiens (lo que define).

1.3.2.3. Observar varios objetos representantes y no representantes del concepto.

1.3.2.4. Establecer un sistema de características necesarias y suficientes.

1.3.2.5. Establecer un sistema de características esenciales.

1.3.2.6. Analizar cual sería la consecuencia si se omite alguna de éstas características.

Para determinar que vía utilizar en la formación de un concepto matemático es necesario tener en cuenta, si éste se va a definir o sólo se va a realizar una introducción de él; en este caso se utilizaría la vía inductiva.

BIBLIOGRAFÍA

MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. Análisis y resultados de las pruebas de matemáticas -TIMSS- Colombia. Ed. Ministerio de Educación Nacional. Santafé de Bogotá, 1997

JUNGK WERNER. Conferencias sobre metodología de la enseñanza de la Matemática 2. Primera parte. Ed. Libros para la Educación. Ciudad de la Habana - Cuba, 1979. Documento: Psicología General. Manual Didáctico para los Institutos de Pedagogía. Ed. Progreso. Moscú, 1976

2. TENDENCIAS ACTUALES EN LA ENSEÑANZA APRENDIZAJE DE LA GEOMETRÍA BÁSICA.

JORGE CARDEÑO ESPINOSA.
Director CEID – ADIDA

Dar a conocer las principales tendencias en la enseñanza de la Geometría y proponer ejemplos didácticos que conlleven a la reflexión del importante papel de la enseñanza aprendizaje de ésta en la educación básica.

De otro lado presentar algunos resultados de investigación sobre encuestas aplicadas a docentes de básica primaria, que determinan en este caso particular el dominio del contenido geométrico por parte de estos, lo cual se debe constituir en un punto de partida que nos hable de la necesidad de repensar la didáctica y el contenido que actualmente se trabaja en las escuelas.

Se constituye hoy como una de las tareas prioritarias, el fortalecimiento de la metodología y enseñanza de la Geometría en los diferentes niveles de educación.

A partir de detectar los problemas y dificultades que se presentan hoy en el proceso enseñanza aprendizaje, analizar los cambios y reformulaciones que se vienen tratando por parte de la Comunidad Científica alrededor de la recuperación del pensamiento espacial y de la intuición, se busca cómo articular estas nuevas visiones en la escuela.

En consecuencia el propósito del presente artículo es profundizar en el conocimiento de las tendencias actuales en el proceso de enseñanza aprendizaje de la Geometría y presentar algunas sugerencias metodológicas que contribuyan a desarrollar el "pensamiento espacial" en el aula de clase. De igual manera presentar resultados estadísticos de investigación realizados a grupos de docentes asistentes a los Seminarios de Didáctica de las Matemáticas, que muestren si existe o no, dominio del contenido geométrico por parte de éstos.

Los conocimientos elementales de Geometría suelen exponerse en forma intuitiva y concreta, con razonamientos sencillos, acompañados de ejemplos prácticos. Se prescinden en ellos casi por completo de demostraciones teóricas, que se sustituyen por construcciones de figuras, explicaciones adecuadas de las verdades fundamentales referentes a la geometría y aplicaciones numéricas o gráficas que contribuyen a dar idea de los principios no demostrados.

Existen diversas corrientes sobre los fundamentos de las matemáticas, una de ellas tiene que ver precisamente con el Intuicionismo, la cual considera las matemáticas como el fruto de elaboraciones que hace la mente a partir de lo que percibe a través de los sentidos. Dicha escuela filosófica de las matemáticas se conformó a comienzos del siglo XX, sin embargo hoy podemos atrevernos a asegurar que la matemática griega, y en particular la aritmética, es espontáneamente igual a la manera como Kant concebía la aritmética y la geometría.

"El fundador del Intuicionismo moderno es Luitzen Brouwer[3], quien considera que en las matemáticas la idea de existencia es sinónima de constructibilidad y la idea de verdad es sinónima de demostrabilidad". [4] Según esto la existencia de un enunciado matemático verdadero presupone el poseer prueba constructiva de él.

Se nota pues de inmediato los problemas que ocasionaría el uso permanente de la intuición en nuestras aulas de clase en el ámbito de la enseñanza aprendizaje de las matemáticas, sin un conocimiento claro del docente de los límites de la intuición, pero por otro lado, de hasta donde es adecuado su uso. Aparece hoy en las tendencias de la educación Matemática como algo ineludible, desde un punto de vista didáctico, científico e histórico, volver sobre el loscontenido espacial e intuitivo de la Matemática.

En éste sentido el pensamiento geométrico y la intuición espacial serán algunas de las fortalezas de éste trabajo, .

---

[3] Luitzen Brouwer (1881 – 1966), matemático holandes que fundó el intuicionismo matemático (una doctrina que ve la naturaleza de la matemática como construcciones mentales gobernada por leyes mismo – evidentes), y de cuyo trabajo en topología, transformó el estudio de las propiedades más básicas de superficies geométricas y configuraciones.

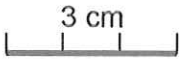
Brouwer enseñó en la Universidad de Amsterdam de 1909 a 1951. Él hizo la mayoría de su trabajo importante en topología entre 1909 y 1913.

En su tesis doctoral, en los Fundamentos de Matemática (1907), Brouwer atacó los fundamentos lógicos de la Matemática y formó los principios de la Escuela del Intuicionismo.

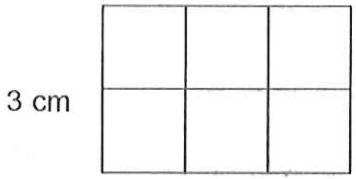
[4] Lineamientos curriculares de matemáticas. 1998, p. 24.

sin pretender llegar a los extremos en que se incurrió en el pasado.

Piensa por un momento en la necesidad de representar geométricamente una longitud de 3 cm, ¿seria posible?. La respuesta es inmediata, mediante un segmento equivalente a una longitud de 3 cm. , que se representaría en una línea recta (unidimensional).



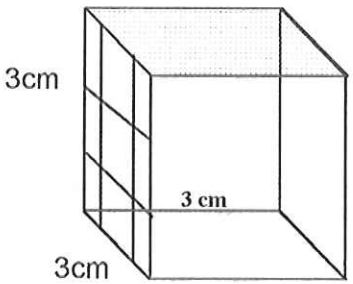
¿Se podría ahora representar 3 cm X 3cm = 3^2 cm^2 = 9 cm^2 geométricamente?, bueno, se considera nuevamente que sí, mediante la construcción de un cuadrado de lado 3 cm en el plano (bidimensional).



Ahora 3cm x 3 cm x 3 cm = 3^3 cm^3 = 27 cm^3

También se puede representar geométricamente mediante un cubo de lado 3 cm. El cual se puede construir en el espacio (tridimensional) por medio de: el el geoespacio, doblado de papel o cartulina, plastilina, entre otros.

Es necesario hacer notar que este cubo (Volumen) se puede representar gráficamente en el plano.



¿Será entonces posible continuar la siguiente representación geométrica de
$3^4\ cm^4 = 81\ cm^4$?

Se presenta la imposibilidad de "mostrar" una representación geométrica de cuatro dimensiones en el plano o en el espacio, en el cual se está trabajando, ya que se estaría hablando de la cuarta dimensión (espacio-tiempo). Aparece en este momento un desequilibrio conceptual que traslada la discusión matemática en cuestión de la intuición a la abstracción. Lo cual no significa dejar de lado el importante papel de lo primero, pues es claro que para acceder a la comprensión de la existencia en general de R^4, R^5, R^6... se tuvo un conocimiento precedente de R, R^2 y R^3.

Se trata entonces de determinar en que momento es importante el uso de la intuición en el aula de clase y cómo a través de ésta se pueden obtener resultados muy satisfactorios de aprendizaje que conduzcan a niveles de complejidad más altos.

Quisiera plantear para la discusión un ejemplo de una definición matemática que a pesar del trabajo metodológico que se realiza con él en la básica primaria (Cuarto o Quinto elemental), suele observarse con frecuencia que los jóvenes, en la secundaria y media, no lo han aprendido.

2.1. FORMACION DEL CONCEPTO DE PERÍMETRO MEDIANTE LA VIA INDUCTIVA

2.1.1. NIVEL DE PARTIDA

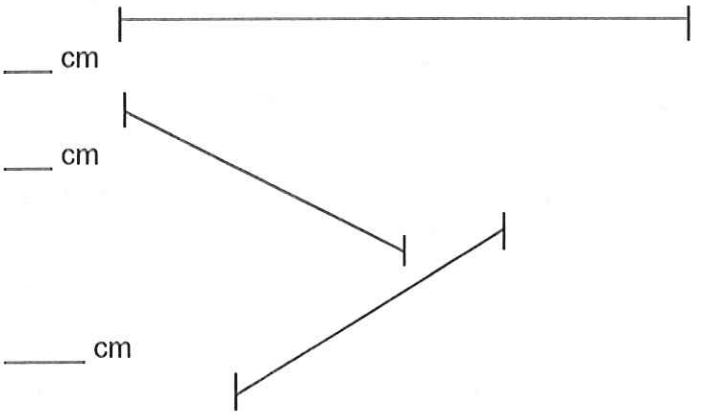
Suma de Naturales
Líneas cerradas o abiertas
Medición de longitudes
Figuras geométricas planas: Triángulo, rectángulo y cuadrado
Propiedades elementales de estas figuras
Segmentos
Las unidades básicas de las medidas de longitud

2.1.2. ASEGURAMIENTO DEL NIVEL DE PARTIDA

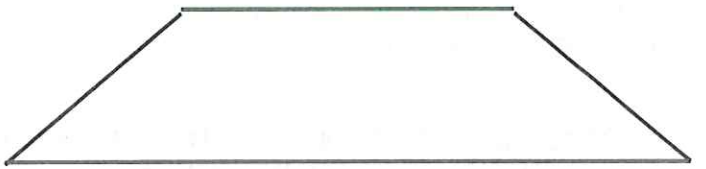
Se puede partir inicialmente resolviendo problemas que impliquen el uso de la regla graduada utilizando como patrón de medida el centímetro.

EJERCICIO

Mide la longitud de cada segmento y escribe el dato.



Ahora mide los lados de la siguiente figura:

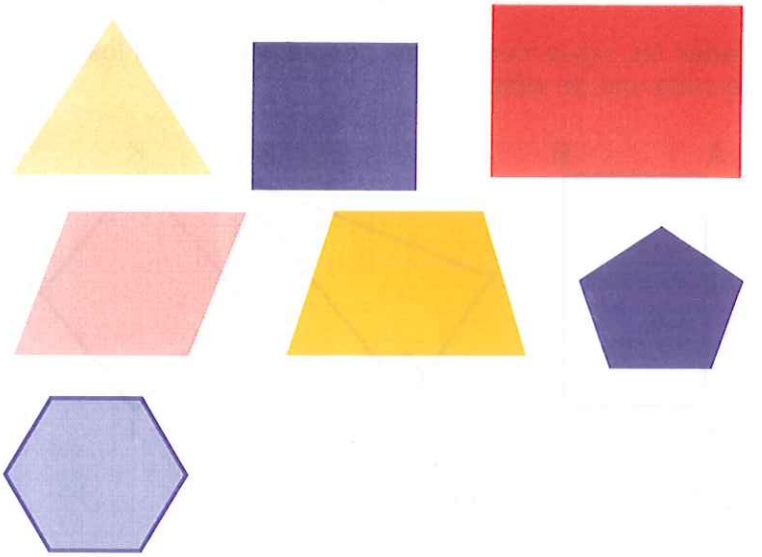


9.1 cm

¿Siempre se utilizará como unidad de medida el centímetro? _____
Si se fuese a medir el largo del aula de clase, ¿qué unidad de medida se utilizaría? _____
Para medir la distancia de Medellín a Bogotá ¿qué medida utilizaría? _____
¿Cuál sería la unidad de medida más conveniente para medir el largo de tu lápiz, tu estatura y la distancia de Bogotá a Cartagena?

_____

Se han medido segmentos en diferentes posiciones y figuras cerradas, pensando en la unidad de medida más conveniente para medir. Ahora observa las siguientes figuras geométricas planas:



P: ¿Cómo se llaman las figuras anteriores? _____

P: ¿Son figuras cerradas? _____

Las figuras cerradas como el triángulo y el rectángulo, entre otros, se llaman polígonos.

P: ¿Cuál es el significado etimológico de la palabra polígono?
A: No se sabe.
P: Consulte en el diccionario
A: Figura plana con todos sus bordes rectos. (Poli = Varios, Gono = Ángulo)
Polígono regular: Polígono con todos sus lados iguales y todos sus ángulos iguales.

¿Cuántos lados tiene el triángulo? _____
¿Cuántos lados tiene el rectángulo? _____
¿Cuántos lados tiene el pentágono? _____
¿Cuántos lados tiene el hexágono? _____

Dadas las siguientes figuras geométricas, mida los lados de cada una de ellas:

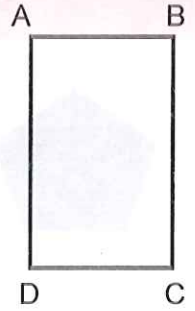


Fig.1

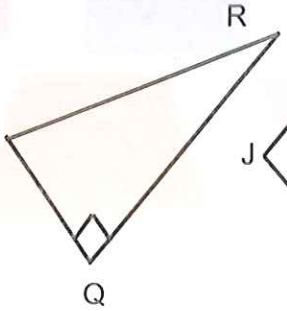


Fig.2

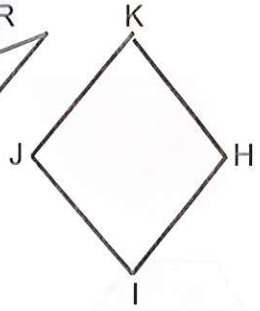


Fig.3

$\overline{AB}$ = _____ $\overline{PR}$ = _____ $\overline{JK}$ = _____

$\overline{BC}$ = _____ $\overline{RQ}$ = _____ $\overline{KH}$ = _____

$\overline{CD}$ = _____ $\overline{QP}$ = _____ $\overline{HI}$ = _____

$\overline{DA}$ = _____ $\overline{IJ}$ = _____

Escribe las diferencias y semejanzas entre las figuras:

a). 1 y 2

_____

_____

b). 2 y 3

_____

_____

c). 1 y 3

_____

_____

De acuerdo a la figura 1, ¿cómo son las medidas de los lados AD y BC, AB y DC?

_____

¿Por qué? _____

De acuerdo a las medidas tomadas en la figura 2, ¿qué nombre recibe este triángulo? _____

De acuerdo a las medidas tomadas en la figura 3, ¿cómo son los lados de ésta figura? _____

¿qué nombre recibe?

_____

MOTIVACIÓN

Se puede iniciar planteando a los alumnos que la necesidad de medir se encuentra en forma permanente en nuestras vidas, de este hecho nos percatamos fácilmente. ¿Qué se puede medir o comparar con nuestros compañeros de aula?

La edad que tienen
El peso de éstos.
La estatura de estos
La distancia que recorren
Los objetos del aula

Se puede medir en general longitudes, áreas, volúmenes, capacidades, pesos, tiempo y otros.

PROBLEMA

Se necesita cercar la zona verde de nuestro colegio José Acevedo que tiene forma rectangular para protegerla de los estudiantes durante el descanso, para lo cual se utilizará alambre. Este terreno tiene 6.5 m de largo por 4.5 m de ancho, ¿Cuántos metros de alambre se requieren para cercarlo?

2.1.3. ORIENTACIÓN HACIA EL OBJETIVO

Se iniciará un diálogo con los estudiantes acerca de la comprensión del problema.

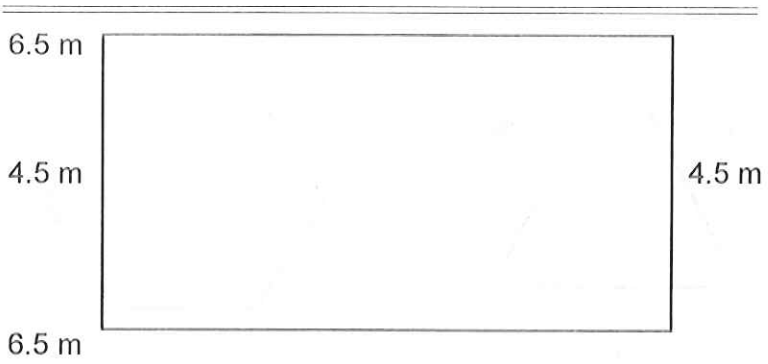
P: Profesor
A: Alumno
P: ¿De qué trata el problema?
A: De cercar un terreno con alambre
P: ¿Qué es cercar un terreno?
A: Es encerrarlo para protegerlo del ingreso de personas o animales
P: ¿Cuáles son las longitudes del terreno?
P: ¿Qué nos pregunta el problema?
P: ¿Cómo se puede determinar cuántos metros de alambre se requieren para cercar este terreno?
A: No se sabe.

En este momento el educador motiva hacia el conocimiento nuevo que se va a tratar.

2.1.4 CONSIDERACIONES Y EJERCICIOS PREPARATORIOS

2.1.4.1. FORMACIÓN DEL CONCEPTO

P: ¿Se puede representar gráficamente nuestro problema?
A: Sí
P: ¿Qué figura utilizarías?
A: Un rectángulo
P: ¿Qué características tiene esta figura?
P: ¿Qué datos conoce?
A: La medida del largo que es igual a 6.5 m y del ancho que es de 4.5 m
P: ¿Qué se debe averiguar?
A: _____
P: Bueno dibuja.
Se construye el rectángulo y se mide la longitud de sus lados



P: ¿Qué se puede hacer para determinar los metros de alambre que se requieren para cercar el terreno?
A: No se sabe.
P: ¿Se podría determinar cuánto suman las longitudes de los lados de éste rectángulo? _____

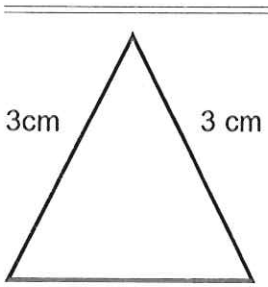
_____

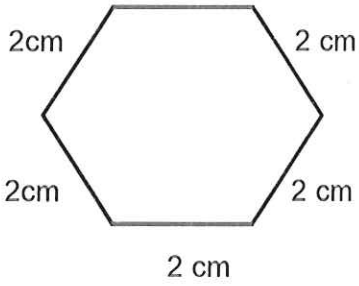
¿Qué se puede hacer con la longitud de cada uno de estos lados, para determinar cuántos metros de alambre se necesitan para cercar el terreno?

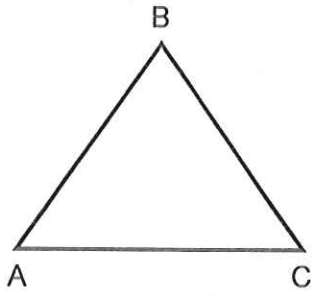
_____

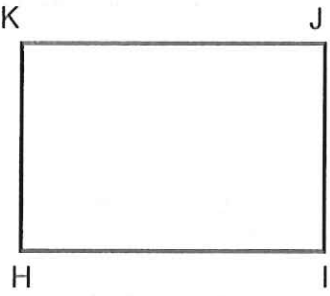
4.5 m +6.5 m +4.5 m + 6.5 m = _____
P: ¿Qué nombre recibe la suma de las medidas de los lados de un polígono en general?
A: No se sabe.
P: Consulte como se llama.
A: PERIMETRO
P: ¿A qué figuras se les puede calcular el perímetro
P: ¿A que parte de la figura corresponde?
A:
P: ¿Se resolvió el problema?
A: Sí
P: ¿Cómo se hizo?
P: ¿Qué operación fue necesario utilizar?

De igual forma se puede proceder más adelante con otros casos particulares de polígonos donde se efectúe la suma o adición de la longitud de los lados.





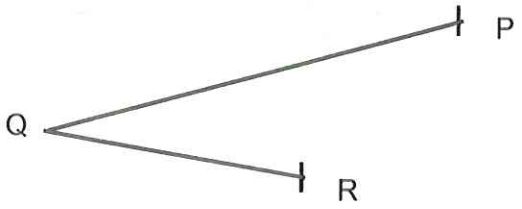




AC + CB + BA = _____ cm
HI + IJ + JK + KH = _____ cm

2.1.5. ASIMILACIÓN O FIJACIÓN DEL CONCEPTO

P: ¿Se puede medir el perímetro en la siguiente gráfica?
A: No



PQ + QR = _____ cm

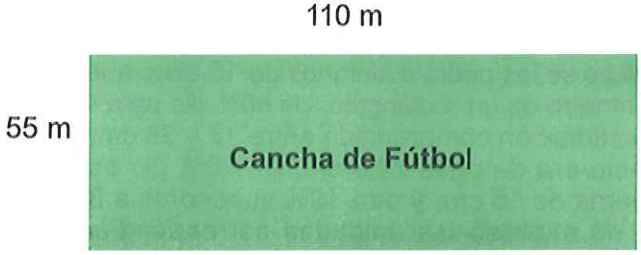
P: ¿Porqué?

A: Esta no es una figura geométrica, por tanto, se puede calcular la suma de sus dos segmentos.

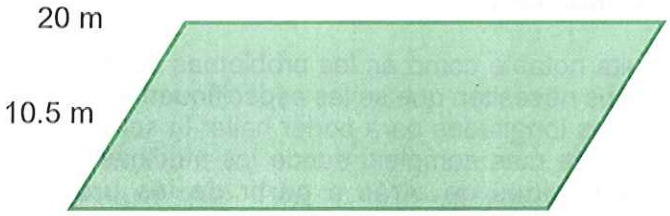
P: Entonces, ¿cuál es el número mínimo de lados para construir una figura geométrica y poder así calcular su perímetro?
A:_____
A partir de éste momento se puede entrar a resolver problemas de aplicación sobre el concepto de perímetro.

Resuelve los siguientes problemas:

a). Gonzalo Castro corre alrededor de una cancha de fútbol que mide 110 m de largo y 55m de ancho. Si en total da 16 vueltas completas. ¿Cuántos metros recorre Gonzalo?.



b). ¿Cuál es el perímetro de un terreno en forma de romboide con las siguientes medidas?



2.1.6. CONSIDERACIONES METODOLÓGICAS Y CIENTÍFICAS

Es importante llegar a familiarizarse con las figuras y sus propiedades ya que a través de experiencias con formas y

figuras es como surgen las nociones relativas al tamaño. Cuando se hace que los niños comparen tamaños por cualquier procedimiento de tipo reproductivo o preferencialmente heurístico, así estaremos aproximándonos en los dominios de la medición.

Sobre la medición del perímetro la Encuesta Nacional en los Estados Unidos (NAEP, Carpenter et al, 1980) halló que solamente el 53% de los niños de 13 años eran capaces de medir la longitud de una línea aproximándola al cuarto de pulgada (algo más de 6mm) más cercano, proporción que era del 81% a los 17 años.

La encuesta NAEP halló también que aproximadamente un tercio de los niños de 13 y 17 años eran incapaces de medir el perímetro de un triángulo. Este hallazgo se corresponde de cerca con los resultados de la primera encuesta APV (Assessment of Performance Unit) en enseñanza secundaria (1980), en una de cuyas pruebas prácticas se les pedía a alumnos de 15 años que estimasen el perímetro de un rectángulo. Un 60% dio para el perímetro una estimación comprendida entre 18 y 28 cm, cuyo valor correcto era de unos 22,6 cm. Un 10% dio estimaciones inferiores de 15 cm, y otro 10% superiores a 30 cm. Otro 10% no expresó las unidades correspondientes a sus estimaciones. Cuando procedieron a medir verdaderamente el perímetro, algo más del 50% dieron valores correctos al perímetro más cercano y otro 20% se desvió justamente en un milímetro.

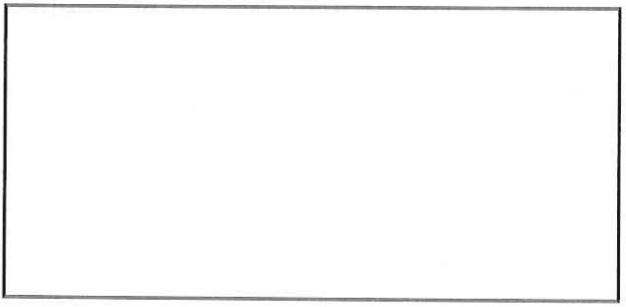
Resulta notable como en los problemas de perímetro los alumnos necesiten que se les especifiquen explícitamente todas las longitudes para poder hallar la solución y como les resulta más complejo donde las medidas tienen que ser deducidas de otras a partir de las propiedades geométricas de la figura.

En dos de los seminarios de Didáctica de las Matemáticas del CEID – ADIDA, realizado en el pasado mes de diciembre de 1999, se llevó a cabo la siguiente actividad con ambos grupos. Había una diferencia que distingue a cada uno de los grupos, dependiendo de las longitudes de sus lados, así:

2.2. EXPERIENCIA PEDAGÓGICA DE INVESTIGACIÓN

Actividad:

Usando una regla graduada mide la longitud de los lados de la siguiente figura y registra las mediciones, indicando la unidad de medida.



Responde por favor:

1. Qué nombre recibe la suma obtenida?

_____

2. Cuál es el resultado de la suma obtenida?

_____

3. Selecciona una de las opciones:

La figura anterior puede ser clasificada como

a) Cuadrilátero
b) Rectángulo
c) Paralelogramo
d) Todas las anteriores respuestas al problema.

Grupo Uno: 13.0 cm x 4.0 cm (de acuerdo con el grado de precisión que tiene una escuadra, que corresponde a 0.1 cm)

Grupo Dos: 12.7 cm x 4.3 cm.

Los resultados obtenidos se muestran a continuación:

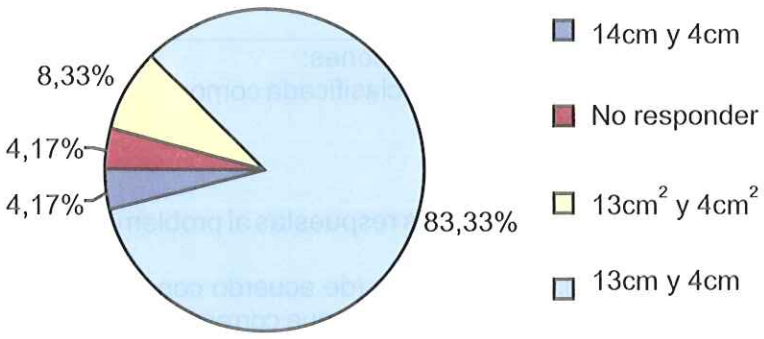
2.2.1. GRUPO UNO: RECTÁNGULO DE 13 cm x 4 cm

Tamaño de la muestra: 24 profesores

1. Respecto a la medición correcta de los lados las respuestas fueron:

RESPUESTA	No. DE PERSONAS	% DE LA MUESTRA
4cm Y 13cm	20	83.33
14cm y 4cm	1	4.17
$4cm^2$ y $13cm^2$	2	8.33
No responder	1	4.17
TOTAL	**24**	**100.00**

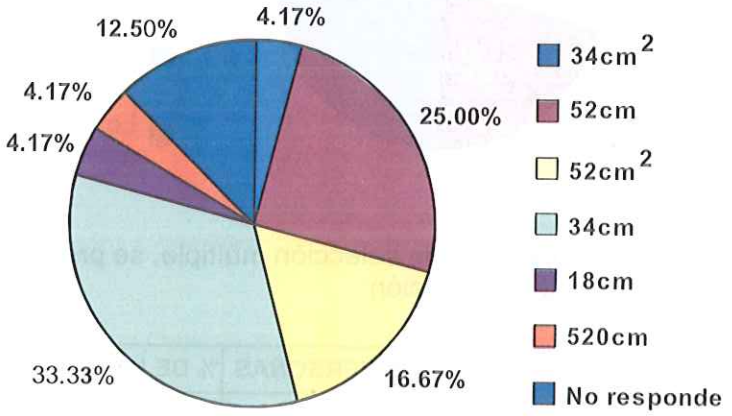
¿Cuáles son las dimensiones de los lados de la figura?



2. A la solicitud de realizar la suma de los lados los resultados fueron:

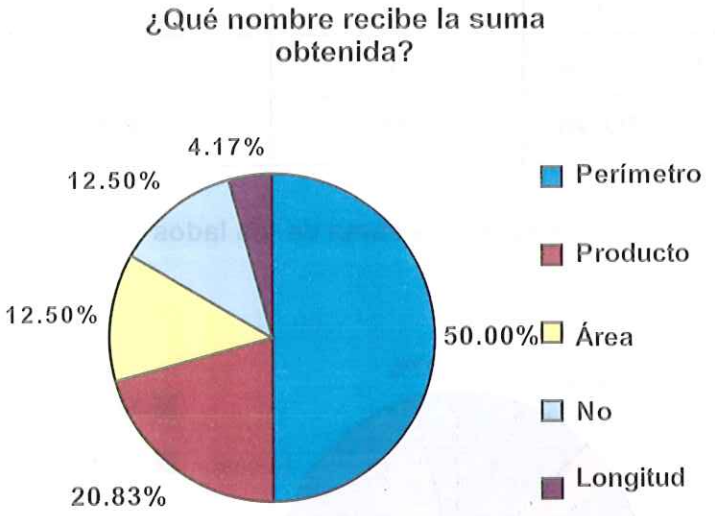
RESPUESTA	No. DE PERSONAS	% DE LA MUESTRA
34cm	8	33.33
52cm	6	25.00
$34cm^2$	1	4.17
$52cm^2$	4	12.50
18cm	1	4.17
520cm	1	4.17
No responde	3	12.50
TOTAL	**24**	**100.00**

Expresa la suma de los lados



3. Respecto al nombre que recibe la longitud de los lados se encontró lo siguiente:

RESPUESTA	No. DE PERSONAS	% DE LA MUESTRA
Perimetro	12	50.00
Producto	5	20.83
Área	3	12.50
Longitud	1	4.17
No responder	3	12.50
TOTAL	24	100.00



4. En la pregunta de selección múltiple, se presentó la siguiente situación:

RESPUESTA	No. DE PERSONAS	% DE LA MUESTRA
Todas las anteriores	16	66.66
Paralelogramo	1	4.17
Cuadrilátero	1	4.17
No responde	1	4.17

RESPUESTA	No. DE PERSONAS	% DE LA MUESTRA
Rectángulo y todas las anteriores	1	4.17
Todas las opciones	4	16.67
TOTAL	**24**	**100.00**

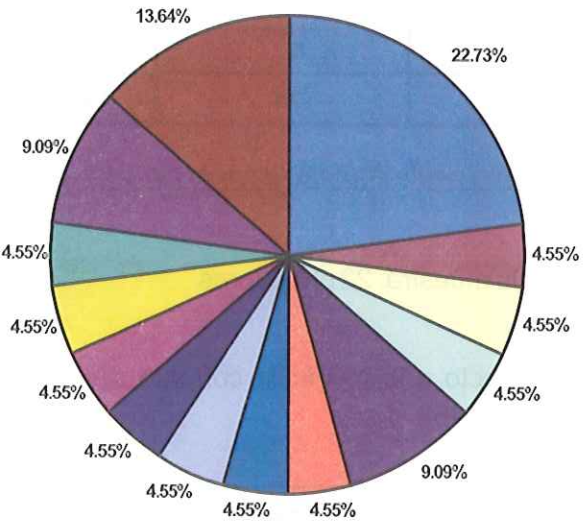
2.2.2. GRUPO DOS: RECTÁNGULO DE 12.7 cm x 4.3 cm

Tamaño de la muestra: 22 profesores

1. Respecto a la medición correcta de los lados las respuestas fueron:

RESPUESTA	No. DE PERSONAS	% DE LA MUESTRA
4.3cm Y 12.7cm	5	22.73
4cm y 12cm	1	4.55
12.7cm y 4.4cm	1	4.55
12.5cm y 4.5cm	1	4.55
12.5cm y 4.2cm	2	9.10
12.5cm y 4.3cm	1	4.55
12.702cm y 4.03cm	1	4.55
12.6cm y 4.2cm	1	4.55
12.8cm 4.305cm	1	4.55
12.8m y 4.35m	1	4.55
12.8cm y 4.4cm	1	4.55
13.7 cm y 5.3 cm	1	4.55
12.6 cm y 4 cm	2	9.10
No responde	3	13.64
TOTAL	**22**	**100.00**

Cuales son las dimensiones de los lados de la figura?

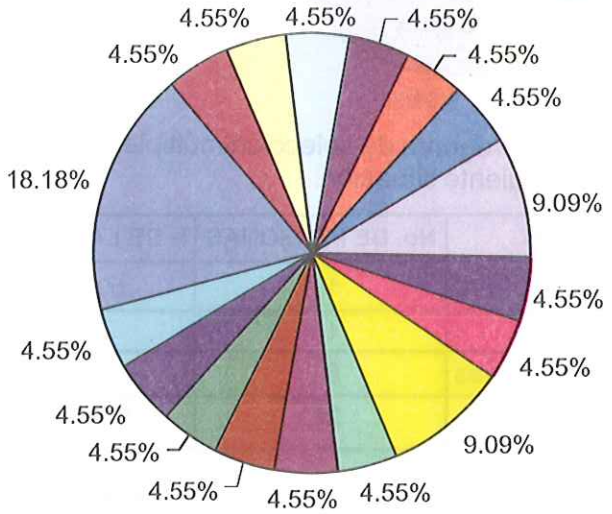


2. A la solicitud de realizar la suma de los lados los resultados fueron:

RESPUESTA	No. DE PERSONAS	% DE LA MUESTRA
34cm	4	18.18
50.4cm	1	4.55
50cm	1	4.55
36cm	1	4.55
34.4cm	1	4.55
34.35cm	1	4.55
34.3cm	1	4.55
34.2cm	2	9.09
33.6 cm	1	4.55
33.4 cm	1	4.55
32 cm	2	9.09
17.02 cm	1	4.55

RESPUESTA	No. DE PERSONAS	% DE LA MUESTRA
17cm	1	4.55
16.8 cm	1	4.55
16.7 cm	1	4.55
16.6 cm	1	4.55
No responder	1	4.55
TOTAL	**22**	**100.00**

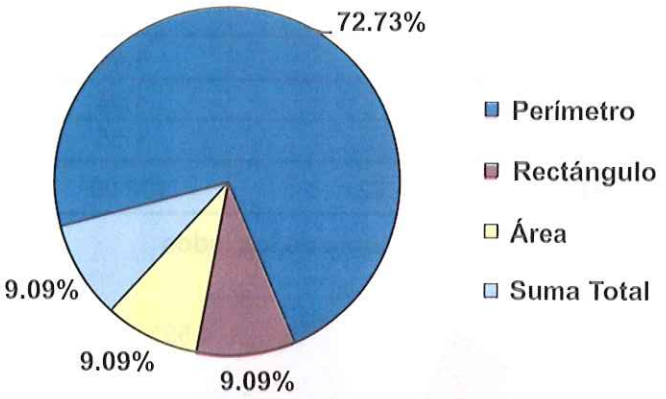
¿Exprese la suma de los lados



3. Respecto al nombre que recibe la longitud de los lados se encontró lo siguiente:

RESPUESTA	No. DE PERSONAS	% DE LA MUESTRA
Perímetro	16	72.73
Rectángulo	2	9.09
Área	2	9.09
Suma total	2	9.09
TOTAL	**22**	**100.00**

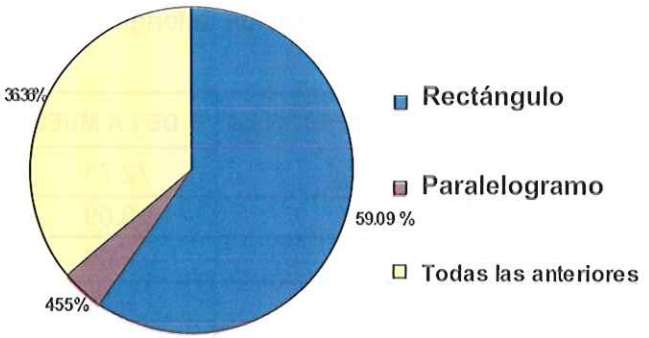
¿Qué nombre recibe la suma obtenida?



4. En la pregunta de selección múltiple, se presentó la siguiente situación:

RESPUESTA	No. DE PERSONAS	% DE LA MUESTRA
Rectángulo	13	59.09
Paralelogramo	1	4.55
Todas las anteriores	8	36.36
TOTAL	**22**	**100.00**

La figura puede clasificarse como:



2.2.3. CONCLUSIONES

1. Es completamente desolador el panorama que en el campo de los conocimientos básicos sobre la identificación de propiedades geométricas tienen la gran mayoría de los profesores de matemáticas en la básica primaria. (Docentes asistentes a los seminarios y microcurrículos de Matemáticas).

2. Los profesores encuestados no están acostumbrados a pruebas de conocimiento, y es por ello que se aprecia el desconocimiento general de la forma de contestar una prueba de este tipo.

3. Es desconcertante, por decir lo menos, la inexactitud en la medición con una regla que tienen los docentes. Puede concluirse que no saben medir; es necesario recordar que la medición constituye el proceso mediante el cual puede construirse un modelo espacial preciso de la naturaleza a nivel mental.

4. La prueba tenía un grado de exigencia que puede establecerse como bajo, por lo cual sorprende en forma negativa el resultado obtenido.

5. Es necesario diseñar y aplicar estrategias de formación, que conlleven a un aumento significativo del dominio del contenido matemático y geométrico por parte de los docentes.

A partir de estas primeras conclusiones puede notarse claramente la falta del dominio del contenido matemático referido al concepto de perímetro, se debe constituir en un punto de reflexión en nuestra práctica pedagógica y en lo referente al saber académico, esto implica trabajar de manera amplia las Matemáticas, vinculada con su respectiva didáctica.

2.3. PENSAMIENTO GEOMÉTRICO

Se entiende por pensamiento geométrico la capacidad del hombre de explorar racionalmente el espacio físico en que vive. Para Howard Gardner en su teoría de las múltiples inteligencias considera como una de estas inteligencias la espacial y plantea que el pensamiento espacial es esencial para el pensamiento científico, ya que es usado para representar y manipular la información en el aprendizaje y en la resolución de problemas.

Desde el Ministerio de Educación Nacional (Ver: Pensamiento Espacial y Sistemas Geométricos. Pág. 56-61, 1998) en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas, se enfatiza en la Geometría Activa como posibilidad de restablecer el estudio de los sistemas geométricos como herramientas de exploración y representación del espacio, considerando el pensamiento espacial como el conjunto de los procesos cognitivos mediante los cuales se construye y se manipulan las representaciones mentales de los objetos del espacio, las relaciones entre ellos, sus transformaciones, y sus diversas traducciones a representaciones materiales.

Las últimas investigaciones parecen indicar que el proceso de construcción del pensamiento geométrico continua en una evolución muy lenta desde las formas intuitivas hasta las deductivas finales. El modelo de Van Hiele[5] goza en el concierto nacional e internacional de aceptación y se aproxima bastante a ésta descripción, aunque se debe tener claro que la propuesta de Geometría Activa no coincide con la descripción que éste expresa, ya que se orienta más hacia la didáctica clásica de la Geometría Euclidiana.

[5] El modelo de Van Hiele nació algo más de cuarenta años, a raíz de las inquietudes de los esposos holandeses Pierre Marie Van Hiele y Dina Van Hiele Geldof, al observar que sus alumnos no eran capaces de entender y comprender su materia por más que realizaran diversos esfuerzos, esto los llevo a realizar un estudio detenido en la búsqueda del porqué. (Gutiérrez R. Angel y Jaime P. Adela. Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la Geometría: El Modelo de Van Hiele, 1990)

Lo claro es que la situación actual de cambio en la Didáctica de las Matemáticas se viene dando según los expertos desde la década de los 60 y 70 hacia la llamada "matemática moderna". Señala el Doctor Miguel de Guzmán de la Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura que entre las principales características de éste movimiento de renovación y sus efectos por él producidos se pueden contar los siguientes:

- Se subrayaron las estructuras abstractas en diver sas áreas, especialmente en álgebra.

- Se pretendió profundizar en el rigor lógico, en la comprensión, contraponiendo ésta a los aspectos operativos y manipulativos.

- Esto último condujo de forma natural al énfasis en la fundamentación a través de las nociones inicia les de la teoría de conjuntos y en el cultivo del álge bra, donde el rigor es fácilmente alcanzable.

- La Geometría elemental y la intuición espacial su frieron un gran detrimento. La Geometría es, en efecto, mucho más difícil de fundamentar rigurosa mente.

- Con respecto a las actividades fomentadas, la con secuencia natural fue el vaciamiento de problemas interesantes, en los que la Geometría Elemental tanto abunda, y su sustitución por ejercicios muy cercanos a la mera tautología y reconocimiento de nombres, que es, en buena parte, lo que el álgebra puede ofrecer a este nivel elemental.

La patente carencia de intuición espacial es uno de los problemas que se observa hoy con frecuencia en nuestras propias aulas de clase y esto es una de las causas por las cuales nuestros alumnos y alumnas presentan dificultades

en el momento de la comprensión de algunos conceptos matemáticos. Se crea así la necesidad de buscar y cualificar, a los docentes, en la implementación de nuevas estrategias metodológicas que conlleven a una reactivación de la Enseñanza de la asignatura de Geometría.

La capacitación de los maestros en este sentido posibilita el mejoramiento de la calidad de la educación, porque si el maestro tiene un adecuado dominio de lo que enseña, puede dejar de ser un obstáculo para aprender, convirtiéndose en un verdadero maestro. Debemos en este sentido buscar diferentes vías que faciliten alcanzar las nuevas exigencias del nuevo milenio, que abarquen no solamente el perfeccionamiento en el plano del saber específico sino también la formación de un profesional capaz de interpretar adecuadamente la realidad educativa en la cual está inmerso y dar respuesta a ésta por medio de la ciencia.

Pero el problema docente educativo y metodológico alrededor del bajo conocimiento y pensamiento geométrico aparece influenciado por diversos factores los cuales será necesario detectar a través de la investigación, una aparente causa parece ser por ejemplo que en las diversas propuestas curriculares para la enseñanza de las matemáticas y específicamente en los textos de ésta ciencia, aparece la geometría como una de las últimas unidades, lo cual tiene serias repercusiones en su conocimiento, una de ellas el hecho de no enseñarse actualmente en nuestras escuelas, pues el tiempo y los diversos ritmos de aprendizaje presentes en las aulas lo impiden e igualmente muchos docentes no poseen una visión estructural e integral del área.

Por todas las anteriores reflexiones, investigar acerca de los contenidos, objetivos y métodos relativos a la enseñanza de la Geometría en el nivel básico, constituye una alternativa para el perfeccionamiento de ésta asignatura y como consecuencia de su aplicabilidad deberá contribuir en las

escuelas a la desaparición de los problemas de organización del conocimiento, desarrollo de habilidades generales y específicas, además de lograr transformaciones en la personalidad de los alumnos que reflejen el interés por el descubrir e indagar acerca del conocimiento matemático, esperando como resultado el aprendizaje de los conceptos básicos de la Geometría que se orientan en la educación básica por parte de los docentes.

2.4. REFLEXIONES METODOLÓGICAS

La enseñanza de la Geometría es un componente de la formación general de la Matemática y es esencial en los primeros años, por tanto el niño se apropia de los conocimientos matemáticos a partir del reconocimiento de formas presentes en su espacio físico (aula de clase).

El número por ejemplo no se simboliza en primera instancia, pero si se logra empezar a asociar el concepto de unidad a partir de los volúmenes, figuras o cosas (un martillo, una taza, un borrador, entre otros).

En éste sentido el contenido del concepto formación general depende del nivel alcanzado por el desarrollo de la ciencia, del sistema socioeconómico, de las condiciones del sistema de instrucción pública y de otros factores. Una formación general de los estudiantes en la enseñanza de la geometría específicamente debe abarcar aspectos como:

Formar en los alumnos ideas sobre el contenido respecto a los objetos geométricos del plano y del espacio, así como sobre las relaciones entre ellos.
De igual manera como tareas esenciales serán las de explicar las relaciones fundamentales entre los objetos geométricos y tratar las clases más importantes de las transformaciones de los objetos geométricos.

También comprender desde el punto de vista de su

contenido, las proposiciones acerca de las relaciones, las aplicaciones y los objetos geométricos y aplicar tales proposiciones en la resolución de tareas teóricas y prácticas.

Se deben impartir conocimientos precisos acerca del procedimiento para la resolución de ejercicios geométricos (especialmente ejercicios de construcción). En la escuela básica sugerimos abordar los siguientes:

- Unir dos puntos mediante una recta.
- Determinar el punto de intersección de dos rectas. Señalar puntos en una recta.
- Trazar una circunferencia con un centro y radio dados.
- Trazar la perpendicular a una recta r pasando por un punto P (interior o exterior a dicha recta).
- Trazar una paralela a una recta r pasando por P (punto exterior a dicha recta).
- Transporte de segmentos.
- Transporte de ángulos
- Traslaciones
- Rotaciones
- Reflexiones
- Construcción de triángulos
- Bisecar un segmento dado.
- Construcción de cuadriláteros

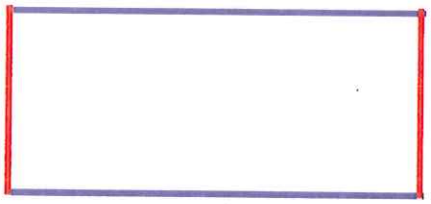
La enseñanza de la Geometría debe ofrecer una visión de los métodos que se aplican en la descripción de los objetos geométricos mediante los números o longitudes. Es claro que la Aritmética y la Geometría están estrechamente vinculadas. "El conocimiento de que los objetos geométricos que se construyen, puede someterse también a un cálculo, debe aprovecharse para plantear un mismo ejercicio con diferentes métodos matemáticos".[6]

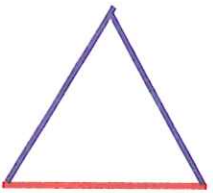
[6] La Enseñanza de la Geometría y sus aspectos metodológicos esenciales. Dr. Rudolf Bittner. Universidad Ernst-Moritz-Arndt, Greitswald. Conferencia sobre Metodología de la Enseñanza de la Matemática 3. Editorial Pueblo y Educación, 1985, pág. 112-125

Los conceptos y las relaciones geométricas entre los objetos, se obtienen en los niños mediante la abstracción de los objetos y las representaciones que se encuentra en el entorno local e institucional, de ahí que es importante desde un punto de vista metodológico hacerles notar que habitamos un espacio geométrico lleno de formas, figuras y volúmenes. Si esto no es posible es conveniente buscar o inventar una base ilustrativa para que mediante dibujos, modelos, recortes, plastilina, juegos y otros, estos empiecen a representar los objetos geométricos para luego establecer características comunes y no comunes.

Es necesario tener en cuenta el saber previo de los niños alrededor de la geometría, para que a partir de ello, se orienten nuevos conocimientos, así como la formación de capacidades y habilidades.

El repaso permanente en el aula y otras formas alternativas de fijación son esenciales. Un niño que después de reconocer en clase los conceptos de largo y corto se enfrente a una actividad como la de repasar con color azul los lados más largos de la siguiente figura y de color rojo los lados más cortos, no se verá seguramente sorprendido al realizar esta nueva actividad, dado que en un comienzo se trabaje por ejemplo con segmentos largos y cortos, lápices dibujados largos y cortos, reglas largas y cortas.





Cada ciencia posee un lenguaje propio que le concede nivel de cientificidad, por eso es adecuado que los niños describan sus reflexiones, los conocimientos obtenidos y los aplicados utilizando este lo más claro posible y de acuerdo a su nivel de aprendizaje, pues este está inevitablemente atravesado por el ritmo propio de cada sujeto.

Los niños deben intentar construir sus propias proposiciones sencillas acerca de los objetos geométricos y de las relaciones existentes entre estos. Siempre se debe mantener en el aula una actividad de constante comprobación, es decir, mirar si estos efectivamente se han apropiado del nuevo conocimiento. Imprimir de imaginación espacial a los estudiantes, solicitando que recreen en forma verbal por ejemplo los espacios y lugares donde habitan, buscando desarrollar la capacidad de asombro, que lo que aparentemente es cotidiano no lo es y que en cada lugar existe un constante descubrir de la realidad, a la que simplemente se le pasaba una fugaz vista.

BIBLIOGRAFIA

James R. Newman. Enciclopedia Sigma de las Matemáticas. Ediciones Grijalbo, S.A., Barcelona España, 1994.

Artículo: Formación Matemática, conocimiento y desarrollo social. Miguel Monsalve G., Departamento de Física - Facultad de Ciencia. Universidad Nacional de Colombia, sede Medellín, 1997

Problemas de la Educación Matemática. Marco General Propuesta Curricular. Ministerio de Educación Nacional, grado noveno, Santafé de Bogotá, D.C., 1991

Teoría General de Procesos y Sistemas, primera parte, reflexiones teóricas. Carlos Eduardo Vasco, 1995

Jairo Díaz Lucas. Coordinador Nacional de Investigación del TIMSS. Análisis y resultados de las pruebas de Matemáticas. Diseño, metodología y resultados del Tercer Estudio Internacional de Matemáticas y Ciencias TIMSS en Colombia. Ministerio de Educación Nacional. Universidad del Valle, Facultad de Ciencias, Cali, 1997.

Curso de Geometría. Felipe de Jesús Landaverde, editorial Retina, Santafé de Bogotá, 390 páginas

Memorias: Primer Encuentro Regional de Profesores de Matemáticas con Énfasis en la Enseñanza de la Geometría. Universidad de Antioquia. Facultad de Ciencias y Artes, octubre 28 al 31 de 1997

Documento: Tendencias Innovadoras en Educación Matemática. Miguel de Guzmán. Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Tecnología, editorial popular, Barcelona, España, 1993, 25 páginas

Lineamientos Curriculares de Matemáticas. Áreas obligatorias y Fundamentales. Ministerio de Educación Nacional. Dirección General de investigación y Desarrollo Pedagógico. Grupo de Investigación Pedagógica, Santafé de Bogotá, 1998, 131 p.

Torres Fernández Paúl. Documento: Didácticas Cubanas en la Enseñanza de la Matemática. Proposiciones Metodológicas. Instituto Superior Pedagógico «Enrique José Varona». Facultad de Ciencias. Departamento de Matemática y Computación. Ciudad de la Habana, Cuba, 1996.

Torres F. Paúl, Oramas Hernández Carolina y otros. Documento: Tendencias de los Educadores Matemáticos Iberoamericanos. Instituto Superior Pedagógico «Enrique José Varona». Facultad de Ciencias. Departamento de Matemática y Computación. Ciudad de la Habana, Cuba, 1998

Memorias V Encuentro Departamental de Matemáticas. Experiencias Didácticas en la Enseñanza de la Geometría en Antioquia, CEID - ADIDA, agosto 26 y 27 de 1999.

Dickson Linda, Brown Margaret y Gibson Olwen. El Aprendizaje de las Matemáticas. Ministerio de Educación y Ciencia. Editorial Labor, S.A.. Primera edición, Barcelona, España, 1991, 399p.

ANEXO

Documento de Internet: e-mail: www.google.com
Traducción de la bibliografía de Luitzen Brouwer, febrero de 2001

LUITZEN BROUWER

(1881 - 1966), matemático holandés que fundó el intuicionismo matemático (una doctrina que ve la naturaleza de matemática como construcciones mentales gobernada por leyes evidentes por sí mismas), y quien transformó la topología, el estudio de las propiedades más básicas de las superficies y las configuraciones geométricas.

Brouwer enseñó en la Universidad de Amsterdam de 1909 a 1951. Él hizo la mayoría de su trabajo importante en topología entre 1909 y 1913. En relación con sus estudios del trabajo de David Hilbert, él descubrió el teorema de translación en el plano, el cual caracteriza cartografías topológicas del plano Cartesiano, y el primero de sus teoremas del punto fijo, importante en el establecimiento de algunos teoremas fundamentales en algunas ramas de matemática como ecuaciones diferenciales y teoría del juego. En 1911 él reveló sus teoremas de invarianza topológica. Además, él unió los métodos desarrollados por el matemático alemán Georg Cantor con los métodos del análisis situs, una fase temprana de la topología y muchos consideran a Brouwer el fundador de la topología.

En su tesis doctoral, *"Sobre las Bases de la Matemática"* (1907), Brouwer atacó las fundaciones lógicas de la matemática y formó los principios de la escuela del Intuicionismo. El año siguiente, en *"Sobre el mérito de la desconfianza en los Principios Lógicos"*, él rechazó como válido el uso en pruebas matemáticas del principio del medio excluido que afirma que cada declaración matemática es verdad o falsa y ninguna otra posibilidad se permite. En 1918 él publicó una teoría fija, el año siguiente una teoría de medida, y a mediado de 1923 una teoría de funciones,

todas desarrolladas sin usar el principio del medio excluido.

Él continuó sus estudios hasta 1954, y, aunque él no ganó una aceptación extendida para sus propuestas, el intuicionismo disfrutó un resurgimiento del interés en él después de la Segunda Guerra Mundial, principalmente debido a las contribuciones del matemático americano S.C. Kleene.

INTRODUCCIÓN HISTÓRICA Y NOCIONES FUNDAMENTALES

La transformación gradual del mecanismo de pensamiento matemático es una consecuencia de las modificaciones que, en el curso de historia, han ocurrido en las ideas filosóficas prevaleciendo, primeramente acerca del origen de la certeza matemática, en segundo lugar acerca de la delimitación del objeto de la ciencia matemática. A este respecto podemos comentar que a pesar de la tendencia incesante del objeto al sujeto del lugar atribuido por filósofos al tiempo y el espacio en el medio del sujeto-objeto, la creencia en la existencia de propiedades inmutables del tiempo y el espacio, propiedades independientes de la experiencia y del idioma, permanecía intacta en el siglo diecinueve. Obtener conocimiento exacto de estas propiedades, llamadas matemáticas, los medios siguientes normalmente fueron probados:

Se postularon como invariables algunas regularidades muy familiares a la experiencia exterior o interior de tiempo y espacio, cualquiera de ellas exactamente, o de todos modos con cualquier grado accesible de aproximación. Ellos se llamaron axiomas y se introdujeron en el idioma. Se desarrollaron sistemas de propiedades más complicadas del substrato lingüístico de los axiomas por medio del razonamiento guiado por la experiencia, pero lingüísticamente siguiendo el uso de los principios de la lógica clásica. Nosotros llamaremos el punto de vista gobernado y trabajado por este modo de pensamiento el punto de vista *observacional*, y el periodo largo caracterizado

por este punto de vista el periodo *observacional*. Se considera la lógica como autónoma, y la matemática como (si no existencialmente, si funcionalmente) dependiente de la lógica.

3. INDICADORES DE LOGRO DE LA ASIGNATURA DE GEOMETRÍA

En estos se encuentra inmerso el Currículo Común Nacional de la asignatura de Geometría, se deben constituir en motivo de análisis y estudio por parte de las comunidades educativas, con el fin de construir sus propios lineamientos básicos de contenidos y los indicadores de logro de carácter específico.

El contenido geométrico que se deduce de los siguientes indicadores de logro de carácter nacional es muy reducido, lo cual se puede analizar a partir del siguiente cuadro:[6]

SISTEMA - CONJUNTO DE GRADO	SISTEMA GEOMÉTRICO
PREESCOLAR	
1. DIMENSIÓN CORPORAL	Simetría axial Clases de líneas: recta quebrada, curva, abierta, cerrada. Relaciones visoespaciales
2. DIMENSIÓN COMUNICATIVA	Combinación de curvas y rectas
3. DIMENSIÓN COGNITIVA	Rotaciones, traslaciones, homotecias.
4. DIMENSIÓN ÉTICA, ACTITUDES Y VALORES	Rotaciones, traslaciones, homotecias.
5. DIMENSIÓN ESTÉTICA	
1°, 2°, 3° DE EDUCACIÓN BÁSICA	Clases de líneas: Cuerpo físico y cuerpo geométrico.

[6] Libro Inédito: Análisis de los Indicadores de Logro. Jorge Cardeño E. Carlos Enrique Pino. Medellín, 2001.

SISTEMA - CONJUNTO DE GRADO	SISTEMA GEOMÉTRICO
	Figuras planas: Triángulos, cuadrados, rectángulos, círculos, uso de regla, compás Concepto de área Concepto de volúmen
4° , 5°, 6° DE EDUCACIÓN BÁSICA	Ángulos: medidas Movimientos rígidos: reflexión, traslación, rotación. No rígido: Homotecia: propiedades de los movimientos en el plano: propiedades: sólidos geométricos:cubo, prisma recto, prisma oblicuo, pirámide. Sólidos de Revolución: Cilindro, cono, esfera. Construcción de modelos geométricos con materiales dóciles y maleables.

Se observa a continuación algunos Indicadores de Logro básicos en la enseñanza de la asignatura de Geometría en cada uno de los conjuntos de grado propuestos para el nivel preescolar y la educación básica primaria.

3.1. INDICADORES DE LOGROS PARA EL NIVEL PREESCOLAR

EVELIA DE JESÚS VÁSQUEZ POSADA.
Licenciada en Educación Preescolar

3.1.1. Se orienta en el espacio y ubica diferentes objetos relacionándolos entre sí y consigo mismo. Aplica esa orientación a situaciones de la vida diaria.

3.1.2. Identifica características de objetos, los clasifica y los ordena de acuerdo con distintos criterios.

3.1.3. Compara pequeñas colecciones de objetos, establece relaciones tales como: "hay más que...", "hay menos que...", "hay tantos como...".

3.1.4. Establece relaciones con el medio ambiente, con los objetos de su realidad y con las actividades que desarrollan las personas de su entorno.

3.2. INDICADORES DE LOGROS EN BÁSICA PRIMARIA

3.2.1. GRADOS 1º, 2º Y 3º

3.2.1.1. Expresa ideas y situaciones que involucran conceptos matemáticos mediante lenguaje natural y representaciones físicas, pictóricas, gráficas, simbólicas y establece conexiones entre ellas.

3.2.1.2. Identifica y clasifica fronteras y regiones de objetos en el plano y en el espacio, reconoce en ellos formas y figuras a través de la imaginación, del dibujo o de la construcción con materiales apropiados y caracteriza triángulos, cuadrados, rectángulos y círculos.

3.2.1.3. Identifica en objetos y situaciones de su entorno las magnitudes de longitud, volúmenes y capacidad; reconoce procesos de conservación y desarrolla procesos de medición de dichas magnitudes con patrones arbitrarios y con algunos estandarizados.

3.2.2. GRADOS 4º, 5º Y 6º

3.2.2.1. Reconoce características de sólidos, figuras planas y líneas, los utiliza en su vida cotidiana en trabajos prácticos como mediciones, elaboración de dibujos y construcción de modelos.

3.2.2.2. Aplica movimientos rígidos en el plano, como traslaciones, rotaciones y reflexiones, identifica las propiedades que se conservan en cada movimiento y visualiza transformaciones simples para descubrir reglas de combinación que permitan crear patrones.

3.2.2.3. Identifica en objetos y situaciones de su entorno las magnitudes de longitud, área, volumen, capacidad, peso, masa, amplitud de ángulos y duración. Reconoce procesos de conservación y desarrolla procesos de medición y estimación de dichas magnitudes y las utiliza en situaciones de la vida diaria.

3.3. EL CONTENIDO DE LA ASIGNATURA DE GEOMETRÍA EN EL NIVEL PREESCOLAR

Tradicionalmente los temas de geometría que se tratan en el Preescolar son:

Figuras Geométricas simples:
- Círculo
- Cuadrado
- Triángulo
- Rectángulo

El punto
Las líneas:
- Abierta
- Cerrada
- Curva
- Recta
- Vertical
- Horizontal
- Paralela
- Perpendicular

El plano

Se ha sentido la necesidad de iniciar a los estudiantes desde los primeros momentos escolares en el conocimiento y familiarización con los instrumentos de medición que se utilizan en la geometría tales como: el compás, la regla, el transportador y la escuadra, en forma práctica y mediante materiales del medio. Por ejemplo podemos iniciar el uso del compás mediante un pedazo de cordel y trazar circunferencias donde uno de los niños sujete éste en el centro y otro en el extremo opuesto (cordel templado), da una vuelta completa.

Es claro entonces que en el nivel Preescolar la intuición juega uno de los papeles mas importantes en la enseñanza aprendizaje de las Matemáticas.

La más usual en el preescolar es la regla, pero se debe iniciar desde este nivel con todos los demás instrumentos de una manera muy sencilla y amena con los estudiantes.

En todas las actividades realizadas por los niños y niñas de preescolar debe estar la lúdica, el canto, las retahílas, poesías, el dibujo, modelado, pintura y rasgado.

También para iniciar a los infantes en la geometría nos valemos de estos medios, para que el alumno adquiera habilidades y destrezas para su proyección en el área de geometría.

BIBLIOGRAFÍA

- Resolución 2343 de 1996. Ministerio de Educación Nacional, Santafé de Bogotá.
- Pedagogía: Matemáticas desde la Primaria. María I. De Díaz. La Alegría de Enseñar No. 8, 1985.

4. PROPUESTA DE CONTENIDOS GEOMÉTRICOS EN PRIMARIA

MAGDALENA LÓPEZ VALENCIA
LUIS GONZAGA DE J. RESTREPO RAMÍREZ

La necesidad de vincular la Geometría con la Aritmética se puede constituir a nivel escolar en una nueva alternativa metodológica a implementar en el aula, retomando con mayor énfasis la primera en la Educación Básica.

4.1. INTRODUCCIÓN

Según la teoría de las múltiples inteligencias, se plantea que el pensamiento espacial es esencial para el pensamiento científico. El manejo de información espacial

sirve para resolver problemas de ubicación, orientación y distribución de espacio, y es característico de personas que tienen desarrollada su inteligencia espacial.

La nueva propuesta hace énfasis en la geometría activa como importante para desarrollar el pensamiento espacial, por lo tanto nos atrevemos a proponer los siguientes contenidos programáticos para la asignatura de geometría que abarcan los grados desde preescolar hasta quinto (5º).

Aunque todos los sistemas están relacionados entre sí, los sistemas que integramos en esta propuesta de contenidos de geometría para la educación de básica primaria son los sistemas geométricos y los sistemas métricos.

4.2. CONTENIDO: SISTEMAS GEOMÉTRICOS Y SISTEMAS MÉTRICOS

4.2.1. GRADO PRIMERO

Tema 1 Ubicación del niño con relación a su en torno cercano: Detrás, adelante, dentro, fuera, arriba, abajo, derecha, izquierda.

1.1. Clasificación de objetos: a. Por su forma
b. por su tamaño

1.2. Identificación de cuerpos geométricos
a. Cubo b. Cono c. Prisma
d. Cilindro e. Esfera

Tema 2: Figuras Geométricas
2.1. Líneas
2.2. Círculos
2.3. Triángulos
2.4. Cuadriláteros

Tema 3: Nociones con la medición de longitudes: Patrones arbitrarios, el decímetro y el metro.

4.2.2. GRADO SEGUNDO

Tema 4: Ubicación espacial

4.1. Ubicación:
a. Del alumno en relación con su entorno (cerca, lejos, izquierda, derecha,...)
b. De objetos o seres entre sí (adelante, atrás,...)

4.2 . Los puntos cardinales

Tema 5: Cuerpos Geométricos
5.1. Representación de cuerpos y objetos del entorno.
a. Cuerpos iguales
b. Figuras iguales
c. Contrastes de formas y tamaños
5.2. Clasificación de cuerpos geométricos.

Tema 6: Figuras geométricas .
6.1. Líneas perpendiculares y paralelas (reconocimiento)
6.2. Trazo de segmentos.
6.3. Clasificación de figuras geométricas (formas cuadradas, triangulares, rectangulares y circulares)

Tema 7: Longitud: m, dm, cm.

4.2.3. GRADO TERCERO

Tema 8: Ubicación espacial
8.1. Representación en el plano de la ubicación de seres y objetos del entorno inmediato.
8.2. Representación de desplazamientos en el plano
8.3. Diseño, lectura e interpretación de croquis.
8.4. Observación y representación de objetos desde diversas perspectivas.

Tema 9: Cuerpos Geométricos
9.1. Características de los cuerpos
9.2. Introducción a la construcción de cubos
9.3. Representación gráfica de cuerpo y objetos

Tema 10: Cuerpos Geométricos
- 10.1. Simetría:
  a. Figuras Simétricas
  b. Ejes de simetría (identificación y trazo)
- 10.2. Identificación de círculos, circunferencias, rectángulos, triángulos, cuadrados, ángulos, figuras abiertas y cerradas.
- 10.3. Trazo de líneas paralelas y perpendiculares.
- 10.4. Trazo de figuras con regla y compás.
- 10.5. Construcción y transformación de figuras
- 10.6. Clasificación de triángulos y cuadriláteros a partir de sus características: igualdad de lados, paralelismo, perpendicularidad y simetría.

4.2.4. GRADO CUARTO

GEOMETRÍA I

Tema 11: Longitudes, áreas y volúmenes
- 11.1. Resolución de problemas que impliquen la medición de longitudes
- 11.2. Introducción del Kilómetro como unidad para medir grandes distancias
- 11.3. Planteamiento y resolución de problemas que identifiquen el cálculo de perímetros.
- 11.4. Medición de área de figuras usando cuadrículas.
- 11.5. Área del rectángulo
- 11.6. Área del cuadrado
- 11.7. Área del triángulo
- 11.8. Introducción a la noción de volumen

Tema 12: Capacidad, peso y tiempo.
- 12.1. Unidades de capacidad y de peso
- 12.2. El uso del mililitro y del miligramo
- 12.3. Instrumentos de medición: la báscula
- 12.4. El año y el calendario
- 12.5. El lustro, la década, el siglo y el milenio
- 12.6. El uso del reloj

GEOMETRÍA II

Tema 13: Ubicación espacial
- 13.1. Representación del punto y desplazamien tos en el plano
- 13.2. Diseño, lectura e interpretación de croquis y planos.

Tema 14: Cuerpos Geométricos
- 14.1. Introducción a la construcción de cuerpos geométricos
- 14.2. Clasificación de cuerpos geométricos

Tema 15: Figuras geométricas
- 15.1. Comparación de ángulos
- 15.2. Uso del transportador en la medición de án gulos
- 15.3. Clasificación de ángulos menores de 180°
- 15.4. Simetrías
- 15.5. Clasificación de los triángulos
- 15.6. Clasificación de los cuadriláteros
- 15.7. Clasificación de los polígonos regulares
- 15.8. Trazo de líneas paralelas y perpendiculares
- 15.9. Trazo de las alturas del triángulo
- 15.10. Trazo del círculo
- 15.11. Composición y descomposición de figuras geométricas (rompecabezas)

4.2.5. GRADO QUINTO

GEOMETRÍA I

Tema 16: Introducción al estudio del sistema métrico decimal

Tema 17: Longitudes.
- 17.1. Planteamiento y resolución de problemas que impliquen el cálculo de perímetros
- 17.2. Longitud de una circunferencia

Tema 18: Áreas.
- 18.1. Resolución de problemas que impliquen el

cálculo de áreas de:
Cuadrados, rectángulos, triángulos, rombos y trapecios.

18.2. Resolución de problemas que impliquen el cálculo de área de un círculo

Tema 19: Volúmenes.
19.1. Medición del volumen de prismas y cubos
19.2. Resolución de problemas que impliquen el cálculo de volúmenes prismas y cubos.

Tema 20: Medidas de capacidad y de peso. El litro. El gramo.
20.1. Unidades de capacidad
20.2. Unidades de peso
20.3. El dinamómetro y la báscula
20.4. Relación de las unidades de volumen, capacidad y peso.

GEOMETRIA II

Tema 21: Introducción de ejes coordenados cartesianos

Tema 22: Coordenadas de un punto

Tema 23: Construcción y armado de patrones de cubos, prismas y cilindros.

Tema 24: Trazo de figuras utilizando la regla y la es cuadra (rectas paralelas y perpendiculares).

Tema 25: Trazo de circunferencias
25.1. Trazo de circunferencias
25.2. Medición con el compás
25.3. Trazo de figuras a partir de ejes de simetría

Tema 26. Clasificación de figuras utilizando diversos criterios
26.1. Los triángulos y su clasificación
26.2. Los cuadriláteros y su clasificación

Tema 27. Construcción de figuras a escala.

4.3. SITUACIÓN COMPARATIVA

A continuación damos a conocer el contenido geométrico que se trata en la actualidad en algunas escuelas primarias del municipio de Granada (Antioquia).

Con sorpresa damos a conocer la información de que en algunas escuelas de ésta localidad se enseñan algunas nociones de Geometría que reseñamos, aunque no todas las que quisiéramos, si es suficiente en comparación con la mayoría de escuelas de nuestro departamento. Reseñamos lo que los profesores de Granada consideran como dificultades para la enseñanza de la Geometría, como también la sugerencia para mejorar la enseñanza de esta asignatura.

En los grados 1º, 2º y 3º de primaria los contenidos son muy similares, se observa que en el grado tercero aparecen nuevos contenidos como: la recta y sus clases, clases de ángulos y noción de perímetro. Los contenidos mencionados son:

- Formas similares
- Líneas: curvas, rectas cerradas, abiertas, horizontales, verticales
- Algunas figuras geométricas (triángulo cuadrado, rectángulo y círculo)
- Noción de medida
- La Recta y clases
- Angulos (4gudos, recto y obtuso)
- Noción de perímetro

En los grados 4º y 5º los educadores trabajan los siguientes contenidos:

- Líneas y clases
- Posición de las rectas en el espacio
- La circunferencia clases - rectas en relación con la circunferencia
- Angulos clases - medición y construcción de ángulos
- Polígonos - elementos

- Clases (le polígonos y sus líneas
- Construcción de polígonos y empleo del compás
- Triángulos clases
- Cuadriláteros - clasificación
- Perímetro de polígonos regulares
- Áreas de algunas figuras geométricas (triángulo cuadrado rectángulo trapecio rombo)
- Relación de área y perímetro con las medidas de longitud y superficie
- Problemas de aplicación

Es motivo de preocupación la considerable reducción del contenido geométrico en la básica primaria, en el caso particular del presente municipio. Esta realidad se puede corresponde con la de otras instituciones educativas del departamento, donde quizás no se trate por lo menos un curriculo mínimo geométrico.

4.4. DIFICULTADES

Entre las dificultades que manifiestan tener los educadores en la enseñanza y en el aprendizaje de la asignatura, tenemos:

- En algunos alumnos poca capacidad de observación.
- Dificultad en los trazos y el empleo del espacio y la regla.
- Confunden el rectángulo con el cuadrado
- Dificultad en el manejo del compás para la construcción de figuras.
- Generalmente es la última unidad del área por lo tanto muchas veces no se alcanza a trabajar con los estudiantes y si se da se trabaja ría en forma muy efímera.

NOTA: Como en el preescolar y primero las clases se desarrollan lo más practico posible, los niños/as aprenden comparando y analizando hasta formarse conceptos que aunque no aciertan a graficarlos con exactitud, si adquieren nociones básicas que demuestran en las actividades de comparación - agrupación y selección.

4.5. SUGERENCIAS

Las secuencias en las clases de geometría con un horario de trabajo previamente establecido ayudan al alumno a familiarizarse con el área Y APRENDE POCO A POCO a conocer y a manejar los elementos para el trabajo con el compás, la escuadra, la regla y el transportador.

BIBLIOGRAFÍA

Zúñiga, Enrique y otros. Matemáticas de 1 a 5. Serie Eureka. Mc. Graw Hill. Segunda Edición, 1998.
Resolución 2343 de 1996.

Ley general de Educación No. 115 de 1994

Lineamientos curriculares de Matemáticas. Cooperativa editores magisterio.

5. LOS MEDIOS EN LA GEOMETRÍA

JUAN SEBASTIÁN MENA M.
Licenciado en Matemáticas y Física U. de A.

En las propuestas actuales de la enseñanza de la Geometría es necesario que el maestro se apropie de los medios (instrumentos), que le permitan a los estudiantes una mayor asimilación de los conceptos geométricos, a partir del importante papel de la aplicación de la intuición (lo sensible) en la Educación Básica.

En el trabajo con la Geometría es fundamental la correspondencia entre los objetivos, los contenidos y los métodos. Dicha triada, es fundamental sobretodo cuando partimos de la base del trabajo con una Geometría en la cual, se descarta el excesivo axiomatismo y formalismo para dar paso a una Geometría de carácter intuitivo.

Desde la escuela primaria se requiere que el maestro ponga en contacto a sus estudiantes con los diferentes medios, que le permitan la realización de un trabajo geométrico

intuitivo. No solo manejarlos de manera automática, sino también el permitir que el estudiante conozca las diferentes aplicaciones que puede tener el manejo de instrumentos como la regla, la escuadra, el transportador, el compás, el geoplano, el geoespacio, la modelación, entre otras.

Se recomienda al maestro realizar un trabajo sistemático con dichos instrumentos a través del planteamiento de situaciones problemáticas que obliguen al estudiante a sentir la necesidad de utilizarlos ya que se constituyen en una oportunidad de apoyo.

Darle la oportunidad al estudiante no solo de manipular sino de construir instrumentos, es un gran aporte en el trabajo con la geometría que vaya desde lo intuitivo hasta lo deductivo, ello permite al maestro propiciar el desarrollo de los diferentes niveles de aprendizaje para que al finalizar, en la escuela secundaria y en la educación superior se llegue al razonamiento deductivo.

La utilización de los medios geométricos, ha de permitir la formación de un alumno competente frente a su saber en tareas específicas, mediante el desarrollo de habilidades y destrezas.

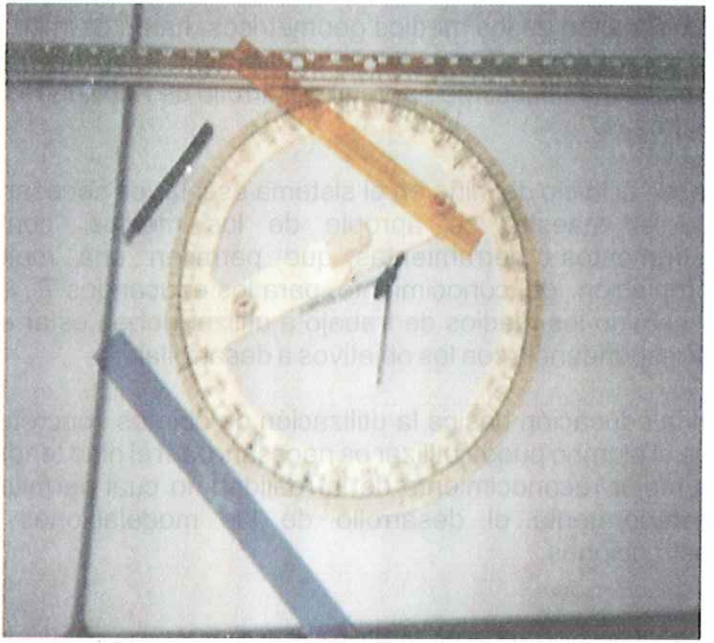
Desde el inicio del niño en el sistema escolar es necesario que el maestro se apropie de los medios "como instrumentos o herramientas que permiten una mejor apropiación del conocimiento, para los educandos"7 , en tal sentido los medios de trabajo a utilizar deben estar en correspondencia con los objetivos a desarrollar.

En la educación básica la utilización de objetos concretos que el alumno pueda utilizar es necesario, así el niño tendrá un mejor reconocimiento de la realidad, lo cual permitirá posteriormente el desarrollo de las modelaciones y abstracciones.

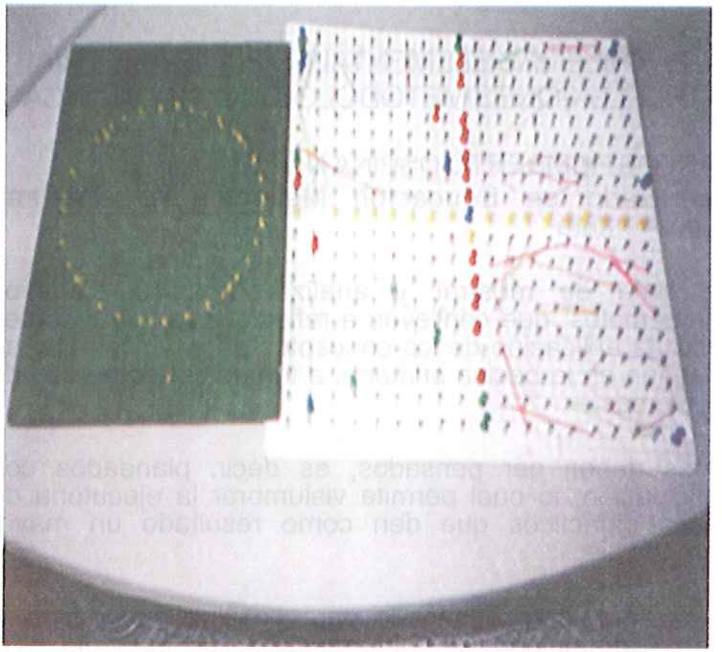
7 Conferencias metodológicas de la enseñanza de la Matemática. Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de la Habana, Cuba. 1992.

El papel del maestro es sumamente importante ya que él con su creatividad ha de utilizar recursos que en el entorno le ofrece, así como los instrumentos técnicos utilizados para el trabajo con la Geometría. Uno de los modelos propuestos por los actuales lineamientos curriculares, es el modelo de Van Hiele, que explica que el individuo en su desarrollo pasa por diferentes etapas, siempre y cuando tenga la oportunidad de enfrentar acciones y actividades que se lo faciliten y tenga contacto con diferentes objetos e instrumentos.

Son instrumentos utilizados en el trabajo con la Geometría: Los sólidos que representan diferentes cuerpos geométricos, las reglas, escuadras, transportadores, pantógrafo, entre otros. Muchos educadores se aprovechan de herramientas como rompecabezas y objetos de diferentes contornos que aunque no utilizan medidas cumplen importantes objetivos.



En la utilización de rotaciones y traslaciones el Geoplano, que puede ser construido con los estudiantes, facilita de una manera muy favorable el manejo de lo espacial.



Una concepción en la cual se conoce que es necesario que el alumno permanezca en contradicción con lo que se observa en el mundo, con los nuevos y viejos conocimientos permite que la aplicación de diferentes herramientas como el computador y la tecnología virtual, no sean utilizados de una manera mecánica, sino que se constituyan verdaderos medios que promuevan un aprendizaje científico en los individuos.

BIBLIOGRAFÍA

MEN. Lineamientos curriculares matemáticas, Santa fe de Bogotá.1999

Montenegro, Ignacio. Evaluemos Competencias Matemáticas. Editorial Magisterio, Santafé de Bogotá, 1999.

Ballester, Sergio. Didáctica de las Matemáticas. Editorial Instituto Enrique José Varona. La Habana, Cuba, 1995.
Ley General de Educación , MEN , 8 de febrero de 1994.

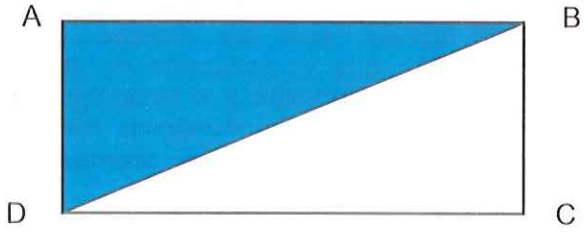
6. PROBLEMAS ELEMENTALES EN GEOMETRÍA REFLEXIONES METODOLÓGICO – DIDÁCTICAS

CARLOS HUMBERTO OSPINA NOREÑA
Licenciado en Educación Mecánica. U. de san Buenaventura

Se trata de mostrar y analizar algunos ejemplos "elementales" que conlleven a reflexionar a los docentes sobre la aplicación de los conceptos geométricos que se enseñan en la básica primaria, a través del desarrollo de problemas.

Estos deben ser pensados, es decir, planeados con anticipación, lo cual permite vislumbrar la ejecutoria de pasos didácticos que den como resultado un mayor aprendizaje.

El razonamiento empleado para concluir que desde el paralelogramo podemos obtener el área del triángulo, es la expresión abstracta de una intuición.



El concepto geométrico parece surgir de la experiencia, es decir, de lo sensible. Por eso la enseñanza inicial proporciona una base intuitiva para la formación de conceptos.

Las nociones primarias de forma, longitud o simetría, se adquieren observando, comparando, construyendo, recor

tando y plegando cuerpos y figuras. Sin embargo es importante destacar que esta intuición sensible no puede hacer más que sugerir los conceptos.

"En la elaboración final de los conceptos fundamentales de la geometría no interviene para nada la experiencia".

Por la intuición sensible se tiene no solo la imagen de las figuras o de los cuerpos geométricos; para captar una relación es preciso realizar un acto intelectual, tener una intuición intelectual de los objetos.

Generalmente se utilizan medios experimentales para hacer que los alumnos de los grados inferiores tengan una imagen de los mismos: dibujan y recortan un triángulo, por ejemplo, y forman la imagen, con lo que logran la intuición sensible de ese triángulo.

Si las experiencias se repiten, pueden adquirir una imagen generalizada de la figura triángulo. Cuando en ausencia de toda representación material evocan un triángulo, hacen surgir esas imágenes mentales: realizar un acto semejante de intuición sensible. En este caso, como en los anteriores, la estructura misma del objeto triángulo no ha sido captada. Si por un acto intelectual se perciben las relaciones – si los ángulos, las rectas y los planos se ponen en cierta relación – se podrá formar entonces la noción de triángulo.

Para comprender los principios de la geometría es imprescindible que el alumno haya alcanzado esta etapa de desarrollo.

6.1. OBJETIVOS PLANTEADOS CON LOS EJERCICIOS DE APLICACIÓN Y PROBLEMAS

6.1.1. Con la solución de ejercicios deben fijarse: conceptos, teoremas y procedimientos por medio de una aplicación.

6.1.2. Trascendiendo el proceso de solución del ejercicio, deben formarse y fijarse convicciones y formas de conducta.

6.1.3. Deben lograrse los objetivos planteados a nuestra escuela (PEI).

6.1.4. Deben desarrollarse en los alumnos las especialidades que le permitan construir modelos matemáticos de situaciones concretas.
6.1.5. Se desarrolla en los alumnos la idea de la amplia posibilidad de aplicación de la matemática – contribuye al desarrollo ideológico-filosófico del alumno.

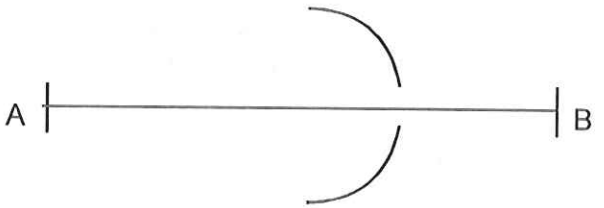
6.2. PROBLEMAS ELEMENTALES EN GEOMETRÍA

6.2.1. Obtener la mediatriz de un segmento de recta AB con regla y compás.

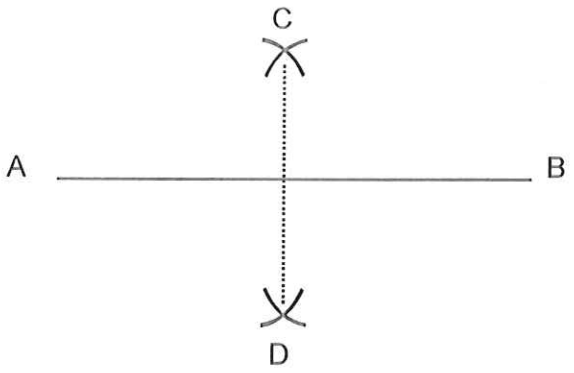
Toma el compás abierto con una amplitud mayor que la mitad de la longitud del segmento AB.



Con el compás haciendo centro en A, traza un arco *a* de tal manera que sobresalga significativamente a lado y lado del segmento de recta.



Con el compás conservando la misma amplitud del arco anterior, y haciendo centro en B traza el arco *b* hasta cortar el arco *a* a lado y lado del segmento de recta, en los puntos C y D.



Una con una regla los puntos C y D. Esta es la mediatriz del segmento AB.

6.2.2. Trazar la bisectriz de un ángulo con regla y compás.

Con una amplitud cualquiera del compás y haciendo centro en el vértice O del ángulo, se hace una marca en cada uno de los lados del ángulo. Se obtienen así dos puntos A y B, uno en cada lado del ángulo y que están a la misma distancia del vértice O.

Con una abertura de compás mayor que la distancia AB y haciendo centro en A trazo un arco $\underline{a}$.

Con la misma abertura de compás que en el paso anterior y haciendo centro en B, trazo un arco $\underline{b}$ que corta al arco $\underline{a}$ en el punto C.

Con la regla trazo una línea que une los puntos OC. La recta obtenida es la bisectriz del ángulo.

6.3. PROBLEMAS METODOLÓGICOS EN LA ELABORACIÓN DE LOS CONCEPTOS Y EN EL TRATAMIENTO DE LAS FÓRMULAS

6.3.1. Conceptos: área y volumen, y fórmulas para el cálculo.

El tratamiento sistemático de los problemas en que se trata la medición del área es tema de los primeros cursos, incluido el conocimiento de las unidades de superficie, también se dominan algunas relaciones entre las unidades, distinguiendo además, entre un polígono y su superficie, entendiendo por ésta un conjunto de puntos en el plano. Al introducir la multiplicación se cubre la superficie de un rectángulo con la superficie de cuadrados unidad. Así pues, los alumnos ya aprenden el procedimiento que consiste en cubrir una superficie dada con la unidad de área.

Desarrollo paulatino de las siguientes acciones mentales:
Trabajo con cuadrados: construir y descomponer
Paso al trabajo en dibujos
Paso a la representación con símbolos.
Determinación del área mentalmente y asimilación de la fórmula.

Las operaciones del cálculo deben realizarse primeramente con números naturales. Al mismo tiempo, se puede aprovechar la oportunidad para la fijación de habilidades en la conversión de unidades.

Las fórmulas $A = a \times b$ y $V = a \times b \times c$ se han deducido precisamente para medidas con números naturales pero posteriormente se aplicarán también en otros dominios numéricos.

Debe tener en cuenta que en la misma clase se tratan el perímetro y el área. Los alumnos tienden a confundir fácilmente estas magnitudes, esto mismo sucede con los conceptos de área y volúmen. Estos conocimientos deben afianzarse observando las unidades de medida y aplicando las fórmulas en ejercicios donde no se mencionan de forma explícita las magnitudes buscadas (alambre para cercar, cantidad de pintura requerida para pintar cajas, otros.)

BIBLIOGRAFÍA

Spencer de Rosa A. P. Y de Giudice María Celina M. Didáctica del Contenido Lógico Matemático. Editorial Kapelusz, 1988.

Labarrete Sarduy Alberto F. Cómo Enseñar a los Alumnos de Primaria a Resolver Problemas. Editorial Pueblo y Educación, ciudad de la Habana, Cuba, 1988.

7. EVALUACION

JORGE CARDEÑO ESPINOSA.
Director CEID ADIDA

El nuevo enfoque de evaluación planteado en la Ley General de Educación es la cualitativa. No se quiere decir en ningún momento que lo cualitativo excluye lo cuantitativo.

La evaluación cualitativa debe ser formativa, contínua, sistemática y flexible; centrada en el propósito de producir y recoger información necesaria sobre los procesos de enseñanza aprendizaje, que tiene lugar en el aula y por fuera de ella.

Hoy interesa una evaluación integral que conduzca al desarrollo del pensamiento y a la creatividad en los estudiantes; que sean visibles las formas de actuación, las cuales se pueden identificar como características del pensamiento lógico matemático, al igual que las actitudes de estos durante la ejecución de la actividad evaluativa y escolar.

La evaluación puede ser de diagnóstico, formativa o de acreditación.

"Nada ni nadie se salva de la evaluación, pues ella se realiza para detectar el estado del sistema y mejorarlo, no para condenar sino para cualificar la educación, para obtener información válida y así, el estado, responsable social de la educación de las nuevas generaciones, puede tomar decisiones y ofrecer múltiples alternativas formativas para cada nueva generación de ciudadanos.

Los instrumentos de evaluación son necesarios para obtener

información válida sobre el proceso de aprendizaje de los estudiantes. El examen tiene que existir en la escuela. El problema es su elaboración. El hecho no es que el examen se condene por ser oral o escrito, tipo test o ensayo, individual o grupal, sino que se aplique en concordancia con los métodos y las formas como los objetivos fueron desarrollados en el proceso para resolver los problemas y que su realización sea un de acuerdo entre el docente y sus dicentes."[8]

Es importante que la evaluación en el aula hoy se oriente en el campo de las Matemáticas hacia las acciones de tipo interpretativo, argumentativo y propósitivo, mediante la resolución, planteamiento y formulación de problemas, además de pruebas de comprensión que impliquen desarrollo de la creatividad.

El diseño de estas pruebas requiere dedicación y planeación. Analicemos la siguiente a llevar a cabo en un quinto o sexto grado de Educación Básica, con el objetivo de verificar el dominio de los conceptos de ecuación de primer grado y propiedad uniforme de la igualdad con respecto a la suma:

Completa:

a)
$$w = 17$$
$$\square = 4w$$
$$=$$

b) Sí w significa: El peso corporal de Juan (el peso medido en kilogramos), construya el enunciado co rrespondiente a la ecuación obtenida en el literal (a).

c) Completa el enunciado construido en el literal (b) de tal forma que se convierta en un problema.

[8] Lecciones de Didáctica General. Carlos M. Alvarez de Zayas y Elvia María González Agudelo. Impresión edinalco ltda. Páginas 68 y 69, 1998.

d) Resuelva el problema.

e) Construya un nuevo proceso igual o diferente al anterior.

8. REPORTAJE A LA HISTORIA

CARLOS ENRIQUE PINO GUERRA
Educador de la Normal Superior de Medellín
Lic. Matemáticas. U. De Medellín.

La enseñanza de la Matemática en la actualidad debe estar vinculada con su propia historia. Esto se constituye en una estrategia metodológica que permite elevar el interés de nuestros estudiantes por el conocimiento de ésta ciencia.

"Que todo nuestro conocimiento empieza con la experiencia, es efectivamente cosa sobre la cual no hay duda... pero aunque nuestro conocimiento empieza con la experiencia, no nace todo él de la experiencia".

EMMANUEL KANT

Viajar retrospectivamente en el tiempo es posible mediante el recuerdo. La fuente griega de la Historia de la Matemática me permite revivir el momento e introducirme en el espacio y el tiempo en que se desarrolló la existencia de quien en forma articulada y sistemática expuso todos los conocimientos, que hasta ese entonces se tenían sobre geometría. Tal situación imaginaria me permite entrar en contacto con el geómetra; lo encuentro en la biblioteca de la Academia revisando sus notas, le requiero respetuosamente una entrevista, a la que accede gustosamente.

REPORTERO: ¿Quién inventó la Geometría?

GEÓMETRA: El más antiguo testimonio escrito acerca de las matemáticas procede de BABILONIA y data del siglo XIX (a.v.e.), antes de vuestra era. Se trata de unas tabletas

de greda que pueden colocarse en la mano de un adulto con inscripciones efectuadas con un instrumento puntiagudo cuando aun la greda estaba fresca. En algunas de ellas figuran tablas de multiplicar, el cálculo de la longitud de la diagonal de un cuadrado, el cálculo del área de un trapecio y otras. Suficiente evidencia para establecer que en BABILONIA se tenía el interés por las relaciones que existen entre los distintos elementos de ciertas figuras geométricas.

Según HERODOTO hay que dar un salto de 1.200 años y llegar al siglo VI (a.v.e), para volver a encontrar otra evidencia escrita, con una nueva actitud, frente a los conocimientos matemáticos, es THALES, nacido en MILETO hacia el año 600 (a.v.e) y mercader griego, quien al decidir dedicar el resto de sus días a estudiar y difundir aquello que aprendió en sus viajes por regiones mediterráneas y africanas a lo largo del río NILO, introduce en GRECIA la tradición EGIPCIA Y BABILÓNICA de especular con números, de hallar relaciones entre elementos constitutivos de figuras geométricas o de cuerpos sólidos, pero además de demostrar esas relaciones.



REPORTERO: ¿Qué necesidad práctica ocasionó la invención de la geometría?

GEÓMETRA: Según la tradición general son los EGIPCIOS

quienes han inventado la geometría, que ha nacido de la medida de los terrenos, que les era preciso renovar sin cese a causa de las crecidas del **NILO**, que hacen desaparecer los límites de las propiedades.

REPORTERO: ¿No le sorprende que una necesidad práctica haya ocasionado la invención de esta ciencia o de las otras?

GEÓMETRA: No me sorprende, puesto que todo lo que está sometido a la generación procede de lo imperfecto a lo perfecto; hay pues, progreso natural de la sensación al razonamiento de este a la inteligencia pura. Del mismo modo que el conocimiento exacto de los números comenzó con los **FENICIOS**, como consecuencia del tráfico y de las transacciones a las que se dedicaban.

REPORTERO: ¿Quiénes sucedieron a **THALES** en el estudio y desarrollo de la Geometría?

GEÓMETRA: Después de **THALES**, **MAMERCOS**, hermano del poeta **STESICHORE** es mencionado por haberse entusiasmado con la geometría, en la cual alcanzó gran reputación.

Después de él, **PITÁGORAS** fue quien transformó este estudio e hizo de él un enseñamiento liberal, pues se remontó a los principios superiores e investigó los teoremas en forma abstracta y mediante la inteligencia pura; a él se debe el descubrimiento de los irracionales y la construcción de las figuras del cosmos (los poliedros regulares).

Tras él, **ANAXÁGORAS** de **CLAZOMENO** y **ENOPIDE** de **QUIOS**. Después se hicieron célebres en geometría:

HIPÓCRATES de **QUIOS**, el inventor de la cuadratura de la lúnula y **TEODORO** de **CIRENE**, **HIPÓCRATES** fue el primero que compuso elementos.

Después de ellos vino **PLATÓN**, que hizo que las matemáticas en general, y la geometría en particular, tuviesen un

desarrollo inmenso, gracias al celo que mostró por ellas, y del que testimonian todos sus escritos, todos llenos de discursos matemáticos y que en cada instante, despiertan el entusiasmo por estas ciencias en aquellos que se dedican a la filosofía.

Hacia la misma época vivieron **LEODAMAS** de **THASOS**, **ARQUITAS** de **TARANTO** y **THEETO** de **ATENAS** que aumentaron él número de teoremas e hicieron de ellos un conjunto más científico; **NEOCLIDE** con la colaboración de su discípulo **LEÓN** pudo componer elementos muy superiores por la cantidad y la importancia de las demostraciones; fue él quien inventó las distinciones de cuándo el problema buscado es posible y cuándo es imposible.

EUDOSIO de **CNIDO**, discípulo de los amigos de **PLATÓN**, fue el primero que aumentó los teoremas llamados generales; añadió tres nuevas analogías a las tres antiguas, he hizo progresar las cuestiones relativas a la sección, cuestiones suscitadas por **PLATÓN** y para las cuales hizo uso de los análisis.

AMYCLAS de **HERACLEA**, discípulo de **PLATÓN, DINOSTRATO, HERMANO DE MENECMO** perfeccionaron el conjunto de la geometría.

ATHENEO de **CYZIQUE** vivió en la misma época y fue célebre como matemático. Todos estos sabios se reunían en la **ACADEMIA** y hacían sus investigaciones en común.

HERMOTIMO de **COLOFÓN** prosiguió los descubrimientos de **EUDOSIO** y de **THEETO**, halló diversas proposiciones de los **ELEMENTOS** y compuso una parte de los **LUGARES** (Geométricos). **FILIPO DE MEDMA,** discípulo de **PLATÓN**, quien le dirigió hacia la Matemática, hizo investigaciones según las indicaciones de su maestro, pero se propuso también todas las preguntas que creyó útiles para la filosofía de **PLATÓN**. Los que han escrito las historias llevan hasta este **FILIPO** el desarrollo de la Geometría.

REPORTERO: ¿Cuál es su aporte al estudio y desarrollo de la Geometría?

GEÓMETRA: Mi aporte al desarrollo de la Geometría consiste en ordenar diversos trabajos de EUDOSIO, mejoré los de THEETO, di demostraciones irrefutables para aquello que mis predecesores no habían demostrado con suficiente vigor.

En mi obra titulada ELEMENTOS, elegí los teoremas y problemas que son susceptibles de jugar el papel de elementos y también la variedad de los razonamientos, seguidos según todos los modos y que producen convicción, bien partiendo de las causas, bien remontando los hechos, pero siempre irrefutables, exactos y del carácter más científico. Añade todos los procedimientos de la dialéctica: el método de la división en el reconocimiento de las especies, el de la definición, en las razones en esencia, el apodíctico, en los pasos desde los principios hacia lo buscado, el analítico en aquellos inversos, desde lo buscado a los principios.



REPORTERO: ¿Qué otras obras ha escrito?

EL GEÓMETRA: He escrito otras obras matemáticas, tales como: ÓPTICA, CATRÓPTICA, ELEMENTOS DE MÚSICA y SOBRE LAS DIVISIONES.

REPORTERO: ¿Por qué resultó insuficiente el conjunto clásico de postulados sobre el cual Usted basó su sistema?

GEÓMETRA: El conjunto de postulados sobre el cual basé el sistema geométrico resultó insuficiente e inadecuado porque al formular los postulados que creí conveniente para desarrollar la teoría, toda otra proposición de la teoría que podría demostrarla exclusivamente por deducción lógica a partir de esos postulados. Pero la inconsistencia de la teoría radica en que apelé explícita o implícitamente, a un sentimiento de autoevidencia, o a las características de figuras geométricas, apoyada por la referencia a experiencias físicas, previas, pero inducen tácitamente a hacer uso de supuestos que ni están formulados en nuestros postulados ni son demostrables a partir de estos.

REPORTERO: ¿Cómo explica que en el desarrollo más reciente de la matemática se han construido varios sistemas de Geometría que son incompatibles en la Geometría que Usted sistematizó?

GEÓMETRA: El hecho de que esos diferentes tipos de geometría se hallan desarrollado en la Matemática muestra claramente que no puede decirse que la Matemática afirme la verdad de ningún conjunto determinado de postulados geométricos; todo lo que interesa a la matemática pura y todo lo que ella puede establecer es el conjunto de consecuencias deductivas de un conjunto dado de postulados y por tanto, la verdad de los teoremas relativamente a los postulados que se consideran. No puede decirse que la geometría afirme la verdad de sus postulados, puesto que estos últimos se formulan en términos de conceptos sin significación especifica; por esta razón, precisamente, los postulados no hacen ninguna afirmación especifica que pueda llamarse verdadera o falsa. Lo visto muestra también que los postulados de la Geometría no pueden considerarse como "verdades auto evidentes", porque cuando no se afirma nada tampoco puede pretenderse autoevidencia alguna.

REPORTERO: ¿En que época vives?

EL GEÓMETRA: Vivo bajo el reinado de PTOLOMEO I.



REPORTERO: ¿Cuál es tu opinión filosófica?

EL GEÓMETRA: Soy platónico de opinión y muy familiar con la filosofía del maestro, por eso me propuse, como objetivo final del conjunto de mis ELEMENTOS, la construcción de las figuras llamadas PLATÓNICAS (los cinco poliedros regulares).

REPORTERO: ¿Cuál es tu nombre?

EL GEÓMETRA: Si quieres saber mi nombre escribe en orden tu alfabeto y asocia a él la serie natural y traduce este código: ¡(6)(25)(3)(13)(10)(5)(6)(23)! Vuelvo a la realidad y observando el desarrollo de la geometría en el periodo actual conviene afirmar con ARISTÓTELES: "los mismos pensamientos les son venidos en diversas ocasiones a los hombres, según ciertos periodos determinados del universo y no en nuestro tiempo, o en el que conocemos por la historia, cuando las ciencias se han formado por vez primera, sino que aparecen y a su vez desaparecen según los retornos de las revoluciones celestes, de las que no podemos determinar el número en el pasado ni para el porvenir". Solamente por el período actual debemos considerar el desarrollo permanente de las artes y las ciencias.

9. GEOMETRÍA FÍSICA Y GEOMETRÍA PURA

CARLOS ENRIQUE PINO GUERRA
Educador de la Normal Superior de Medellín
Lic. Matemáticas. U. De Medellín.

La matemática no afirma la verdad de ningún determinado conjunto de postulados. En toda teoría axiomatizada existe un estrecho paralelismo entre el tratamiento de las proposiciones y el de los conceptos del sistema. Las proposiciones se dividen en dos clases: LOS POSTULADOS, de los cuales no se da demostración, y LOS TEOREMAS, cada uno de los cuales tiene que ser derivado de los postulados. Análogamente, los conceptos se clasifican en dos grupos: los conceptos PRIMITIVOS o BÁSICOS, de los que no se da definición, y los demás, cada uno de los cuales tiene que ser definido con precisión en términos de los conceptos primitivos.

Una geometría así construida es una disciplina puramente formal; la llamaremos GEOMETRÍA PURA. Una geometría pura, independientemente de que sea euclídea o no euclídea, no trata de ningún tema específico; en particular, no afirma nada acerca del espacio físico. Todos sus teoremas son ANALÍTICOS, y por tanto verdaderos con certeza precisamente porque carecen de todo contenido fáctico (todo parecido con las figuras geométricas o con las propiedades o relaciones espaciales de los cuerpos físicos reales es casual).

Lo escrito entre paréntesis en el caso de la geometría EUCLÍDEA no resulta del todo convincente: históricamente hablando, la geometría euclídea por lo menos tiene su origen en la generalización y sistematización de ciertos descubrimientos empíricos hechos en relación con la medición de áreas y volúmenes, la práctica de los agrimensores y el desarrollo de la astronomía. Así entendida, la geometría tiene una relevancia fáctica; es una ciencia EMPÍRICA que pueda llamarse, en términos muy generales, teoría de la estructura del espacio físico, o más brevemente

GEOMETRÍA FÍSICA. La geometría física se obtiene mediante lo que en lógica contemporánea se llama una interpretación semántica de una teoría matemática pura.

Una teoría geométrica en interpretación física no puede nunca, desde luego, darse por válida con certeza matemática, por amplias y numerosas que sean las pruebas experimentales a que someta, como cualquier otra teoría de la ciencia empírica, puede sólo conseguir un grado mayor o menor de confirmación. En realidad, las consideraciones presentadas muestran que la petición de certeza matemática en cuestiones empíricas es cosa desorientada y nada razonable; pues las certezas matemáticas del conocimiento no pueden conseguirse sino al precio de la analiticidad, o sea, de la completa falta de contenido fáctico. Resumamos este punto de vista con palabras de Einstein:

En la medida en que se refieren a la realidad, las leyes de la matemática no son ciertas; y en la medida en que son ciertas no se refieren a la realidad.

BIBLIOGRAFÍA

Historia de la Geometría Griega
Tannery

Enciclopedia sigma. El Mundo de las Matemáticas
Tomo 5. Editorial Grijalbo

10. EL PARQUÉS . UNA ESTRATEGIA PEDAGÓGICA

GUSTAVO ALBERTO DUQUE ESPINOSA
JULIA ESTER AGUDELO MUÑOZ
AMYD PEREAÑEZ BORJA
SERGIO DE J TORRES M. .

Propuesta Pedagógica: Seminario Didáctica de las Matemáticas llevado a cabo en Sopetrán (Ant.). Junio de 1999. CEID – ADIDA. Se toma el texto correspondiente al educador: Gustavo Alberto Duque Espinosa.

10.1. INTRODUCCION

El maestro además de ser facilitador del aprendizaje, es un provocador de él, más aún si frente a la necesidad del individuo de acceder al conocimiento, se aplican estrategia y conocimientos que avivan el interés de quien busca el saber.

Este trabajo aborda un planteamiento que propone el afianzamiento del conocimiento en forma lúdica de un marco de interdisciplinariedad, pues además de un problema específico, en este caso el de las operaciones matemáticas, es aplicable también a saberes que se construyen dentro de otra perspectiva (ciencias naturales, ciencias sociales, lenguaje y comunicación, entre otras).

La estrategia de aprender jugando, está basada, en el juego del parqués, en su algoritmo popular y en el planteamiento de problemas que se deben resolver en el desarrollo normal del juego.

Finalmente se presenta una propuesta breve y concreta, que puede generar múltiples aplicaciones y fundamentalmente motivar al maestro para la construcción o adaptación de otras herramientas aplicables en la enseñanza y en él aprendizaje.

10.2. PROBLEMA

Carencia de una estrategia lúdica para la enseñanza de las operaciones elementales en la educación básica primaria.

10.3. OBJETIVO

Diseñar una propuesta lúdica que contribuya a un aprendizaje significativo de las operaciones elementales en la educación básica primaria.

10.4. CONTENIDOS

- ALGORITMO DE LA MULTIPLICACIÓN: Procedimiento mecánico u orden lógico en la búsqueda de un resultado.
- ALGORITMO DEL JUEGO DE PARQUÉS: Proce dimiento generalizado o popular del juego (salida, seguros, cárcel, cielo y lanzamiento de dados).
- LÓGICA ESPACIAL: Capacidad mental del individuo para controlar y predecir posiciones posibles durante el juego.
- SEGUIMIENTO DE INSTRUCCIONES: Atender las reglas generales del juego y las reglas específicas para el aprendizaje pertinente.
- ÉTICA EN EL JUEGO: Acatamiento a las normas establecidas para el juego y reconocimiento de valores propios y colectivos.
- INTERDISCIPLINARIEDAD: Espacio libre de opción que se ofrece al participante para expresar capacidades en otras áreas.

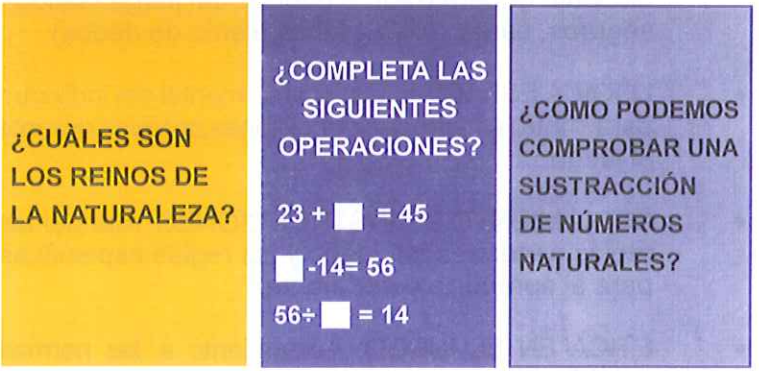
10.5. MÉTODO

El presente trabajo está basado en el método inductivo, se parte de las tradicionales reglas para jugar el parqués (caso particular) y a partir de esto, se extienden estas mismas al campo de las operaciones y relaciones matemáticas en el conjunto de los números naturales (generalización).

Siguiendo las reglas generales del juego del parqués, cuatro jugadores y un juez se enfrentan a una diversión que exige conocimientos propios de la matemática fundamentalmente con operaciones matemáticas elementales.

A cada tirada de dados, corresponde un conteo que alcanza una casilla en la que se plantea una operación y en ese caso el jugador debe resolver ese problema o de lo contrario

será puesto preso. Esta prisión dura hasta cuando se resuelva el problema, hasta cuando la tirada así lo permita o cuando opte por resolver un interrogante referido a otras áreas del conocimiento que se presentan en un banco de preguntas, anexo al juego. (Ejemplos: Ver gráficos y explicación a continuación).



Es de anotar que siguiendo las reglas del juego de parqués, el ficho puede ser detenido cuando sea alcanzado en un espacio por un contrincante. El juego termina cuando todos los fichos logran el cielo (espacio del parqués ubicado en forma central, donde convergen los fichos del jugador, que ha superado las dificultades del juego).

Cuando la temática sea dominada por los participantes se puede aplicar la estrategia ubicando en cada espacio el resultado de una operación. Lo cual permite el proceso inverso (Por ejemplo: Calcular dos números cuya suma, diferencia, producto, división, entre otras, de cómo resultado 24).

En secundaria se puede aplicar en Química para hallar los símbolos, las valencias, los números atómicos, la nomenclatura, el estado natural, entre otras.

En geometría con cuerpos, figuras geométricas, fórmulas.

En fin, su aplicación podría generalizarla a todas las áreas, colocando como base la propuesta del parqués y la interdisciplinariedad entre las áreas del conocimiento.

10.6. EJEMPLOS Y EXPLICACIÓN

Suponemos 7 parqués diferentes representados en: a, b, c, d, e, f, g. (Ver gráfico).

Partimos de una casualidad, del lanzado de dados, que: corresponden el primero al 4 y el segundo al 2.

Contando sobre el parqués, a partir de la salida en la piedra correspondiente, lo siguiente:

En a- corresponde en el conteo a 5x3 y la respuesta correcta debe ser 15.

En b- corresponde en el conteo a 15 y la respuesta correcta debe dar dos números que multiplicados entre sí den 15. (Otro parqués, de suma y/o de resta, su respuesta correcta deben ser dos números que sumados y/o restados den 15.

En c- corresponde en el conteo a 23+2 y la respuesta correcta debe ser 25.

En d- corresponde en el conteo a 17-9 y la respuesta correcta debe ser 8.

En e- corresponde en el conteo a 12/2 y la respuesta correcta debe ser 6.

En f- corresponde en el conteo a Cs y la respuesta correcta debe ser Cesio.

En g- corresponde en él conteo a Cesio y la respuesta debe ser Cs.

Si su repuesta no es acertada, queda detenido hasta que al dar la vuelta, le corresponda el turno, momento en el cual, puede salir así:

a). Tira pares.
b) Responde una pregunta interdisciplinaria de una baraja que se encuentra en el centro del parqués.

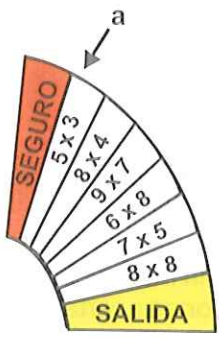
NOTA: La baraja se construye diariamente con cuatro preguntas en cada carta sobre los temas que se están explicando. El juez es quien decide cuál pregunta hace.

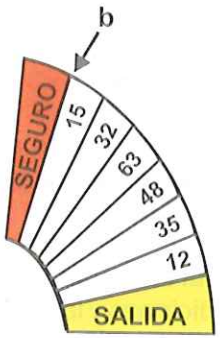
Cada juego, puede tener nuevas reglas que por consenso se estipulan por parte de sus integrantes.

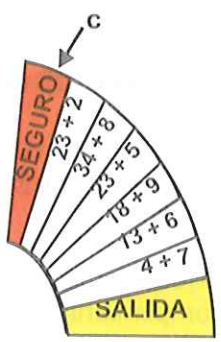
En caso de que el estudiante no responda en forma acertada, quien haga las veces de juez (maestro – monitor del área), dará la respuesta.

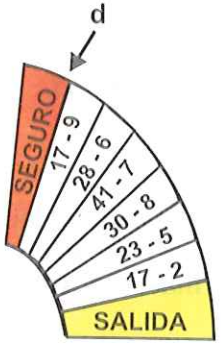
El maestro podrá utilizar dicha estrategia, para ser aplicada con otras múltiples variantes en cuanto a temáticas y áreas fundamentales del conocimiento.

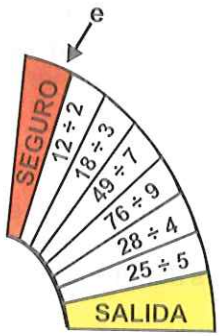
GRAFICOS

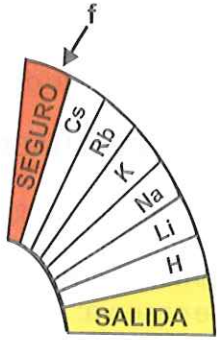

a
SEGURO
5 x 3
8 x 4
9 x 7
6 x 8
7 x 5
8 x 8
SALIDA

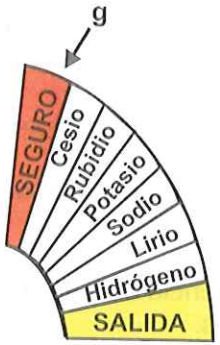

b
SEGURO
15
32
63
48
35
12
SALIDA


c
SEGURO
23 ÷ 2
34 ÷ 8
23 ÷ 5
18 ÷ 9
13 ÷ 6
4 ÷ 7
SALIDA


d
SEGURO
17 - 9
28 - 6
41 - 7
30 - 8
23 - 5
17 - 2
SALIDA


e
SEGURO
12 ÷ 2
18 ÷ 3
49 ÷ 7
76 ÷ 9
28 ÷ 4
25 ÷ 5
SALIDA


f
SEGURO
Cs
Rb
K
Na
Li
H
SALIDA


g
SEGURO
Cesio
Rubidio
Potasio
Sodio
Lirio
Hidrógeno
SALIDA

10.7. LA FORMA

Esta se sustenta en una clase magistral en la que se afianzan habilidades pues se trata de una clase práctica.

En otras palabras se desarrolla un taller de mecanización y de interrelación con otras áreas.

10.8. MEDIOS O RECURSOS

Un parqués diseñado especialmente para la operación en cuestión, en el que, en cada casilla se plantea el problema a resolver.

El juez verifica o constata el acatamiento a la instrucción, el cumplimiento a las condiciones y las soluciones acertadas.

Tarjetas con interrogantes, cuyas respuestas exigen el conocimiento de otras áreas que pueden ser previas o de afianzamiento de temas que se generan en la actualidad.

10.9. EVALUACIÓN

El proceso evaluativo, es continuo, se aprende a partir del estímulo y del error. Se afianza mediante la recurrencia y forma en el respeto a los acuerdos sobre normas. Para ello se observa:

- La madurez con que cada vez, el estudiante asume el juego.
- El dominio del tema problematizador.
- El conocimiento del estudiante en las temáticas de otras áreas.
- La trascendencia en la formación axiológica de los participantes.

11. PROPUESTA DIDÁCTICA PARA LA ENSEÑANZA DE LA DIVISION EN EL GRADO SEGUNDO (BASICA PRIMARIA)

CAROLINA CORREA POSADA
ÁNGELA MALDONADO TORRES
FLAMARIÓN MONSALVE
LUIS GONZALO PULGARÍN RENDÓN

Propuesta Pedagógica presentada en el Seminario Didáctica de las Matemáticas llevado a cabo en Medellín (Ant.). Diciembre de 1999. CEID – ADIDA.

11.1. OBJETIVOS GENERALES

De acuerdo con los lineamientos del Ministerio de Educación Nacional (MEN):

11.1.1 Desarrollar los conocimientos matemáticos necesarios para manejar y utilizar operaciones simples de cálculo y procedimientos lógicos elementales con diferentes situaciones, así como la capacidad para solucionar problemas que impliquen estos conocimientos.

11.1.2. Proponer el aprendizaje significativo de la operación división entre los números naturales.

11.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS.

11.2.1. Reconocer la división como una operación inversa a la multiplicación.

11.2.2. Calcular cocientes de una cifra en divisiones de números de dos cifras y entre números de una sola cifra.
11.2.3. Resolver problemas que requieran de la división

11. 3. RESUMEN

Se plantean unas pocas generalidades sobre la división y se muestran dos estrategias para iniciar la didáctica de la división en el grado segundo de la básica primaria.

No se pretende fijar ejercicios para realizar en el aula, sino modelar un par de mecanismos para que los docentes analicen el método usado, y poner un punto de partida para el desarrollo de una propuesta didáctica para lograr los objetivos planteados.

11.4. GENERALIDADES SOBRE LA DIVISIÓN

Los primeros que iniciaron el estudio de la división fueron los babilonios y los Hindúes.

Los Hindúes utilizaban un método que consistía en colocar en una mesa de arena, los elementos que necesitaban repartir y los recipientes donde iban a ser colocados estos.

Esta repartición la realizaban colocándolos de uno en uno en cada recipiente hasta terminar.

A través del tiempo, las Matemáticas buscaron formas más sencillas para representar el proceso de la división hasta llegar a las que empleamos actualmente.

11.5. ASEGURAMIENTO DEL NIVEL DE PARTIDA: ANP

- Conocer los números naturales.
- Conceptos de unidades, decenas y centenas.
- Comparación de números: mayor que, menor que e igual que.
- La adición
- La sustracción
- Las tablas de multiplicar
- La multiplicación

Al desarrollar las actividades se tendrán habilidades y conceptos básicos que son necesarios para que el

estudiante pueda alcanzar el objetivo.

Estos se desarrollan en procesos de acuerdo al ANP. Tanto la división corno la multiplicación tienen la característica de que sus algoritmos son síntesis de otros algoritmos: la multiplicación de la adición y la división de la sustracción.

Para asegurar el ANP utilizaremos un juego que se describe a continuación:

JUEGO CON LOS DADOS

Se requiere un solo dado y una ficha para cada jugador.

Normas del juego

Todos lanzan un dado; inicia el juego quien saque mayor puntaje; continúa quien le siga en puntos. Con el orden establecido, cada jugador lanzará nuevamente el dado y avanzará siguiendo el orden ascendente de numeración del tablero las casillas que indique el número del dado. Deberá responder o resolver los que indica la casilla en cada caso; de no hacerlo cede el turno y regresa donde estaba.

En la página siguiente se muestra una propuesta de tablero de juego:

JUEGO CON LOS DADOS

30 Cuenta hasta 100 de 5 en 5	31 Resuelve: 2000 - 1.789=	32 Resuelve una suma cuyo resultado sea 150	33 Resuelve: 45 X 4	34 Meta
29 Resuelve: 850 - 747	28 Juan tiene 45 colombinas s come 8 cuantas le quedan	27 Caes	26 Sube	25 Inventa una situación de suma.
20 Resuelve: 148 X 24	21 Tengo 4 naranjas para repartir entre 2 niños de acuanto le	22	23 Resuelve 4.500 + □ = 3.900	24 Resuelve 530 - 180 □
19	18 Invento una situación de multiplicació	17 Sube y tira de nuevo	16 Resuelve: 786 ÷ 14 =	15 Resuelve: □ ÷ 15 = 20
10 Caes	11 Cede el turno	12	13 Escribe los números de 4 en 4 hasta 100	14 Resuelve: 360 - 120 =
9 Inventa una situación de resta	8 Resuelve escribe 3 números que sumados den 20	7 Resuelve 8 + 4 + □ =25	6	5 Cede el turno
Salida	1 Escribe los números naturales de 1 al 30	2 Avanza 5 espacios	3 Sube	4 Resuelve 360 ÷ 16 5

11.6. REPARTAMOS

Resuelve situaciones en donde se requiera el uso de la división.

Como premio a su interés y buen comportamiento, los alumnos del segundo grado participaron en una función, donde cantaron y recibieron refrescos.
¿Cómo repartir estos 6 refrescos entre 2 niños?



¿Cuántos refrescos corresponden a cada uno? _____

¿Cuéntanos, cómo hiciste para repartir equitativamente los refrescos entre los niños?

_____
_____
_____
_____
_____

11.7. ESTAMOS DIVIDIENDO

Objetivo: Reconocer los términos de la división y relacionarla con la resta.

El mago va a repartir los ocho conejos entre los 2 niños



Completa:

Primera repartición: 8-2=___
Segunda repartición: 6-2=___
Tercera repartición: 4-2=___
Cuarta repartición: 2-2=___

¿Cuántos conejos le corresponden a cada uno?
Estamos dividiendo

DIVIDENDO: El numero que queremos dividir
DIVISOR: Es el número por el cual dividimos
COCIENTE: Es el resultado de la división

¿Hay otra forma de escribir una división?

8	4
0	2

¿cuál?, averigua...

8÷4=2

BIBLIOGRAFÍA

Maritza Chávez M. ."Juguemos con las matemáticas". Editorial Futuro.

Lourdes Valverde Ramírez. El Proceso del Conocimiento y la Formación de Conceptos». Medellín U.DE A. 1999.

Ministerio Nacional de Educación. "Matemáticas: Lineamientos Curriculares, Áreas Obligatorias y Fundamentales". Santafé de Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio 1.999.

Ley General de la Educación. 8 de febrero de 1994.

12. LOS PROCEDIMIENTOS DE SOLUCIÓN CON CARÁCTER HEURÍSTICO EN LAS CLASES DE MATEMÁTICA.

MSc. JUDITH FERNÁNDEZ ÁVILA.
MSc. MARGARITA GORT SÁNCHEZ.
Instituto Superior Pedagógico "Enrique José Varona"
La Habana, Cuba.

Uno de los métodos didácticos de la enseñanza aprendizaje de las Matemáticas que se vienen planteando en la actualidad, desde diferentes escuelas de pensamiento matemático, es el Heurístico, el cual se desarrolla a continuación, en conjunto con sus principios y reglas de trabajo en el ambiente escolar.

12.1. LA HEURÍSTICA Y SU UTILIDAD EN LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA.

El vocablo «heurística» o «euristica» proviene del griego y significa: hallar, descubrir, inventar.

El método heurístico se caracteriza como un método de enseñanza mediante el cual se le plantean a los alumnos preguntas, sugerencias, indicaciones, a modo de impulsos que facilitan la búsqueda independiente de problemas y de soluciones a estos, donde el maestro no le informa a los alumnos los conocimientos terminados que se someterán a su asimilación, sino los lleva al redescubrimiento de las suposiciones y reglas correspondientes, de forma

independiente. Su actividad consiste en conducir al alumno a la búsqueda del conocimiento objeto de estudio, estimular su reflexión, guiarlo para que indague, investigue y llegue a conclusiones; para lo cual, los impulsos que se plantean a los estudiantes deben ser formulados con claridad e inteligentemente, y presentados en el momento preciso.

Pero existen diferencias entre este trabajo y lo que entendemos por instrucción heurística.

La instrucción heurística es la enseñanza consciente y planificada de reglas generales y especiales de la heurística para la solución de problemas, para lo cual es necesario que cuando se declaren por primera vez las mismas explícitamente; se destaquen de un modo claro y firme, y se recalque su importancia en clases posteriores hasta que los alumnos las aprendan y las utilicen independientemente de manera generalizada, por lo que debe ejercitarse su uso en numerosas y variadas tareas.

El empleo de la instrucción heurística en la clase de Matemática, contribuye a lograr:

- la independencia cognoscitiva de los alumnos
- la integración de los nuevos conocimientos con los ya asimilados.
- el desarrollo de operaciones intelectuales tales como: analizar, sintetizar, comparar, clasificar, entre otras y de las formas de trabajo y de pensamiento fundamentales de la ciencia matemática: variación de condiciones, búsqueda de relaciones y dependencias, y consideraciones de analogía.
- la formación de capacidades mentales, tales como: la intuición, la productividad, la originalidad de las soluciones y la creatividad, entre otros.

La actividad heurística o los procesos heurísticos incluyen en si las operaciones intelectuales como su componente fundamental, a la vez que tienen cierta especificidad. Precisamente por eso, la actividad heurística se debe analizar como variedad del pensamiento humano, la que

crea un nuevo sistema de acciones o abre regularidades desconocidas hasta entonces, de los objetos que rodean al hombre [u objetos de la ciencia a estudiar].

El objetivo principal de la Heurística es investigar las reglas y métodos que conducen a los descubrimientos y a las invenciones e incluye la elaboración de principios, reglas, estrategias y programas que facilitan la búsqueda de vías de solución a problemas (tareas de carácter no algorítmico de cualquier tipo y de cualquier dominio científico o práctico).

Se clasifican los anteriores elementos heurísticos en dos categorías: procedimientos heurísticos y medios auxiliares heurísticos.

Los medios auxiliares heurísticos más importantes son:

- las figuras ilustrativas, esbozos o figuras de análisis
- las tablas (para reflejar las relaciones entre datos)
- los compendios y momentos (que contienen las definiciones de los conceptos fundamentales, los teoremas más necesarios, entre otros.)

Los procedimientos heurísticos apoyan la realización consciente de actividades mentales complejas y exigentes. La introducción de estos procedimientos en la clase y su aplicación por parte de los alumnos propicia la asimilación de los conocimientos, su capacidad para resolver problemas para los cuales no conocen procedimientos algorítmicos y el desarrollo del pensamiento creador.

12.2. LOS PRINCIPIOS HEURÍSTICOS

Los principios heurísticos son de gran utilidad para la búsqueda de nuevos conocimientos y también sugieren ideas para la solución de diferentes problemas. Dentro de los principios heurísticos generales se destacan el de analogía, el de reducción y el de inducción. Analicemos cada uno de ellos.

12.2.1. PRINCIPIO DE ANALOGÍA

El principio de analogía consiste en la utilización de semejanzas de contenido o de forma.

George Polya, destacado profesor de Matemática húngaro en su libro: Matemática y pensamiento plausible expresa:

Analogía es una especie de semejanza sobre un nivel definido y conceptual. La diferencia esencial entre analogía y otras clases de semejanza yace, en las intenciones de pensador. Objetos semejantes son aquellos que concuerdan entre sí en algún aspecto. Si usted trata de delimitar el aspecto en que concuerdan... usted mira estos objetos semejantes como análogos. Y añade... Dos sistemas análogos si concuerdan en relaciones claramente definibles de sus partes respectivas.

En sus lecciones de Metodología de la Enseñanza de la Matemática, el profesor soviético Dr. Nikolai Petrov expresa:

La analogía, como factor heurístico positivo, puede ayudar en tres direcciones:

1 puede aplicarse para que los alumnos descubran una proposición nueva para ellos, y la formulen;

2 puede sugerir el método y el procedimiento para la demostración de una proposición nueva;

3 puede sugerir la vía para la resolución de un problema, de un ejercicio.

A continuación se ofrece un ejemplo del empleo de la analogía en cada una de las direcciones anteriores.

Ejemplo 1

Al estudiar el cálculo de cuerpos, se obtiene la fórmula para el volumen de la pirámide a partir de la comparación con un prisma de igual base e igual altura, análogamente se

procede para obtener la fórmula del volumen de un cono circular recto, comparándolo con el cilindro de igual área de la base e igual altura.

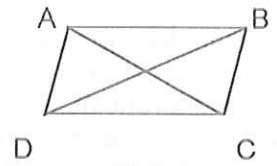
$V_{prima} = A_b .h$ ——— $V_{cilindro} = A_b .h = \pi r^2 h$

$V_{pirámide} = \frac{1}{3} A_b .h$ ——— $V_{cono} = \frac{1}{3} A_b .h = \pi r^2 h$

En este caso la analogía se utiliza para obtener una nueva proposición.

Ejemplo 2.

Igualdad de lados opuestos de un paralelogramo.

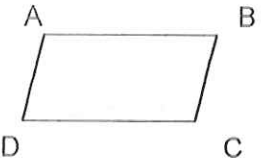


Para demostrar que $\overline{AB} = \overline{DC}$

Se prueba que :

Triángulo ABC =Triángulo ADC

Igualdad de ángulos opuestos de un paralelogramo.



Para demostrar que el < D = < B

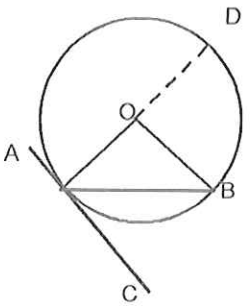
Se prueba que :

Triángulo ABC =Triángulo ADC

En este caso se encuentra la idea de la nueva demostración a partir de una generalización de la vía.

Ejemplo 3.

En la figura la semirecta AC es tangente a la C(o, $\overline{OB}$) en A, y el < AOB = 120º. Halla el < BAC.



Arco AB = 180º , Arco AD - Arco AB = Arco DB;

$$< A = \frac{ArcoDB}{2}$$

< DAC = < A + < BAC

< DAC - < A = < BAC

$$\frac{Arc\,AD}{2} - \frac{ArcoDB}{2} = \angle BAC$$

Ejercicio. En la figura el < AOB es un ángulo central y la semirecta AC es tangente a la circunferencia en el punto A, Demuestra que:

$$\angle BAC = \frac{\angle AOB}{2}$$

La analogía sugiere la vía para la solución del ejercicio., o sea, se busca un prototipo de ejercicio ya conocido, se determinan los aspectos comunes y las diferencias entre los prototipos y el ejercicio planteado y se trata de resolver este utilizando los aspectos comunes y variando la vía de solución de acuerdo con las diferencias encontradas.

Es importante destacar que si se pretende enseñar al alumno las formas de pensamiento y de trabajo de la Matemática, se deben aprovechar estas situaciones para guiarlos, mediante impulsos, a descubrir la analogía y, de ese modo que él aplique conscientemente.

12.2.2. PRINCIPIO DE REDUCCIÓN.

Este principio puede ser utilizado de cuatro formas diferentes :

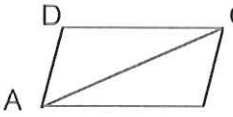
1. La reducción de un problema a otro ya resuelto. Esta interpretación del principio de reducción es la más conocida. Con su ayuda puede encontrarse la vía para la solución de

un problema. Por ejemplo :

Resuelve $x^2 - 3x = 0$
$x^2 - 3x = x(x - 3)$
$x = 0$ y $x - 3 = 0$

La resolución de una ecuación de segundo grado puede reducirse a la resolución de ecuaciones lineales, (utilizando la descomposición en factores).

2. La recursión, esta forma del principio de reducción consiste en transformar lo desconocido acudiendo a lo conocido. Por ejemplo : Teorema sobre la suma de las amplitudes de los ángulos interiores de un cuadrilátero.



$\Delta ADC \quad < DAC + < ACD + < CDA = 180^0$

$\Delta ABC \quad < CAB + < ABC + < BCA = 180^0$

$< DAC + < ACD + < CDA + < CAB + < ABC + < BCA = 360^0$
$< A + < B + < C + < D = 360^0$

La demostración del teorema sobre la suma de las amplitudes de los ángulos interiores de un cuadrilátero se demuestra recurriendo al teorema sobre los ángulos interiores de un triángulo.

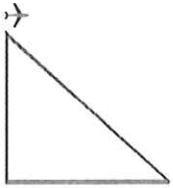
3. Otra forma de la reducción se presenta en la demostración de teoremas. Al demostrar un teorema aplicando un método de demostración cualquiera, se realiza una reducción del problema dado a problemas parciales o a otros problemas; de manera que la resolución de esto resulte conocida o menos difícil que la del problema de partida. Ello puede lograrse de diferentes formas. Por ejemplo:

- Descomponiendo el problema de demostración en problemas parciales, (cuando la tesis es una conjunción)
- Haciendo una diferenciación de casos, (cuando no se puede demostrar un caso general que abarque todas las posibilidades). Esta es la situación para el teorema que expresa la relación entre el ángulo central y el ángulo inscrito en una circunferencia y la ley de los cosenos.
- Reduciendo la demostración de la proposición a la de otra equivalente, (cuando se utiliza la reducción

al absurdo o se demuestra el contrarrecíproco)

- Reduciendo una refutación a la búsqueda de un contraejemplo, (cuando se conoce que no se cumple un caso particular).

4. La modelación es otra forma de reducción, que consiste en buscar una interpretación (un modelo) del problema dado, en otro dominio, con el fin de poder aplicar las leyes del nuevo dominio, a la resolución del problema transformado, y realizar la transformación inversa del modelo, para llegar a la resolución del problema de partida. Por ejemplo: Un hombre ve sobre su cabeza un avión que vuela a 800 m de altura, ¿ a qué distancia ve el mismo avión otro hombre que se encuentra a 100 m de distancia del primero ?



La situación para resolverla hay que asociarla aun triángulo rectángulo, como modelo matemático e identificar los elementos del mismo con las relaciones dadas en el texto del problema.

H φ H κ

12.2.3. PRINCIPIO DE INDUCCIÓN INCOMPLETA.

Consiste en llegar a la suposición de que existe una relación general, a partir del análisis de una serie de resultados particulares. (Se hace una generalización empírica)

12.2.4. PRINCIPIO DE GENERALIZACIÓN.

Permite obtener suposiciones para un conjunto de objetos, fenómenos o relaciones, a partir del análisis de un caso especial o particular. (Como se procede de forma reductiva, es necesario demostrar la validez de las suposiciones así obtenidas, al igual que en el caso del resto de los principios heurísticos)

Por ejemplo: En la obtención del teorema "los puntos de la mediatriz equidistan de los extremos del segmento"

El profesor ordena a los alumnos trazar un segmento, trazar su mediatriz y seleccionar diferentes puntos de la misma para medir sus distancias a los extremos del segmento.

Los resultados de los alumnos se colocan en una tabla, donde aparecen las longitudes de los segmentos y la relación

existente entre ellos, y a partir de la relación entre ellos se generaliza el resultado. (En este ejemplo se observan los Principios de Inducción Incompleta, Movilidad, Medir y Probar y Generalización).

12.2.5. PRINCIPIO DE MOVILIDAD.

Consiste en suponer que en figuras o cuerpos geométricos, un elemento es movible y, a partir de ello, analizar los cambios que se producen. Se aplica, generalmente en la búsqueda de suposiciones con el objetivo de provocar la variación de condiciones y propiciar la búsqueda de relaciones y dependencias. (Formas de trabajo y pensamiento de la Matemática que al aplicar este principio se hacen muy evidentes).

En el ejemplo anterior se manifiesta cuando se cambian de posición los puntos sobre la mediatriz del segmento.

12.2.6. PRINCIPIO DE MEDIR Y PROBAR. (También se conoce como medir y comparar)

Este proceder se emplea también en la búsqueda de suposiciones. Aparece, muy frecuentemente asociado al principio de la movilidad. O sea, se mide y prueba, o se mide y compara, después de haber ejecutado variaciones mediante la movilidad.
En el ejemplo dado de la mediatriz, se pone de manifiesto cuando el alumno mide las longitudes del punto a los extremos del segmento.

12.2.7. PRINCIPIO DE LA CONSIDERACIÓN DE CASOS ESPECIALES Y CASOS LÍMITES.

Es útil para obtener nuevos conocimientos a partir del establecimiento de relaciones entre los conocimientos adquiridos.

Por ejemplo : $V_{prisma} = A_B\, h \xleftrightarrow[\text{CASO ESPECIAL}]{} V_{cubo} = a^3$

Por ser $A_B = a^2$ y $h = a$

$$A_{trapecio} = \frac{a+c}{2}.h \longleftarrow \text{CASO LÍMITE} \longrightarrow A_{triángulo} = \frac{a}{2}.h, \ con\ c = 0$$

12.3. LAS ESTRATEGIAS HEURÍSTICAS.

Las estrategias heurísticas constituyen los procedimientos principales para buscar los medios matemáticos concretos que se necesitan para resolver un problema en sentido amplio y para buscar la idea fundamental de solución, por lo que, se les llama también estrategias de búsqueda.

Existen dos estrategias heurísticas que pueden ser aplicadas a cualquier tipo de ejercicio (estrategias generales o universales), ellas son: **el trabajo hacia adelante o método sintético** y el trabajo hacia atrás o método analítico.

Otras estrategias se refieren a determinados tipos de ejercicios por lo que se denominan especiales. Entre ellas podemos mencionar el "Esquema de Descartes", utilizado generalmente para resolver ejercicios de cálculo de magnitudes, el "método de los lugares geométricos" y el "método de las transformaciones" que se emplean en los ejercicios geométricos de construcción.

Analicemos más detenidamente las estrategias universales.

12.3.1. LA ESTRATEGIA DE TRABAJO HACIA ADELANTE.

Se caracteriza porque las reflexiones para hallar la idea de la solución parten de los datos y de ellos se deduce lo que se busca, pasando por una serie de pasos intermedios, apoyándose en los conocimientos que se tienen, de manera que se obtenga la cadena de ideas que permite elaborar el plan de solución. La estrategia consiste en buscar cuáles objetivos parciales o resultados intermedios se pueden alcanzar partiendo de las condiciones previas o elementos dados.

A continuación presentamos un ejercicio a modo de ejemplo.

"Demuestre que en todo triángulo, la mitad del perímetro es mayor que la longitud de cada lado".

P: ABC triángulo cualquiera

$$T:\ a\langle \frac{a+b+c}{2}$$

Una posibilidad de encontrar los medios y la idea de la demostración, trabajando hacia adelante, puede ser con ayuda de las siguientes preguntas (en la medida que ello resulte necesario):

¿Qué datos ofrece la premisa?
¿Qué se puede plantear a partir de ella, que tenga relación con lo que se quiere probar?
¿Qué conocimientos tenemos que nos permitan relacionar los lados de triángulos cualesquiera?

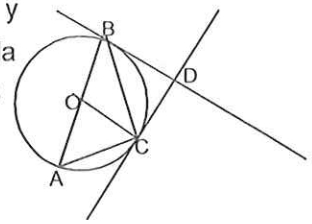
Estas preguntas orientan las reflexiones de los alumnos a partir de la premisa y utilizando la desigualdad triangular, tratar de llegar a establecer la tesis.

$a < b + c$ — La comparación con la tesis sugiere sumar a en ambos miembros de la desigualdad
$a = a$
$a + a < a + b + c$
$2a < a + b + c$ — Efectuando se observa que al dividir por 2 se obtiene lo que se busca
$a < \frac{a+b+c}{2}$

La utilización práctica por parte de los alumnos de la estrategia del trabajo hacia adelante requiere de un entrenamiento, no es posible lograr, de un día para otro o en un período breve de tiempo que nuestros alumnos puedan aplicar esta estrategia.

Particularmente adecuados pueden resultar ciertos tipos de ejercicios en el entrenamiento de los alumnos para la utilización de esta estrategia de trabajo en la búsqueda de ideas de solución, ejemplo de ellos pueden ser los siguientes:

1. En la circunferencia de centro O y diámetro $\overline{AB}$ A, B y C puntos de la circunferencia, DC y DB son tangentes en C y B respectivamente.



a) ¿Cuántos ángulos se forman en la figura ?. Identifícalos con números naturales a partir del 1.

b) ¿ Cuál es toda la información que se puede extraer sobre los ángulos de la figura a partir de los datos que se ofrecen?

c) ¿Supongamos S además que $\overline{OC}$ es bisectriz del < ACB ?. ¿ Cuáles son entonces todos los ángulos iguales a < OCB?.

2. Un terreno rectangular tiene 40 m más de largo que de ancho. Si tuviese 20 m menos de largo y 10 m más de ancho su área sería la misma.

a) Elabora un esbozo o figura de análisis que pueda representar la situación planteada.

b) Introduce la menor cantidad posible de variables para representar las magnitudes dadas.

c) ¿Es posible establecer alguna relación matemática entre las magnitudes dadas, a partir de la situación planteada ?.

12.3.2. EL TRABAJO HACIA ATRÁS

Se caracteriza por el examen previo de lo que se busca, apoyándose en los conocimientos que se tienen, analizar posibles resultados intermedios de los que se puede deducir lo buscado (y cada resultado intermedio anterior) hasta llegar a los datos. De modo que recorriendo el razonamiento a la inversa se tiene la idea de la solución. El análisis empieza por tanto, por lo que se busca y la orientación para encontrar la idea de la solución se encuentra

en el establecimiento de las relaciones entre los datos, los resultados intermedios obtenidos y las exigencias del problema.

En el ejercicio analizado en el ejemplo anterior (de trabajo hacia adelante), puede resultar difícil darse cuenta de la idea de la solución, partiendo únicamente del análisis de la premisa dada; sin embargo, aplicando el trabajo hacia atrás (transformando la tesis) se logra establecer relaciones con la premisa (ABC triángulo cualquiera) que pueden sugerir los medios a utilizar y, con ello, la idea de la demostración.

Se busca: $a < \frac{a + b + c}{2}$, lo que equivale a

$2a < a + b + c$ (buscamos una relación entre los lados de un triángulo cualquiera)

$a + a < a + b + c$

$a < b + c$

Como se conoce que para todo triángulo es siempre posible plantear esta relación (desigualdad triangular) y que también, aplicando teoremas conocidos (propiedades de las operaciones con desigualdades) se pueden lograr las transformaciones necesarias (en sentido inverso a lo realizado) se tiene ya resuelto el problema.

También para el empleo exitoso de esta estrategia se requiere de una adecuada preparación de los alumnos. En este caso hay que lograr una sistematización de los conocimientos que organice los mismos en disposición de ser aplicados. La sistematización de los conocimientos tomando como base las condiciones a partir de las cuales estos pueden ser lógicamente inferidos, constituyen un entrenamiento de especial atención.

Para ello pueden ser recomendables preguntas como las siguientes, a formular en momentos adecuados durante las clases:

¿ Cuáles son todos los conocimientos sobre triángulos de que disponemos hasta el momento que nos permiten afirmar que dos ángulos son iguales? ¿Cuáles que dos lados son iguales?

¿ Cuáles son los conocimientos sobre cuadriláteros que nos permiten afirmar que dos ángulos (lados) son iguales?
¿ Bajo que condiciones podemos afirmar que dos rectas son paralelas (perpendiculares)?
¿Cuáles son las figuras geométricas que conoce con ángulos iguales? (que suman 90^0, que suman 180^0)
¿Qué conocimientos matemáticos nos permiten relacionar mediante fórmulas longitudes de segmentos, amplitudes de ángulos y longitudes de lados?

Todas estas preguntas tienen respuesta en dependencia de los conocimientos adquiridos por los alumnos y en cada caso para su respuesta requieren de una reestructuración del orden habitual en que los mismo fueron tratados y el establecimiento de nuevas relacione entre ellos, en función de cómo puede ser necesario recordarlos para su posterior aplicación.

También con ayuda de hojas de trabajo para completar espacios en blanco convenientemente seleccionados se puede propiciar esta preparación.

12.4. LAS REGLAS HEURÍSTICAS.

Las reglas heurísticas tienen el carácter de impulsos dentro del proceso de búsqueda de nuevos conocimientos y de la resolución de problemas.

Se distinguen de los principios por el alcance de su aplicación, pues ellas no sugieren directamente la idea principal de solución pero ofrecen recomendaciones de gran utilidad para llegar a encontrarlas, ya que expresan las acciones y operaciones a realizar en la búsqueda de los medios matemáticos y de las vías de solución a problemas de dominio matemático o extramatemático.

En la clase de matemática se utilizan con frecuencia para guiar el pensamiento de los alumnos, ofreciéndolas como sugerencias, indicaciones o en forma de preguntas.

Las reglas heurísticas se consideran generales si ellas encuentran aplicación para la búsqueda de la idea de la solución a variados tipos de problemas, y especiales cuando se aplican en un tipo específico de estos.

Los tipos de tareas que se presentan en la enseñanza de la matemática con el carácter de problemas son: los ejercicios de aplicación intramatemáticos (de demostración, también en particular de deducción, ejercicios de construcción, entre otros) y de aplicación a dominios extramatemáticos.Cuando el aprendizaje de los alumnos se dirige con un enfoque "problémico" también se considera que la definición o caracterización de conceptos y la búsqueda de nuevas fórmulas, proposiciones " procedimientos tienen el carácter de problemas en la enseñanza de la matemática. Ante todos estos tipos de tareas con carácter de problema encuentran aplicación, entre otras, las reglas heurísticas generales:

- Separa lo dado de lo buscado.
- Recuerda conocimientos relacionados con lo dado y lo buscado.
- Busca relaciones entre los elementos dados y lo buscado.

Existen otras reglas heurísticas que pueden considerarse especiales pues se refieren a determinados tipos de problemas.

Por ejemplo:

a) Para los ejercicios de demostración en la geometría es útil la siguiente regla:

"Si tienes que demostrar la igualdad de longitudes o amplitudes, trata de encontrar triángulos congruentes que contengan esos segmentos o ángulos homólogos".

b) Para los ejercicios geométricos de construcción es muy usada la regla heurística:

"Si la figura buscada no te conduce inmediatamente al éxito, trata de obtener, mediante líneas auxiliares, figuras que te sean fáciles de construir"

c) Para los problemas de dominio matemático en que se ofrecen como datos longitudes de segmentos y amplitudes de ángulos, frecuentemente es útil acudir a las razones trigonométricas.

Mencionaremos a continuación las reglas heurísticas que se emplean con mayor frecuencia en el tratamiento de las tareas que en la enseñanza de la matemática tienen el carácter de problemas.

12.4.1. EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EXTRAMATEMÁTICOS.

- Separar los datos de las incógnitas.
- Confeccionar una figura de análisis, tabla o esbozo.
- Representar las magnitudes dadas y buscadas con variables.
- Representar las relaciones contenidas en el texto del problema mediante fórmulas o ecuaciones.
- Buscar las relaciones entre datos e incógnitas utilizando números más simples en el lugar de los dados.
- Reformular el problema.

12.4.2. EN LA RESOLUCIÓN DE EJERCICIOS DE CONSTRUCCIÓN.

- Separar lo dado y lo buscado.
- Elaborar una figura de análisis, un esbozo de lo que se busca (suponer el problema ya resuelto)..
- Comparar lo que se tiene con lo buscado.
- Analizar que se puede trazar de inmediato.
- Precisar que falta todavía.
- Sustituir los conceptos por su definición.
- Recordar teoremas del dominio matemático correspondiente.
- Completar la figura con líneas auxiliares.

12.4.3. EN LA DEMOSTRACIÓN DE TEOREMAS.

- Separar premisa y tesis.
- Confeccionar una figura de análisis.
- Tener en cuenta que no constituya un caso especial.
- Completar la figura con líneas auxiliares.
- Recordar teoremas del dominio matemático correspondiente.
- Sustituir conceptos por definiciones o viceversa.
- Analizar la tesis para seleccionar el método de demostración.
- Transformar la tesis en una expresión equivalente.
- Buscar teoremas con tesis iguales.
- Buscar teoremas con hipótesis iguales.
- Observar, primero, un caso particular.

12.4.4. EN LA DEDUCCIÓN DE TEOREMAS.

- Recordar teoremas del dominio matemático correspondiente.
- Sustituir conceptos por sus definiciones o viceversa.
- Confeccionar una figura de análisis.
- Completar la figura con líneas auxiliares.
- Sustituye sistemáticamente las variables que surgen en función de las variables deseadas.

Veamos mediante un ejemplo, la aplicación de algunas reglas heurísticas en la búsqueda de la idea de la demostración de un teorema.

"El área de un triángulo es igual al semiproducto de las longitudes de dos lados por el seno del ángulo que estos forman"

IMPULSOS DEL PROFESOR	REGLAS HEURÍSTICAS
• Lean el enunciado	• Separar premisa y tesis
• Analicen si es conveniente representar gráficamente los elementos que se relacionan	• Confeccionar una figura de análisis
• Introduzcan las anotaciones convenientes	
• Expresen la tesis considerando una expresión equivalente.	• Transformar la tesis en una expresión equivalente. de acuerdo con las anotaciones introducidas.
• ¿Qué fórmula conocemos para calcular el área de un triángulo?	• Recordar teoremas del dominio matemático correspondiente.
• ¿Aparecen esos elementos en la figura ?	• Completar con líneas auxiliares.
• Comparen la tesis con la fórmula conocida. ¿En qué elementos se diferencian ?	• Analizar la tesis.
• Sustituye esos elementos expresándolos en términos de los conceptos contenidos en el enunciado.	• Sustituir conceptos por sus definiciones.

Mediante este trabajo los alumnos pueden llegar a encontrar los medios matemáticos necesarios para la demostración de ese teorema, pero lo que es mucho más importante, si esto se hace sistemáticamente, adquieren y fijan la forma de trabajo que les permitirá demostrar otros, muchos teoremas, independientemente, pues se logra crear en ellos una sucesión de reflejos condicionados que permite que esas reglas se conviertan en suyas.

12.5. EL PROGRAMA HEURÍSTICO GENERAL.

Para la planificación y dirección de los procesos de

resolución de problemas se utilizan los llamados programas heurísticos.

De interés especial resulta el conocido como programa heurístico general, el cuál constituye para el profesor el instrumento universal de dirección, y para el alumno una base de orientación para el trabajo con problemas.

PROGRAMA HEURÍSTICO GENERAL

FASES FUNDAMENTALES	TAREAS PRINCIPALES
1. Orientación hacia el problema	• Comprensión del problema
2. Trabajo en el problema	• Búsqueda de la idea de la solución. Incluye reflexiones sobre : - Medios matemáticos - Vía de solución
3. Solución del problema	• Ejecución del plan
4. Evaluación de la solución y de la vía	• Comprobación de la solución • Reflexión sobre los métodos aplicados.

De estas fases fundamentales, la segunda tiene la mayor importancia desde el punto de vista metodológico pues en la resolución de problemas lo esencial y más difícil es la búsqueda de la idea de la solución, y para ello la aplicación de los procedimientos heurísticos resulta imprescindible.

No obstante es necesario puntualizar que la realización exitosa de esta segunda fase está muy estrechamente relacionada con el trabajo en la cuarta fase en lo relativo a "la reflexión sobre los métodos aplicados".

Los ejercicios o grupos de ejercicios que se trabajen con los alumnos deben ser portadores de un «mensaje» dirigido a los alumnos y mediante el cual ellos adquieran una «ganancia metodológica» que les permita encontrar cada vez con mayor independencia ideas de soluciones a ejercicios.

La "**ganancia metodológica**" puede estar dirigida a que los alumnos comprendan:

- Las posibilidades de utilización de los conocimientos matemáticos en la resolución de ciertos tipos de ejercicios.

- Así luego de resolver varios ejercicios de demostración en que se pide probar la congruencia o igualdad de lados (o ángulos) con ayuda de la congruencia de triángulos se puede hacer comprender a los alumnos la regla heurística especial relativa a la demostración de igualdad de longitudes o amplitudes.

- Los pasos que son necesarios realizar para resolver los ejercicios con carácter de problema (tareas principales de cada fase del programa heurístico general) y las posibles formas para su ejecución.

De este modo una vez resuelto el ejercicio referido a demostrar que en todo triángulo, la mitad del perímetro es mayor que la longitud de cada lado; se puede analizar con los alumnos cómo se procedió en la búsqueda de la idea de la solución y concluir según el caso:

- Para encontrar la vía de la solución se puede partir de los datos y tratar de inferir toda la información posible que nos pueda conducir a lo que queremos demostrar (trabajo hacia adelante).

- Para encontrar la vía de la solución se puede partir de lo que queremos probar y razonar al revés (trabajo hacia atrás).

- Para encontrar los medios matemáticos necesarios hay que pensar en los conocimientos que se tienen que se relacionan con la información contenida en el ejercicio.

Para lograr en los estudiantes una orientación adecuada en el trabajo con ejercicios que tienen el carácter de problemas, el profesor debe emplear este programa heurístico general como instrumento de dirección del trabajo. Al mismo tiempo debe hacer explícito el uso de los diferentes procedimientos aplicados en él, de modo que los estudiantes los vayan asimilando conscientemente. Se trata de explicar a los alumnos cómo se puede actuar para hallar soluciones a problemas y no de explicar las solución hallada.

A partir de este programa general pueden elaborarse programas heurísticos particulares para cada uno de los tipos de tareas con carácter de problemas antes citados, pero ese no es el propósito de este trabajo.

A continuación se ofrece un ejemplo de aplicación de este programa a la enseñanza de la matemática. En él se señalan los impulsos que puede brindar el profesor para la aplicación de los procedimientos heurísticos por sus alumnos, fundamentalmente en la fase de trabajo con el problema.

En el tratamiento de las diferentes situaciones típicas de la enseñanza de la matemática utilizando los programas heurísticos es conveniente elaborar sucesiones de indicaciones con carácter heurístico para la orientación de las acciones de los alumnos, las cuales, si se utilizan sistemáticamente, permiten que se familiaricen con ellas y se incorporen, de manera natural, a su forma de trabajo y pensamiento.

Por ejemplo, al tratar problemas o ejercicios con texto utilizando el programa heurístico general se hacen evidentes al alumno cuatro etapas que, según el eminente matemático húngaro George Polya se distinguen en el

proceso de resolución de todo problema:

- Comprender el enunciado del problema
- Encontrar la vía de solución. Elaboración de un plan.
- Realizar el plan elaborado
- Comprobar la solución y evaluarla críticamente.

Para cada una de ellas es posible elaborar sucesiones de indicaciones que servirán como base de orientación para el trabajo del alumno.

Una sucesión de indicaciones para la primera etapa, pudiera ser:

- Lee el problema cuidadosamente
- Reproduce el contenido con tus propias palabras
- Separa lo que se da y lo que se busca
- Confecciona, si es posible, una figura de análisis que ilustre la situación.

También pueden elaborarse sucesiones de indicaciones para determinados aspectos dentro de una etapa. Por ejemplo, para sugerir al alumno el uso de la estrategia de trabajo hacia adelante en la demostración de teoremas puede utilizarse la siguiente:

- Busca teoremas con premisas iguales
- Selecciona uno o varios de ellos y realiza deducciones a partir de las premisas
- Introduce, si es necesario, nuevas denominaciones, líneas auxiliares y magnitudes auxiliares
- Realiza inferencias de las nuevas condiciones hasta que se pueda deducir la tesis.

Un trabajo como este permite la participación activa y consciente del alumno en el proceso de aprendizaje, lo que constituye la base del desarrollo de habilidades y capacidades.

Ahora bien, para lograr que los alumnos apliquen

conscientemente las formas de trabajo heurístico, es necesario tener en cuenta las siguientes medidas didáctico - metodológicas para la asimilación de las formas de trabajo heurístico:

1. Familiarizar previamente a los alumnos con los procedimientos que deben aprender. Seleccionar ejemplos apropiados para introducir los procedimientos.
2. Formular concisa y cabalmente, los procedimientos que los alumnos deben aprender, de manera que les sean completamente comprensibles.
3. Hacer conscientes a los alumnos de las ventajas que ofrece el empleo de los procedimientos heurísticos, para propiciar la generalización de su uso.
4. Capacitar a los alumnos (mediante su participación activa) para aplicar independientemente reglas, principios, estrategias y programas heurísticos.
5. Aprovechar todos los momentos de la clase para que los alumnos practiquen la utilización de las formas de pensamiento y de trabajo de la matemática.
6. La racionalización de la actividad mental es una necesidad de la sociedad y un objetivo de la Senseñanza de la matemática. Ello exigeque en la clase de matemática se apliquen conscientemente procedimientos heurísticos en la dirección y desarrollo de la actividad mental de los alum nos.

Para que el alumno logre asimilar y aplicar estos procedimientos independientemente es necesario que el maestro desarrolle una verdadera instrucción heurística, lo que sólo podrá asegurarse si se elabora un plan a largo plazo, que le permita trabajar sistemáticamente teniendo en cuenta las medidas didáctico - metodológicas antes citadas.

BIBLIOGRAFÍA.

JUNGK, WERNER. Conferencia sobre Metodología de la enseñanza de la Matemática. Primera parte. Tomo II.- Editorial libros para la educación, 1979.

Metodología de la Enseñanza de la Matemática. Tomo I / Sergio Ballester Pedroso ... [et al]. - Combinado Poligráfico Juan Marinello, 1993.

Técnicas de la enseñanza. Modernización en el aprendizaje / Donald C Orlich... [et al].- Editorial Limusa, S.A., México, 1994.

David de Prado Diez. El torbellino de ideas hacia una enseñanza mas participativa. Editorial Academia 1977 Cuba.

13. EL MÉTODO HEURÍSTICO UNA ALTERNATIVA PARA GUIAR EL PROCESO DE ENSEÑANZA APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

MONICA PATRICIA MEJIA COBALEDA
Licenciada en Matemáticas y Física. U. de A.
Profesora Colegio San Juan Bautista de la Salle
MIRYAM CECILIA OSPINA OSPINA
Licenciada en Matemáticas y Física. U. de A.
Profesora Liceo Marco Fidel Suárez

13.1. ¿QUE ES HEURÍSTICA?

La Heurística tiene sus orígenes en Socrates, quien la utilizó con sus alumnos como herramienta fundamental para precisar, aprender y descubrir los diferentes temas en una conversación de clase, a lo que se le llamo conversación socrática.

La Heurística tuvo su familiarización en la didáctica a partir del trabajo realizado por el alemán F. A W Diesterweg quien

dividió la enseñanza en dos bloques, la Dogmática y la Heurística, es en ese momento donde surge como método. Posteriormente fue utilizada por grandes pedagogos como N. E. Amstrong, G. Polya, W. Yung, W. Zillmer, H. Muller, Sshoenfield, Miguel de Guzmán y otros.

En la actualidad la Heurística está clasificada como uno de los métodos de elaboración conjunta donde profesor y alumno reconstruyen el nuevo conocimiento, esta tiene como objetivo desarrollar el pensamiento .

Para orientar el trabajo de clase con este método se tienen como herramientas esenciales las preguntas y los impulsos, las preguntas son los interrogantes que se establecen para hacer reflexionar al alumno sobre una situación problemica, los impulsos pueden ser informaciones, gestos, afirmaciones que le van ayudando al alumno a caracterizar la forma de actuar o trabajar. Estos se deben dar en la clase comenzando por el de mayor exigencia que le indique al alumno a dónde se pretende llegar y en la medida de su silencio se va reduciendo el nivel de exigencia, es decir, se da más información en la siguiente pregunta o impulso.

Con este método el alumno participa razonadamente de la enseñanza y es activo en la obtención del nuevo conocimiento, pues los impulsos lo enfrentan con el tema que esta estudiando, lo obligan a organizar los conocimientos que posee y lo enruta para hallar lo que esta consciente que desconoce. Esta es una motivación para él pues tiene claridad de lo que sabe y de lo que no sabe, también ve la necesidad de avanzar a lo desconocido pero con toda la seguridad que le brinda saber hacia donde se dirige.

Por lo anterior podemos afirmar que en este método se emplea lo que Vigotsky llamó "zona de desarrollo próximo".

13.2. VENTAJAS DE LA UTILIZACIÓN DEL MÉTODO HEURÍSTICO

Vemos que la utilización de este método en el proceso

enseñanza – aprendizaje de la matemática tiene bondades como:

- Le exige al alumno estar atento al desarrollo de la clase, a las preguntas e impulsos que se le plantean con el fin que él redescubra el nuevo conocimiento.
- Motiva al alumno a razonar, lo obliga a definir su posición mental frente a un objeto determinado, es decir, le crea una independencia cognoscitiva.
- Evita el olvido de los conocimientos ya adquiridos pues debe utilizarlos en la obtención del nuevo conocimiento, es decir, hay integración entre los conocimientos nuevos y los ya asimilados.
- Lo guía a comprobar y fomentar el saber.
- Desarrolla operaciones intelectuales como: analizar, comparar, clasificar, sintetizar, generalizar, abstraer y concretar.
- Aprende formas de trabajo y pensamiento inherentes a la matemática como la variación de condiciones, consideraciones, analogías, relaciones y dependencias.
- Desarrolla capacidades mentales como: intuición, creatividad y originalidad en la solución de problemas .

Con la utilización de este método el alumno se siente gratificado ya que experimenta la posibilidad de adquirir los nuevos conocimientos por sus propios medios y capacidades, además por que descubre que lo que él logra aprender difícilmente lo olvida.

13.3. DIFICULTADES DE LA UTILIZACIÓN DEL MÉTODO HEURÍSTICO

Si bien es cierto que el método heurístico tiene muchas

bondades también se pueden observar algunas dificultades en ella:

- Inicialmente el tiempo de la clase no alcanza para cubrir demasiado contenido pues los alumnos no están preparados para las exigencias del método y el profesor debe realizar un trabajo más lento.
- Los grupos de alumnos que tienen un nivel de asimilación de la matemática bajo, inicialmente presentan un ritmo lento en la utilización y aprovechamiento del método, que con el tiempo se logra superar gracias a la práctica continua en el mismo.

13.4. ESQUEMA DEL PROGRAMA HEURÍSTICO GENERAL

A la hora de programar y utilizar el método heurístico en el proceso enseñanza – aprendizaje es necesario tener en cuenta los siguientes pasos:

13.4.1. ORIENTACIÓN HACIA EL PROBLEMA: en esta fase se debe asegurar los conocimientos previos necesarios para la obtención del nuevo conocimiento, se debe hacer la motivación, la cuál es justamente colocar al alumno en un desequilibrio cognitivo o contradicción entre lo que se conoce y lo desconocido, por último se da una orientación hacia el objetivo de clase.

13.4.2. TRABAJO EN EL PROBLEMA: es buscar la idea para solucionar el problema o adquirir el nuevo conocimiento, se reflexiona sobre los medios matemáticos que se utilizarán y la vía a seguir en la solución de lo planteado.

13.4.3. SOLUCION DEL PROBLEMA: en este paso se ejecuta el plan establecido durante el trabajo en el problema.

13.4.4. EVALUACIÓN DE LA SOLUCIÓN Y DE LA VÍA: se hace una comprobación de la solución obtenida, la utilidad de los pasos empleados en ésta y la reflexión de otras posibles vías de solución o variaciones en las condiciones dadas inicialmente.

13.5. RECOMENDACIONES PARA LA UTILIZACIÓN DEL MÉTODO HEURÍSTICO

El maestro que desee utilizar este método debe tener en cuenta las siguientes recomendaciones:

- Asegurar adecuadamente el nivel de partida como un paso fundamental, pues de la claridad del conocimiento previo, depende en gran parte la adquisición del nuevo.

- El profesor debe emplear más tiempo en la prepa ración de la clase, pues debe tener en cuenta todas las posibles variaciones del tema a tratar.

- Debe tener habilidad para formular preguntas.

- Tener claridad para dar los impulsos en el momento preciso.

- Tomar conciencia de que los impulsos se dan comenzando por el de mayor nivel exigencia hasta el de menor, sin brindarle al estudiante la información que desea deducir.

- Pensar y precisar el problema para saber como se va a plantear a los alumnos de manera que a partir de allí, se realice el conversatorio con las preguntas y los impulsos adecuados para culminar el programa de heurística general.

13.6. EJEMPLOS DE LA UTILIZACIÓN DEL MÉTODO HEURÍSTICO EN EL PROCESO ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA

Los siguientes son ejemplos del desarrollo de una clase con el método heurístico.

13.6.1. CLASE DE GEOMETRÍA

Este ejemplo de clase fue realizado con alumnos de 9

grado que ya han tenido experiencia con este método Las letras que se utilizarán en el ejemplo significan.

P: Intervención del profesor
A: intervención del alumno
( ): Disminución en el nivel de exigencia en las preguntas o impulsos dados.

Clase para trabajar con el teorema:

"Si un punto P está situado en la bisectriz de un ángulo <ABC, entonces equidista de sus lados".

- **ORIENTACIÓN HACIA EL PROBLEMA:**

P: Hemos estudiado determinadas líneas notables, como la bisectriz de un ángulo, la mediatriz de un segmento, entre otros.

- ASEGURAMIENTO DEL NIVEL DE PARTIDA:

P: En el caso de la bisectriz ¿ Qué se sabe de está?
A: Divide al ángulo en dos ángulos iguales.

- MOTIVACIÓN

P: Pero la bisectriz está conformada por infinitos puntos ¿ Determinaran ellos segmentos iguales con los lados del ángulo? (silencio)

- ORIENTACIÓN HACIA EL OBJETIVO:
Se verá si para todo ángulo los puntos de la bisectriz equidistan de sus lados.

- **TRABAJO Y SOLUCION DEL PROBLEMA**

P: ¿ Qué se puede hacer para comenzar?
A: Demostrarlo
(P: ¿ Cómo se ha procedido en otras ocasiones ?)
A: Se separan los datos dados de lo buscado.
P: ¿ Cuáles son esos datos ?
A: Lo dado: <ABC, l bisectriz del <ABC, P es un punto de l, <ABP =<PBC

Lo buscado: que la distancia de P a cada lado del ángulo es igual.

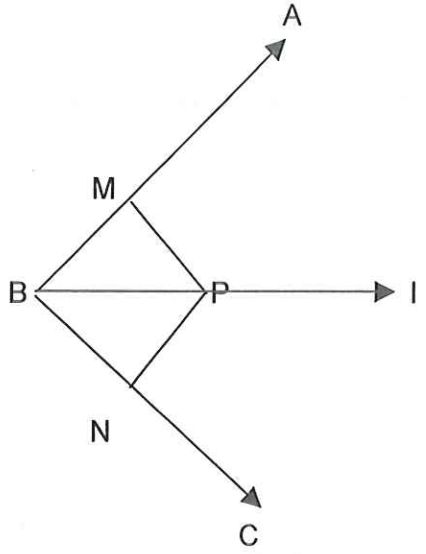
P ¿Cómo se puede representar lo dado y lo buscado ?

A PM = PN, M es un punto de AB y N es un punto de BC

P: ¿ Qué podemos hacer con los datos ? (¿ Existirá alguna forma de representarlos ?)

A: Graficándolos

P: Hagámoslo



P ¿Qué representan PM y PN en nuestra gráfica ?

A: La distancia de P hasta los lados del ángulo

P: ¿Cómo son esas distancias ? (¿ Qué relación existe entre los lados del ángulo y los segmentos que representan las distancias?).

A: Existe la relación de perpendicularidad.

P: ¿Entonces cómo son los ángulos que allí se forman ?

A: Son iguales por que son rectos.

P: ¿Qué es conveniente hacer ahora ? (¿ Recordamos algún teorema que esté relacionado con lo buscado ?) (¿ De que condición podríamos inferir lo buscado ?)

A: De la congruencia de Triángulos.

P: ¿Qué parte de la congruencia de triángulos, según nuestra información, es conveniente usar ?
A: El criterio A-L-A
P: ¿ Qué datos nos son útiles para hacerlo ?
A: <MBP = <NBP, lado BP común, <PMB = <PNB
P: ¿ Es suficiente con ello ?
A: No
P: ¿ Qué me hace falta ?
A: Un ángulo
P: (¿ Cómo deben ser los ángulos y el lado?)
A: El lado debe ser común para los ángulos.
P: ¿ Cómo obtener lo que me falta ? (¿ Recordamos otro teorema que pueda ayudarnos ?) (¿ Hay alguno que me relacione todos los ángulos de un mismo triángulo?)
A: La suma de los ángulos interiores
P: ¿ Cómo lo aplicamos ?

A: <MBP + <PMB + <MPB =180 (-)
<NBP + <PNB + <NPB = 180
0 0 <MPB - <NPB = 0
<MPB = <NPB

P ¿Que hacer con el nuevo dato? (¿Cómo representar lo Sdado y el nuevo dato ?)
A:

Δ En MBP	Relación	Δ En NBP
<MBP	=	<NBP
BP	Común	BP
<MPB	=	<NPB

P: ¿ Se cumple el criterio de congruencia elegido?
A: Sí
P: En consecuencia ¿ Qué obtenemos ?
A: El lado PM = PN

EVALUACIÓN DE LA VÍA Y LA SOLUCIÓN:

P: ¿ Queda demostrada nuestra proposición ?
A: Sí
P: ¿ Qué nos fue útil para hacerlo ?
A: Recordar la igualdad de triángulos y la suma de ángulos interiores del triángulo.
P: ¿ Cómo procedimos ? ...
P: ¿ Será posible elegir la otra vía ? ...
P: ¿ Representemos la demostración completa ? Queda como tarea organizar sistemáticamente los pasos de la demostración.

13.6.2. CLASE DE ÁLGEBRA

El tema de la clase es aprender a descomponer en factores, un polinomio para grado octavo.
Las letras que se utilizan en el ejemplo significan:

P: Intervención del profesor
A: Intervención del alumno
( ): Disminución en el nivel de exigencia en las preguntas o impulsos.

- **ORIENTACIÓN HACIA EL PROBLEMA:**

Los alumnos deben conocer términos semejantes, multiplicación y división de polinomios y máximo común divisor (M.C.D).

Aseguramiento del nivel de partida:
Los alumnos deben ser capaces de resolver los siguientes ejercicios:

1. $(x+y+1)(x-y-1)=$
2. Hallar el M.C.D de: $2x^3$, $6x$
3. ab , a^2b^2
4. $a^3b + a^2bc + ad^2c=$

- **MOTIVACIÓN:**

P: ¿Cómo procedieron para la solución?.

A: Con producto de polinomios, descomposición factorial y M.C.D, división de polinomios.
P ¿Cuál ejercicio les dio más dificultad?.
A: El 4º
P: ¿Sabe alguien hacerlo?.
A: No
P: ¿Son términos semejantes los miembros del polinomio?.
A: No

- **ORIENTACIÓN HACIA EL OBJETIVO:**

En el día de hoy vamos a obtener el procedimiento para factorizar este tipo de ejercicio.

- **TRABAJO Y SOLUCIÓN DEL PROBLEMA:**

P: ¿Qué diferencia encuentran entre los términos del polinomio?
A: Un factor en los términos es igual
P: ¿Cómo podríamos llamar a ese factor?
A: Factor común o M.C.D y es a
P: ¿Que podríamos hacer con ese factor?
En caso de que no sepan responder bajo el nivel de exigencia.
P: ¿Recuerdan que se hace cuando se tiene la siguiente expresión $x(2x^2+3x+2)$?
A: Se multiplican $2x^3+3x^2+2x$
P ¿Qué observan en esta expresión y la que les propusieron?
A: Son parecidas
P ¿Será que podemos proceder de forma similar?
A: Sí
P: ¿Qué tenemos que hacer con el factor?
A: Dividirlo por los tres términos
P: ¿Qué se obtiene cuando se divide por cada uno de los términos?
A: $a(a^2b+abc+d^2c)$

EVALUACIÓN DE LA VIA Y LA SOLUCIÓN

P: ¿Solucionamos el problema?
A: Sí
P: ¿Sabes como se llama este procedimiento?
Si responde no, le pregunto:
P: ¿Cómo se llama el término que obtuviste para dividir?
A: Factor
P: ¿Cómo es este factor en toda la expresión?
A: Común
P: ¿Entonces cómo se llama este procedimiento? (extraer factor común)
A: Factor Común
P ¿Escribe los pasos que te llevaron a esta solución?
Ahora observen el siguiente ejercicio: $a(x+1) + b(x+1)$
P: ¿Cómo podremos solucionar este ejercicio?
A: De la misma forma que el anterior
P: ¿Cuál es el factor común?
A: $(x+1)$
P ¿Cuál sería la solución?
A: $(x+1)(a+b)$
P: ¿Resolvieron el ejercicio?
A: Sí
P: ¿Cómo procedieron para solucionarlo?
P: ¿Cuál es la diferencia con el anterior ejercicio?
A: El factor común es un binomio
P: Y si tenemos el siguiente caso: $2a^2x - 6abx - 5a^2y + 15by$ ¿Será posible aplicar el concepto de factor común?
A: Sí
En el caso que contesten que sí
P ¿Cuál es el factor común de la expresión?
A: El 1
P ¿Si el 1 es el factor común logramos factorizar?
A: No
P: ¿Qué propiedades matemáticas pueden aplicar para solucionarlo?

A: Propiedad asociativa
P: ¿Les sirve de algo está propiedad?
A: Si por que podemos sacar factor común
P: ¿Resolvieron el problema?
A: Si
P: ¿Describe los pasos que te llevaron a la solución?
P: ¿Cómo se llama este procedimiento?
Si responden que no saben les dejo la tarea Consulta ¿Cómo se llama este procedimiento y si existen otros casos especiales?.

Trabajo de clase en equipos:

Resuelve los siguientes ejercicios y antes de terminar la clase se sustentarán en el tablero.

1. $15y^3 + 20y^2 - 5y =$
2. $2(a-5) + 7x(a-5) =$
3. $3xy^2 + 2y^2 + 6x + 4 =$

BIBLIOGRAFIA

Ballester, Sergio y Valverde, Lourdes. Metodología de la Investigación Pedagógica. Ciudad de la Habana, 1998.
Ballester, Sergio y otros. Metodología de la Enseñanza de la Matemática I y II. Ciudad de la Habana, 1992.

_____. El Tratamiento de los procesos de solución Heurísticos en la Enseñanza de la Matemática y la Racionalización del Trabajo Mental de los Alumnos. Ciudad de la Habana,

Gallego Badillo, Rómulo y Royman Pérez Miranda. La Enseñanza de las Ciencias Experimentales. Cooperativa Editorial Magisterio, 1997.

Horst Muller. Conceptos Básicos de la Geometría Plana 1. Ed. Pueblo y Educación, Cuidad de la Habana, 1981.

Junkg, Werner. Conferencias sobre Metodología de la

Enseñanza de la Matemática 1, Ed Pueblo y Educación, Ciudad de la Habana, 1983

Neuner, G y Otros. Pedagogía. Editorial de Libros para la Educación. La Habana, 1981.
Siñeriz, Liliana. Métodos y Heurística de Resolución de Problemas. Secretaria de Investigación, Centro Regional Universidad de Bariloche, Universidad Nacional de Comahue. Argentina.

Torres, Paul. El Método Heurístico en la Enseñanza de la Matemática del Nivel Medio General. En: Revista Educación No 60, Ciudad de la Habana. 1986.

14. LA COMPRENSION, FORMULACION Y SOLUCION DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS

ALBA NELLY PARRA MORENO
Licenciada en Educación Básica Primaria
Universidad de San Buenaventura
Educadora del Colegio Ciudadela las Américas

Partiendo de las investigaciones realizadas por el Ministerio de Educación Nacional (MEN), el servicio Nacional de Pruebas del Instituto Colombiano para el Fomento de la Educación Superior y las Pruebas del Tercer Encuentro Internacional de Ciencias y Matemáticas (TIMMS); se hace necesario desarrollar en todos los estudiantes la habilidad para comprender, formular y solucionar problemas Matemáticos.

El objetivo es diseñar una propuesta metodológica para el desarrollo de la comprensión, formulación y solución de problemas aritméticos.

Para lo cual es necesario dar respuesta a los siguientes interrogantes, que permitirán profundizar en el presente tema:

14.1. ¿ QUÉ ES COMPRENSIÓN?

Desde lo Lingüístico: Totalidad de los caracteres contenidos en una idea general, un concepto o un conjunto (pfander).

Desde lo Psicológico: Comprender significa pasar de una exteriorización del espíritu a su vivencia originaria; es decir, al conjunto de actos que se producen bajo las formas más diversas: gestos, lenguaje, objeto de la cultura, entre otros.

El acto de comprender tiende a ser sintético y global, entender tiende a ser analítico.

Desde lo Pedagógico: El acto de comprender implica.

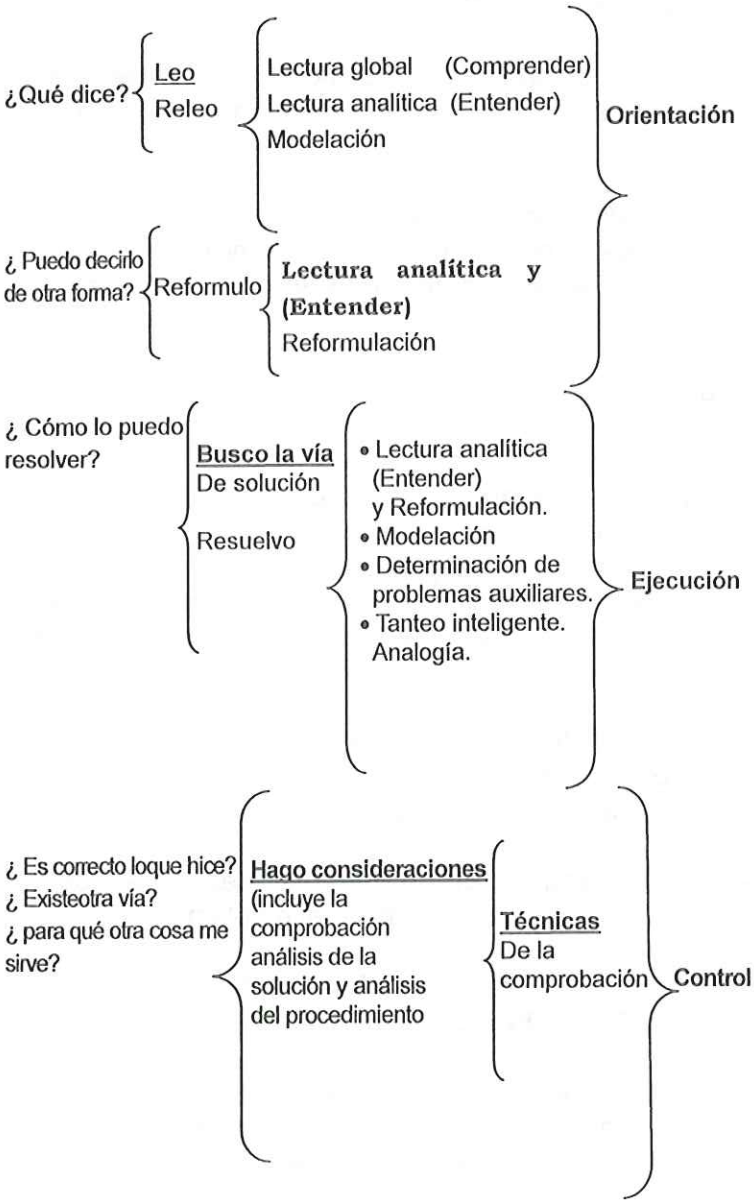
- ¿Qué se desea conseguir?
- ¿ Cómo se consigue?
- ¿Cuándo y en qué condiciones concretas se aplican los caracteres contenidos en una idea general, un concepto o un conjunto?

Desde la resolución de problemas: El acto de comprender un problema implica.

- ¿Qué se desea solucionar?
- ¿ Cómo lo puede resolver?
- ¿ Cuándo y en qué condiciones se aplica la información contenida en el problema?

14.2. PROCEDIMIENTO GENERALIZADO PARA LA SOLUCION DE PROBLEMAS.

En este procedimiento se parte de las fases conocidas para la solución de problemas y de los procedimientos heurísticos que desde Polya ocupan un lugar apreciable.



Con la aplicación de estos procedimientos se busca que el alumno deje de ser objeto de la enseñanza y pase a ser sujeto de su aprendizaje.

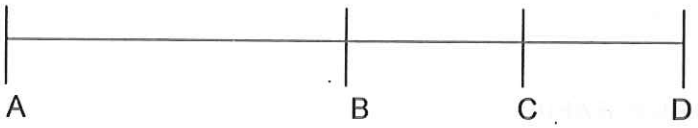
14.3. EJEMPLIFICACION DEL PROCEDIMIENTO GENERADO PARA LA SOLUCION DE PROBLEMAS

Dado $\overline{AD}$ cuya longitud es de 8 cm y los puntos B y C interiores a él, tales que

$\overline{BC} = \overline{CD}$, $\overline{AB} = 2\overline{BC}$. Calcular las longitudes del $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$.

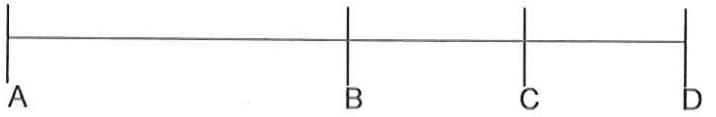
- Se hace una lectura inicial del enunciado.
- Se relee buscando las relaciones establecidas entre los datos del problema (Entender).

Establecidas las relaciones entre los datos del problema se construye una gráfica que los interprete (Modelación).



Reformulación: Dado $\overline{AD}$ Y B, C, puntos interiores a él, y B punto medio de $\overline{AD}$,

tal que $\overline{BC} = \overline{CD}$. Calcular la longitud $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ Y $\overline{CD}$.



Resuelvo:

$\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD}$ Esquema aditivo

$\overline{AD} = 2\overline{BC} + \overline{BC} + \overline{BC}$

$\overline{AD} = 4\ \overline{BC}$

8 cm = 4 BC

$$\frac{8cm}{4} = \overline{BC}$$

2 Cm = BC

$\overline{CD} = \overline{BC}$ ⟹ $\overline{CD}$ = 2 Cm

$\overline{AB} = 2\,\overline{BC}$ ⟹ $\overline{AB}$ = 2 (2 Cm) = 4 Cm.

Compruebo:

$\overline{AD}$ = 4 Cm + 2 Cm + 2 Cm

$\overline{AD}$ = 8 Cm.

BIBLIOGRAFÍA

Labarrere Sarduy Alberto F. Cómo enseñar a los alumnos de primaria a resolver problemas. Ed. Pueblo y Educación, ciudad de la Habana, Cuba, 1987

Polya, G. Cómo plantear y resolver problemas. Ed.Trillas, México, 1976

Campistrous Pérez, Luis y Rizo Cabrera, Celia. Aprende a resolver problemas aritméticos. Ed. Pueblo y Educación, ciudad de la Habana, 1996

Cano Floralba. Factores asociados al logro cognitivo de los estudiantes. Ministerio de Educación Nacional, Santafé de Bogotá, 1997

15. LA CREACIÓN DE UNA MOTIVACIÓN

LOURDES VALVERDE RAMÍREZ
Doctora en Ciencias de la Educación
Profesora de la Universidad de Antioquia
Facultad de Educación

Muchos docentes hemos percibido el desinterés de los estudiantes ante el aprendizaje de los contenidos matemáticos. Las explicaciones pueden ser múltiples pero en el fondo de todas ellas está la falta de una motivación adecuada para ocuparse del nuevo contenido.

En este trabajo se pretende que el lector reconozca las características generales de la actuación profesoral en pos de lograr crear una motivación adecuada para la resolución de tareas docentes por los que aprenden, apoyándose en los postulados de la psicología y la Didáctica General y de la Matemática.

De todos es conocido que el desarrollo de un proceso de enseñanza - aprendizaje depende de factores externos e internos, que están estrechamente relacionados a condiciones objetivas y subjetivas.

Algunas condiciones objetivas son iguales para todos los estudiantes, como son: los objetivos y contenidos del programa y el libro de texto. Otras condiciones subjetivas dependen de cada estudiante. Entre ellas: el nivel de conocimiento, el desarrollo alcanzado en sus capacidades mentales, la disciplina y la actitud ante el estudio.

La influencia que estas y muchas otras condiciones ejercen al proceso hace que "cada clase sea un proceso único, irrepetible". Sin embargo existen ***determinadas actuaciones del profesor que se repiten de vez en vez en la dirección de la enseñanza***. Ellas se conocen en la literatura como "***funciones didácticas***".

FUNCIONES DIDÁCTICAS

I. Introducción de la nueva materia

- Creación de una motivación
- Planteamiento del objetivo y la orientación hacia el objetivo.
- Aseguramiento del nivel de partida.
- Elaboración, transmisión y asimilación de la nueva materia.

II. Fijación de la materia elaborada

- La ejercitación
- El repaso
- La sistematización (profundización)

III. La aplicación de lo aprendido

IV. El control del nivel de asimilación de la materia.

El docente debe tener en cuenta que entre estas funciones didácticas existe una estrecha relación. Ellas no tienen que predominar en una clase, puede ocurrir una combinación de ellas; sin embargo a los efectos de su estudio metodológico, la delimitación me parece buena.

En este trabajo vamos hacer consideraciones solamente sobre la primera función didáctica.

15.1. FUNCIÓN DIDÁCTICA: Introducción a la nueva materia

15.1.1. ASPECTO: Creación de una motivación.

Desde el punto de vista psicológico, al analizar la estructura general de la actividad de la personalidad se reconoce que las necesidades y los motivos constituyen el aspecto fundamental que diferencia entre sí las actividades humanas.

Cualquier docente es capaz de reconocer las diferencias

que existen entre dos de sus estudiantes en cuanto a la actividad de estudio, e incluso puede explicar cuáles son las necesidades y los motivos de cada uno de ellos, que impulsan dicha actividad.

La necesidad se considera como "un estado de carencia del individuo que lleva a su activación con vistas a su satisfacción, con dependencia de las condiciones de su existencia" (González, V. y otros, p. 97)

Existen dos géneros de necesidades en un sujeto:

a) Las necesidades que no están mediadas por los objetos y se realizan en determinada función del organismo. (Ejemplo: El hambre, la sed);

b) Las necesidades que se satisfacen con la ayuda de objetos. (Se conoce como el carácter objetal de las necesidades)

Este segundo tipo de necesidad es la que impulsa y orienta la actuación.

Los objetos que pueden corresponderse con una necesidad y ser susceptibles de satisfacerla se denominan **"motivos".**

El motivo es "aquel objeto que responde a una u otra necesidad, que, reflejado bajo una forma u otra por el sujeto, conduce su actividad" (González, V. y otros, p. 100).

De todos es conocido que en la actividad de estudio se requiere que el estudiante disponga de "motivos adecuados". El profesor realiza actividades para lograr este fin: De esta manera resulta que el proceso realizado por el docente se llama "motivar".

Motivar a un estudiante para una actividad de aprendizaje es:

> **producir una contradicción interna entre las posibilidades subjetivas** (nivel alcanzado en el saber y el poder del estudiante).

Y las necesidades objetivas (demandas mayores que inicialmente no se cumplen).

despertar deseosde vencer, de resolver esta contradicción mediante la asimilación de un mayor saber y poder.

El resultado de la acción "motivar" (realizada por el profesor) **se produce en el estudiante** y se llama **"motivación"**. La motivación caracteriza el estado interno del que aprende.

El profesor puede realizar acciones para motivar en dos formas diferentes: una general, para que el estudiante se ocupe de realizar conscientemente y con deseos una actividad (por ejemplo: la realización del estudio independiente) y de manera particular para ocuparse de un objeto de aprendizaje específico (por ejemplo: la resolución de un problema).

El profesor en su planificación del proceso de enseñanza aprendizaje determina las actividades que va a realizar para lograr la motivación del estudiante. Estas actividades pueden considerarse dentro de la asignatura o fuera de ella.

Para la creación de motivaciones adecuadas en los que aprenden se utilizan las **«situaciones problémicas»**. Este término se utiliza con sentido psicológico y con sentido pedagógico y didáctico.

Desde el punto de vista psicológico «la situación problémica es un estado psíquico de dificultad que surge en el hombre cuando, en la tarea que está resolviendo, no puede explicar un hecho mediante los conocimientos que tiene, o realizar un acto conocido utilizando los procedimientos que conoce desde antes y debe, por tanto, buscar un procedimiento nuevo para actuar. Se puede definir como «la relación entre el sujeto y el objeto de conocimiento en el proceso docente-educativo, que surge a modo de contradicción, cuando aquel no puede entender la esencia del fenómeno estudiado, porque carece de los elementos necesarios para el análisis y que solo mediante la actividad

creadora puede resolverse» (ICCP/ 1984/p. 259)
Al respecto el psicólogo cubano A. Labarrere plantea: «el hombre experimenta la necesidad de pensar, de organizar y dirigir su actividad cognoscitiva, cuando en el curso de su interacción con el medio se alza, como barrera, *el desconocimiento* que le entorpece o impide el alcance de determinados fines y productos. Esta es, expresada de manera general, la situación problémica que subjetivamente se presenta como sensación de desconocimiento, como necesidad de adquirir nueva información sobre algo»(Labarrere,A./1996/p2).

Usted debe reflexionar sobre el hecho que una situación problémica desde el punto de vista psicológico es un estado psíquico, pero que para lograr eso se presentan a los estudiantes determinadas tareas docentes para cuya resolución no dispone de los conocimientos necesarios y surge entonces en él necesidades, intereses y motivos.

Desde el punto de vista pedagógico y didáctico entonces también se utiliza la frase «situaciones problémicas o situaciones problemáticas o situaciones problema» para referirse a aquellas *tareas docentes que se le proponen a los estudiantes y son capaces de producir el estado psíquico mencionado.*

El profesor Orlando Mesa (Facultad de Educación, U. de Antioquia) ha investigado y sistematizado cuestiones relativas a estas situaciones problemas. El considera que desde el punto de vista didáctico «una situación problema se interpreta como un espacio pedagógico que posibilita tanto la conceptualización como la simbolización y la aplicación comprensiva de algoritmos, para plantear y resolver problemas de tipo matemático» (Mesa, O./1998/ p15).

Estamos entonces de acuerdo en considerar que de una situación problema se puede formular un problema y constituirse como tal. En este juego de palabras usted debe comprender la diferencia que existe entre los términos «situación problema» y «problema» en el sentido didáctico matemático.

Le sugiero que debata al respecto después de haber analizado los siguientes ejemplos.

Situación problémica 1: Se sabe que «El área del cuadrado que puede construirse sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma de las áreas de los cuadrados que pueden construirse sobre los restantes lados» ¿Es esta proposición solamente válida para triángulos rectángulos? ¿Se cumple el recíproco?

15.1.1.1. EJEMPLOS TOMADOS DE LA MATEMÁTICA

Motivación extra-matemática.[9]

Se propone al estudiante el siguiente problema:

Calcule la longitud que debe tener el asta de la bandera, si se sabe que las cuerdas que la sostienen miden 4 m. y forman un ángulo de 30° con el suelo.

Se motiva así el estudiar las relaciones trigonométricas en un triángulo rectángulo.

Motivación intra-matemática.[10]

Los estudiantes aprenden en el primer ciclo básico que existen triángulos que tienen:

- todos sus ángulos agudos (menores de 90°)
- un ángulo recto (mide 90°)
- un ángulo obtuso (mide más de 90°)

Se propone a los estudiantes la siguiente tarea docente: "Construya un triángulo que tenga 2 ángulos rectos".

[9] Motivación extra-matemática: Es la motivación que se adquiere mediante usos y aplicaciones previos del concepto matemático que se va a estudiar.

[10] Motivación intra-matemática: Hace relación a los conocimientos previos y necesarios para desarrollar el nuevo concepto matemático.

La tarea es imposible y ¿por qué no es posible trazar un triángulo con tales condiciones?

Se motiva así el ocuparse de un nuevo teorema ("La suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180º).

Cuando se utiliza una motivación intra-disciplina se está contribuyendo a que los estudiantes reciban una orientación correcta del desarrollo de la ciencia y se capaciten para el trabajo independiente en ese dominio.

Algunos motivos dentro de esta posibilidad consisten en:

- La alegría y satisfacción que se experimenta en la resolución de una tarea docente.
- La necesidad de saber algo por razones objetivas.

- El dominio insuficiente de algún tema o los escasos conocimientos que se tiene de él.

Otro aspecto a destacar en la actuación del profesor es que él puede haber motivado el ocuparse de un tema, que se desarrolla en digamos 10 clases, pero eso no elimina la posibilidad de "motivar" el ocuparse de tareas específicas en partes de cada clase o de algunas de ellas, por ejemplo la formación un concepto, la demostración de una proposición, entre otros.

15.2. CONCLUSIONES

Tal y como ha sido explicado la tarea de crear una motivación adecuada para que surjan en los estudiantes motivos de estudio, no es una cosa fácil ni se garantiza que se logre aún cuando desde el punto de vista didáctico se hayan tenido en cuenta todas las sugerencias aquí expresadas.

Lograr la motivación deseada en los estudiantes implica tomar en consideración sus intereses, necesidades y motivos relativos a su entorno familiar, social e individual.

Sirvan estas reflexiones para contribuir a perfeccionar el

proceso de enseñanza - aprendizaje de la matemática escolar.

BIBLIOGRAFÍA

González, V. Y otros. Psicología para Educadores. Ed. Pueblo y Educación. 198

ICCP. Pedagogía. Ed Pueblo y Educación. Cuba 1981.

Labarrere, A. La formulación de problemas por los escolares de primaria. Educación. No. 30. La Habana, 1980.

Zillmer, Wolfgang. Complementos de la metodología de la enseñanza de la Matemática. La Habana, Cuba. Ed. Libros para la Educación. 1981.

Ministerio de Educación Nacional (MEN) de Colombia. Ley general de Educación. 1994.

Ministerio de Educación Nacional (MEN) de Colombia. Lineamientos curriculares de matemática. 1998.

BALLESTER PEDROSO SERGIO. MEM (Tomo I)/ Sergio Ballester Pedroso...[et al.]. Editorial Pueblo y Educación, La Habana, Cuba, 1992.

BRANSFORD, JOHN. Solución IDEAL de problemas. Guía para mejor pensar, aprender y crear./John Bransford y Barri Stein/.Barcelona: Editorial Labor, 1993.

CAMPISTROUS PEREZ, LUIS. Aprende a resolver problemas matemáticos. /Luis Campistrous Pérez y Celia Rizo Cabrera/.La Habana: Editorial Pueblo y Educación, 1996.

————————. Aprende a resolver problemas matemáticos. En Memorias Pedagogía 97. Grupo ARPA. Proyecto TEDI: curso 35. /Luis Campistrous y Celia Rizo/. La Habana: IPLAC, 1997.

HERNÁNDEZ FERNÁNDEZ, HERMINIA. Vigotski y la estructuración del conocimiento matemático. Experiencia cubana/ Herminia Hernández. En Conferencia Magistral RELME 11. México, 1997.

16. EL PENSAMIENTO METAFÓRICO EN LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA

RUBÉN DARÍO HENAO CIRO
Licenciado en Matemáticas
Universidad de Medellín

16.1. APUNTES

"La metáfora en la ciencia, como bien lo dice Ricoeur, permite la creación de modelos desde los cuales accedemos a nuevos conocimientos sobre lo real, en la literatura nos permite configurar obras que proyectan nuestras posibilidades y nos abren mundo. En filosofía permite la construcción del discurso especulativo que avanza en la creación de conceptos y en la configuración de formas específicas de comprender, interpretar, aclarar, explicar, analizar, describir la relación que se construye entre el mundo, los otros y nosotros mismos, como una forma de acceder a la verdad" (Luz Gloria Cárdenas, en Cuadernos Pedagógicos, 1999, p.203)

"Toda clase de imágenes ha guiado la imaginación de investigadores en comunicación: aquella del telégrafo con sus líneas de transmisión y su alfabeto Morse, la del juego de ajedrez con sus estrategias y sus jugadas, la de la orquesta, o más recientemente, la del tratamiento informático de la información". (Jean Pierre Meunier, en Signo y Pensamiento, 1997, p.116).

"*Nuestra capacidad de usar metáforas computacionales de este modo, como portadoras de nuevas teorías sicológicas, tiene consecuencias respecto de adónde van las teorías del conocimiento y adónde vamos nosotros como*

productores y portadores del conocimiento. Estas ciencias no son independientes". (Papert, Citado en Maestros Pedagogos II, 1999, p.85).

Las metáforas computacionales de que habla Papert no sólo han imitado procesos mentales, sino que han invadido las aulas de clase y se han convertido en lenguaje común. Metáforas como el escritorio de Windows: papelera, archivo y conceptos como Hardware para hablar de cerebro y software para referirse a la mente, tienen una esencia metafórica para hacernos comprender la relación entre lo que pasa en la máquina y lo que le pasa al ser humano.

Recuérdese, a manera de ejemplo, el problema de los puentes de Konigsberg, que nace de los paseos de los habitantes de Konigsberg (hoy Kalinigrado) por las riberas, islas y puentes de la ciudad. Por los cuales, además de Kant, se paseó el matemático suizo Leonardo Euler, quien matematizó la situación de si era posible recorrer una sola vez todos y cada uno de los puentes y regresar al punto de partida. Originando así la teoría de grafos.

"Este es un caso muy claro en el cual la producción matemática parte de conceptos como recorrido, punto de partida, punto de llegada, una sola vez, repetición, omisión, conceptos que no son en sí propiamente matemáticos". (Vasco, 1994, p.113)

Si se quiere alcanzar el ideal propuesto con los alumnos, en nuestro caso mejorar la argumentación utilizando la metáfora, se debe proveer el ambiente escolar de un método claro y uniforme que tenga en cuenta 1) el conocimiento del alumno, 2) el desarrollo de la acción argumentativa, 3) la relación entre lo que el alumno sabe y el nuevo conocimiento matemático y 4) las acciones que deben ejecutar profesor y alumno para alcanzar los logros propuestos.

16.2. LA METÁFORA

"Una metáfora es una comparación condensada que afirma una identidad intuitiva y concreta". (Esnault, Citado por Ullmann, 1970, p.241)

"La metáfora es la ligazón de dos conceptos diferentes". (Borges, 1994)

"La esencia de una metáfora es permitir comprender una cosa en términos de otra". (Jean Pierre Meunier, en Signo y Pensamiento, 1997, p.116)

"La metáfora aprovecha la identidad parcial de las cosas para afirmar su identidad total'. (Ortega y Gasset, citado en CONTEXTOS, 1999, p.21).

Metáfora viene del latín *metaphoram* y del griego *metaphora*, traslado. Se define como un tropo que consiste en usar palabras con un sentido distinto del propio, si bien guardando con éste cierta relación analógica.

La metáfora consiste en designar una cosa con el nombre de otra que tenga con ella alguna semejanza, una analogía que imaginativamente identifica un elemento con otro, y adscribe al primero una o varias cualidades del segundo o reviste al primero con las cualidades imaginativas o emocionales del segundo. En ella entran en juego un elemento real y otro analógico. La cosa de la que estamos hablando (tenor), y aquella con quien la comparamos (vehículo). El rasgo o los rasgos que tienen en común constituyen el fundamento de la metáfora.

Un enunciado metafórico aproxima dos objetos en virtud de una semejanza parcial. Una vez afirmada la identidad total, se empieza la búsqueda de significación común, para apreciar en qué sentido se aprovecha la metáfora.

Un factor importante para tener en cuenta es la distancia entre el tenor y el vehículo. Si la distancia es corta, la metáfora es correcta pero poco expresiva. *"Cuanto más remotas estén las cosas acopladas, la tensión creada será, por supuesto, mayor. Esta tensión es la combadura del arco, la fuente de energía del disparo, pero no debemos confundir la potencia del arco con la excelencia del tiro; o el esfuerzo con el blanco".* (Ullmann, 1970, p.241)

Ejemplos 1:

"La guitarra es un pozo con viento en vez de agua"
(Gerardo Diego).

Tu mirada férrea se estrelló en mis ojos.

"El tiempo, ese sepulturero calvo". (Shakespeare).

Existen metáforas antropomórficas y de animales como: *La ceja de una colina, la boca de un río, los pulmones de una ciudad, el corazón del asunto, el nervio de una guerra, las manecillas del reloj, la pata de gallo, cola de perro, diente de león,* entre otras.

"Todas eran riquísimas en extremo pues tenían los cabellos de oro, la frente de plata bruñida, los ojos verdes esmeraldas, los dientes de marfil, los labios de coral y la garganta de cristal trasparente"

Miguel de Cervantes Saavedra

Arena del desierto soy: desierto de sed.
Oasis en tu boca donde no he de beber.
Boca: oasis abierto a todas las arenas del desierto.
Húmedo punto en medio de un mundo abrasador,
el de tu cuerpo, el tuyo, que nunca es de los dos.
Cuerpo: pozo cerrado a quien la sed y el sol han calcinado.

Miguel Hernández.

16.2.1. USO DE LA METÁFORA

La metáfora es usada *"como un factor capital de motivación, como un artificio expresivo, como una fuente de sinonimia y polisemia, como un escape para las emociones intensas"* (Ullmann, 1970, p.240)

La metáfora ha jugado un papel muy importante en el mejoramiento de la comunicación a lo largo de la historia.

Se convierte en un reto para quien interpreta el hecho de decodificar el mensaje del enunciado metafórico, es decir, no sólo comunica sino que *"se acerca a la comunicación para invitarla"*. (Eduardo Gutiérrez, 1996)

Ahora, enseñar utilizando metáforas equivale a establecer una relación entre lo conocido por los alumnos (X) y el nuevo conocimiento (Y). El elemento X puede ser un objeto real o imaginario, una palabra, un proceso o un concepto matemático anterior. La precisión de X depende de lo que el alumno tiene en la memoria.

El elemento Y es el concepto matemático que se va a elaborar o el procedimiento a desarrollar en la resolución de un problema matemático.

La relación es el conjunto de argumentos que reflejan en qué se parecen X y Y cuáles son sus semejanzas y diferencias, qué rasgo comparten, por qué Y es como X.

En la formación de conceptos, por ejemplo, resulta inútil apoyarse en un triángulo para hablar de otro triángulo. Salvo que sea la representación de un triángulo en el tablero, apoyada en un triángulo que se forme en la realidad como el triángulo de las Bermudas. Pero, es útil apoyarse en las propiedades del triángulo para hablar de un cuadrilátero o de un pentágono.

Ejemplo 2:
"La actitud del matemático creativo es más la del artista. Deja florecer la imaginación en las horas de soñar despierto; seguir las nubes en su vagar multiforme en los crepúsculos, oír la regularidad de las olas del mar o de los silbos del viento en la arboleda. Y perseguir sin cesar las conjeturas, los modelos, las quimeras hasta que, de pronto, la inspiración surja con su voz deslumbrante" (Vasco, 1994, p.120)

Ejemplo 3:
"¿Qué es entonces la verdad? Una multitud móvil de metáforas, metonimias, antropomorfismos: en breve, una suma de relaciones humanas que han sido poética y

retóricamente intensificadas, transpuestas, adornadas y que, después de un largo uso, parecen una población fija, canónica y restrictiva: Las verdades son ilusiones que hemos olvidado que lo son; metáforas gastadas que han perdido su fuerza sensible." (F. Nietzche, Citado por CONTEXTOS, 1999, p.35)

Para resolver problemas, es necesario recurrir a la modelación, a las analogías y por consiguiente a las metáforas; metáforas que pueden ser establecidas entre el enunciado y el modelo que da solución al problema, entre el modelo matemático y otro modelo real que sirva de apoyo; esto es, al resolver un problema puede aprovecharse la vinculación entre lo real y lo abstracto, entre lo vulgar y lo bello o lo científico.

La construcción metafórica en la matemática puede estar formada por un texto, escrito por el profesor, que relacione el nuevo conocimiento con el anterior, que relacione el conocimiento matemático con el conocimiento común, la construcción puede ser un diagrama que conduzca al alumno al estudio que el profesor quiere incitar, o puede estar formada por los dos: el texto y el diagrama.

Ejemplo 4: En un potrero totalmente plano se encuentra una cabra atada a un poste con un lazo de x metros de largo. La cabra se mueve desesperadamente alrededor del poste, sin enredarse y manteniendo el lazo tenso, de tal manera que describe una curva.
Haga un dibujo que ilustre el problema.
Muestre un punto donde puede estar la cabra.
Muestre varios puntos donde puede estar la cabra.
¿ Cuáles son las características esenciales de la curva que describe la cabra?.
¿ Qué representa la estaca y qué el lazo?

Ejemplo 5: Ocho profesores de matemática se reúnen para resolver un problema. Cada uno de ellos estrecha la mano de los demás. ¿Cuántos apretones de manos se dieron? ¿Podrías dibujar un esquema que resuelva el problema?

16.2.2. LA METÁFORA COMO MOTIVACIÓN

La motivación hacia un acto de aprendizaje puro implica conocer problemas y situaciones típicas, bien sea de la vida real y que sirven como motivo de aprendizaje, o de la matemática misma y que pueda ser resuelta a través de la matemática misma. La motivación debe darse porque *"los alumnos motivados aprenden con mayor rapidez que los alumnos no motivados"* (Nickerson y otros, 1990, p. 380)

Según Nickerson y sus colaboradores para infundir placer por los conocimientos se debe 1) Seleccionar problemas interesantes para los alumnos, 2) dar razón a los alumnos del por qué aprender, 3) sostener la bidireccionalidad entre la motivación y el desempeño. (Nickerson y otros, 1990, p. 381)

Ahora bien, la metáfora no sólo puede lograr seducir hacia el trabajo matemático sino que la metáfora es ya una motivación en el aula, ya que los alumnos pueden hacer de ella parte de su repertorio de habilidades mentales, es una invitación a que aporten su experiencia en la construcción de saberes matemáticos.

Ejemplo 6: Caso del tesoro enterrado

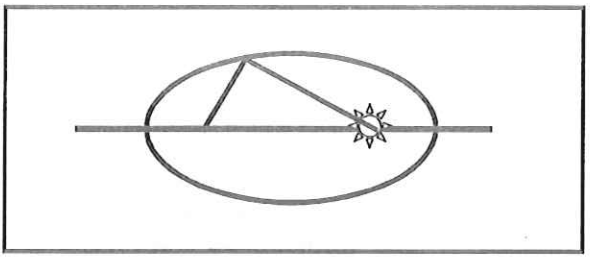
Al mapa de ubicación de un tesoro le faltaba la mitad inferior pero en él aún se podía leer lo siguiente: " El tesoro está enterrado en un sitio que equidista de la peña y de la vía del tren. También es...." Falta el resto de la información. He aquí una situación desalentadora. Hay una fortuna al alcance de tu mano y no sabes cómo hallar el tesoro.

Encuentra un punto donde pueda estar el tesoro.
Encuentra dos puntos donde pueda estar el tesoro.
Encuentra varios puntos donde pueda estar el tesoro.
¿Qué características tienen los puntos encontrados?.
Dibuja un gráfico que le permita a una persona encontrar el tesoro.

¿Qué es la peña y qué la vía del tren?.

Ejemplo 7: Un preso fue llevado al campo y amarrado a dos argollas de acero fijas, a una barra recta de hierro, separadas dos metros una de otra, con una cadena de x metros de largo, que le permitía moverse alrededor ya que las argollas dejaban correr la cadena. Fue advertido que si mantenía tensa la cadena podía encontrar las llaves que lo liberaban.

Encuentra un punto donde puedan estar las llaves.
Encuentra dos puntos donde puedan estar las llaves.
Encuentra varios puntos donde puedan estar las llaves.
¿Qué características tienen los puntos encontrados?.
Dibuja un gráfico que le dé certeza al preso de las llaves.



16.2.3. EL PENSAMIENTO METAFÓRICO

El pensamiento metafórico "*es la capacidad para establecer conexiones entre dos cosas diferentes reconociendo que en cierto modo comparten un rasgo común o ejemplifican un principio común*" (Linda Verlee Williams, 1986, p.66)

El desarrollo del pensamiento metafórico exige el uso sistemático de la comparación como elemento de aprendizaje; la capacidad de establecer semejanzas y diferencias entre dos objetos permiten orientar el conocimiento matemático hacia el nivel superior.

Ejemplo 8:

¿Con qué se puede comparar el sistema circulatorio?

¿En qué se parecen un riñón y el carburador de un carro?

¿Cuáles son las semejanzas y diferencias entre una función lineal y una cuadrática?

¿Qué semejanzas hay entre el proceso para resolver una ecuación lineal y la vida?

16.3. ELABORACIÓN DE CONCEPTOS

La elaboración de conceptos matemáticos debe enriquecerse al encontrar un campo semántico asociado al concepto a desarrollar, recrear las situaciones que genera el concepto; su historia, su aplicación, su posibilidad de generar textos.

Ejemplo 9. Situaciones paralelas del concepto

RELACIÓN Correspondencia entre dos números o dos figuras.	RELACIÓN Correspondencia entre dos personas
MATRIZ Grupo de cantidades dispuestas por series de líneas horizontales y columnas verticales.	MATRIZ Víscera hueca situada en lo pelvis de las hembras de los mamíferos en que se desarrolla el feto.
EXPONENTE Número o expresión algebraica que denota la potencia a la que se ha de elevar otro número.	EXPONENTE Persona que expone.
RAÍZ Cada uno de los valores que puede tener la incógnita de una ecuación	RAÍZ Base de un objeto hundido en el suelo.Órgano de las plantas enterrado.
CÁLCULO Parte de la matemática que se ocupa del estudio de funciones.	CÁLCULO Concreción que se forma en la vejiga.

- Alex y Julián Tienen vidas paralelas.
- Sergio es incongruente, se sale por la tangente al hablar.
- El hombre tiene que ser recto en lo que hace.
- Sebastián es el eje de esa familia.
- Dios creó al hombre a su imagen y semejanza.

16.4. EL CAMPO ASOCIATIVO

Las palabras tienen aspectos diferentes según el contexto en que son usadas. El uso de significados ayuda a encontrarle sentido y relación con otros contextos.

Una palabra puede recibir uno o más sentidos figurados sin perder significado original. Puede tener varios usos metafóricos útiles en el aula de clases, esto es lo que convierte el lenguaje en un instrumento de conocimiento.

La polisemia se refiere a la variedad de significados de una palabra. Las figuras que más dan lugar a la polisemia son la metáfora y la metonimia. Pero "la metonimia no abre caminos como la intuición metafórica; si no que quemando las etapas de caminos demasiado conocidos, acorta distancias para facilitar la rápida intuición de cosas ya sabidas". (Esnault, citado por Ullmann, 1970, p.247)

Una palabra puede volverse ambigua con muchos significados. Lo que interesa no son los muchos significados que pueda tener una palabra sino la calidad de tales significados y la relación mutua que existe entre ellos. Cualquiera que sea la causa que produzca un cambio semántico, siempre debe haber alguna conexión, alguna asociación entre un significado y otro.

Toda palabra está circundada por una red de asociaciones que la conectan con otros términos. "*Un término dado es como el centro de una constelación, el punto en que convergen otros puntos coordinados, cuya suma es indefinida*". (Saussure, citado por Ullmann, 1970, p.270)

"El campo asociativo de una palabra está formado por una

intrincada red de asociaciones, unas basadas en la semejanza, otras en la contigüidad, unas surgiendo entre los sentidos, otras entre los nombres". (Ullmann, 1970, p.271).

Ejemplo 10: Campo asociativo de la palabra Límite

Limitar	El cielo es el límite	Plano
Limitado	L Í M I T E	División
Limítrofe		Cercanía
Limitador	limitado	Frontera
Pare	Infinito	Borde

16.5. INTERDISCIPLINARIEDAD E INTERTEXTUALIDAD

Al considerar la significación de los conceptos matemáticos en contextos diversos estamos abriendo una ventana a la interdisciplinariedad. Los problemas matemáticos no son sólo problemas matemáticos, hay que ver en ellos lo no matemático que arrastra la formación integral. Resolver un problema es, además de resolverlo, adquirir elementos de juicio para fortalecer las creencias, es conocer otros campos del saber y ver como *"los saberes rompen sus límites para entrar en el campo de lo interdisciplinario"* (Gómez y Castillo, en Cuadernos Pedagógicos, 1999, p.87).

El trabajo intertextual en matemáticas enriquece y fortalece la investigación en los alumnos; el alumno puede establecer una relación dialogal entre diferentes textos matemáticos y consultar cómo abordan el mismo concepto, cómo resuelven la misma situación, es más, establecer la comunicación textual entre libros de matemáticas y de otras disciplinas. Así el alumno adquiere más recorrido en el momento hipertextual. "La hipertextualidad es la relación que une un texto B con un texto A, es decir supone la derivación de un texto de otro ya existente. Al texto B se le llama hipertexto y al texto A se le denomina hipotexto". (Gómez y Castillo, en Cuadernos Pedagógicos, 1999, p.93)

El alumno elabora su propia versión de texto sobre el tema desarrollado, utilizando, hasta donde sea posible, sus

propias palabras y su estilo propio, reconceptualizando y rediseñando.

La lectura intertextual conlleva a la investigación interdisciplinaria y abre nuevas posibilidades para la integración de las áreas del currículo.

16.6. LA ARGUMENTACIÓN

"La argumentación consiste en la exposición del juicio o sistema de juicios por el cual se fundamenta la conformidad o veracidad de otro juicio o idea dada". (Mercedes López, 1990, p.24).

La argumentación ayuda a la formación de personalidad, en cuanto permite la participación consciente en procesos de construcción de sociedad y la toma de posición frente a cualquier situación.

"La escritura es relevante para enseñar a pensar porque 1) la escritura exige que se piense y 2) la escritura constituye un vehículo del pensamiento". (Nickerson y otros, 1990, p.288)

Pensar correctamente para comunicar: expresar ideas, escribir, describir, demostrar, interpretar, evaluar, construir, formular y crear enunciados matemáticos.

El proceso de escritura se desarrolla en tres momentos que son preescritura, escritura y reescritura. La preescritura está caracterizada por el torbellino de ideas y la lectura de otros materiales que sirvan de soporte. La escritura es el momento en el cual el alumno desarrolla por escrito sus ideas. La reescritura ocurre después de haber sometido a reflexión lo escrito antes; es decir, la reescritura es la escritura corregida.

A través del proceso interactivo entre pensamiento y lenguaje *"el lector produce otro texto, recrea la lectura. En este sentido, el texto que cada lector produce es diferente, aunque esté ligado al texto leído"* (Mejía, citado por el MEN, 1995)

Ejemplo 11. PARÁBOLA DEL RASCACIELOS. De Carlos Cuauhtemoc Sánchez

La vida puede compararse con un enorme rascacielos al que debemos subir, los seres humanos iniciamos en uno u otro piso nuestro ascenso, según el nivel en que nacemos; pero aun los privilegios se hallan en estratos bajos pues el rascacielos es altísimo.

En cada piso hay dos zonas perfectamente diferenciadas: la estancia de distracciones, repleta de amigos, camas, televisores, fiestas y juegos; y un amplio salón lleno de talleres y mesas de estudio. Ante ambos se encuentra el túnel de los elevadores. Cuando se abre la puerta de uno, muchas personas suelen saltar y correr hacia ella. Rápidamente se hace una fila.

El operador formula entonces una pregunta a la persona que llega primero. Si no sabe la respuesta correcta se le descarta y se hace la pregunta a la siguiente persona. Así se continúa hasta hallar a la que tiene los conocimientos requeridos; a ésta se le transporta a un piso superior. Algunos decepcionados, regresan a la estancia de distracciones, otros se quedan en el túnel para volver a intentarlo.

Hay quienes se la pasan caminando, buscando que los elevadores se abran, pero sin trabajar ni estudiar, de modo que jamás suben porque no adquieren los conocimientos exigidos. Otros, por el contrario, laboran en los talleres y están tan entretenidos que no se ponen de pie cuando el elevador se abre. Éstos, aunque tienen los conocimientos, son demasiado temerosos para ser elegidos.

La persona que logra subir, se encuentra con que la estancia de distracciones del nuevo piso es más atractiva aún que en los inferiores. De la misma forma los talleres y mesas de estudio muestran mayor dificultad; por eso, cuanto más alto es el piso, hay menos candidatos para subir cada vez que se abre un elevador.

Algunos, frustrados, engañan a los ascensoristas y suben los pisos a la fuerza. Es una pena. Al llegar arriba son

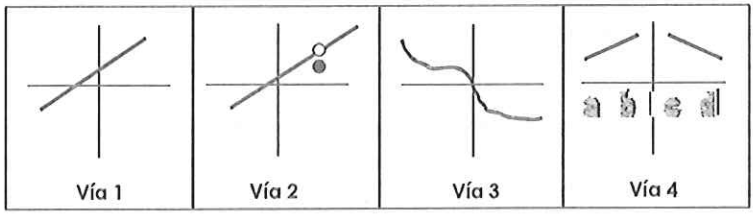
arrojados por la ventana.

Los que se quedan abajo, a veces difaman y se burlan de los que suben diciendo que tienen buena suerte.

Si "suerte" significa poseer los conocimientos necesarios, y, al mismo tiempo, tener la agilidad para ponerse frente a la puerta que se abre, efectivamente, los grandes hombres han tenido buena suerte.

1. ¿Qué necesita una persona para subir el rascacielos?
2. Escribe tu argumento sobre el texto leído.
3. Dibuja un gráfico relacionado con el texto.
4. Escribe un texto metafórico con contenido matemático

Ejemplo 12. Las gráficas muestran cuatro carreteras del país. Elabore un escrito en el cual las analice ¿Cuál de ellas es más transitable? ¿Cuál se puede reparar?.



16.7. CONCLUSIÓN

Buscar metáforas para mejorar el entendimiento es como buscar amigos para fortalecer la amistad. En ambas situaciones hay que ser selectivos y trascender un código, compartir un rasgo semántico para mejorar nuestras relaciones en el mundo y con el mundo, con la ciencia y con la vida. Entonces podemos abrazar la inteligencia al encontrar la metáfora que ayuda, que embellece, que da significado a nuestra actividad cognitiva.

Al desarrollar el pensamiento metafórico se está potenciando una importante herramienta para el hacer matemático, descuidado en las aulas de clase; la imaginación como recurso de construcción de conocimientos matemáticos. Muchos problemas interesantes de la matemática han surgido de la imaginación, de la fantasía creada desde el escritorio o desde la realidad misma.

La historia ha mostrado en múltiples ocasiones la importancia del pensamiento metafórico en el pensamiento científico, hasta el punto de haber establecido analogías que sin ellas no hubiera sido posible tener acceso a las teorías científicas.

También nos parece que la educación matemática, por sus características simbólicas, se desconecta mucho de la realidad, ignorando, en muchas ocasiones que *"el conocimiento de lo real es una luz que siempre proyecta alguna sombra"* (Bachelard, 1987, p.15). El espíritu científico viaja de lo concreto a lo abstracto y tanto en ciencias como en matemática *"el pensamiento científico es arrastrado hacia construcciones más metafóricas que reales"* (Julián de Zubiría, 1997, p.7)

Impreso por



EDITORIAL AIRES LITOGRÁFICOS E.U.
Tels. 254 2885 - 254 2785


"ADIDA 50 AÑOS EDUCANDO
AL FRAGOR DE LAS LUCHAS
DEL MAGISTERIO"
1951 - 2001
Pelikan micropunta
EL CEID - ADIDA, UN ESPACIO
DE REFLEXÍON PEDAGÓGICA E
INVESTIGATIVA AL SERVICIO DE
LA COMUNIDAD EDUCATIVA