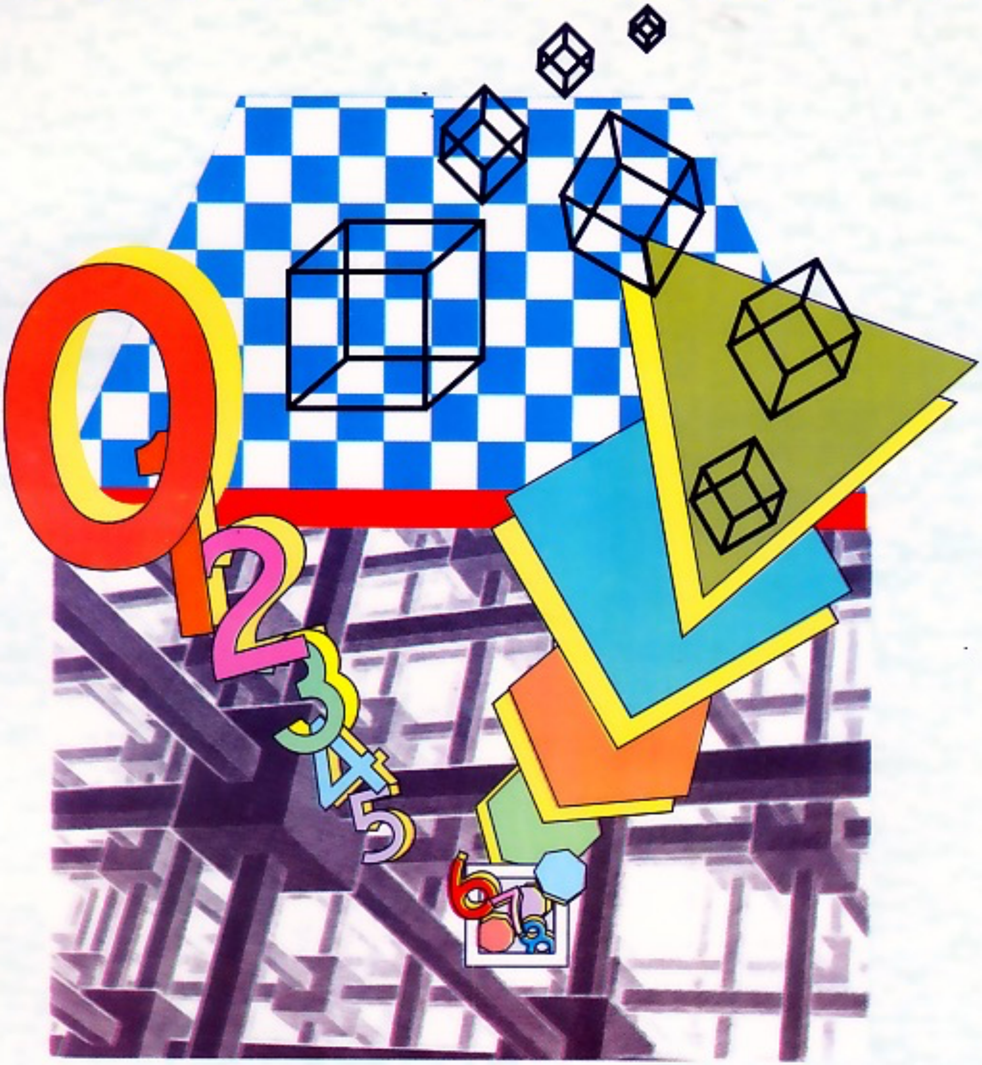
# LECCIONES DEL ÁREA DE MATEMÁTICAS NÚMERO DOS





CEID ADIDA

Centro de Estudios e Investigaciones Docentes

# LECCIONES DEL ÁREA DE MATEMÁTICAS
# NÚMERO DOS

CEIDADIDA

Centro de Estudios e Investigaciones Docentes

# LECCIONES DEL ÁREA DE MATEMÁTICAS
# NÚMERO DOS


ERASMO ANTONIO PUERTA GÓMEZ

Coordinador del Área de Matemáticas

**EQUIPO PEDAGÓGICO**

JORGE CARDEÑO ESPINOSA

LUZ AMÉRICA FERNÁNDEZ ZEA

CARLOS ENRIQUE PINO GUERRA

RUBÉN DARÍO HENAO CIRO

DIEGO LEÓN CORREA ARANGO

HERNÁN DARÍO ORTIZ ALZATE

LUIS GONZAGA DE JESÚS RESTREPO RAMÍREZ

JUAN SEBASTIÁN MENA MOSQUERA

MÓNICA PATRICIA MEJÍA COBALEDA



Medellín

Agosto de 2002

®CENTRO DE ESTUDIOS E INVESTIGACIONES DOCENTES
CEID – ADIDA
ÁREA DE INVESTIGACIÓN DE MATEMÁTICAS

ISBN____________________

JORGE CARDEÑO ESPINOSA

EQUIPO PEDAGÓGICO

Primera Edición: Agosto de 2002
1000 Ejemplares

Diseño de Carátula:Diego León Correa Arango
Digitación: Nazareth Devia - Jorge Cardeño Espinosa
Diseño y Diagramación de interiores: Emely Ardila Benitez

**Comité Técnico de Revisión:**

Jorge Cardeño Espinosa
Erasmo Antonio Puerta Gómez
Coordinador Área de Matemáticas. CEID – ADIDA
Luz América Fernández Zea
Hernán Darío Ortiz Alzate
Diego León Correa Arango
Rubén Darío Henao Ciro
Luis Gonzaga de Jesús Restrepo Ramírez
Mónica Patricia Mejía Cobaleda
Luis Alonso Londoño Zapata
Secretario de Asuntos Pedagógicos y Educación Sindical
ADIDA

Impreso y hecho en Colombia/ printed and made in Colombia.
En: Editorial Aires Litográficos E.U.
Telefax: 254 3431 y 254 2785


CEID-ADIDA. Tel. 2291020 Fax. 2291032
E- mail: adida@epm.net.co

*Las abejas..., en virtud de una cierta intuición geométrica..., saben que el hexágono es mayor que el cuadrado y que el triángulo, y que podrá contener más miel con el mismo gasto de material".*

*Papus de Alejandría*

*"La geometría es una ciencia del conocimiento del saber, pero no de lo que está sujeto a la generación y a la muerte. La geometría es una ciencia de lo que siempre se es".*

*Platón*

*"Comprender las cosas que nos rodean es la mejor preparación para comprender las cosas que hay mas allá".*

*Hipatia*

*"Se puede afirmar absolutamente que la historia de las ciencias es la ciencia misma. Aquello que se posee no puede reconocerse verdaderamente mientras no se haya reconocido lo que poseyeron otros antes que nosotros"*

*J. W. Goethe*

*"Ni la contradicción es indicio de falsedad, ni la falta de contradicción es indicio de verdad"*

*Blaise Pascal*

## "TABLA DE CONTENIDO"

Pág.

Pág.

Pág.

Pág.

## PRESENTACIÓN

*La Junta Directiva de la Asociación de Institutores de Antioquia les presenta el Texto Lecciones del área de matemáticas, número dos en el cual se recogen en forma sistemática las experiencias de aula de los educadores durante los años 1999 a 2002.*

*Este esfuerzo, a manera de memoria histórica de lo que es la elaboración y construcción teórica de los docentes del área, se realiza con el propósito de avanzar y ganar terreno en la consolidación de los equipos base de investigación de cada una de las áreas disciplinarias con las cuales se trabaja hoy el plan de estudios de las instituciones educativas del país.*

*La inferencia y el ejercicio de producción del texto demuestra una vez más que los maestros y maestras sí podemos hacer texto la palabra, aportando elementos teóricos para la consolidación del currículo pertinente, contextualizado y territorial, el cual nos anunció la Ley General de la Educación.*

*La producción teórica acá propuesta es el resultado del trabajo de varios docentes que se han colocado como meta el pensar y reflexionar sobre esta disciplina del conocimiento, para abordar e interpretar los fenómenos naturales y las leyes científicas para una mejor explicación de las aplicaciones tecnológicas de este el Siglo de la Inteligencia.*

*El mérito del texto radica esencialmente en los tiempos que hoy los docentes dedican no sólo al trabajo con sus estudiantes y a la producción teórica de lo que hacen con ellos. Que mejor muestra de lo que debe ser la verdadera valoración de los maestros, publicar sus pensamientos y preocupaciones colectivas de trabajo lento pero firmemente pensado; en esto radican nuestras* *distancias con aquellos que piensan que para valorar es imperativo medir y sancionar.*

*De esta forma se puede efectivamente construir comunidad educativa y contribuir al mejoramiento de la calidad de la educación pública estatal.*

*A los autores y a los educadores les manifestamos sinceramente que pueden tener la certeza que siempre podrán contar con la Junta Directiva de la Asociación de Institutores de Antioquia para reivindicar no sólo las luchas por la defensa de la educación pública estatal sino también la producción de los maestros que dignifican nuestra labor y engrandecen el quehacer de la pedagogía.*

*Quisiera finalizar llamando la atención sobre lo que no hacen muchos dirigentes: valorar y reivindicar a los docentes como personas admirables que están al frente de estas y muchas otras experiencias.*

*Ellos, los maestros, los que construyen el tejido social, los que alimentan la historia reciente, los que construyen la nacionalidad, a los que no se les otorgan premios internacionales ni se les felicita en público, son los que verdaderamente están, desde las aulas, construyendo la patria y contribuyendo a que la niñez y la juventud elaboren sus proyectos de vida.*

*En la sociedad colombiana no existe ninguna forma de reconocimiento para los maestros y profesores que, en las aulas, se consagran a la consolidación de nuestra nación; es por ello que resaltamos la elaboración y producción de los maestros.*

***JUNTA DIRECTIVA***
***LUIS ALONSO LONDOÑO Z.***
***SECRETARIO DE ASUNTOS PEDAGÓGICOS Y EDUCACIÓN SINDICAL***

## AGRADECIMIENTOS

Al Director del CEID-ADIDA Jorge Cardeño Espinosa, autor del proyecto de investigación de Matemáticas 2001-2002, presentado a la Secretaría de Educación para la Cultura de Antioquia SEDUCA, organismo gubernamental que de manera directa entró a participar en la cofinanciación del presente trabajo, el cual se logró concretar en el libro Lecciones del Área de Matemáticas, Número Dos.

También presentamos nuestros agradecimientos sinceros a la Secretaría de Educación Municipal de Medellín EDÚCAME, por el apoyo brindado en este proceso de investigación y la concreción de la publicación del presente texto.

En éste libro, se dan a conocer resultados de investigación y experiencias significativas a manera de intervención pedagógica en el aula, producto de la dedicación de un grupo de maestros oficiales, que con su esfuerzo y capacidad profesional, ofrecen al magisterio antioqueño y a la comunidad educativa nuevas didácticas en el área de Matemáticas que favorezcan el proceso de enseñanza-aprendizaje de ésta ciencia en los distintos contextos escolares.

Fraternalmente,

ERASMO ANTONIO PUERTA GÓMEZ
Coordinador Área de Matemáticas
2002

# ¿CÓMO SE ELABORAN CONCEPTOS MATEMÁTICOS?

LUZ AMÉRICA FERNÁNDEZ ZEA

MEDELLÍN
2002

## LA FORMACIÓN DE CONCEPTOS MATEMÁTICOS

El objetivo del presente trabajo es ofrecerle a los docentes, bien sea de primaria o secundaria, algunos elementos teóricos respecto a la formación de conceptos matemáticos.

Se hace énfasis en el proceso metodológico para su elaboración y asimilación, en la cual se resaltan aquellas acciones que permiten verificar si el alumno se ha apropiado de dicho concepto.

A su vez, se presentan ejemplos de formación de conceptos en la asignatura de Trigonometría.

Esta propuesta se extiende a todos los campos del saber matemático, ya que sin la necesaria fundamentación teórica, se dificulta la comprensión de los diferentes conceptos matemáticos y por lo tanto, no se aportaría para un aprendizaje significativo.

AUTORA
LUZ AMÉRICA FERNÁNDEZ ZEA
Magíster en Didáctica de las Matemáticas
IPLAC, CUBA
Docente de la
Escuela Normal Superior de Medellín

## 1. ¿CÓMO SE ELABORAN CONCEPTOS MATEMÁTICOS?

"LOS MAESTROS SE HAN PREOCUPADO
POR AQUELLO QUE SE APRENDE ........
OLVIDÁNDOSE DE CÓMO APRENDEN
LOS ALUMNOS"
IAN SELMES

### 1.1 ¿Qué se enseña en la matemática?

La respuesta a este interrogante permite ampliar un poco la visión que manejamos los docentes acerca de qué conocimientos se enseñan en la Matemática.

En la Matemática se enseñan conceptos, proposiciones y procedimientos.

De los anteriores, se hará referencia a los conceptos. Un concepto es la idea o reflejo mental que se tiene de un objeto o clase de objetos, sobre la base de sus características esenciales o "el concepto es una forma lógica que nos señala con toda claridad las propiedades de las cosas y sus límites" (Huerta. 1984, p.41)

Al analizar la anterior definición, se encuentra que el concepto es una forma lógica, es decir, una manera de manifestarse el pensamiento, lo cual permite concluir que los conceptos están íntimamente relacionados con el pensamiento, ya que una de las formas de éste reflejarse es por medio de los conceptos.

De modo que al expresar un concepto se debe transmitir la idea, tomada como el reflejo mental, que se tiene del objeto con base en sus características esenciales o invariantes.

Las características de un concepto permiten establecer relaciones entre ellos, es decir, si a un concepto determinado se le aumentan o se le disminuyen características entonces se generan otros nuevos conceptos.

Por ejemplo: analicemos las características del concepto de trapecio: cuadrilátero que tiene dos de sus lados paralelos; si le agregamos que los otros dos lados también son paralelos, se obtiene un nuevo concepto que es el de paralelogramo; si a este concepto le agregamos el ser equilátero solamente, obtendríamos otro concepto que es el de rombo; ahora si al concepto de paralelogramo se le hubiera agregado ser equiángulo, volvemos a encontrar otro nuevo concepto, que es el de rectángulo; ahora si a este nuevo concepto se le aumenta la característica de ser equilátero, se obtendrá el concepto de cuadrado.

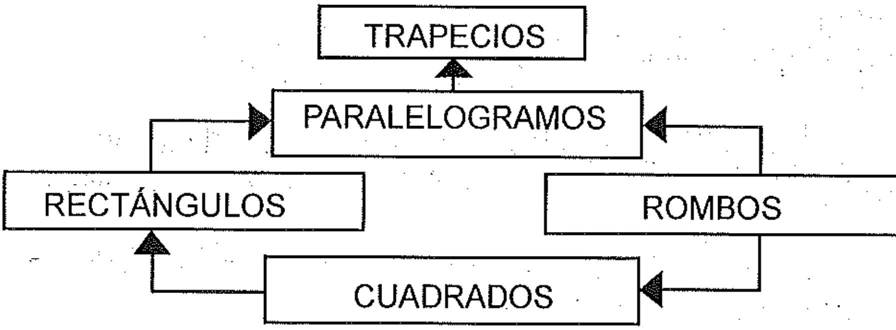
Lo anterior, nos posibilita hablar de conceptos superiores, subordinados (o subconceptos) y colaterales como lo plantea Werner Jungk.

Los conceptos superiores se originan al suprimir características esenciales al concepto inicial.

Los conceptos subordinados surgen al añadir características esenciales al concepto inicial.

Los conceptos colaterales son los que no tienen en común ninguna característica esencial y tienen el mismo concepto superior.

Lo anterior se puede visualizar mejor por medio de un diagrama lineal o de Hesse, para lo cual se retomará el ejemplo anterior, sobre trapecios.




En este diagrama, el conjunto o conjuntos que estén en un nivel inferior está o están contenidos en el conjunto o conjuntos que estén en el nivel superior y que estén unidos mediante una línea. En él se puede observar que el concepto de cuadrado es un subconcepto de los conceptos de rectángulo y rombo (todo cuadrado es rectángulo y es rombo, pero no al revés); a su vez éstos conceptos son subconceptos del concepto de paralelogramo y este es subconcepto del concepto superior que es el de trapecio.

Con los conceptos se pueden realizar operaciones lógicas, como la de definir.

Tanto el concepto como su definición guardan una estrecha relación, pero no son lo mismo.

La definición es el resultado del acto de definir, es decir, el reflejo verbal y escrito que se hace del concepto.

El acto de definir puede desarrollarse como una habilidad, ya que está constituida por un sistema de operaciones que conducen a la elaboración de la información, a la asimilación, uso, expresión y aplicación de conocimientos.

La habilidad de definir se debe comenzar a desarrollar desde los primeros años de vida escolar, teniendo presente que las definiciones de conceptos tienen diferentes niveles de profundidad, según el desarrollo de los alumnos.

Si se desea formar la habilidad para definir, se deben tener en cuenta las siguientes etapas, propuestas por Wolfang Zillmer:

1. A partir de la observación, enseñar a determinar las características de los objetos.

2. A partir de las características y mediante la comparación, en primera instancia de dos objetos, los cuales se irán aumentando paulatinamente, lograr que los alumnos identifiquen que entre los objetos hay características que son iguales y otras que son diferentes.

3. Distinguir entre todas las características, las esenciales, como aquellas que no se pueden cambiar ni desaparecer porque el objeto dejaría de ser lo que es, de ahí que son necesarias. Para lograr esto es recomendable trabajar primeramente con objetos sencillos.

4. Por último, se debe procurar que el alumno tenga contacto con objetos que le sean bien conocidos, para que logre reconocer aquellas características que son necesarias y suficientes.

Pero al trabajar un concepto, no necesariamente se debe definir. Se define cuando los alumnos han alcanzado un adecuado nivel de desarrollo que les posibilite apreciar las diferentes propiedades; en ningún momento se trata de que las memorice si no de que aprenda a trabajar con ellas, es decir, mediante la descripción se enuncien las propiedades, que con la comparación puedan diferenciar cuáles son iguales o generales y como consecuencia de un análisis puedan determinar las esenciales y por qué.

Cuando el concepto no se define se debe realizar una descripción explicativa, es decir, que los alumnos conozcan todas las características que lo identifican, pero no una definición explícita de él; en este caso se habrá hecho una introducción al concepto.

Es el profesor quien, de acuerdo con el programa de enseñanza, determina si el concepto a trabajar debe ser definido o solamente requiere una explicación descriptiva. Por ejemplo el concepto de "número" en la básica primaria, no se define, sólo se explica; lo mismo ocurre con el concepto de "límite" en el grado undécimo, se introduce el concepto pero no se define.

No se trata de aprender de memoria conceptos a partir de las definiciones que dé el profesor o el libro, si no del análisis y la comprensión que se tenga de las características que lo integran; sólo de esta forma se contribuirá al logro de un aprendizaje significativo.

"Cuando un aprendizaje es significativo para el alumno, resuena en su experiencia vital, le habla y le llega como si fuera el regalo que esperaba hacía tiempo". (Flórez . 1999, introducción).

Al hablar de aprendizaje significativo, nos remitimos inmediatamente a Ausubel; quien en su teoría se ocupa de los procesos de aprendizaje/enseñanza de los conceptos científicos a partir de los conceptos previamente formados por el niño en su vida cotidiana.

Un aprendizaje es significativo cuando la nueva información logra incorporarse a la estructura de conocimientos del alumno. Esto se da cuando se inserta de manera no arbitraria a los conocimientos previos del alumno; además se asimila el aprendizaje como un proceso continuo, progresivo e integrador, que se logra en la medida en que el sujeto interactúe con los otros sujetos en su medio.

Se evidencia un aprendizaje significativo cuando:

- El alumno no olvida fácilmente lo que se le enseña. En este caso hay una retención duradera de la información, memoria a largo plazo: entendida esta como la parte del sistema de memoria que almacena información que antes fue producto de la memoria a corto plazo (llamada por algunos psicólogos como memoria "activa") con el fin de recuperarla y emplearla cuando sea necesario.

- El alumno manifiesta un esfuerzo por ligar los nuevos conceptos ya aprendidos.

- Hay una aplicación adecuada de lo aprendido: para explicar los fenómenos de la naturaleza, el alumno hace una metacognición, tomada como el grado de conciencia que tiene el alumno de sus formas de pensar y de los contenidos mismos.

- Aporta explicaciones de los fenómenos de acuerdo con el contexto de donde se espera que estos sean definidos.

- Transfiere la nueva información a otros contextos diferentes de aquel en que le fue enseñado.

Para que se produzca un aprendizaje significativo es necesario que:

- El conocimiento que se vaya a presentar sea potencialmente significativo, o sea que se pueda asociar claramente con sus conocimientos anteriores. Un conocimiento posee significado lógico o potencial si sus elementos están organizados y no sólo yuxtapuestos.

- Haya predisposición para el aprendizaje significativo: ya que comprender requiere siempre de un esfuerzo, el alumno debe tener algún motivo para esforzarse. Esta predisposición depende en parte de la significatividad potencial que tengan los materiales para el alumno y en parte también el tipo de práctica o sesiones de repaso, de las tareas, temas de debate y actividades que se elijan para la clase.

En su teoría del aprendizaje significativo (1968), Ausubel sostiene que la persona que aprende y recibe información verbal, la vincula a los acontecimientos previamente adquiridos y, de esta forma, da a la nueva información, así como a la información antigua, un significado especial.

El profesor es quien dirige el proceso de enseñanza, por lo tanto es el mayor responsable de que la enseñanza sea efectiva para que se genere un aprendizaje significativo y dicha efectividad dependerá de la forma como transmita los conocimientos.

Veamos entonces, cómo se elaboran los conceptos matemáticos, de modo que se logre un buen aprendizaje de ellos.

## 1.2. ELABORACIÓN DE CONCEPTOS MATEMÁTICOS

La elaboración de conceptos es un proceso mediante el cual se conocen las características esenciales de un objeto, relación u operación, de modo que el alumno las identifique y las utilice correctamente en distintas situaciones, permitiendo de esta forma ampliar la extensión de dicho concepto; se desea enfatizar en algo mencionado anteriormente, no se trata de memorizar, ni las características esenciales, ni la definición.

Se tomará como base el proceso de elaboración de un concepto, planteado por Werner Jungk, en el cual se distinguen tres momentos:

### 1.2.1. Consideraciones y ejercicios preparatorios:

Se trata de familiarizar a los alumnos con aquellos fenómenos que muchas veces conocen parcialmente antes de haber sido trabajados en la clase, que han sido adquiridos de su entorno mediante el lenguaje común y que están relacionados con el nuevo concepto.

### 1.2.2. Formación del concepto:

Es el proceso que se inicia desde la creación del nivel de partida hasta la definición o explicación del concepto, teniendo en cuenta la motivación, la orientación hacia el objetivo y la separación de las características comunes y no comunes.

### 1.2.3. La asimilación o fijación del concepto:

Es la parte del proceso a través de la cual se contribuye a lograr la apropiación del conocimiento por parte de los alumnos. Se pretende con ésta mayor solidez, durabilidad y aplicación de los conocimientos; además, desarrollar y perfeccionar hábitos, habilidades y capacidades matemáticas. Esto se logra mediante ejercitaciones, profundizaciones, sistematizaciones y aplicaciones.

Lo fundamental en la formación de un concepto es la identificación de sus características necesarias y suficientes, lo cual influye en que su asimilación sea correcta.

## 1.3. VÍAS METODOLÓGICAS PARA FORMAR UN CONCEPTO

Desde el punto de vista de la teoría del conocimiento, se diferencian dos vías para formar un concepto:

**1.3.1. Vía Inductiva:** en ésta, la definición del concepto se elabora paso a paso. Se parte de ejemplos y explicaciones que faciliten la búsqueda de las características comunes y que permitan identificar las características esenciales.

Al utilizar esta vía se debe tener en cuenta la siguiente secuencia:

1. Asegurar el nivel de partida.
2. Motivar.
3. Orientar hacia el objetivo.
4. Observar varios objetos representantes y no representantes del concepto a trabajar.
5. Comparar los objetos para determinar las características comunes y no comunes.
6. Establecer un sistema de características generales y específicas.
7. Formular la definición o explicación.
8. Realizar consideraciones perspectivas o retrospectivas, o sea, analizar el procedimiento desarrollado para que el alumno determine si se logró solucionar la situación planteada en la motivación.

**1.3.2. Vía Deductiva**: en esta se parte de la definición del concepto y mediante el análisis de ejemplos se descubre el contenido y la extensión del concepto.

1. Asegurar el nivel de partida.
2. Motivar.
3. Orientar hacia el objetivo.
4. Definir el concepto y analizar bien sus partes.
5. Plantear ejemplos y contraejemplos del concepto y analizarlos de acuerdo con el contenido.
6. Analizar cuál sería la consecuencia si se omitiera alguna de estas características.

Para determinar qué vía utilizar en la elaboración de un concepto es necesario tener en cuenta si éste se va a definir o sólo se va a realizar una introducción de él.

Debe tenerse en cuenta que hay muchos conceptos de los cuales no se puede disponer de objetos representantes, debido a que al inicio de su formación son desconocidos, como sucede con los conceptos de operaciones y de relaciones. Para este caso, se modifica la vía inductiva, construyendo los objetos.

Se habla entonces de una vía constructiva, que tiene los mismos pasos de la inductiva, pero cambiando el paso cuatro por: buscar un principio conocido que permita construir los objetos correspondientes y construirlos.

Existen también otros conceptos, para los cuales su elaboración se facilita más a partir de la definición, por ejemplo, un signo matemático en cuanto a su significado o a las reglas que determinan su aplicación.

Algo importante en la formación de conceptos es determinar el momento en que se debe mencionar la nueva palabra o frase conceptual que representa el concepto a formar. Cuando este es conocido por los alumnos, porque lo han oído mencionar en clases anteriores o en su vida cotidiana, se nombra en la motivación y en la orientación hacia el objetivo; y en este caso se logra una comprensión más exacta del concepto, debido a que el término lo han conocido en contextos y relaciones diferentes.

Para formar el concepto como una acción mental, se debe tener en cuenta que ésta se da a partir de la interiorización de acciones con objetos reales. Dichas actividades las debe planificar y dirigir con exactitud el profesor.

Según el psicólogo Galperin (Apuntes citados por Jungk, W. En Conferencias sobre Metodología de la enseñanza de la Matemática.2, p. 35), para formar una acción mental se deben tener en cuenta las siguientes etapas:

1. Acción mental en forma material o materializada: es decir, la acción debe ser externa y realizarse con objetos concretos, si es posible, de lo contrario utilizar modelos con esquemas o representaciones escritas.

2. Acción en forma de lenguaje externo para sí: en esta etapa se eliminan los objetos concretos y los esquemas o representaciones escritas. Consiste en la formulación oral que hace el alumno en forma consciente y precisa de cada paso; en el caso específico de la formación de conceptos, se refiere a la formulación oral de las características esenciales de éstos. Dado que en esta etapa el alumno realiza las actividades oralmente, le permite al profesor controlar el desarrollo y resultado de la acción y a su vez corregir los errores.

3. Acción en forma de lenguaje interno: en esta etapa el alumno realiza toda la acción mentalmente y sólo comunica el resultado. Aquí termina la interiorización de la acción y el resultado debe ser una acción mental automatizada, reducida y generalizada.

En cada una de estas etapas, la formación de conceptos posibilita adiestrar el pensamiento lógico de los alumnos, mediante la formulación verbal y correcta de las propiedades y de las relaciones lógicas entre ellas.

Antes de ejemplificar la elaboración de conceptos es necesario mencionar la importancia que tiene la conversación de clase, dirigida por el profesor, el cual debe: tener dominio y seguridad del concepto a elaborar, no olvidar el objetivo que desea que sus alumnos alcancen, ser claro al formular las preguntas, valorar rápidamente la respuesta dada por el alumno, en el caso en que sea necesario corregir, emplear contraejemplos en la medida de lo posible, orientar a los alumnos a valorar las respuestas de sus compañeros.

Lo anterior permite la participación activa del alumno, contribuyendo a desarrollar en él capacidades para interpretar, proponer y argumentar.

## 1.4. ELABORACIÓN DEL CONCEPTO "RAZÓN TRIGONOMÉTRICA SENO DE UN ÁNGULO" MEDIANTE LA VÍA INDUCTIVA.

### 1.4.1. Formación del Concepto.

**1.** Es indispensable que el profesor parta de tener en cuenta aquellos conocimientos y capacidades previos, que los alumnos deben poseer y que son necesarios para el nuevo concepto que se va a formar.

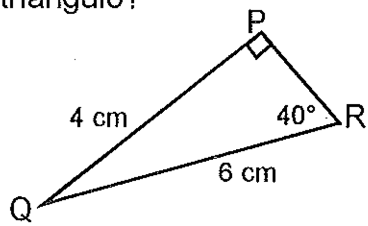
Por ejemplo, en el caso de la razón trigonométrica (RT) seno de un ángulo, los conocimientos previos o nivel de partida son: el teorema de Pitágoras, el concepto y la definición de la función trigonométrica seno de un ángulo, analizados en la circunferencia unitaria y en la de radio R (en el caso en que las funciones trigonométricas se hayan enseñado antes que las razones), el concepto de razón y los conceptos de cateto adyacente y cateto opuesto de un ángulo agudo en un triángulo rectángulo.

Es importante que el profesor verifique si los alumnos poseen los conocimientos anteriores, de poco sirve averiguar si se les enseñó en el grado anterior si no se tiene la seguridad del dominio que los alumnos tengan de dichos conocimientos; aquí se está haciendo referencia al Aseguramiento del nivel de partida.

Este aseguramiento se hace mediante diferentes actividades como: tareas propuestas para la casa, ejercicios desarrollados en clase, preguntas.

Para la presente elaboración se pueden plantear ejercicios como:

a. Calcular el valor de las siguientes funciones trigonométricas:
   **a**. sen 180º        **b**. sen 90º        **c**. sen (-270º)
b. Dado el triángulo ABC, rectángulo en B, si ∢BCA = 35º, ¿cuánto mide el ∢BAC?
c. ¿Cuál es la medida del cateto adyacente al ángulo de 40º, en el siguiente triángulo?




d. Calcular el área y el perímetro de un triángulo rectángulo, cuyos catetos miden 3 cm y 4 cm.
e. Expresar en forma de razón:

| | | | |
|---|---|---|---|
| **a**. 3 es a 8 | **b**. 6 es a 0.5 | **c**. -8 es a 4 | **d**. 100 es a 28 |

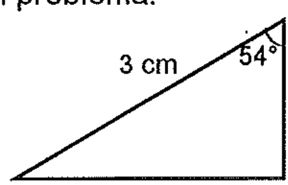
Si después de expuestas las soluciones de estos ejercicios, por parte de los alumnos, el profesor se percata de la falta o poco manejo que se tiene de ellos, entonces debe activar dichos conocimientos mediante la planificación de una serie de actividades que permitan resolver las dificultades halladas.

**2.** Se deben crear motivos para que el alumno tome conciencia de la necesidad de aprender algo nuevo y de cómo lo logra. Se hace referencia a la <u>motivación</u>, la cual se presentará si el profesor mediante acciones bien dirigidas (planteamiento de situaciones problemáticas), crea motivos en el alumno para el nuevo aprendizaje, las cuales se encaminarán a la necesidad de obtener, no sólo un nuevo concepto, si no también a la forma cómo encuentra la solución.

Para el concepto que se viene formando se realizará una motivación práctica o extramatemática mediante el planteamiento del siguiente problema: "para cambiar la bombilla de una lámpara que está en un poste perpendicular al piso, se apoya al poste una escalera que mide 3 m y forma con este un ángulo de 54º. Calcular la distancia a la que se encuentra la base de la escalera de la base del poste".

Utilizando la conversación en clase, se conduce al alumno a darse cuenta de que los conocimientos que posee no le son suficientes para resolver el problema, esto se realiza a través de orientaciones y preguntas como:

- Coge un palo o la escoba y representa la situación planteada en el problema.
- Represéntala gráficamente en tu cuaderno (a la vez se realiza el gráfico en el tablero)
- ¿Qué figura geométrica forma la escalera con el piso y el poste?
- ¿Qué clase de triángulo es? En este momento se realiza el gráfico del triángulo solamente, a un lado del otro que se hizo para representar el problema.




- ¿Qué representa la escalera, el poste y el piso, en el triángulo obtenido?
- ¿A cuáles les conoces la medida?
- ¿Qué piden averiguar en el problema?
- ¿A qué lado del triángulo corresponde lo que piden?
- De acuerdo con lo que sabes, ¿qué se utiliza para hallar el lado desconocido de un triángulo rectángulo?

- ¿Lo podrías utilizar en este caso, para calcular lo pedido? ¿Por qué?
- ¿Qué otro conocimiento tienes que relacione ángulos y lados?

3. Hacer conscientes a los alumnos de la carencia de sus conocimienmientos, lo cual no les permite resolver la situación planteada de modo que se les pueda orientar hacia el objetivo que se propone alcanzar.

El aprendizaje será mayor en la medida en que los alumnos sepan, el para qué van a realizar determinadas acciones; es en este momento donde el profesor debe indicarles el nuevo conocimiento que van a adquirir.

De acuerdo con el ejemplo que se viene presentando se les dice a los alumnos que van a aprender un nuevo concepto, llamado "Razón Trigonométrica seno de un ángulo agudo" el cual le permitirá posteriormente darle solución al problema planteado. Se dice el nombre del nuevo concepto, si los alumnos ya lo conocen, en este caso se dice porque ellos ya conocen la función trigonométrica seno.

El profesor debe reconocer que lo que se ha realizado es la Orientación hacia el objetivo.

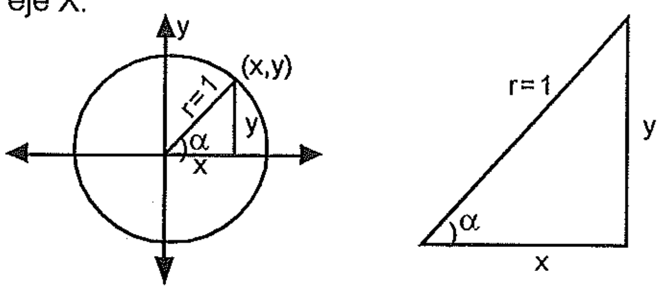
4. Establecer comparaciones entre objetos representantes y no representantes del concepto a formar, que permitan determinar las propiedades generales y específicas que lo diferenciarán de otros.

El nuevo concepto se debe elaborar a partir de las reflexiones que realicen los alumnos a través de una buena participación que les permita ir articulando los conocimientos anteriores con el nuevo conocimiento.

Esta fase es la fundamental del proceso de enseñan aprendizaje, ya que es donde los alumnos adquieren el nue conocimiento y de la forma como se realice este proceso depen que el nuevo conocimiento se adquiera estructurada sistémicamente.

En el ejemplo que se viene trabajando, se sabe que los alumn ya tienen el concepto de la función trigonométrica seno de ángulo, definida en una circunferencia unitaria y de radio r, por cual se trabajará el nuevo concepto por analogía con dicha funció

Se graficará en el tablero la circunferencia unitaria con el ángu y el triángulo que se genera a partir de la proyección del rad sobre el eje X.




Utilizando los gráficos se orienta el siguiente diálogo:

- ¿Cómo es el triángulo que se forma en la circunferenc unitaria? ¿Por qué?
- ¿Cómo se definió la función trigonométrica seno de un ángu en la circunferencia unitaria?
- ¿Será posible expresar el sen $\alpha$ como una razón?
- ¿Cuál es el denominador de la y?
- ¿Será, entonces correcto escribir sen $\alpha = \frac{y}{r}$ , por qué?
- Si la circunferencia es de radio r y se traza su proyecció sobre el eje X, ¿qué clase de triángulo se forma?
- ¿Cómo son los triángulos que se forman? ¿Por qué?

- ¿A qué será igual el sen $\alpha$ en la circunferencia de radio r?
- Como se puede ver, la función trigonométrica seno de un ángulo, en una circunferencia de radio r, se puede escribir como sen $\alpha = \frac{y}{r}$
- Ahora, con relación al triángulo rectángulo que se forma en la circunferencia, ¿qué cateto del triángulo representa la y?
- ¿Qué representa r en el triángulo?.
- Podríamos entonces reemplazar en sen $\alpha = \frac{y}{r}$, la y y la r por lo que representan en el triángulo rectángulo, veamos:

$\boxed{\text{sen } \alpha = \frac{y}{r}}$ quedaría como $\boxed{\text{sen } \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}}$ $\boxed{\text{sen } \alpha = \frac{c.o}{h}}$

- De acuerdo con la expresión obtenida, mira los elementos que la componen,
- ¿En qué clase de triángulos se puede utilizar? ¿Por qué?
- ¿Qué operación aparece en la expresión?
- ¿Cómo se le puede llamar a esta expresión?
- ¿Entre qué lados del triángulo rectángulo, se estableció la razón?
- La única razón que permite relacionar en un triángulo rectángulo, uno de sus ángulos agudos con el cociente entre el cateto opuesto a dicho ángulo y su hipotenusa es la Razón Trigonométrica Seno.

**5.** Definir el concepto.

Como se dijo antes, no todo concepto se define, es el profesor y su colectivo quienes de acuerdo a muchas condiciones determinan o lo uno o lo otro. Para el caso de la razón trigonométrica seno de un ángulo, se escribe la definición en forma de ecuación: sen $\alpha = \frac{c.o}{h}$ en la cual se identifican sus dos componentes: sen $\alpha$ que es lo que se define y $\frac{c.o}{h}$ es lo que define a sen $\alpha$.

Luego para que los alumnos expresen esta definición con palabras, se les pregunta:

- ¿Qué es una razón trigonométrica?
- ¿Qué diferencia existe entre la función trigonométrica seno de un ángulo y la razón trigonométrica seno de un ángulo?

**6.** Al llegar a esta fase del proceso de formación del concepto, se defina este o no, el profesor debe invitar a los alumnos a reflexionar si el concepto encontrado permite darle solución al problema planteado en la motivación, el cual se recordará, se resolverá y por último se les guiará mediante preguntas, para que ellos recuerden cuál fue el procedimiento que se llevó a cabo para obtener el nuevo concepto. En este punto se hace referencia a las consideraciones retrospectivas sobre el proceso desarrollado.

Según el ejemplo se puede orientar el siguiente diálogo:

- ¿En qué clases de triángulo se puede utilizar la razón trigonométrica seno de un ángulo? ¿Por qué?
- ¿Cuál fue el problema planteado al principio?
  ¿Cuál fue la pregunta?
- ¿Crees qué con la razón trigonométrica seno de un ángulo puedes darle solución al problema planteado?
- Adelante, encuentra la respuesta.

El profesor estará interesado en que los alumnos aprendan a controlar los resultados de su trabajo. Se utilizaran las respuestas que sean incorrectas o incompletas para someter a la discusión dichos resultados.

Hasta aquí, sólo se han realizado dos momentos del proceso de elaboración del concepto Razón Trigonométrica seno de un ángulo: las consideraciones y los ejercicios preparatorios y la formación del concepto como tal.

Lo anterior, permite concluir que la formación de conceptos es diferente de la elaboración, para que ésta se dé hace falta el último momento o sea la asimilación o fijación del concepto; a lo cual se hará referencia a continuación.

### 1.4.2. Asimilación y fijación del nuevo concepto.

Se ha llegado aquí a la última fase del proceso de elaboración del concepto, para la cual los alumnos deben haber adquirido cierto conocimiento, el cual se debe fijar en ellos a partir de repasarlos, grabarlos en la memoria y comprenderlos en una forma más profunda.

En la asimilación de conceptos y definiciones los alumnos deben:

- Comprobar si un objeto representa o pertenece a un concepto dado, a partir de sus características esenciales.
- Dar ejemplos y contraejemplos de un concepto específico.
- Formular de diferentes formas la definición de un concepto.
- Ubicar el nuevo concepto en un sistema de conceptos conocidos, destacando el concepto superior, los subconceptos y los conceptos colaterales.

La asimilación del concepto se debe realizar por medio de acciones orientadas a identificar, realizar y aplicar el nuevo concepto.

La identificación de un concepto: consiste en determinar si un objeto o relación pertenece a un concepto determinado.

La realización de un concepto: trata de crear objetos o complementar o transformar los existentes o relacionarlos de modo que se originen representantes del concepto dado.

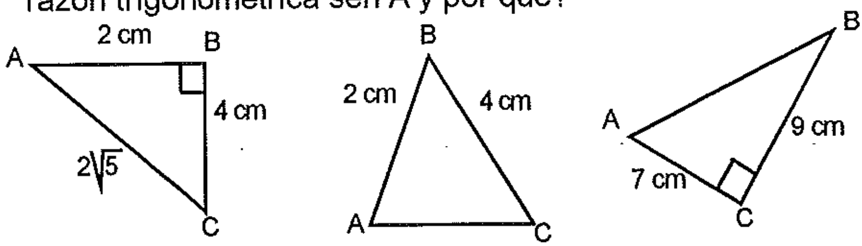
La aplicación de un concepto: consiste en utilizar correctamente el nuevo concepto en la resolución de ejercicios y problemas.

El buen resultado de la aplicación de un concepto está determinado por la calidad del ejercicio seleccionado, el cual debe conducir al alumno a realizar aplicaciones a partir de un pensamiento independiente y un trabajo creador.

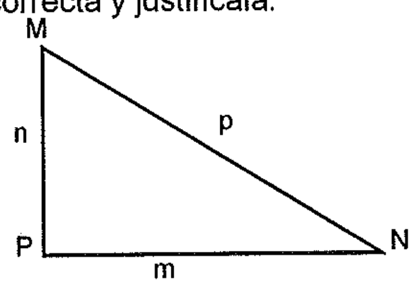
A continuación se mostrarán algunos ejemplos de estas actividades para la razón trigonométrica seno de un ángulo.

### 1.4.2.1. Identificación

1. ¿En cuáles de los siguientes triángulos se puede calcular la razón trigonométrica sen A y por qué?



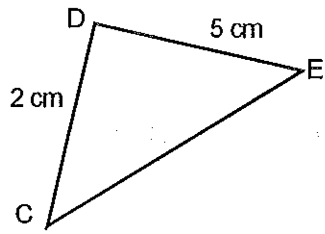

2. De acuerdo con el siguiente triángulo rectángulo en P, señala la respuesta correcta y justifícala.



$$\text{Sen } N = \frac{m}{p} \qquad \text{Sen } N = \frac{p}{n} \qquad \text{Sen } N = \frac{n}{p} \qquad \text{Sen } N = \frac{n}{m}$$

### 1.4.2.2. Realización

1. Calcula el sen E en el siguiente triángulo, rectángulo en D.




2. Sea el triángulo PQR, rectángulo en R y sea p, q y r los lados opuestos a los ángulos P,Q y R, respectivamente; con q = 12 cm y r = 13 cm. Calcular el valor de sen P y sen Q.

### 1.4.2.3. Aplicación

1. Resolver el triángulo ACB, rectángulo en C, si B = 24° y c = 30 cm; utiliza las tablas de las funciones trigonométricas.

2. Un camino tiene una inclinación de 12° con respecto a la horizontal. ¿Cuánto se debe caminar hacia arriba para alcanzar una altura de 40 m?

Luego de analizar la solución dada por los alumnos a los anteriores ejercicios se debe profundizar un poco más en este concepto, al preguntarles:

Si se conoce en un triángulo rectángulo, uno de los catetos y la hipotenusa, ¿qué se puede averiguar mediante la razón trigonométrica seno?

Esta pregunta debe conducir a la conclusión de que la razón trigonométrica seno de un ángulo también permite encontrar el valor de uno de los ángulos agudos del triángulo, utilizando para ello las tablas de las funciones trigonométricas y resolver el triángulo o sea hallar la medida de todos sus elementos: tres lados y tres ángulos.

Ahora veamos como se puede elaborar un concepto por medio de la vía deductiva, recordando que esta vía se diferencia de la inductiva en que se parte de la definición.

## 1.5. ELABORACIÓN DEL CONCEPTO "RAZÓN TRIGONOMÉTRICA COSENO DEL ÁNGULO" MEDIANTE LA VÍA DEDUCTIVA.

Para la elaboración de este concepto, se asume que la razón trigonométrica seno de un ángulo ya se enseñó.

**1.5.1. <u>Aseguramiento del nivel de partida</u>**: se aseguró el nivel de partida mediante los siguientes ejercicios:

1. Dado el triángulo ABC, rectángulo en B; si a = 3cm y c = 1cm. Halla el valor de Sen A y Sen C.

2. Si el triángulo MNP es rectángulo en N y p = 7 dm, m = 5 dm, n=$\sqrt{74}$ dm. Calcula el valor de los ángulos M y P.

3. En el triángulo CDE rectángulo en D; c=2 m, d=5 m, e=$\sqrt{21}$m; indica ¿cuáles de las siguientes expresiones representan la razón trigonométrica seno y por qué?

| | | | |
|---|---|---|---|
| a) sen C = $\frac{2}{5}$ | b) sen E = $\frac{2}{5}$ | c) sen C = $\frac{\sqrt{21}}{5}$ | d) sen E = $\frac{\sqrt{21}}{5}$ |

**1.5.2. Motivación** (intramatemática): Se propondrá el siguiente problema:

Dado un triángulo FGH, rectángulo en G; si F = 50º y g = 5cm, Hallar la medida del lado h, utilizando solamente a F y g.

A través de una conversación de clase, se invitará a los alumnos a buscarle la solución al problema planteado.

- Lee el problema.
- ¿De qué trata el problema?
- ¿A qué figura geométrica se refiere el problema?
- ¿Qué datos dan?
- ¿Qué piden?
- Realiza un gráfico que ilustre el problema.
- ¿A qué elementos del triángulo corresponden los datos dados?
- ¿Qué representa lo pedido con respecto al ángulo dado?
- ¿Se puede hallar la medida del lado h, empleando la razón trigonométrica seno y por qué?
- ¿Cómo se puede averiguar la medida del lado h?

Después de analizar con los alumnos las respuestas dadas a las anteriores preguntas, se les hará ver que los conocimientos que poseen no son suficientes para resolver el problema y que por lo tanto es necesario aprender algo nuevo.

**1.5.3. Orientación hacia el objetivo:** En este momento se les dirá a los alumnos, que van a aprender una nueva razón trigonométrica definida en un triángulo rectángulo, llamada coseno, que les permitirá solucionar el problema planteado y otros similares.

Se dará la siguiente definición: "En todo triángulo rectángulo, el coseno de uno de sus ángulos agudos es igual a la razón obtenida entre el cateto adyacente a dicho ángulo y la hipotenusa"

Luego se orientará una conversación, a partir de las siguientes preguntas:

- Lee la anterior definición.
- Escríbela simbólicamente. $\text{Cos } A = \frac{c.a}{h}$
- ¿La anterior expresión representa una razón trigonométrica?
- ¿Por qué es una razón trigonométrica ?
- ¿En qué clase de figura geométrica se puede utilizar y por qué?
- ¿Será igual a la razón trigonométrica seno del ángulo A?
- ¿En qué se asemeja a la razón trigonométrica seno de un ángulo?
- ¿En qué se diferencia de la razón trigonométrica seno de un ángulo?
- ¿Qué datos necesitas conocer, para poder utilizar la razón trigonométrica coseno de un ángulo?
- ¿Qué se puede hallar con la razón trigonométrica coseno de un ángulo y qué datos se tendrían que dar?

Veamos si con esta nueva razón trigonométrica se puede resolver el problema planteado al principio. Observa el gráfico que realizaste y trata de encontrar lo pedido.

Luego de que los alumnos lo realicen individualmente, se le pedirá a uno de ellos que lo explique, de modo que entre todos se pueda revisar la solución encontrada.

- ¿Cómo debe ser la medida del lado h, comparada con la del lado g?
- ¿Por qué?
- ¿Tiene sentido la respuesta encontrada?
- Si conoces la hipotenusa de un triángulo rectángulo y el cateto adyacente a uno de sus ángulos agudos, ¿qué podrías averiguar de él, empleando la razón trigonométrica coseno de un ángulo?

### 1.5.4. Asimilación y fijación del nuevo concepto

Se presentará algunos ejercicios que permitan fijar el nuevo concepto, a partir de la identificación, la realización y la aplicación.

#### 1.5.4.1. Identificación

1. Sea el triángulo IJK, rectángulo en J; si: i = 3cm, j = 3.6cm, k = 2cm. Señala la razón que representa el cos K y justifica tu respuesta:

| | | | |
|---|---|---|---|
| a) $\frac{2}{3.6}$ | a) $\frac{3.6}{3}$ | a) $\frac{2}{3}$ | a) $\frac{3}{3.6}$ |

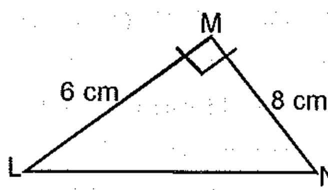
2. De acuerdo con el siguiente gráfico, une con una flecha, la razón trigonométrica de la izquierda con su respectivo valor de la derecha.

sen N = $\frac{6}{10}$

cos N = $\frac{8}{10}$

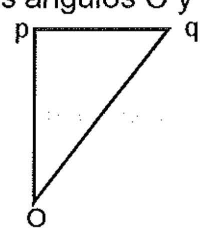
cos L = $\frac{6}{10}$

sen L = $\frac{8}{10}$




#### 1.5.4.2. Realización.

Sea el triángulo OPQ, rectángulo en P; halla en cada caso el valor de la razón trigonométrica coseno para los ángulos O y Q.




a) o = 2cm q = 6cm
b) p = 8cm o = 5cm
c) p = 10cm q = 6cm
d) o = 4cm q = 5cm

1.5.4.3. Aplicación.

1. En un parque dos jóvenes se encuentran separados una distancia de 180m. Si uno de ellos ve un globo elevado, exactamente arriba de él, y el otro lo ve con un ángulo de elevación de 63°. ¿Cuál es la altura del globo?

2. Resolver el triángulo ABC, rectángulo en B, si cos A = $\frac{3}{7}$

## BIBLIOGRAFÍA


- HUERTA IBARRA, JOSÉ. Organización Psicológica de las Experiencias de Aprendizaje. Ed. Trillas. México, 1984.
- JUNGK, WERNER. Conferencias sobre Metodología de la Enseñanza de la Matemática 2. Primera parte. Ed. De Libros para la Educación. Ciudad de la Habana, 1979.
- JUNGK, WERNER. Conferencias sobre Metodología de la Enseñanza de la Matemática . Ed. De Libros para la Educación. Ciudad de la Habana, 1979.
- Los Contenidos en la Reforma. Enseñanza y aprendizaje de conceptos, procedimientos y actitudes / Coll, César... (ét al.). Ed. Santillana. España, 1992.
- Metodología de la Enseñanza de la Matemática. Maestría en Didáctica de las Matemáticas / Almeida, Bernardino... (ét al.). Ed. Pueblo y Educación. La Habana - Cuba, 1992.
- ZILLMER, WOLFGANG. Complementos de Metodología de la Enseñanza de la Matemática. Ed. Libros para la Educación. Cuba, 1981.
- FERNÁNDEZ ZEA, LUZ AMÉRICA. Propuesta Metodológica para contribuir al desarrollo del Pensamiento Lógico mediante la formación de conceptos trigonométricos. (Tesis de Maestría). 2002.

# COMPRENSIÓN SIGNIFICATIVA DE LOS NÚMEROS ENTEROS Y SUS OPERACIONES

ORFA LUCÍA GIRALDO
LUIS GONZAGA DE JESÚS RESTREPO RAMÍREZ
CECILIA LONDOÑO SÁNCHEZ

MEDELLÍN 2002

## APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO DE LOS NÚMEROS ENTEROS Y SUS OPERACIONES

La propuesta es importante para el docente de sexto y séptimo grado, ya que se le ofrece una didáctica integral para organizar las actividades que le permitan acompañar a los estudiantes, en un aprendizaje más significativo del sistema de los números enteros.

El aprendizaje significativo se hizo a través de la estructuración de actividades, rastreando diferentes estados de complejidad conceptual que permite llegar a las relaciones matemáticas después de procesos intuitivos y reflexivos, diseñando problemas que se correspondan con los variados significados, que a nivel fenomenológico, tiene el sistema de los números enteros.


AUTORES:

Especialistas en la Enseñanza de las Matemáticas de la Universidad de Antioquia

Los Docentes

ORFA LUCÍA GIRALDO

Colegio Cristo Rey

LUIS GONZAGA DE JESÚS RESTREPO RAMÍREZ

Colegio San Vicente de Paul

CECILIA LONDOÑO SÁNCHEZ

Colegio La Paz

# 2. COMPRENSIÓN O SIGNIFICADO DE LOS NÚMEROS ENTEROS Y SUS OPERACIONES

## 2.1. INTRODUCCIÓN

El papel del maestro no es el de transmitir el conocimiento, sino el de propiciar los instrumentos para que el alumno lo construya, a partir de su saber previo y tender al establecimiento de "significados comunes", razón por la cual la comunicación y el aprendizaje se hallan íntimamente relacionados. Se hace necesario, entonces, que el maestro conozca primero, cuáles son los significados que utilizan los alumnos respecto al contenido escolar, cuyo aprendizaje quiere favorecer, y, esto se puede lograr, diseñando estrategias didácticas, fundamentalmente participativas.

Para nuestro propósito: favorecer la comprensión o significado del concepto de número entero y sus operaciones, diseñamos una situación - problema integrada que, además de permitir conocer los saberes previos del estudiante en cuanto al sistema de números naturales, permita construir el sistema de números enteros y facilite la comprensión algorítmica de las operaciones.

Se considera una situación - problema "como un espacio de interrogantes, frente a los cuales, el sujeto está convocado a responder y cuyo objetivo principal es desencadenar un aprendizaje" (Mesa, O. 1997, p.21).

## 2.2. ESTRATEGIA METODOLÓGICA

Es importante aclarar que tuvimos en cuenta, al diseñar la estrategia, los siguientes criterios, tomados como referentes generales para abordar situaciones - problema:

- La enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas debe ocurrir dentro de una concepción constructivista del conocimiento.

- La interacción entre el estudiante, el objeto a conocer y el docente, debe ser fuertemente participativa.

- El objeto de conocimiento (sistema de números enteros) no debe asumirse como un producto terminado, sino, plantearse como algo con posibilidades de profundización y ampliación.

- Los constructos matemáticos exigen, para ser interiorizados, de las capacidades de abstracción y generalización.

- Los contenidos temáticos deben organizarse, coherentemente, alrededor de objetos de conocimiento que potencialicen y faciliten variabilidad y riqueza de preguntas y problemas.

## 2.3. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

"Asumiendo que la razón humana, interpreta, codifica y construye el conocimiento en función de "sus" significados, habrá que adecuar la intervención educativa para favorecer en el alumno, la construcción de significados propios y pertinentes". (Barrón Ruiz, Ángela. 1989, p.305); el problema objeto de estudio, se formula a partir de los siguientes postulados:

**2.3.1.** La creación de espacios pedagógicos, a partir de situaciones- problema que permitan darle significado a los números enteros y sus operaciones, posibilita la movilización del pensamiento lógico - matemático en los estudiantes de básica secundaria.

**2.3.2.** La comprensión o significado de los algoritmos[1] para

[1] Un algoritmo es un proceso fijo que al ser ejecutado sistemáticamente, produce un resultado deseado. Cuando los algoritmos están bien definidos; es posible expresarlos mediante una regla.

resolver las operaciones, con números enteros, facilita la aplicación de los mismos.

**2.3.3.** La comprensión o significado de las operaciones, con números enteros, permite al estudiante de la enseñanza básica secundaria, desarrollar habilidades y destrezas en la resolución de problemas, no sólo de matemáticas sino de otras áreas que hacen uso de estos conceptos.

El tema objeto de estudio encuentra su significado en el proceso de la práctica pedagógica; porque, si bien es cierto que el aprendizaje es una construcción de los sujetos, también es esencial que el maestro ponga de relieve el proceso de construcción de significados, como elemento central del proceso enseñanza-aprendizaje.

La construcción del pensamiento lógico-matemático y su movilización, la ejercitación algorítmica y la resolución de problemas, requieren de estrategias de intervención que potencien y brinden alternativas al estudiante para enfrentarse a la resolución de nuevas situaciones - problemas.

## 2.4. OBJETIVOS

### 2.4.1 General

Diseñar, a partir de situaciones-problema, una estrategia de intervención pedagógica para la comprensión o significado de los números enteros y sus operaciones.

### 2.4.2. Específicos

**2.4.2.1** Diseñar actividades que permitan al estudiante apropiarse, en forma significativa, de los conceptos que se requieren para resolver las operaciones básicas con números enteros.

**2.4.2.2** Plantear actividades que conduzcan a la ejercitación y aplicación algorítmica.

**2.4.2.3** Desarrollar habilidades y destrezas en la resolución de problemas, no sólo de matemáticas sino de otras áreas.

## 2.5. ESTRUCTURACIÓN DE LA RED PARA EL CONTENIDO TEMÁTICO DEL BLOQUE

### Objetivos

- Construir, en forma significativa, el conjunto de números enteros y sus operaciones básicas a partir de situaciones-problema.
- Realizar actividades que conduzcan a la ejercitación y aplicación algorítmica.
- Formular y resolver problemas que requieran el uso de números enteros.

### Actividades de motivación

Presentamos, a continuación, algunas actividades motivadoras. En éstas tanto los datos, como las preguntas pueden ser modificados, sustituidos o elaborados por el maestro.

### 2.5.1. Actividad No. 1: Ecopaseo

Proponemos un paseo ecológico (imaginario), a la ciudad de Santa Marta, que, además de motivar a los estudiantes, facilite la comprensión del concepto de número entero y las operaciones de suma, resta, multiplicación y división; además, permitirá conocer, de ellos, los saberes previos en cuanto al sistema de números naturales. Dividiremos la actividad en dos momentos:

- Preparación
- Ejecución

### 2.5.1.1. Preparación de la actividad

Después de una motivación previa, 22 estudiantes deciden participar en el ecopaseo.

El maestro propone organizarlo colectivamente; lo que obliga a la recolección de datos básicos como:

- Duración
- Selección de los sitios turísticos y ecológicos.
- Algunos datos de tipo geográfico.
- Costos de todo tipo.
- Financiación.

Lo anterior, se presentará en cuadros así:

**Cuadro 1**

| **Sitios** | Altura sobre el nivel del mar en (M) | Temperatura promedio en °C | Distancia con respecto a Medellín (en Km.) | Número de habitantes |
|---|---|---|---|---|
| Medellín | 1.538 | 24°sobre cero | 0 | 1.700.000 |
| Santa Rosa de Osos | 2.500 | 14° sobre cero | 74 | 28.992 |
| Yarumal | 2.265 | 16° sobre cero | 120 | 34.048 |
| Tarazá | 83 | 28° sobre cero | 223 | 15.997 |
| Caucasia | 50 | 28° sobre cero | 293 | 44.711 |
| Santa Marta | 6 | 27° sobre cero | | 260.000 |
| Ciudad Perdida | 3.200 | 2° bajo cero | | |
| Sierra Nevada de Santa Marta | | 8° bajo cero | | |

Cuadro 2

| CONCEPTO | INGRESOS $ | EGRESOS $ |
|---|---|---|
| Cuota de inscripción | 110.000 | - |
| Cuotas mensuales (10) | 440.000 | - |
| Rifa de un equipo de sonido | 2.000.000 | 532.000 |
| Rifa de una lavadora | 3.000.000 | 832.000 |
| Rifa de una moto | 3.500.000 | 1.232.000 |

Cuadro 3

| | |
|---|---|
| Duración del ecopaseo | 5 días |
| Costo del transporte | $ 1.800.000 |
| Costo unitario: visita a las Islas del Rosario y acuario (almuerzo incluido): | $ 18.000 |
| Costo unitario: visita a la Quinta de San Pedro Alejandrino: | $ 3.000 |
| Costo unitario: visita a la Ciudad Perdida y Sierra Nevada de Santa Marta (almuerzo incluido): | $ 19.000 |
| Costo unitario de almuerzo o cena: | $ 3.000 |
| Costo unitario desayuno: | $ 2.200 |
| Costo unitario de alojamiento por noche: | $ 9.000 |

Un maestro recursivo puede inventar muchos problemas interesantes a partir de los datos recolectados, o hacer preguntas que generen nuevos aprendizajes. Ejemplos:

**2.5.1.1.1.** Preguntas que permitan darle significado a los enteros.

**1.** ¿A qué conjunto numérico pertenecen los datos correspondientes a las alturas sobre el nivel del mar, número de habitantes y distancia con respecto a Medellín? (Cuadro 1) ¿por qué?

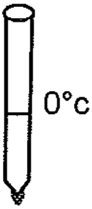
**2.** Ubique, en una recta numérica, las alturas de las ciudades dadas; utilice una escala de medida apropiada y ordene, de menor a mayor.

3. En el siguiente termómetro marca con números enteros los puntos que indican las temperaturas de los sitios dados, considerando el cero, como el nivel que corresponde a la temperatura cero grados.

4. Según el cuadro 1, compare la altura y la temperatura promedio correspondiente a cada sitio. ¿Qué relación existe entre ellas?

5. Escriba utilizando números con signo las temperaturas promedio de estos lugares. Ordénelos, del más frío al más caliente.

6. Si uno de los participantes es buceador y en el viaje a las Islas del Rosario, decide lanzarse desde el yate a una altura de 5 metros y alcanza una profundidad de 3 metros y luego asciende 2 metros. Represente esto, utilizando números enteros con signo, tanto la altura como las profundidades inicial y la lograda después de ascender.




7. Para promocionar la rifa del equipo de sonido, se adquirió una deuda de $ 400.000 que permitió completar el dinero para su compra, los $132.000 restantes se percibieron por concepto de inscripción. Escriba los datos anteriores, utilizando números enteros con signo.

***Observaciones:*** *Los números enteros se emplean en la vida diaria, cuando es necesario indicar dos sentidos a partir de un punto fijo. Observa tres ejemplos:*

* *En el termómetro, que mide la temperatura del ambiente, el punto fijo está marcado con la temperatura* ***cero grados;*** *las temperaturas* ***bajo cero,*** *se marcan hacia abajo con números enteros negativos, mientras que las temperaturas* ***sobre cero*** *se indican hacia arriba y se marcan con números enteros positivos o números naturales. Tenemos, entonces,*

*los sentidos hacia arriba y hacia abajo, o también: sobre cero y bajo cero.*

** Las alturas de diferentes lugares sobre la tierra se determinan, también, con números enteros. El número* ***cero*** *se asigna al nivel del mar. Las alturas sobre el nivel del mar se. indicarán, con números enteros positivos, y la profundidad de los lugares, bajo el nivel del mar, se indicarán con números enteros negativos.*

** El* ***debe*** *y el* ***haber*** *de una compañía pueden representarse, mediante los números enteros positivos y negativos. Afirmar que la compañía tiene 1.000.000 de pesos, significa que, de hecho, tiene ese dinero y decimos que posee +1.000.000 de pesos; si, por el contrario la compañía debe 1.000.000 de pesos afirmamos que ella posee menos un millón de pesos -1.000.000 de pesos.*

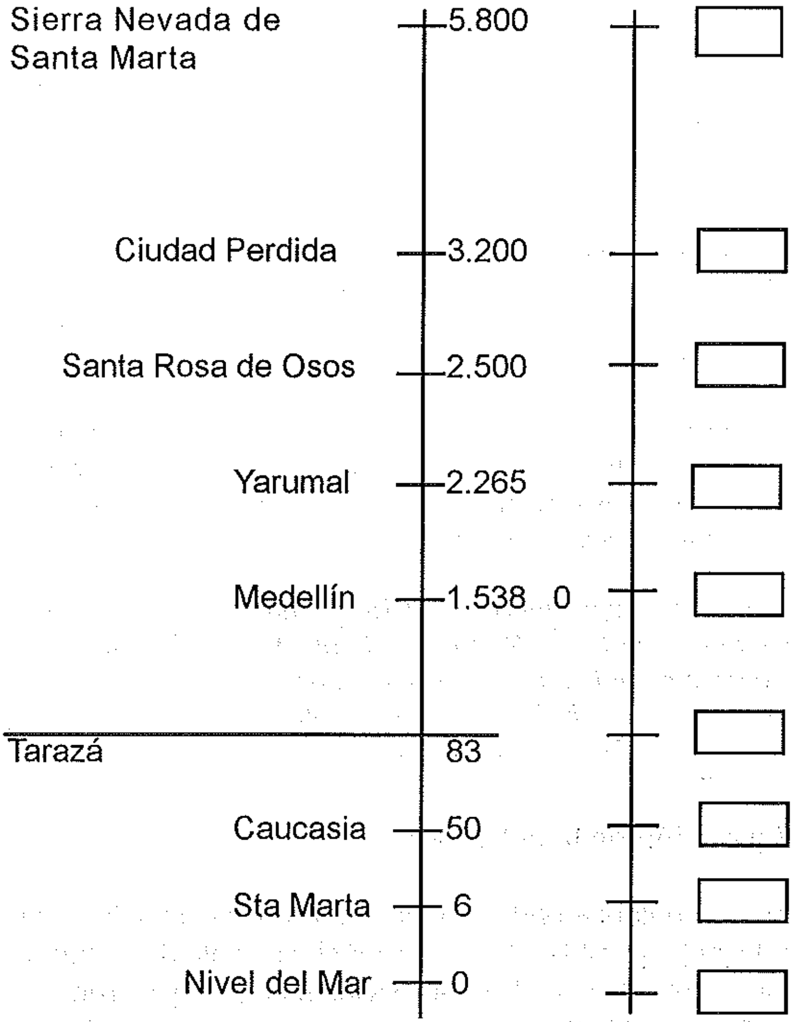
### 2.5.1.1.2. Problemas aditivos multiplicativos y de división con el conjunto de números naturales.

Según el cuadro 2:

1. ¿Cuánto costó la inscripción de cada alumno?
2. ¿ Cuánto pagó cada alumno mensualmente?
3. ¿Cuanto fue el total de ganancias por concepto de rifas?
4. ¿Cuánto dinero se requiere para financiar el ecopaseo?

### 2.5.1.1.3. Problema de resta en el conjunto de números enteros.

Según el cuadro 1, ubique, en la recta numérica, las alturas correspondientes a los sitios dados, considerando el cero como el nivel de la altura de Medellín. Es decir, a partir de esta nueva altura como referencia, halle las alturas de los demás sitios. Como ayuda se presenta la siguiente gráfica, elaborada a escala.




### 2.5.1.1.4. Problema Creativo

Considerando el cero, como el nivel que corresponde a la temperatura promedio, dé al menos 5 sitios que usted desee elegir y que aparecen en el cuadro Nº 1, sin excluir la Ciudad Perdida y la Sierra Nevada de Santa Marta. Halle las temperaturas de los demás sitios y marque, en un termómetro, con números enteros, para cada uno de los casos que usted plantee, los puntos que indican las temperaturas obtenidas. Utilice, al graficar, una escala de medida apropiada.

> *Observación:*
>
> *El significado de problema creativo es en el sentido de permitir que el alumno busque, por sí mismo, el planteamiento y la solución del problema. El maestro deberá canalizar las respuestas y orientar al alumno en el proceso.*
>
> *El anterior problema es, porque permite que el alumno descubra en su ejecución, la necesidad de plantear esquemas que corresponden a la sustracción de números enteros, y de la forma a - (-b), con a y b positivos. Ejemplo:*
>
> *Si desean hallar la temperatura de Medellín, tomando como referencia la temperatura de la Sierra Nevada de Santa Marta, el alumno se verá abocado a recurrir a un esquema que, para el no es conocido. Por lo tanto, hay que inducirlo al planteamiento correcto, así:*
>
> $$24^{\circ} - (-8^{\circ}) = 24^{\circ} + 8^{\circ} = 32^{\circ}$$

### 2.5.1.2. Ejecución de la actividad

En un paseo, a cualquier parte, la ejecución consiste simplemente en pasear lo mejor posible. Con tal propósito se sale de la ciudad de Medellín el sábado 5 de diciembre a las 9:00 a.m. y se regresa el jueves 10, a las 10.00 a.m. La programación de actividades, durante el tiempo de duración del ecopaseo, fue variada. A continuación la describiremos:

- **Fecha y hora de llegada**: 6 de diciembre a la 1:00 a.m.
- **Visita a la Quinta de San Pedro Alejandrino:** 6 de diciembre, a las 10:00 a.m.

- **Salida a la playa de Taganga**: 6 de diciembre 2:00 p.m.
- **Visita a la Sierra Nevada de Santa Marta y a la Ciudad Perdida** (Parque Nacional Tayrona). Dicha ciudad, en lenguaje indígena se llama Buriticá: Diciembre 7.
- **Viaje a las Islas del Rosario y al Acuario:** Diciembre 8
- **Visita a otros sitios turísticos y a la playa del Rodadero**: Diciembre 9

Considerando la información anterior y la información de los cuadros: N°1, N°2 y N°3, de acuerdo con el caso, resuelva los siguientes problemas:

1. ¿Cuántas horas dura el ecopaseo? ¿Cuántos minutos?
2. ¿Cuál es el costo total de la alimentación?
3. ¿Cuál es el costo total de las visitas a los sitios turísticos y ecológicos?
4. ¿Cuál es el total de gastos en el ecopaseo?
5. ¿hubo necesidad de asignarle cuota extra a cada estudiante? ¿Cuanto? o al contrario, si sobra dinero, ¿cuánto le toca a cada uno de ellos?

### 2.5.1.2.1. Problemas de resta, multiplicación y división

Al llegar a un estadero de Tarazá, a bordo de carretera, la coordinadora recordó haber dejado su bolso, que contenía algunos papeles importantes, en un estadero ubicado a 17 Km. antes de llegar a Yarumal. Para resolver tal impasse un viejo amigo, se ofreció trasladarla, en moto, a la 1:00 p.m., a una velocidad de 60 kilómetros por hora; el conductor del bus decidió continuar hasta Caucasia, lugar donde espera el regreso de la moto. Si el conductor de la moto, decide variar la velocidad de 60 km/h, a 70 km/h, al iniciar el trayecto del estadero ubicado en Tarazá hasta Caucasia:

- Escriba la hora en que la moto alcanza el bus.
- ¿ Cual es la distancia en kilómetros recorrida por la moto?
- Si la moto consume tres galones de gasolina cada 155 kms., cuyo costo es de 1.600 pesos por galón. ¿Cuánto costó la gasolina consumida por la moto?

### 2.5.1.2.2. Problemas de adición y sustracción, con números enteros.

1. Un estudiante que asiste al ecopaseo, tiene 10.000 pesos para asumir gastos y además cuenta con 5.000 pesos para cancelar una deuda adquirida con su coordinador.

- ¿Cuánto dinero tiene en total este estudiante?
- ¿Cómo simbolizarías, matemáticamente, la situación anterior? (Haciendo diferencia entre el signo del número y el de la operación)
- ¿Qué operación entre números enteros se efectúa?

2. Un estudiante deja su billetera con 20.000 pesos en su habitación, único dinero disponible para sus gastos, cuando se dirigen a la playa a disfrutar del mar. Allí, decide solicitarle al coordinador un préstamo de $ 1.000 como medida preventiva, para subsanar algún gasto imprevisto; sin embargo dicho gasto no sucedió. Al regresar al hotel quiso pagar la deuda, pero el coordinador decidió perdonársela.

¤ ¿Cuánto dinero tiene en total dicho estudiante?

¤ Utilizando números enteros con signo, represente cada situación:
  **a.** Dinero que tiene
  **b.** Deuda que adquiere.

¤ Utilizando números enteros con signo y el signo adecuado de la operación, teniendo en cuenta la **acción de perdonar una deuda** como inversa de la **acción de tener la deuda**, exprese matemáticamente la situación antes descrita.

3. Si a las 12:00 m. la temperatura de la Sierra Nevada de Santa Marta era de 3 grados bajo cero y a las 5 p.m. la temperatura bajó 6 grados más.

- ¿Cuál es la temperatura a las 5 p.m.?
- Escriba, simbólicamente, lo anterior utilizando números con signo.
- ¿Qué operación con números enteros se efectúa?

### 2.5.1.2.3. Problemas de multiplicación y división con números enteros

Si un estudiante, de los integrantes del grupo, pierde su billetera con el dinero que tenía disponible y para subsanar sus gastos adquiere tres veces una deuda de 8.000 pesos con el coordinador de la excursión.

- ☐ ¿A cuánto equivale la deuda?
  Represente dicha deuda utilizando números con signos.
- ☐ ¿Que operación con números enteros se efectúa?
  Exprésela matemáticamente, utilizando símbolos
- ☐ Por solidaridad dos compañeros del grupo deciden asumir la deuda con él:

- Si es distribuida en partes iguales, ¿cuánto le corresponde pagar a cada uno?
- ¿Qué operación, con números enteros, se efectúa para determinar lo que debe cada uno? Utilizando números, con signo, expréselo simbólicamente.
- Si los dos compañeros asumen el pago de la mitad de la deuda distribuida en iguales partes:
- Escriba lo que cada uno debe pagar.
- ¿Qué operaciones se efectúan para determinar la deuda de cada uno?. Simbolice utilizando números enteros, con signos, dichas operaciones.

*Los estudiantes deben ser percibidos como capaces de participar activamente en el proceso de aprendizaje.*

## 2.5.2. ACTIVIDAD No. 2: La carrera del 0 al 100

**Objetivo:** Motivar y permitir la construcción conceptual de los números enteros y sus operaciones.

**Materiales:**

- Un tablero con una ruta elaborada, del 0 al 100 y algunas casillas rojas y azules.
- Dos dados: uno rojo y otro azul.
- Una ficha por cada jugador.
- Tarjetas rojas y azules que describen movimientos de avanzar y retroceder, respectivamente.

**Instrucciones para el juego**

- Inicialmente, se dispone el tablero, se colocan las fichas en el lugar de salida y se colocan las tarjetas azules y rojas con las órdenes respectivas ocultas, dispuestas en dos pilitas en el tablero.

- Comienza a jugar, quien obtenga el más alto puntaje en un primer lanzamiento de dados.

- Debe tenerse en cuenta, al lanzar los dados que, el dado rojo indica los puntos para avanzar en la ruta y el dado azul indica los puntos para retroceder en la misma.

- Si un jugador queda ubicado en uno de los lugares señalados con marcas rojas o azules, deberá tomar una tarjeta del color correspondiente al de la marca encontrada y deberá acatar la orden allá sugerida, colocando la tarjeta debajo de las demás.

- Si, en su turno, un jugador alcanza a otro, podrá tirar los dados nuevamente, ya que el jugador alcanzado perderá el turno.

- Si, al tener que retroceder, un jugador coincide con otro que estaba antes, perderá el turno y el jugador alcanzado así, podrá tirar los dados, dos veces consecutivas.

- Si un jugador tira pares por tres veces consecutivas, podrá avanzar doce lugares.

- Gana el jugador que llegue primero a la meta.

Se espera que, inicialmente, cuenten en ambos sentidos y luego reemplacen el doble movimiento por el resultado de la resta de los puntos en ambos dados.
Ej.: 6 rojo y 4 azul, lo reemplace por 2 rojo (avanza 2)
1 rojo y 5 azul, lo reemplace por 4 azul (retrocede 4)

Luego, se proponen preguntas como las siguientes:

- ¿Dónde te ubicas, si en el primer lanzamiento te salen 5 rojo y 6 azul?

- ¿Cuál es el desplazamiento máximo que puedes hacer en ambos sentidos?

- Si tu compañero está tres puntos después de ti y quieres alcanzarlo, ¿cómo deberían aparecer los dados?

- ¿Qué posibilidades tienes, con los dados, para avanzar 1 punto?, 2 puntos?, 3 puntos?, 4 puntos? y 5 Puntos?.

- ¿Qué posibilidades tienes, con los dados, de no realizar ningún desplazamiento?.

- ¿Qué posibilidades tienes, con los dados, de retroceder 1, 2, 3, 4 ó 5 puntos?.

- ¿Cuándo, el desplazamiento es de avance y cuándo es de retroceso?.

- ¿Cómo simbolizarías o representarías un desplazamiento de 4 puntos de avance? ¿Cómo 4 puntos de retroceso?.

- Si el punto de partida fuera la mitad de la ruta (punto 50), ¿cómo distinguirías las 50 casillas hacia la meta de las 50 casillas hacia el punto inicial de salida?.

- Si las casillas están igualmente espaciadas, ¿qué está más cerca del punto 50, la meta o el punto de donde se salía inicialmente?

- ¿Es posible que jugando con el nuevo punto de referencia, un jugador pueda ser devuelto al lugar de partida inicial?

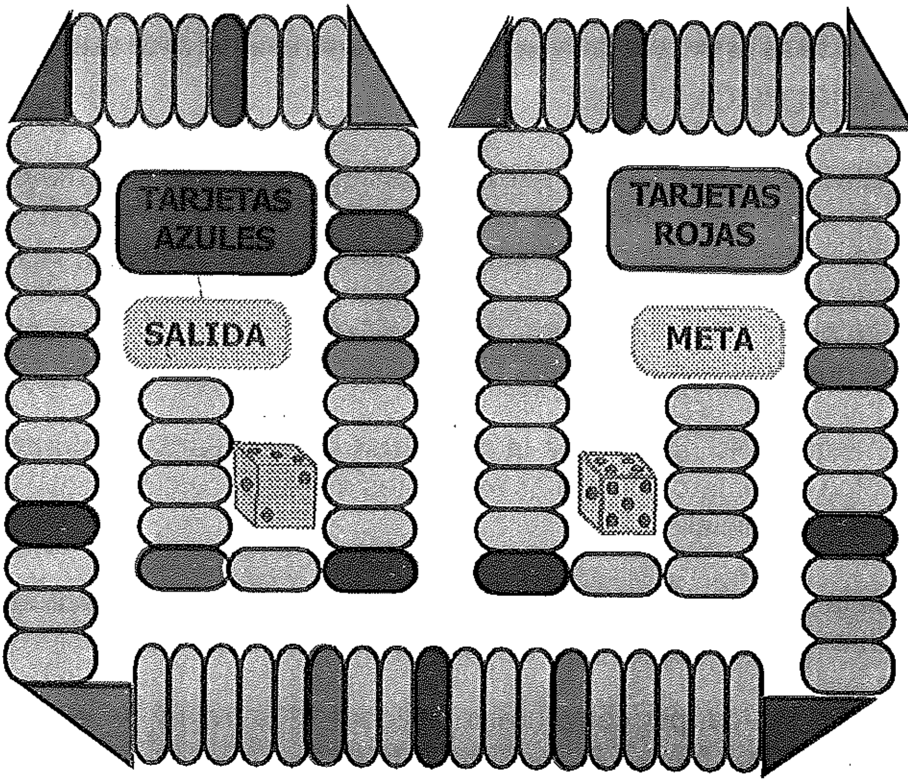
- ¿Cuánto y en qué sentido es el desplazamiento entre los puntos 59 y 46?

En las tarjetas rojas y azules se proponen movimientos de avanzar o retroceder, como los siguientes y que pueden ser modificados.

Véase la figura siguiente:

**Tarjetas rojas**
- Avance el doble rojo del último lanzamiento.
- Avance tres casillas.
- Avance el triple rojo del último lanzamiento.
- Avance la mitad del rojo, si es par.
- Avance 5 casillas.
- Avance el doble del desplazamiento realizado.
- Avance el máximo rojo (12).

## CARRERA DEL 0 AL 100
## FIGURA 1




**Tarjetas azules**

- Devuélvase a la posición anterior.
- Devuélvase tres casillas.
- Devuélvase el triple azul del último lanzamiento.
- Devuélvase el doble azul del último lanzamiento.
- Devuélvase la mitad azul, si es par.
- Devuélvase 5 casillas.
- Devuélvase el doble del último desplazamiento realizado.
- Devuélvase el máximo azul (12).

*El pensamiento es más flexible cuando está basado en operaciones reversibles.*

## CONCLUSIÓN

Actividades como éstas, inducen al estudiante a utilizar números con signo para simbolizar cada una de las acciones opuestas, realizadas así como a la suma de movimientos opuestos, cuya solución puede ser cero, un entero positivo o un entero negativo, captando, de esta manera, la necesidad de ampliar el conjunto de números naturales.

El estudiante reconocerá la **magnitud de un desplazamiento,** como el número de casillas existentes entre la posición final y la posición inicial.

Se le puede sugerir, además, simbolizar las acciones realizadas en cada jugada. Ejemplo: 5 rojo y 3 azul como R5 + A3.

Luego puede, por convención, asignar "+" al rojo y "–" al azul (+5) + (-3).

## 2.5.3. ACTIVIDAD N° 3: Orientación simétrica en un espejo.

Proponemos, para introducir los dos sentidos: derecha, izquierda y además arriba, abajo, la orientación simétrica en un espejo.

**Materiales:** espejo, escalera, estudiantes.

Se tendrá en cuenta, que para la comprensión de este concepto, se requiere definir acciones o posiciones opuestas y asignarles arbitrariamente un signo.

La referencia será el espejo.

- A la acción de avanzar (+), y a la acción de retroceder (-).
- A la posición del objeto (+), y a la posición de la imagen (-).
- Desplazamiento a la derecha de algún punto de referencia (+), y desplazamiento a la izquierda de algún punto de referencia (-).

Por simple observación los alumnos deben deducir lo que ocurre, si la operación se realiza en uno u otro lado.

*El método activo permite al estudiante construir, por sí mismo, los esquemas operacionales.*

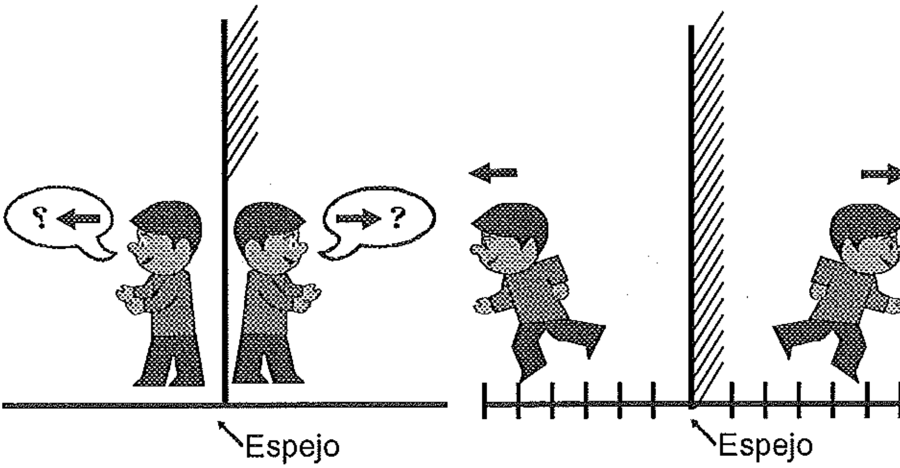
Esta actividad se propone, a partir de la experiencia en el salón de clase.

En primera instancia se hace un análisis cualitativo para que el estudiante determine, cómo es el movimiento de la imagen, cuando el objeto ejecuta la acción de avanzar, o cuando el objeto ejecuta la acción de retroceder.

Véase la figura de la siguiente página.

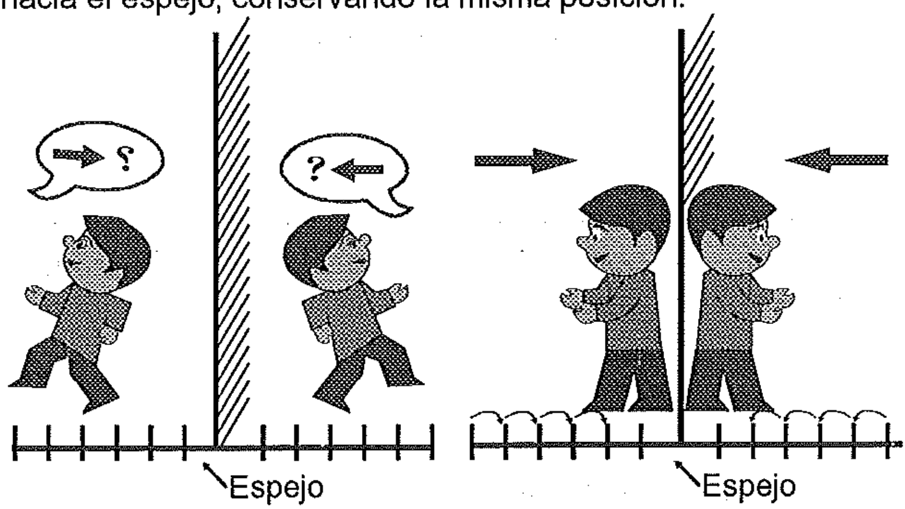
### 2.5.3.1. Análisis Cualitativo

1- Ubicado de espalda al espejo, se sugiere al estudiante avanzar




¿Cómo es el movimiento de la imagen?

2- Desde el punto de parada anterior, se le sugiere retroceder hacia el espejo, conservando la misma posición.




¿Cómo es el movimiento de la imagen?

Se sugiere al estudiante, ejecutar varias veces los anteriores movimientos. De esta manera, se puede concluir lo siguiente:

1. Cuando el objeto avanza (se aleja del espejo), hay un desplazamiento a la derecha, y lo que se observa con respecto al movimiento de la imagen es que ésta también avanza (se aleja del espejo), pero el desplazamiento es hacia la izquierda. Es decir, en sentido contrario.

2. Cuando el objeto retrocede, hay un desplazamiento hacia la izquierda, lo que se observa con respecto al movimiento de la imagen es que ésta retrocede. Pero el desplazamiento es hacia la derecha, también en sentido contrario.

**Esquemáticamente**

$$
\begin{array}{ll}
 & \overset{+}{(\text{Avanzar})}\ \overset{+}{(\text{objeto})} = \text{desplazamiento hacia la derecha } (+) \\
1. & \overset{+}{(\text{Avanzar})}\ \overset{-}{(\text{imagen})} = \text{desplazamiento hacia la izquierda } (-) \\
 & \overset{-}{(\text{Retroceder})}\ \overset{+}{(\text{objeto})} = \text{desplazamiento hacia la izquierda } (-) \\
2. & \overset{-}{(\text{Retroceder})}\ \overset{-}{(\text{imagen})} = \text{desplazamiento hacia la derecha } (+)
\end{array}
$$

Esquematizando las distintas posibilidades, se ve que hay dos maneras de obtener como resultado un **desplazamiento hacia la derecha**: avanzando el objeto o retrocediendo la imagen y que el **desplazamiento hacia la izquierda**, se obtiene al retroceder el objeto o al avanzar la imagen.

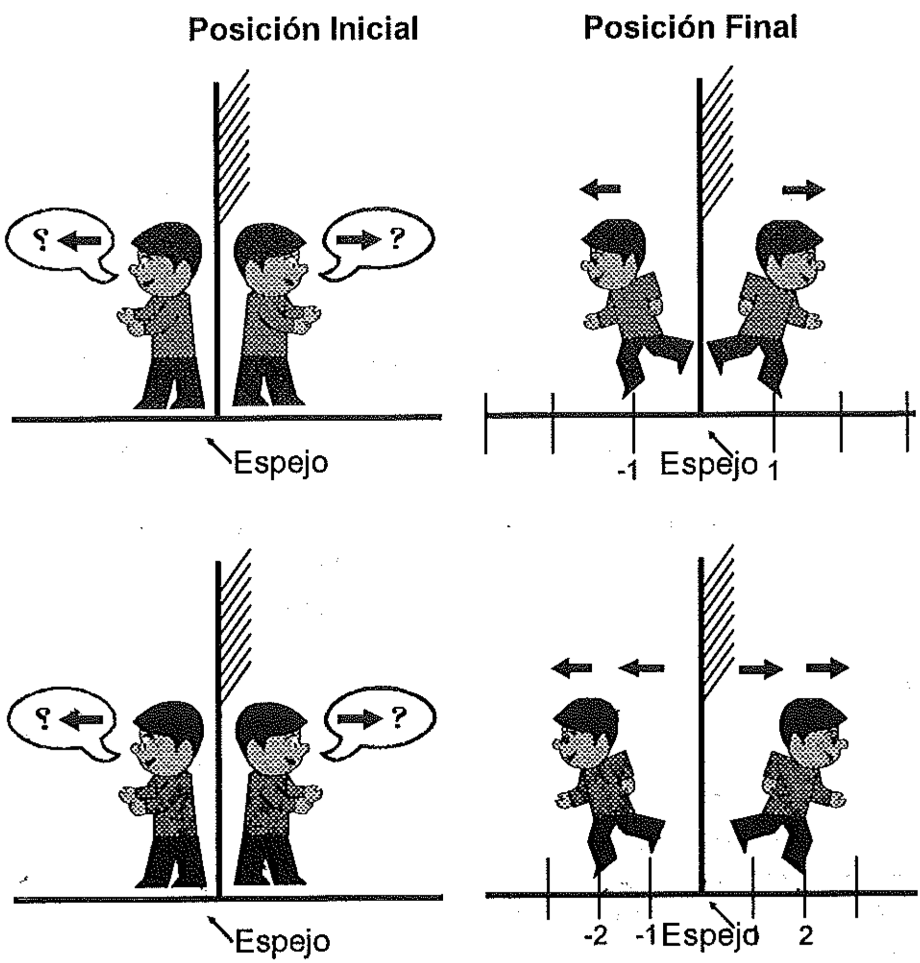
Este análisis, puramente cualitativo, es susceptible de ampliarse mediante una dimensión cuantitativa, que permitirá, además, introducir los conceptos de: valor relativo y valor absoluto de un número, vector, propiedad del número opuesto o negativo de un número, suma, resta y multiplicación.

Véase la figura siguiente:

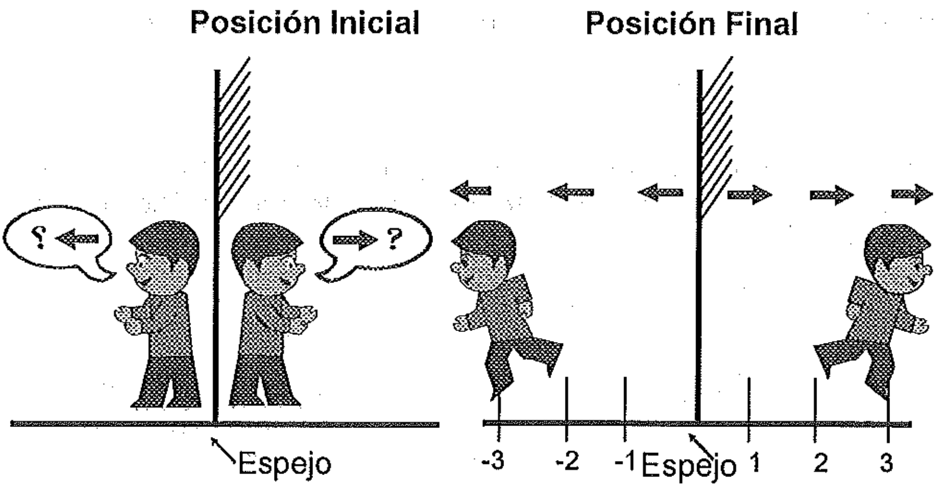
### 3.5.3.2. Análisis Cuantitativo

1. Ubicado de espalda al espejo, avanzar a partir de éste en todos los casos:

a. 1 paso b. 2 pasos c. 3 pasos



a. 1 paso b. 2 pasos c. 3 pasos




**Preguntas:**

Para cada uno de los casos planteados responda:

a). ¿Cuántos pasos avanzó la imagen y en qué sentido?

b). Utilizando números enteros, con signo, represente cada acción realizada por el objeto y por la imagen.

c). Grafique, utilizando una recta horizontal para marcar, los puntos que indican el total de pasos en cada movimiento y tomando el espejo como referencia.

d) ¿Qué distancia recorrió el objeto y qué distancia recorrió la imagen?

e) Utilizando números enteros con signo, simbolice cada una de las distancias anteriores.

f) ¿Qué distancia hay entre la imagen y el objeto?

g) Represente todos los movimientos anteriores, sobre una recta horizontal y a partir del espejo, usando segmentos de recta con una flecha al final que indique el sentido del movimiento.

### 2.5.3.3. Conclusiones:

1) El número de pasos del objeto es igual al número de pasos de la imagen. Pero en **sentido contrario**, lo que significa que a dichos números se les asignan signos diferentes. Sin embargo, la distancia recorrida tanto por el objeto, como por la imagen, es la misma a partir del espejo.

2) La ejecución de los literales d), e), f), induce al estudiante a familiarizarse con un nuevo concepto, el de valor absoluto. Lo mismo que la ejecución del ejercicio g), le permite la introducción del concepto de vector, que le facilitará la comprensión de las operaciones con números enteros y además la resolución de algunos problemas de matemática y de física.

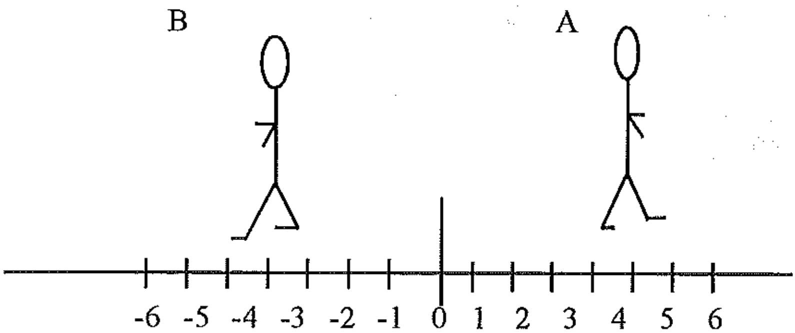
3) Analizando las situaciones anteriores, vemos que para cada número entero, existen dos valores: su valor relativo y su valor absoluto.

**Su valor relativo**, está determinado por la posición en la recta numérica, a la derecha o a la izquierda del cero; mientras que el **valor absoluto**, está determinado por la distancia a la cual se encuentra el número respecto del cero.

**Sugerencia:** Para construir el concepto de valor absoluto, a partir de la recta numérica y por analogía con la situación planteada en el espejo, proponemos la siguiente actividad:

Se dibuja la recta numérica en el piso del salón de clase y sobre ella, dos estudiantes efectúan desplazamientos a partir del cero, con la misma magnitud. Ejemplo:

El estudiante A se desplaza 4 unidades a la derecha del cero y el estudiante B, se desplaza 4 unidades a la izquierda del cero.



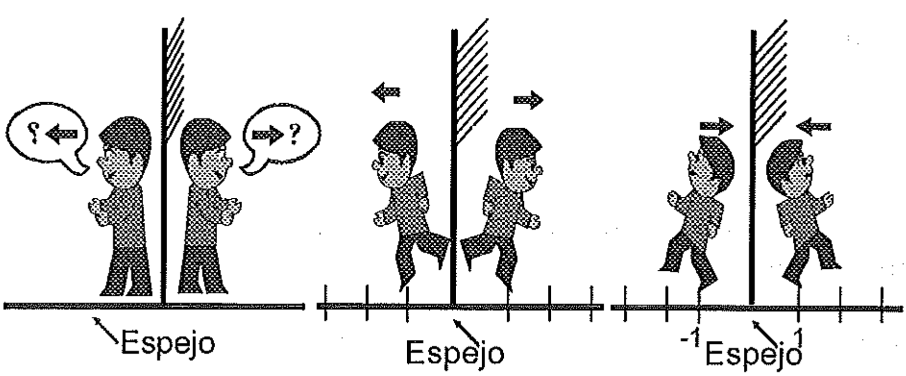

Observamos, que tanto el estudiante A como el estudiante B, están a una distancia de 4 unidades del cero.

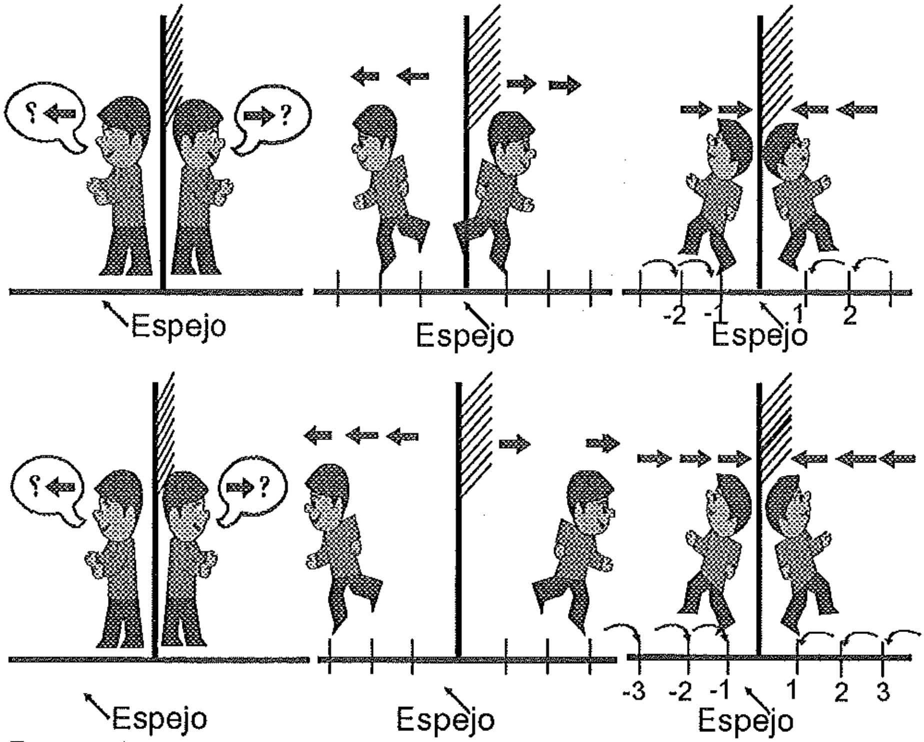
Sin embargo, A está en la posición +4, y B en la posición -4.

Véase la figura siguiente:

2. A partir del espejo ubíquese en todos los casos, en los puntos dados a continuación y ejecute la acción de devolverse hacia el espejo.

a. 1 Paso b. 2 Pasos c. 3 pasos






**Preguntas:**

1. ¿Cuál fue el punto de llegada al ejecutar las acciones anteriores?

2. ¿Con qué número entero se representa dicho punto de llegada?

3. ¿Qué operación realizó en todos los casos anteriores?

Simbolice utilizando números enteros con signo y especificandoel signo de la operación. Tenga en cuenta, tanto la operación del objeto, como la de la imagen.

Se le sugiere al estudiante, escribir en el siguiente cuadro, así:

| Operaciones efectuadas por el objeto | Operaciones efectuadas por la imagen |
|---|---|
| a. (+1) + (-1) = 0 | (-1) + (+1) = 0 |
| b. (+2) + (-2) = 0 | (-2) + (+2) = 0 |
| c. (+3) + (-3) = 0 | (-3) + (+3) = 0 |

**Conclusiones:**

¤ Ejecutar una acción y luego su opuesta es equivalente a anularla.

¤ Siempre una realización de sucesos iguales y opuestos, tienen el mismo resultado final de no suceso.

¤ Con respecto al cero, la posición en la recta numérica de un número y su opuesto es simétrica. Esto significa que las distancias son iguales, pero el sentido del movimiento es diferente (indicado con el vector) y es a este sentido el que se le asigna un signo.

¤ El opuesto aditivo de un número se halla cambiándole el signo.

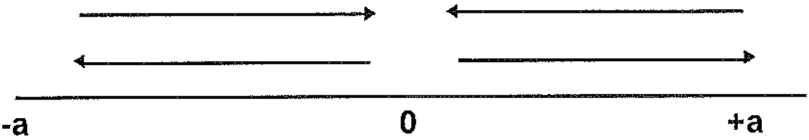
Ejemplo: El opuesto aditivo de (+3) es (-3). El opuesto aditivo de (-1) es (+1), porque los que estos representan son dos acciones inversas.

**Propiedad del número opuesto**

La suma de un número entero y su inverso aditivo (opuesto), siempre es igual a cero, cualquiera que sea el orden de los sumandos.

Si (+a) es un número entero, (-a) será el inverso aditivo y por lo tanto: $(+a) + (-a) = (-a) + (+a) = 0$

**Gráficamente:**




Por ejemplo, (-3) es, por definición el número que sumado a (+3) da 0.

**3)** Ejecute los siguientes movimientos, a partir del espejo. Simbolice e ilustre gráficamente, tanto la operación efectuada por el objeto, como la efectuada por la imagen.

> **a)** Avanzar 2 pasos y avanzar 3 pasos.
> **b)** Avanzar 3 pasos y retroceder 2 pasos.

Se sugiere el siguiente cuadro, para anotar lo observado y ya en el dominio matemático, haciendo diferencia entre el signo de la operación y el signo del número. Así:

| **Operaciones a partir del espejo** | **Dominio matemático** | |
|---|---|---|
| | **Operación objeto** | **Operación imagen** |
| Avanzar 2 pasos y Avanzar 3 pasos. | (+2) + (+3) = +5 | (-2) + (-3) = - 5 |
| Avanzar 3 pasos y Retroceder 2 pasos. | (+3) + (-2) = +1 | (-3) + (+2) = - 1 |

Se pueden plantear muchos ejercicios de estos que involucren más de dos movimientos, hasta que el estudiante interiorice las diferentes situaciones presentadas.

- Suma de enteros positivos (avance del objeto)

- Suma de enteros negativos (avance de la imagen)
- Suma de enteros positivos y negativos (avance y retroceso tanto del objeto como de la imagen).

4) Retroceder a partir del espejo ¿qué significa?, analice lo que pasa con el objeto y con la imagen.

**Comentario:**

Lo que se observa, es que ejecutar la acción de retroceder, a partir del espejo, no es posible, con el espejo. Se sugiere, entonces, para ejecutar dicha acción, quitar el espejo, asignarle a este punto el número 0 y reemplazar la imagen por un estudiante

En el piso del salón se dibuja la recta numérica y ubicados ambos estudiantes de espalda, uno en la posición del objeto y otro en la posición de la imagen, a partir del 0, ejecutarán las acciones indicadas:

a) Retroceder 1 paso
b) Retroceder 2 pasos
c) Retroceder 3 pasos

Preguntas: En cada uno de los casos anteriores, responda:
1. ¿Cuál posición ocupó el estudiante (objeto)?

2. ¿Cuál posición ocupó el estudiante (imagen)?

3. Simbolice cada una de las acciones anteriores, utilizando números enteros con signo; teniendo en cuenta, tanto la acción del estudiante objeto como la acción del estudiante (imagen). Por ejemplo así:

| Operaciones en la recta numérica a partir del cero | Dominio matemático | |
|---|---|---|
| | Operación estudiante objeto | Operación estudiante imagen |
| Retroceder un paso | - (+1) = -1 | - (-1) = +1 |
| Retroceder dos pasos | - (+2) = -2 | - (-2) = +2 |
| Retroceder tres pasos | - (+3) = -3 | - (-3) = +3 |

Lo que se observa en el ejercicio 4, es que la acción de retroceder, a partir del cero, obliga a cambiar **la posición.** Por ejemplo, si el objeto retrocede 1 paso, dicha acción lo ubica en la posición de la imagen a un paso del cero y lo que se observa, con respecto a la imagen, es que ésta ocupa la posición del objeto también a un paso del cero.

*A partir de lo anterior, definimos* ***el negativo*** *de un número como el número que está en el lado opuesto con respecto al cero y a la misma distancia. Es decir, el negativo de un número se halla por una* ***inversión o cambió de posición.***

*Ejemplo, el negativo de (-2) es -(-2) o sea (+2), el negativo de (+2) es -(+2) o sea (-2).*

5) Ejecute los siguientes movimientos, a partir del cero. Simbolice e ilustre, gráficamente, tanto la operación efectuada por el estudiante (objeto), como la efectuada por el estudiante (imagen).

   a) Avanzar 2 veces 3 pasos
   b) Retroceder 2 veces 3 pasos

**Preguntas:**
En ambos casos:

1. ¿En qué posición queda el estudiante (objeto), al ejecutar las acciones?

2. ¿En qué posición queda el estudiante (imagen), al ejecutar las acciones?
3. Utilice números con signo, para simbolizar, las operaciones realizadas por el estudiante (objeto) y el estudiante (imagen)

Se sugiere plantear varios ejercicios similares, de manera tal que el estudiante interiorice lo que pasa al ejecutar dichas acciones.

Los estudiantes deben anotar cada acción, haciendo diferencia entre el signo de la operación y el signo del número. Así:

| **Operaciones a partir del cero en la recta numérica** | **Dominio matemático** | |
|---|---|---|
| | Operación estudiante objeto | Operación estudiante imagen |
| Avanzar 2 veces 3 pasos | (+2) x (+3) = + 6 | (+2) x (-3) = - 6 |
| Retroceder 2 veces 3 pasos | (-2) x (+3) = - 6 | (-2) x (-3) = + 6 |

El ejercicio anterior nos permite concluir lo siguiente:

**La acción de avanzar no cambia la posición, la acción de retroceder a partir del cero, invierte la posición.**

De manera similar, y con los mismos propósitos anteriores, proponemos, para introducir los dos sentidos arriba y abajo, la orientación simétrica en un espejo.

Para dicha actividad, se requiere del uso de una escalera y de un espejo dispuesto horizontalmente; los estudiantes serán los que ejecutan las acciones.

Igual que en la introducción de los sentidos derecha, izquierda, definiremos acciones opuestas o posiciones opuestas, a las que les asignaremos, arbitrariamente, un signo.

La referencia será el espejo.

La acción de subir (positiva), la acción de bajar (negativa).

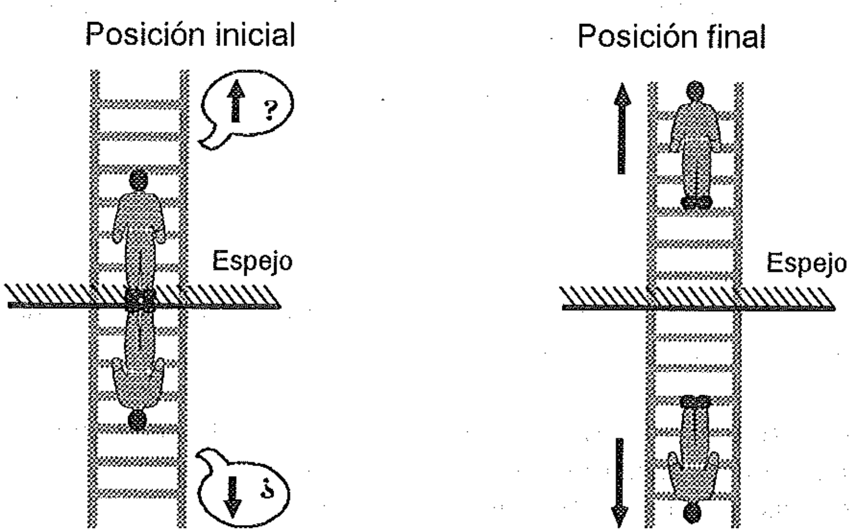
En primera instancia se hace un análisis cualitativo para que el estudiante determine, cómo es el movimiento de la imagen, cuando el objeto ejecuta la acción de subir, o cuando el objeto ejecuta la acción de bajar.

La actividad se plantea con el título de bombero en el espejo, pero se propone, a partir de la experiencia en el salón de clase. (Véase figura siguiente)

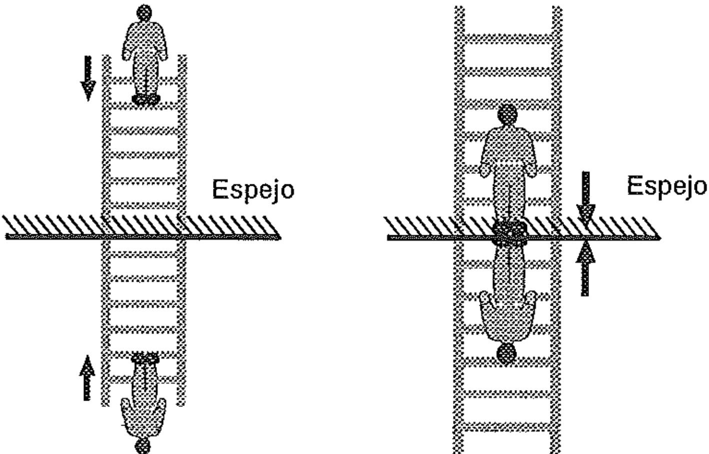
### 2.5.3.4. Bombero en el espejo

Consiste en un bombero que sube y baja por una escalera y desplazándolo hacia arriba o hacia abajo se pregunta hacia dónde se moverá su imagen en el espejo.

1. Desplazamiento hacia arriba (subir a partir del espejo)



2. Desplazamiento hacia abajo (bajar a partir del peldaño anterior)




Se sugiere al estudiante, ejecutar, varias veces, los anteriores movimientos, de tal manera que le permita concluir lo siguiente:

1. Cuando el estudiante ( bombero ), sube la escalera, hay un desplazamiento hacia arriba. Lo que se observa, con respecto al movimiento de la imagen, es que ésta también sube la escalera, pero el desplazamiento es hacia abajo. Es decir, en sentido contrario.

2. Cuando el estudiante (bombero) baja la escalera, hay un desplazamiento hacia abajo. Lo que se observa, con respecto al movimiento de la imagen, es que ésta también baja la escalera, pero hay un desplazamiento hacia arriba. Es decir, en sentido contrario.

**Esquemáticamente:**

1. (sube la escalera)$^{+}$ (objeto)$^{+}$ = desplazamiento hacia arriba (+)
   (sube la escalera)$^{+}$ (imagen)$^{-}$ = desplazamiento hacia abajo ( -)

2. (baja la escalera)$^{-}$ (objeto)$^{+}$ = desplazamiento hacia abajo (-)
   (baja la escalera)$^{-}$ (imagen)$^{-}$ = desplazamiento hacia arriba (+)

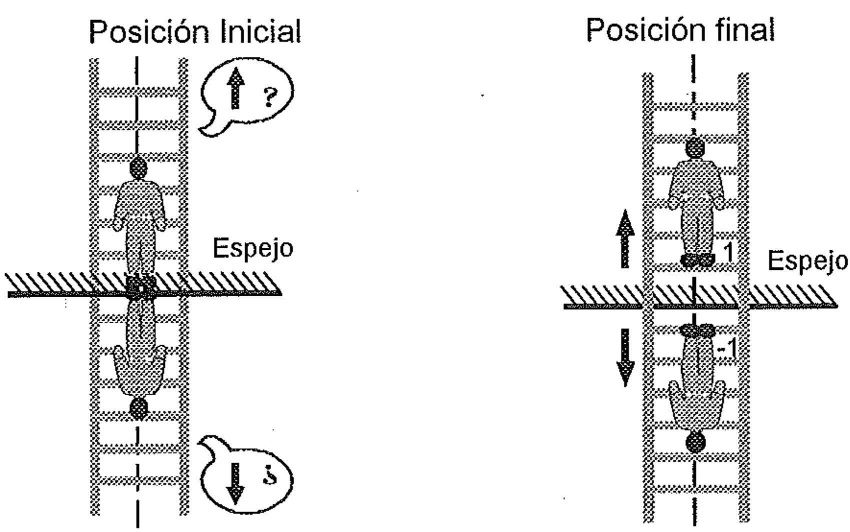
Esquematizando las distintas posibilidades, se ve que hay dos maneras de obtener, como resultado, un desplazamiento hacia arriba . Subiendo la escalera el objeto o bajando la escalera la imagen, y que el desplazamiento hacia abajo se obtiene bajando la escalera el objeto o subiendo la escalera la imagen.

Este análisis, puramente cualitativo, es susceptible de ampliarse mediante una dimensión cuantitativa, que permitirá introducir, de igual manera que en los sentidos, derecha, izquierda, los conceptos de valor absoluto y relativo de un número, vector, propiedad del número opuesto o negativo de un número.

(véase la figura siguiente)

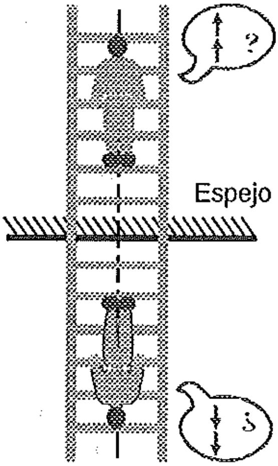
2. A partir del espejo ubíquese en todos los casos, en los peldaños dados a continuación y ejecute la acción de bajar hasta el espejo. a) 1 peldaño, b) 2 peldaños

a) 1 peldaño.

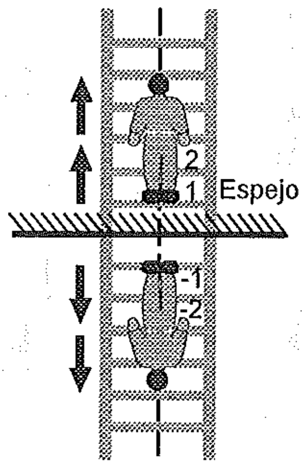


b) 2 peldaños

Posición Inicial




Posición final




**Preguntas:**

Para cada unos de estos casos planteados, responda:

a) ¿Cuántos peldaños subió el objeto y en qué sentido ?

b) ¿Cuántos peldaños subió la imagen y en qué sentido ?

c) Utilizando números enteros con signo, represente cada acción realizada por el objeto y por la imagen.

d) Grafique, utilizando una recta vertical, para marcar los puntos que indican el total de peldaños subidos en cada movimiento y tomando el espejo como referencia.

e) ¿Qué distancia recorrió el objeto y qué distancia recorrió la imagen?

f) Utilizando números enteros, con signos, simbolice cada una de las distancias anteriores.

g) ¿Qué distancia hay entre la imagen y el objeto ?

h) Represente todos los movimientos anteriores, sobre una recta vertical y a partir del espejo, usando segmentos de recta, con una flecha al final que indique el sentido del movimiento.

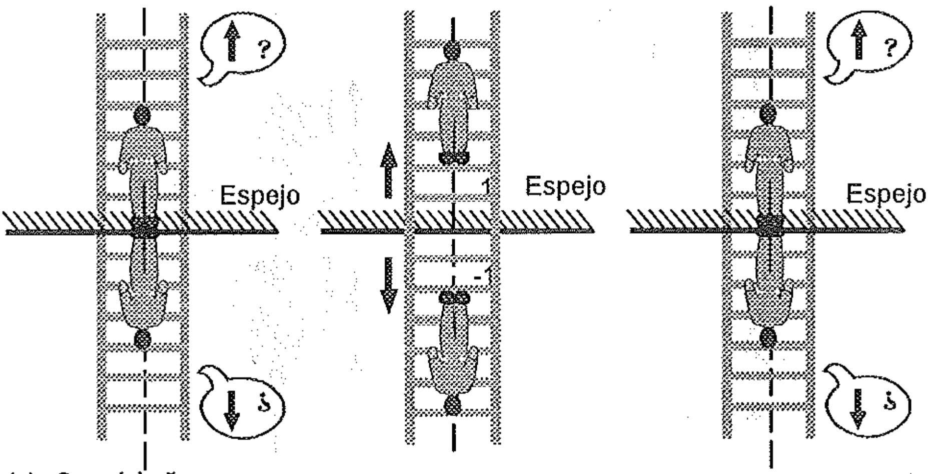
2. A partir del espejo ubíquese en todos los casos, en los peldaños dados a continuación y ejecute la acción de bajar hasta el espejo.

a) 1 peldaño

b) 2 peldaños

Posición Inicial

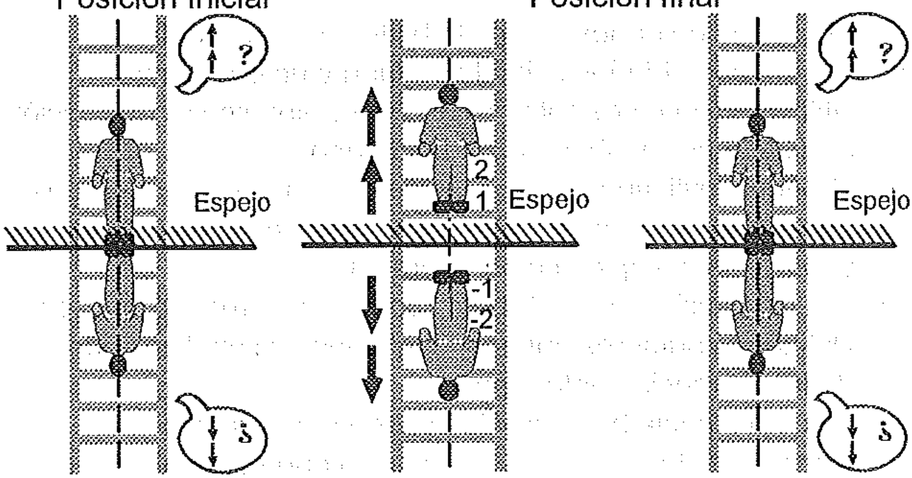
Posición final




b) 2 peldaños

Posición Inicial

Posición final




**Preguntas:**

a) ¿Cuál fue el punto de llegada al ejecutar las acciones anteriores?
b) ¿Con qué número entero se representa dicho punto de llegada?
c) ¿Qué operación realizó en todos los casos anteriores?

Simbolice, utilizando números enteros con signo y especificando el signo de la operación. Tenga en cuenta, tanto la operación del objeto, como la de la imagen.

**Sugerencia:**

El maestro puede proponer ejercicios similares a los de la introducción de los sentidos: derecha, izquierda, que permitan al estudiante sumar y multiplicar números enteros.

### 2.5.4. Actividad N° 4: Operación rescate

**Objetivo:** Construir el conjunto de los números enteros, con base en las clases de equivalencias de números naturales.

**Materiales:**

- Todas las posibles parejas formadas con los números naturales, del 1 al 9, escritas en pequeños cuadros de cartulina y en el interior de una bolsa. Ejemplo: (1,2), (8,9),....
- Descripción del juego e instrucciones para el mismo.
- Gráfico elaborado en el patio, incluyendo un punto de referencia y dos puntos equidistantes, con respecto al mismo.

**Descripción:**

En tres lugares del patio se representan los siguientes lugares: En el centro, un parque de diversiones P y, a la misma distancia de éste (8 espacios iguales marcados con tiza). Pero, en sentidos opuestos, se ubican los lugares F y C que representan la ciudad fantasmagórica y la ciudad de los cazafantasmas, respectivamente.

La historia es la siguiente: algunos fantasmas han ingresado al parque y causan pánico entre los asistentes. Los únicos que pueden arreglar la situación son los cazafantasmas. Pero es necesario avisarles sobre lo acontecido. Alguien, entre los asistentes, portando la bolsa con las parejas de números naturales, afirma que sólo la suerte puede salvarlos y explica que cada persona deberá tomar una pareja de dichos números al azar. El primero de los cuales indicará el número de espacios que puede avanzar hacia los cazafantasmas, mientras que el segundo número, señalará los espacios que debe retroceder hacia la ciudad de los fantasmas. El parque en problemas es el lugar de partida. Si algún asistente logra llegar primero a los cazafantasmas, antes de que otro lo haga a la ciudad de los fantasmas, estarán salvados. En caso contrario, el parque pasará a ser dominio de los fantasmas y todos estarán perdidos. El reto es asumido y el juego comienza con la escogencia, al azar, de cada ficho y la ejecución posterior del desplazamiento indicado. ¿Que pasará? Será posible el rescate del parque, o todos perecerán?

El suspenso continuará mientras el ficho salvador permanezca en el interior de la bolsa.

Será considerado héroe quien llegue a los cazafantasmas y ganadores los estudiantes en dirección a ellos. Es decir, (los números positivos).

El tiempo del juego depende de que tan pronto sean tomados los fichos cuyas parejas señalan el final de la aventura. Se verán en cada uno de los lugares señalados algunos estudiantes que coinciden con el mismo desplazamiento. Si las parejas, en cuestión, permanecen en la bolsa, se invitará a los que quedaron en el punto de partida, a tomar un nuevo ficho, hasta lograr el objetivo.

Posteriormente, por convención se asignará signo "+" a cada lugar de avance hacia C y "-", a cada lugar dirigido hacia F.
Véase la figura siguiente.


OPERACIÓN RESCATE
OBJETIVO: Construir el conjunto de los números enteros con base en las clases de equivalencia de números naturales.
F
P
C
-8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 +1 +2 +3 +4 +5 +6 +7 +8
(1,9) (1,8) (1,7) (1,6) (1,5) (1,4) (1,3) (1,2) (1,1) (2,1) (3,1) (4,1) (5,1) (6,1) (7,1) (8,1) (9,1)
(2,9) (2,8) (2,7) (2,6) (2,5) (2,4) (2,3) (2,2) (3,2) (4,2) (5,2) (6,2) (7,2) (8,2) (9,2)
(3,9) (3,8) (3,7) (3,6) (3,5) (3,4) (3,3) (4,3) (5,3) (6,3) (7,3) (8,3) (9,3)
(4,9) . . . . . . . . . (9,4)
(5,9) . . . . . . . (9,5)
(6,9) . . . . . (9,6)
(7,9) . . . (9,7)
(8,9) . (9,8)
(9,9)
FIGURA 6

**Se proponen, a continuación, preguntas como:**

- ¿Cuántas parejas de números naturales debe contener la bolsa?
- ¿Cuántos alumnos pueden llegar, de esta forma, a cada uno de los lugares F o C ?
- ¿Dónde se concentra mayor número de alumnos?
- ¿Cómo son, entre si, las parejas de números naturales que originan posiciones contrarias?
- ¿Si sólo se usaran números naturales del 1 al 5 para conformar las parejas, ¿cuántos estudiantes podrían participar en el juego y a que distancia deberían ubicarse del parque las dos ciudades?
- ¿Cuántas combinaciones de dos elementos pueden formarse con los números naturales, del 1 al 9, sin repetir elementos?
- Si estás en la posición -7 y deseas ubicarte en el punto +8, ¿qué parejas de números naturales debes conseguir?
- Si estás en la posición +5 y debes capturar el fantasma de la posición - 6, ¿qué desplazamiento harías?. Señala una pareja de números naturales que te lo indique.

## El conjunto de números enteros

La actividad anterior permite definir, formalmente, el conjunto de los números enteros.

Si observamos conjuntos de parejas como el siguiente: {(1,3), (2,4), (3,5), (4,6), (5,7)}, se puede deducir, fácilmente, que aunque, en si mismas, estas parejas de números naturales son diferentes, corresponden a la misma cantidad si aplicamos las correspondientes acciones de avanzar tanto como indique la primera componente y retroceder tanto como indique la segunda componente. A este respecto son, por lo tanto, **equivalentes** y las podemos reunir dentro de la clase de equivalencia [(1,3), (2,4), (3,5), (4,6)]; y la representante es la pareja (1,3) y representa el número entero negativo (-2).

De la misma manera, podemos hallar otros conjuntos de parejas equivalentes, y escribir su representante, que siempre estará determinada por la pareja, cuya primera componente es menor que las otras, lo mismo que la segunda componente.

Entonces, de la clase de equivalencia [(1,1), (2,2), (3,3),...], representada por el par (1,1), resulta el cero.

De la clase de equivalencia [(1,2), (2,3), (3,4), ...], representada por el par (1,2), resulta el (-1).

De esta forma los pares de números naturales, pueden representar todos los enteros positivos, negativos y el cero.

Utilizando, solamente los enteros positivos podemos escribir una regla que determinará cuando un par es igual a otro. La regla es:

$$(a,b) = (c,d) \text{ si solo sí, } a + d = b + c.$$

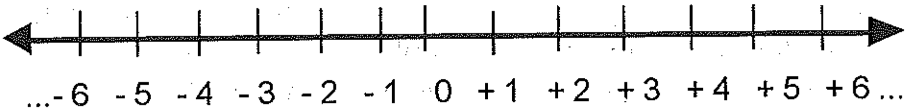
Puede ser demostrado fácilmente que esta regla, para definir la igualdad de pares de números naturales, satisface las tres leyes aritméticas que rigen la igualdad.

De todo lo anterior concluimos: puede construirse el conjunto de los números enteros con clases de equivalencia de números naturales, identificamos el cero con aquellas parejas de números naturales (n,n).

Las parejas (1 + n, 1) definen el entero positivo (+ n).
Las parejas (1,1+ n) definen el entero negativo (- n).
Simbolizamos el nuevo conjunto con la letra Z.

$$Z = [..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3,...]$$

Podemos, ahora, dar una representación geométrica de Z.




Esta representación geométrica de los enteros, como puntos de una recta, representa el modelo pedagógico clásico (heredado de los griegos), llamado recta numérica.

## 2.6. CONCLUSIONES

- Consideramos la propuesta importante para el docente de sexto y séptimo grado, ya que le ofrece un prototipo de didáctica integral para organizar las actividades que le permitan acompañar a los estudiantes, en un aprendizaje más significativo del sistema de los números enteros.

- La estructuración de las actividades, rastreando diferentes estados de complejidad conceptual, permite llegar a las relaciones matemáticas después de procesos intuitivos y reflexivos

- Es importante diseñar problemas que se correspondan con los variados significados, que a nivel fenomenológico, tiene el sistema de los números enteros.

## BIBLIOGRAFÍA

BARRON R. Ángela. Constructivismo y desarrollo de aprendizaje significativo. En: Revista de Educación No 294, 1991.

BELL, E. T. Historia de las matemáticas. Trad. De R. Ortiz. México D. F. 1949

CASTELNUOVO, Emma. Didáctica de la matemática moderna. Editorial F. Trillas, S. A. México. 1970

COHEN, A Rationale in working with Signed numbers, «The Aritmethic Teacher», XII, No 7 (November 1965)

COLL, César. Psicología genética y aprendizajes escolares. Madrid. 1983.

D' AUGUSTINE, Charles, Múltiple methods of teaching mathematics in the elementary school, 2nd de. New York : Harper & Row, 1973.

ERAUT. Michael. Fundamentos de Aritmética. Mc Graw-Hill, INC, U.S.A. México 1972.

FLAVELL, John. La Psicología evolutiva de Jean Piaget, Buenos Aires 1968.

GATTEGNO, Caleb. La pedagogía de las matemáticas En: Piaget, J. y otros. La enseñanza de las matemáticas. Aguilar S.A. de Ediciones. 1963.

GÓMEZ, Pedro. Matemática básica. Bogotá. Universidad de los Andes. 1990.

KENNEDY, Leonard M Guiding Children To Mathematical Discovery. 3rd Edition. Wadsworth Publishing Company, Belmont California. 1980.

LABINOWICZ, E.D. Introducción a Piaget. Pensamiento, aprendizaje, enseñanza. Fondo Educativo Latino-americano. México - Bogotá - Caracas. 1982.

LE LIONNAIS. F. Las grandes corrientes del pensamiento matemático. Eudeba Editorial Universitaria de Buenos Aires. 1962.

LUCIO A. Ricardo. "El enfoque constructivista en la educación", Revista Educación y cultura, No. 34, Santafé de Bogotá. 1994.

Marco general (matemáticas). Propuesta de programa currricular. Séptimo grado E.B.S, Ministerio de Educación Nacional. Santafé de Bogotá. 1990.

MESA B. Orlando. Contextos para el diseño de situaciones problema en la enseñanza de las matemáticas. Medellín. 1997.

MESA B. Orlando. Camino a la aritmética, el ábaco como herramienta. Ediciones M.E.N. 1997.

PAGE, David A. Number Lines, Functions and fundamental topics (New York : The Macmillan Company. 1964). Chap. 6.

PÉREZ, Miranda, Royman y GALLEGO - BADILLO, Rómulo. Corrientes constructivistas. Editorial Colombia Nueva Ltda. 1994.

Philip, Davis. El número. En matemáticas en el mundo moderno. Editorial Blume. Pág. 101 - 110, Sep. 1964.

# EL ACOPLAMIENTO Y SUS APLICACIONES EN LA GEOMETRÍA

DIEGO LEÓN CORREA ARANGO

MEDELLÍN
2002

## 3. EL ACOPLAMIENTO Y SUS APLICACIONES EN LA GEOMETRÍA

Reuniendo figuras geométricas adecuadamente, se forman acoples que permiten ilustrar propiedades e incluso teorémas matemáticos que facilitan plantear y resolver problemas.

Desde lo simple se acoplan las formas geométricas para formar: pisos, paredes, formas de animales y otros mundos, pero también se acoplan formando bellezas naturales y hasta en la misma naturaleza se acoplan los seres al amarse.

AUTOR
DIEGO LEÓN CORREA ARANGO
Licenciado en: Matemáticas y Física
Universidad de Antioquia
Docente
Colegio Nocturno Manuel Cano Rico

"Así es, pues, la matemática:
ella te recuerda las formas invisibles del alma,
da vida a sus propios descubrimientos,
despierta la mente y purifica el intelecto,
brinda luz a nuestras ideas intrínsecas y anula el estado
de olvido y la ignorancia con las cuales nacemos".

Proclo Diádoco

## 3.1 INTRODUCCIÓN

En nuestros programas escolares abundan las actividades secuenciales que tienden a la aplicación de reglas. Esperamos, por ello aplicar una regla en todos los ejercicios y problemas que encontramos. En la escuela son pocos los problemas que invitan a la reflexión o que nos permiten dar vueltas tratando de dar con una solución. Pero la mayoría de problemas que enfrentamos diariamente en nuestras vidas no sólo exigen reflexionar, también nos exige tener un buen pensamiento lógico y abstraer.

Afrontamos con frecuencia, más problemas espaciales que numéricos, como: vendedor, albañil, diseñador, futbolista y muchos otros. Es entonces, la manipulación de objetos concretos la actividad que más constituye la base del conocimiento humano en general y de las matemáticas en particular. Más que diseñar un programa de contenidos ya elaborados es conveniente planificar en el currículo actividades de comportamiento espacial. Y muchos de los ejercicios que encontramos en algunos textos como meros pasatiempos pueden servirnos para realizar muchas actividades interesantes en el aula.

Como lo veremos, en el acoplamiento de piezas en forma adecuada, la actividad de tratar de acoplar, adosar o unir diferentes piezas, elementos o incluso entes abstractos representa una maravillosa fuente de aprendizaje, que además de desarrollar el pensamiento lógico nos permite realizar variadas aplicaciones en la geometría. Para ello es importante hacer uso de nuestra imaginación, como decía Augustus de Morgan: "El poder que mueve las matemáticas no es el raciocinio sino la imaginación".

## 3.2 EL ACOPLAMIENTO

La actividad de tratar de acoplar y adosar (unir) diferentes piezas no solamente planas o sólidas (en matemáticas podemos hablar de un acoplamiento de entes abstractos como puntos, líneas, colores, figuras geométricas en general, números y letras) representa una maravillosa fuente de aprendizaje que nos permite desarrollar entre otros el pensamiento lógico.

## 3.3 FINES DEL ACOPLAMIENTO

El sólo hecho de tomar una colección de polígonos de colores (perfiles planos de lados rectos) ordenarlos y clasificarlos por el número de lados, permite que los niños puedan familiarizarse con las formas de las figuras geométricas. En general el trabajo con piezas bi y tridimensionales constituye un ejercicio preparatorio esencial para alcanzar la comprensión no sólo de las nociones de perímetro, área y volumen y la medición de éstos sino también la comprensión de conceptos como simetría, rotación y traslación.

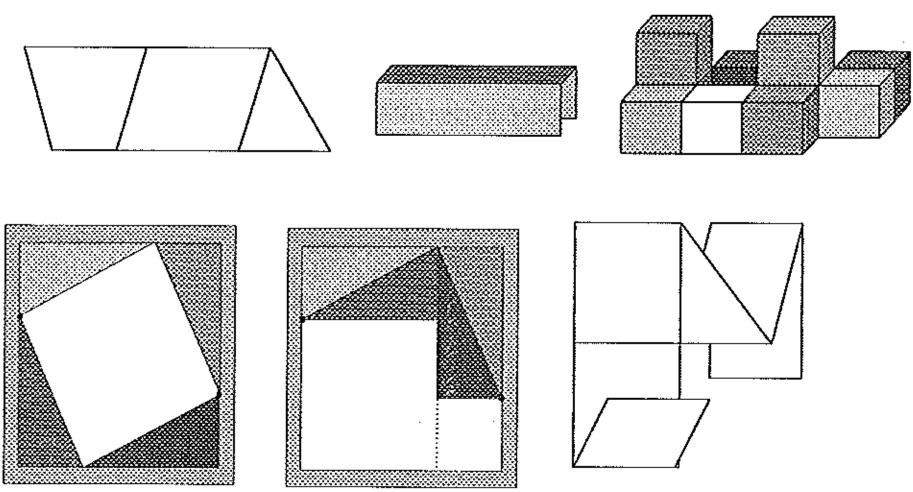
Si nos damos a la tarea de acoplar las piezas para formar otras al tiempo que comprendemos dichos conceptos, desarrollamos el pensamiento lógico.

Además de resolver innumerables problemas en todas aquellas actividades relacionadas con la construcción, electricidad, confección y demás actividades que requieran de un ensamble de piezas.

En nuestro quehacer pedagógico nos permite ejercitar una serie de habilidades importantes, como orientación espacial, percepción de implicaciones, flexibilidad y habilidad en reconstruir y transformar figuras. No sólo nos permite comprender las soluciónes de muchos problemas cotidianos sino que nos facilita la solución de muchos otros. Comprender con mayor facilidad algunas propiedades matemáticas y verificar la existencia de algunos teoremas.

Los niveles de aplicación de las diferentes actividades que aquí se plantean pueden ser muy variados; desde el grado sexto de la Básica al grado undécimo de la Media, según el nivel de dificultad con el cual se plantee e incluso se pueden proponer actividades para trabajar en los grados de Primaria y hasta en Preescolar, permitiendo así desarrollar la motricidad y lateralidad, entre otros.

En la figura 1 se observan algunas clases de acoplamientos



## 3.4 ALGUNAS CLASES DE ACOPLAMIENTOS

### 3.4.1. Acoplamiento Visual

PROPÓSITOS:

- Reconocer las ilusiones ópticas como una forma de acoplamiento.
- Crear expectativa en el alumno aumentando así el interés por el aprendizaje.
- Calcular: fracciones, porcentajes, áreas y perímetros.
- Dar solución a otro tipo de problemas.
- Aplicar conceptos básicos de la teoría combinatoria.

#### 3.4.1.1. PARTE TEÓRICA:

Cuando acoplamos una o más piezas geométricas con otra(s), antes de mover (rotando, trasladando, o girando) una pieza, resulta lógico que hay que verla o tocarla. En términos generales se actúa una vez que se ha examinado lo visto o tocado. El paso de lo examinado a la acción es un proceso bastante importante en el aprendizaje. Inicialmente captamos con la mirada, o con el tacto la información, y ésta se transmite desde el ojo hasta el área visual primaria de la corteza cerebral. La información se descompone al detalle, ésta es la fase preliminar.

En una segunda fase se integran las imágenes en una estructura más compleja que podemos reconocer. Este proceso de captación y formación de una imagen mental es lo que se llama **proceso visual** (Revista: Newton N° 8 /1998/pag.24).

"En la construcción del proceso interviene nuestra experiencia previa, haciendo asociaciones con otras imágenes mentales almacenadas en nuestra memoria.

El desarrollo completo del proceso visual es esencial para lograr una adecuada percepción espacial. De hecho es un primer paso para obtener un conocimiento de las estructuras espaciales que nos rodean".

"El sentido de la vista, a veces, no es absolutamente fiel en la percepción de las imágenes de las formas. El contexto, los hábitos y costumbres influyen en el procesamiento de las imágenes". (Cludia Alisina y otros /1992/pag60).

Un ejemplo ilustrativo son las **ilusiones ópticas** que son impresiones del sentido de la vista interpretadas en forma diferente por el cerebro.

Las ilusiones ópticas no tienen su origen en una visión defectuosa ni en una sugestión psíquica, sino que dependen de la luz, del ángulo de visión o de la forma en que esté realizado el dibujo. Por esto, vemos cosas que en realidad no son así y, a menudo, no percibimos lo que resulta evidente. Gracias a la acción del ojo y del cerebro distinguimos las formas de los objetos, calculamos sus dimensiones, distancias, y otras.

"Si un ciego de nacimiento consiguiese ver tendría dificultades para calcular las distancias. Le parecería como si el Sol, las Estrellas, los objetos más distantes, al igual que los más cercanos, estuvieran delante de su ojo;(...) pues el juicio que nos permite situar los objetos percibidos sólo es producto de la experiencia".(G. Berkeley.). Los filósofos John Locke y el mismo George Berkeley se preguntaron ambos si un ciego de nacimiento que súbitamente recuperase la vista sabría distinguir, sin tocarlos, cuál de dos objetos era un cubo y cuál una esfera. Locke y Berkeley se respondieron que no".
(Martín Gardner. Circo Matemático. /1985/pag.14).

La manera en que percibimos las distancias, las formas y las dimensiones está influida por todo lo que rodea al objeto observado. A veces basta un pequeño detalle para engañar a nuestro ojo.

### 3.4.1.2. Ilusiones Ópticas

**(TALLER 1)**

INDICACIONES MÍNIMAS:

Observa cada una de las siguientes figuras(2, 3 y 4) y resuelve lo que allí se plantea (sin hacer medidas ), explicando tu respuesta:

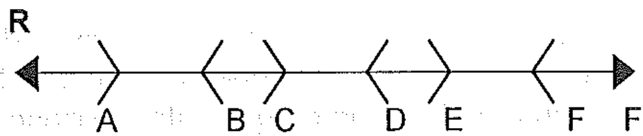


Figura 2

**1.**

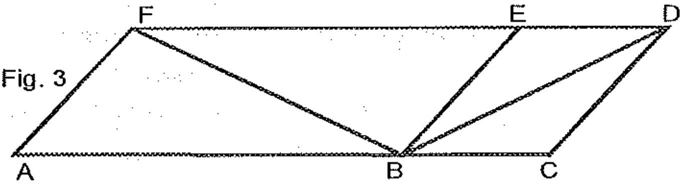
a. ¿Los segmentos en que está dividida la recta **R** son iguales?

b. ¿Cuál es el segmento central?

c. ¿Qué fracción representa el segmento central con relación a la medida total de los segmentos? ¿Qué porcentaje?

**2.**

Fig. 3




Teniendo en cuenta que la figura formada por los puntos A, C, D y F es un paralelogamo y $\overline{BE}$ es paralelo a $\overline{CD}$, resuelva los siguientes planteamientos:

**a.** ¿Entre los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{BE}$ Y $\overline{BF}$ cuáles tienen igual medida?

**b.** Ordena en forma decreciente los segmentos: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{BE}$ Y $\overline{BF}$ descartando aquellos que tienen igual medida.

**c.** ¿Cuántos triángulos se observan en la figura?

**d.** Si las superficies de los paralelogramos formados, uno por los puntos A, C, D y F, y el otro por los puntos B, C, D, E están en la relación: 3 : 2.

Sabiendo que el perímetro del mayor es de 12cm. ¿Puedes calcular ambas áreas?, y ¿el perímetro del menor?. Anota tus observaciones.

**3. Observa la figura 4**

**a.** Gira constantemente la hoja en forma circular y anota tus observaciones.
¿Qué pasaría si a cambio de círculos tenemos cuadrados separados en igual forma?

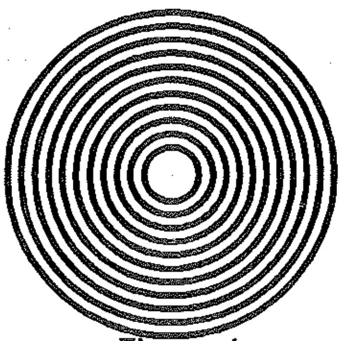


**Figura 4**

**b.** Si el círculo menor tiene un diámetro de 10cm. Calcular el área del círculo mayor y su perímetro,sabiendo que la separación entre cada línea circular es de 0.5m.

**c.** ¿Cuántas veces es menor el círculo central con relación al mayor?

Con éstos dibujos se pueden hacer muchas otras preguntas y en diferentes áreas.

Como por ejemplo: si están en movimiento los círculos. ¿Cúal tendría mayor velocidad circular?

¿Qué condiciones mínimas se requieren para que las velocidades circulares sean iguales?.

### 3. 4. 2. Acoplamientos Manuales
### 3. 4. 2. 1. Acoplamiento con palillos

## TALLER 2

MATERIALES: Palillos o cerillas de igual forma y longitud.

CONDICIONES MÍNIMAS: Los palillos no se pueden doblar ni partir.

PROPÓSITOS:

Desarrollar el pensamiento lógico.
Realizar ejercicios de perímetro y área.
Aplicar los conceptos de perímetro y área en problemas concretos.

PREGUNTAS INICIALES:

1. ¿Cuántos palillos como mínimo necesitarías para formar un cuadrado?

2. ¿Cuántos palillos necesitarías para formar otro cuadrado agregando en cada caso un palillo por cada lado?

3. ¿Cuál es el perímetro y el área que encierra en cada caso?

4. ¿Cuántos cuadrados en total pueden observarse en su interior? Has una lista de tus resultados y anota tus propias conclusiones.

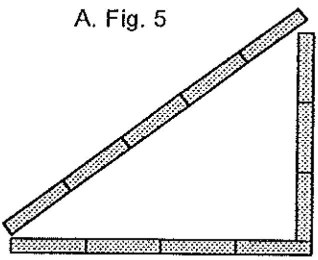
5. ¿Cuántas unidades cuadradas contiene un cuadrado, si su perímetro son 12 palillos?

6. En el cuadrado construido con los 12 palillos, mueve el mínimo de palillos (sin retirarlos) de tal forma que el área encerrada se disminuya en: una unidad, dos unidades, tres unidades, cuatro unidades, cinco unidades y seis unidades.

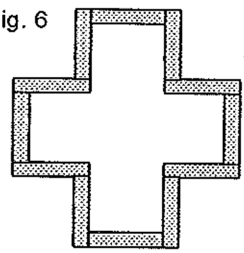
7. Del cuadrado construido cambia 8 palillos de tal forma que el área se disminuya en 4 unidades cuadradas.

ACTIVIDAD: Con los 12 palillos construya: A (ver fig.5) y luego B (ver fig.6)

A. Fig. 5



B. Fig. 6



Utilice para ambos casos como unidad de medida un palillo y resuelva lo que en ellos se plantea

1. ¿Cuál es el perímetro del triángulo?

2. ¿Qué superficie (medida en palillos cuadrados) encierran los palillos dispuestos de tal forma?

3. Trata de cambiar de lugar 4 palillos de tal forma que la nueva figura tenga un área de 3 unidades cuadradas.

4. Si construyes un cuadrado sobre cada uno de los lados del triángulo:

a. ¿Cuántos palillos utilizarías en total?

b. ¿Qué relación encuentras entre el área del cuadrado construido sobre el lado mayor y las áreas construidas sobre los otros dos cuadrados?

5. ¿Cuál es el perímetro y el área que encierra la figura 6?

6. Trata de cambiar 10 palillos de tal forma que el área disminuya el equivalente a un cuadrado de un palillo por cada lado.

7. Si cada palillo mide 1cm. de longitud y se quiere encerrar con ellos un área equivalente a 80 cm. cuadrados. ¿Cuántos palillos en total utilizaríamos?.

8. ¿Cuál sería el perímetro medido en centímetros que encierran los 80 cm. cuadrados?

### 3.4.2.2. Acoplamiento con un mínimo de piezas planas

## TALLER 3

CONDICIONES: En el acoplamiento de dos o más piezas la mínima intersección no puede ser menor que el menor de los lados entre todas las piezas.

ACTIVIDAD: En la figura 7 se muestran 16 cuadrados iguales de 1cm. de lado cada uno, que acoplados forman un cuadrado mayor, de 4cm. de lado.

1. ¿Qué figura(o figuras) u objetos conoces o has conocido con dicha(s) forma(s) individualmente y con las formas que se derivan de sus acoplamientos?

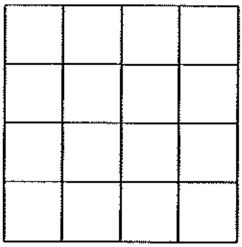


Fig. 7

Dividamos éste cuadrado mayor en dos piezas como muestra la figura 8.
Con éstas dos piezas podemos además de plantear y resolver problemas, realizar muchas otras actividades.
Analicemos algunas de ellas

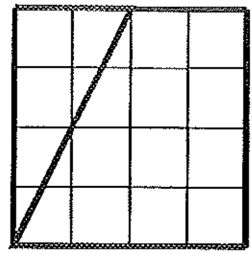


Fig. 8

2. ¿Qué clase de polígono es?

3. Dibujar (rellenando su interior) una figura con cada una de ellas ( sin tener en cuenta las cuadrículas).

4. Construir otras figuras a escala mayor y menor.

5. Crear una historia (o plantear un problema) que permita explicar dicha partición en esa forma y tamaños específicos.

Realiza algunos acoplamientos con las figuras y responde:

1. ¿Puede variar el área?. Si la respuesta es afirmativa, ¿cómo formar el área máxima?

2. ¿Puede variar el perímetro?. Si la respuesta es afirmativa, ¿cómo formar el máximo perímetro?. Y ¿el mínimo?

3. ¿Cuántos pentágonos diferentes se pueden formar?. ¿Cuáles son sus áreas y sus perímetros?.
4. ¿Cuántos heptágonos se pueden formar?

Podemos plantear algunos ejercicios aplicando las **competencias,** he aquí algunas ideas que pueden facilitar su construcción:

1. ¿Encierra mayor área el perímetro del cuadrado o el perímetro del triángulo? explique:

a. Utilizando el Teorema de Pitágoras.

b. Sin utilizar el Teorema de Pitágoras.

c. Por simple apreciación visual.

2. ¿En cuál de los terrenos resulta más económico realizar un sembrado, sabiendo que la maya para encerrarlo tiene un costo de $15000 el metro lineal?. ¿Resultará igual?

Se pueden plantear muchos más problemas y actividades relacionadas con simetrías, rotaciones y traslaciones, además de permitirnos un mejor desarrollo del pensamiento lógico.

### 3.4.2.3. Piezas geométricas

**TALLER 4**

En un cuadrado trazamos líneas rectas a los puntos medios como se muestra en la figura 9 sacamos de allí 5 piezas (ver figura 10)

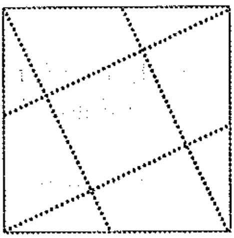


Fig. 9

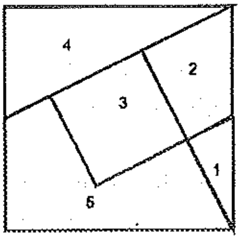



Fig. 10

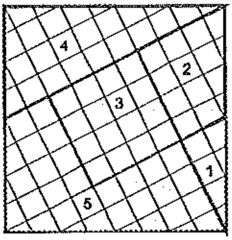



Fig. 11

Se divide la figura en pequeños cuadrados iguales como se muestra en la figura 11. Tomando como unidad de medida el lado de uno de los cuadrados pequeños. Resuelva:

ACTIVIDAD: Parte 1

1. ¿Cuántas unidades mide (aproximadamente) por cada lado el cuadrado construido inicialmente?.

2. ¿Cuál es su área?

3. Calcule por separado el área de cada una de las cinco piezas y sume éstos resultados.

4. ¿En cuánto difieren el valor de la suma de las áreas de las cinco piezas con el área que se halló del cuadrado grande?

5. Analiza éstas diferencias.

ACTIVIDAD: Parte 2.

**Diferentes acoplamientos de las piezas.**

CONDICIONES: Debe partir del cuadrado inicial (ver fig.11); sólo puede mover una pieza ( por giro, traslación o rotación).

1. Construye un triángulo rectángulo y escribe por lo menos tres objetos que contengan triángulos o tengan la forma de un triángulo.

2. Construye un paralelogramo no rectángulo. Escribe por lo menos tres objetos que contengan paralelogramos o tengan la forma de un paralelogramo.

3. Obtener un trapecio isósceles. Escribe por lo menos tres objetos que contengan trapecios isósceles o tengan la forma de un trapecio isósceles.

4. Obtener un pentágono.

5. Obtener un decágono.

Escribe algunas características para cada una de las 5 figuras anteriores.

Calcular para cada una de las 5 figuras anteriores el área y el perímetro. ¿Varía el área?. ¿Varía el perímetro?

Construye 5 problemas relacionados con cada una de las 5 figuras anteriores(uno para cada una).

Explora con otras figuras que puedas formar, describe de ellas algunas características.

### 3.4.2.4. El Tangram

#### 3. 4. 2. 4. 1. ¿Que es y cuándo apareció?

El **TANGRAM** es un rompecabezas formado por siete piezas recortadas a partir de un cuadrado. Estas son: un paralelogramo, un cuadrado y cinco triángulos rectángulos.

Es originario de China (se ignora quién lo inventó) donde se conoce con el nombre de: Ch´i ch´iao t´u, que significa "Siete-ingenioso plan" o, menos literalmente, "tabla de la sabiduría" o "tabla de los siete elementos" o simplemente "ingenioso rompecabezas de siete piezas". Algunos consideran que existe desde el comienzo de la China unificada, durante la dinastía Ts´in (1122 - 256 antes de nuestra era). Como los registros de este período en ese país son muy escasos, toda una valiosa parte de la historia de la humanidad aún permanece oscura. La más antigua de las referencias conocidas es un libro publicado en China en 1803.

La palabra **TANGRAM** aparece alrededor del año 1864.

A pesar de tratarse de un juego respetado el **TANGRAM** solamente se difundió en el Occidente en el siglo XIX, para convertirse desde entonces en un juego respetado por las esferas intelectuales de Europa y América, apareciendo así mismo, numerosas publicaciones y estudios dedicados a él.

"Extraer de la forma pura del cuadrado una infinidad de imágenes construidas por una geometría flexible en la cual la imaginación y la habilidad manual se unen para formar un universo lúdico. Así podría definirse en síntesis el TANGRAM según Carlos Drummond de Andrade, uno de los poetas más representativos de Suramérica".
(Revista: Juegos muy Interesante N° 18/1991/pág8)

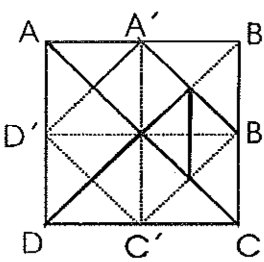


Fig. 12

### 3.4.2.4.2. ¿Cómo construirlo?

Construimos inicialmente el cuadrado ABCD que dividiremos con los siguientes trazos (ver figura 12) En la cual se cumple que: **A´, B´, C´,D´,** son puntos medios del cuadrado:

Se recortan las siete piezas formadas con línea gruesa trazando previamente cuadrículas (ver fig.13) o en colores según el grado o el nivel para el cual se emplea (ver fig.14)

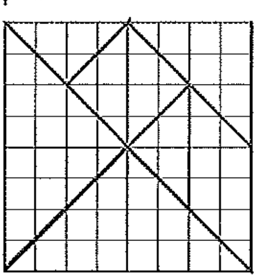


Fig. 13

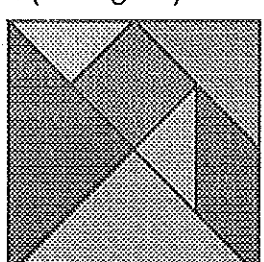


Fig. 14

### 3.4.2.4.3. ¿Para qué sirve?

El objetivo inicial del **TANGRAM** es componer todo tipo de perfiles(figuras geométricas, objetos, seres y animales), utilizando siempre las siete piezas del juego. Hoy el **TANGRAM** es reconocido como una excelente herramienta pedagógica en numerosas instituciones educativas de todo el mundo, para desarrollar la creatividad y el pensamiento, hasta como herramienta de test en la psicología moderna.

Con él se pueden plantear muy buenas actividades útiles para la exploración de las propiedades de las formas geométricas. Tales actividades no son sólo pasatiempos, sino parte integral del aprendizaje de las matemáticas.

Sin instrumentos diferentes a los siete elementos del **TANGRAM,** se han encontrado originales demostraciones a algunos teoremas de Euclides y Pitágoras, a la vez que se han planteado nuevos ejercicios matemáticos y geométricos de gran interés para la juventud. Además de motivación, desarrollo de la capacidad para la resolución de problemas y ayudar al desarrollo de las nociones de ángulos rectos, paralelismo y área.

Después de un tiempo de trabajar con el **TANGRAM,** se nota un progreso en el proceso de elaboración y análisis, desarrolla el pensamiento lógico de tal forma que al enfrentarse con un problema no hay desánimo en buscar la solución, y a nivel de grupo permite una mejor integración.

"Los juegos con **TANGRAMS** en términos generales pueden agruparse en tres categorías:

1. Búsqueda de una o varias maneras de construir un tangram

dado, o de hallar una demostración elegante de la imposibilidad de formarlo.

2. Hallar la manera de representar, de la forma más artística o humorística posible, siluetas de animales, figuras humanas, u otros objetos reconocibles.

3. Resolver una diversidad de problemas de geometría que se plantean con las siete piezas del TANGRAM." (Martín Gardner. Viajes por el tiempo./1988/pag. 27 y 28)

Si el trazado se hace sobre una hoja cuadriculada se pueden realizar ejercicios y plantear problemas relacionados con perímetros y áreas.

Algunas conclusiones (problemas) de tipo geométrico relacionadas con el Tangram son:

1. El máximo de lados que puede tener un tangram propio (o sea que no tengan contacto sólo con los vértices) son 23.

2. El número de pentágonos que se pueden formar con las 7 piezas del tangram son 53.

3. Teniendo en cuenta que un tangram convexo es un polígono en el cual todos los ángulos que se forman en los vértices tienen menos de 180 grados, solamente hay 13 tangrams convexos, lo cual fue demostrado en 1942 por Fu Tsiang Wang y Chuan - Chih - Chih Hsiung, en "A Theorem on the Tangram".

4. No es posible construir con las siete piezas del tangram cuadriláteros no convexos.

5. No se ha determinado todavía el número de hexágonos que

se pueden formar con las siete piezas del <u>tangram</u> (aunque se sabe que son finitos) al parecer pasa de millones su número.
Otro tipo de problema de tangrams es el de hallar formas de transformar un <u>tangram</u> en otro con un número mínimo de movimientos. (por movimiento se entiende el cambio de posición de un conjunto de una o varias piezas del <u>tangram</u> sin modificar la configuración del conjunto).

Existen programas de computador que inspeccionan cualquier tangram dado y buscan al menos una solución. El especialista en ciencias de computo E.S. Deutsch, desarrolló y publicó el primer programa para <u>tangrams</u> propios.

Son infinidad de figuras que pueden formarse con las piezas del **TANGRAM.**

### 3.4.2.4.4. Taller 5

1. Construir cada una de las anteriores figuras (ver fig.15), utilizando las 7 piezas.

2. Calcular el área de las figuras, mostrando el algoritmo permitido.

3. Construir una historia utilizando las figuras (un TANGRAM en hoja cuadriculada).

4. Calcular el perímetro para cada figura.

5. Verificar o comprobar algunos de los problemas geométricos hallados con el <u>tangram</u>. (En las conclusiones aparecen 5 de ellos).

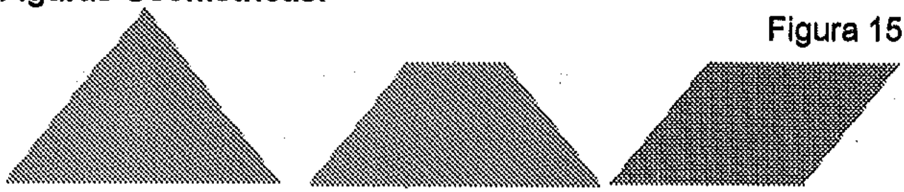
6. Construir otras figuras diferentes a las propuestas en la figura 15.

7. Realiza figuras utilizando dos juegos de piezas (dos TANGRAMS)

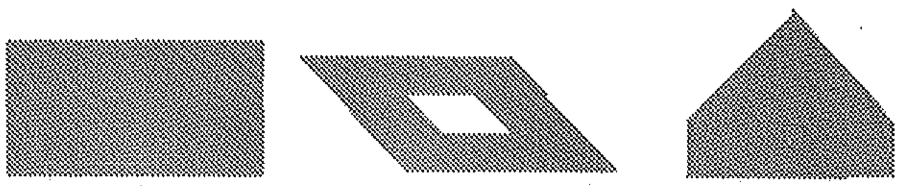
### 3.4.2.4.5. Algunas figuras con el Tangram

**Figuras Geométricas:**

Figura 15

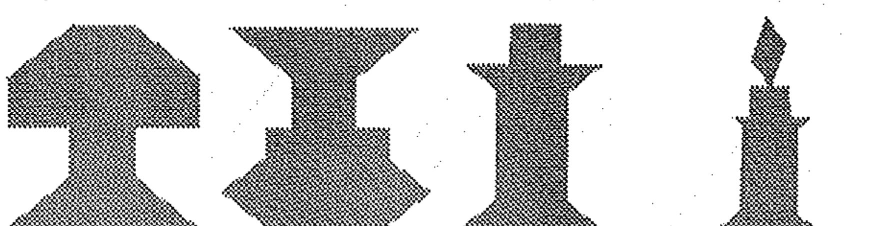


Triángulo Trapecio Paralelogramo

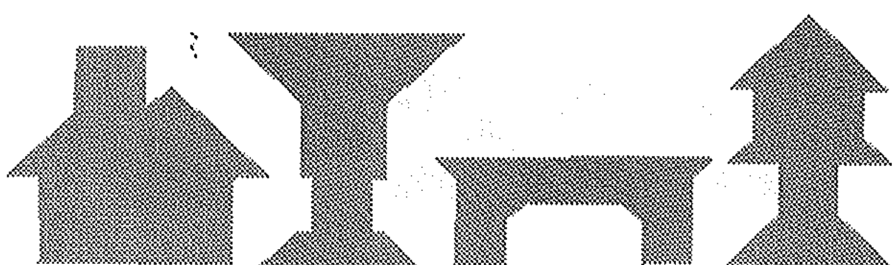


Rectángulo Paralelogramo Pentágono

**Objetos varios:**

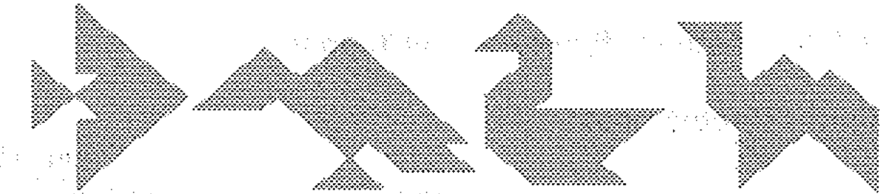


Lámpara Florero Candelero Vela con candelero



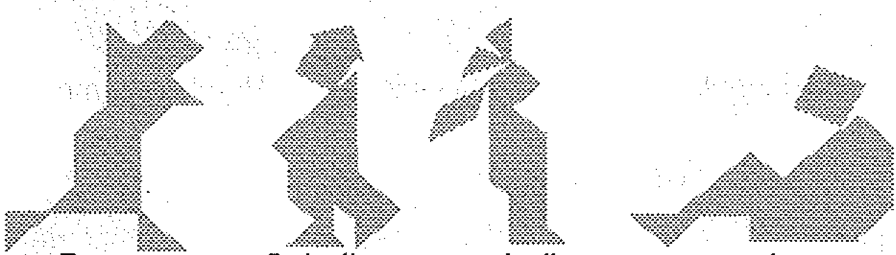
Casa Copa Mesa Pajarera

**Animales:**



Pez Buitre Pato Camello

**Personas:**



Dama caminando Caballero caminando Indio Joven sentado

8. Experimenta, formando diferentes figuras con el siguiente par de piezas del TANGRAM. (la figura 16 corresponde al primer par y la 17 al segundo)

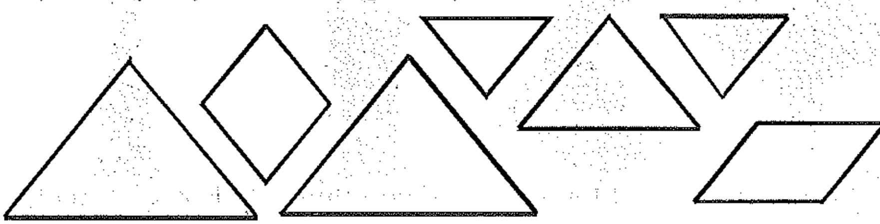


Fig. 16 Siendo ambos lados sin colorear.

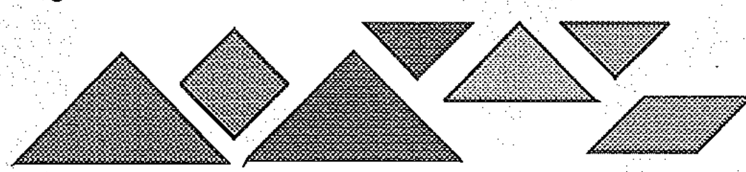


Fig. 17 Coloreando sólo uno de los lados.

¿En qué forma difiere el grado de dificultad, si en éste último caso no deben quedar piezas sin colorear?.

### 3.4.2.5. Acoplamientos Pitagóricos

#### 3.4.2.5.1. Algunos datos hitóricos:

Pitágoras fue un Matemático y Filósofo Griego que nació hacia el año 569 antes de Cristo. El Teorema que lleva su nombre ha dado lugar a numerosas y diversas investigaciones. Se han elaborado centenares de demostraciones del Teorema tanto por Matemáticos y profesionales como por aficionados.

El enunciado de dicho teorema (conocido universalmente como el puente del burro) es el siguiente:

"En un triángulo rectángulo cualesquiera y en longitudes de una misma unidad el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos".

Se conoce como hipotenusa en un triángulo rectángulo al mayor de los lados y es opuesto al ángulo recto. Y los catetos son los dos lados que forman entre si el ángulo recto.

Al parecer Pitágoras celebró su demostración sacrificando una centena de bueyes aunque dicha demostración no era sino una justificación de la propiedad. Ésta como muchas otras investigaciones antiguas se han perdido.

#### 3.4.2.5.2. Algunas Ilustraciones

**Gráfica: Matemáticamente se expresa como:**

**Sea :** c **la hipotenusa**

a,b los catetos **entonces** $\boxed{c^2 = a^2 + b^2}$

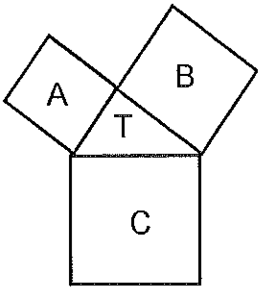
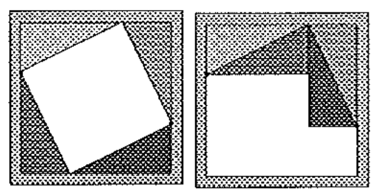


Figura 18

*"Aplicada a la figura (Fig. 18), del conocido " molino de viento", la justificación se basaba en una equivalencia de cuadrados: el cuadrado C, trazado sobre la hipotenusa del triángulo rectángulo, debía ser equivalente a la unión de los cuadrados A y B, trazados sobre los catetos; en efecto, el cuadrado (número) de cada lado del triángulo rectángulo corresponde al área del cuadrado (figura) trazado sobre ese mismo lado". (Henry Camus /1995/pag 124)*

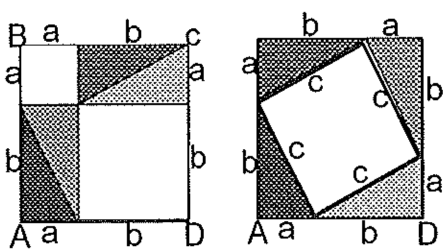
La justificación fue realizada, no por Pitágoras solo sino por un equipo de **Pitagóricos**. La propiedad ya había aparecido unos diez siglos antes en las tablas de arcilla babilónica, y es probable que los egipcios ya la hubieran aplicado a la construcción de sus templos

*La figura19 ilustra un método que se le atribuye al matemático hindú Bhaskara (hacia 1150 d. C.). Según él, no es necesaria explicación alguna, y se limitó a escribir "¡Mira!" bajo la figura.*


a Fig. 19 b

*Se puede construir un modelo de corcho, cartulina de color y alfileres*

*(Brian Bolt. 101 Proyectos... /1991/pag83).*



a Fig. 20 b

Colocamos los cuatro triángulos como se ve en la figura 20 a, con el fin de formar un cuadrado ABCD de lado a + b y dejar en el centro un hueco cuadrado de lado c.

Dibujemos el cuadrado ABCD. Desplacemos ahora los triángulos y situémoslos en la posición mostrada en la figura 20 b, que deja dos huecos cuadrados de lados a y b. La superficie blanca ha de ser la misma en los dos casos, así que $c^2 = a^2 + b^2$.

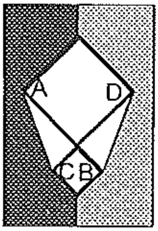


Fig. 21

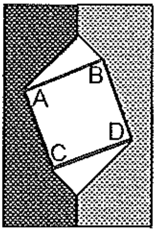


Fig. 22

En las figuras 21 y 22 se ilustra una atractiva demostración con dos piezas de cartón fuerte. Primero se unen A con B y C con D mediante una goma o cinta elástica, fig. 21. Las piezas se sostienen una en cada mano; después, se le da la vuelta a la pieza de la derecha, dando la posición que vemos en el segundo diagrama, fig. 22.

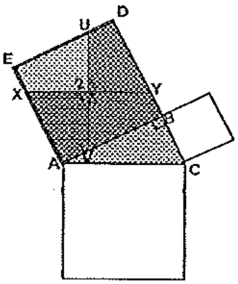


Fig. 23

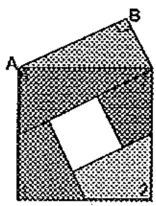


Fig. 24

Halla el centro del cuadrado ABDE trazando sus diagonales BE y AD. Ahora divide este cuadrado en cuatro piezas iguales trazando las rectas XY y UV que pasan por su centro y son, respectivamente, paralelas a los lados del cuadrado sobre la hipotenusa AC.

Las figuras 23 y 24 nos presenta una bonita ilustración de éste teorema debida a Henry Perigal (corredor de Bolsa londinense y astrónomo aficionado) hacia 1830.

**Procedimiento:** "Dibuja un triángulo rectángulo ABC y los cuadrados construidos sobre sus lados, como indica la figura 23 Corta el cuadrado ABDE en las cuatro piezas anteriores y colócalas en las esquinas del cuadrado de lado AC, siguiendo la numeración de la figura. En el medio queda un cuadrado pequeño sin cubrir, que es exactamente igual al cuadrado de lado BC (compruébalo)". (Brian Bolt. Actividades M./1989/pag.28).

### 3.4.2.5.3. Taller 6

Construye un cuadrado como el de la figura 25 y recorta las 4 piezas que se marcan con línea gruesa, luego recorta un cuadrado como el de la figura 26.

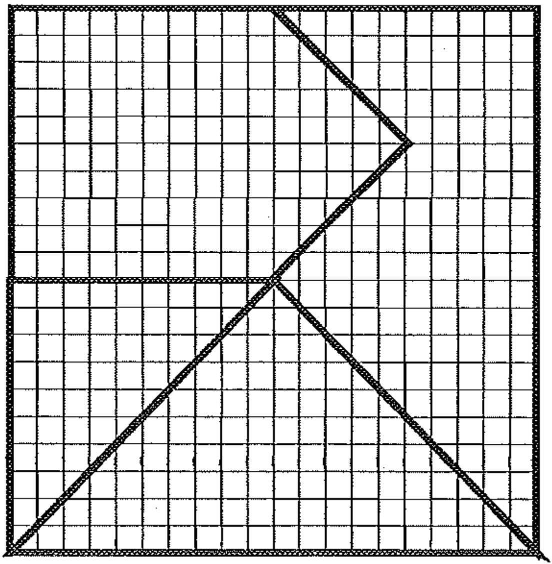


Fig. 25

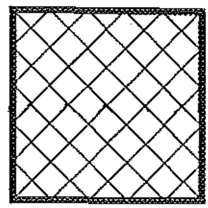


Fig. 26

Ahora resuelve:

1. ¿Qué nombre recibe cada una de las 4 figuras geométricas de la fig. 25?.

2. Construye con las 5 piezas recortadas un cuadrado.

3. ¿Cuál es el área que limita los tres cuadrados formados (fig. 25, fig. 26, y el formado con las piezas de la fig. 25 y la fig. 26)?

4. Calcula el área de cada pieza, tomando como unidad de medida el lado de una cuadrícula
5. ¿Qué otros polígonos diferentes al cuadrado puedes formar con las 4 primeras piezas? y ¿Con las 5 piezas?

6. Calcula el perímetro de cada una de las 5 piezas.

7. Construye en hojas cuadriculadas dos cuadrados de 8 y 6

longitudes del lado de la cuadrícula. Ahora divide estos dos cuadrados en diferentes piezas. Luego trata de formar un cuadrado con todas las piezas formadas. Intenta realizar unas divisiones convenientemente.

Veamos dos divisiones obtenidas por estudiantes de 6° y 7° grado (ver fig. 27):

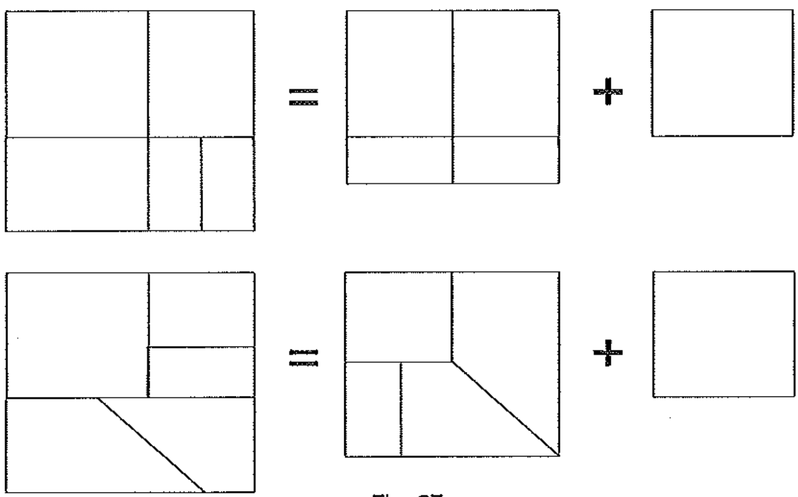


Fig. 27

A partir del grado 7° las pequeñas deducciones son muy deseables en Geometría. Las ilustraciones visuales como las expuestas anteriormente son especialmente atractivas, dichas ilustraciones son particularmente recomendables en los casos de equivalencia de áreas, superposiciones efectivas de figuras y descomposiciones de figuras.

### 3.4.2.6. El Origami Como Acoplamiento

Al doblar un papel varias veces uniendo sus partes hasta formar diferentes figuras, estamos realizando un acoplamiento.

### 3.4.2.6.1. ¿Qué es el Origami (o Papiroflexia)?

Es el arte de crear figuras fácilmente reconocibles a partir de una hoja de papel, sin cortar ni pegar, simplemente doblando. Sus posibilidades son infinitas, se puede clasificar como un juego, un pasatiempo, un arte, una ciencia, una artesanía y muchas otras cosas más.

### 3. 4. 2. 6. 2. ¿Cuando apareció?

"El origen del origami suele atribuirse al Japón, donde siempre ha contado con gran afición popular. Sin embargo, ha habido una tradición europea totalmente independiente de la japonesa. La evolución histórica de la papiroflexia está íntimamente ligada a la del papel de fibra vegetal". (Eduardo Clemente /1990/pag.16). En Europa, parece que ya en el siglo XVI o incluso antes el arte de plegar papel estaba difundido a nivel popular. El hecho de que todas las figuras tradicionales que conocemos hayan llegado hasta nuestros días transmitiéndose de generación en generación, de padres a hijos, implica una tradición viva y continuada de varios siglos, por lo que la papiroflexia ha tenido seguramente una gran difusión desde hace mucho tiempo. "Parece ser que fue en la Exposición Universal de 1878, en París, cuando llegaron a España las primeras figuras japonesas, uniéndose así ambas tradiciones, Oriental y Occidental, que hasta entonces habían evolucionado aisladamente. Este hecho dio a la papiroflexia una dimensión más amplia que la que había tenido hasta entonces". (Eduardo Clemente /1990/pag.19). Pero sólo a principios del siglo actual empezó éste arte a desarrollarse rápidamente. En España aparecieron pioneros como D. Miguel de Unamuno (1864 - 1936), que fue el primer hombre de ciencia del mundo que se tomó en serio el arte de hacer pajaritas de papel, y el Dr. Solórzano (1883 - 1970), infatigable creador durante toda su vida, y en Japón, Isao Honda (1888 - 1975), gran investigador y divulgador del origami, y Akira Yoshizawa (n. 1911), actualmente considerado el más prolífico de los autores, y el más conocido dentro y fuera del Japón.

### 3.4.2.6.3. ¿Para qué sirve?

Posee valores muy positivos por ejemplo, su capacidad para desarrollar la habilidad manual, la imaginación, la intuición geométrica, el espíritu creativo, desarrolla la inteligencia y facilita la comprensión de conceptos matemáticos, implica en mayor o menor grado, dependiendo de su complejidad, análisis, especulación, en definitiva, agilidad mental que desarrolla las posibilidades intelectuales para enfrentarse con otros problemas de lógica o matemática.

"A la papiroflexia también se le puede considerar como ciencia. Los pliegues no son más que operaciones de simetría a veces bastante complejas, y pueden ser ideadas y estudiadas metodológicamente en términos geométricos. El carácter matemático que pueda tener el plegado de papel no está reñido con el lado artístico, aunque tampoco tiene por qué coincidir.

Como ejemplo del aspecto científico de la papiroflexia, podemos mencionar a los aficionados que se dedican a demostrar teoremas geométricos utilizándola.

Incluso hay algún trabajo publicado sobre la resolución de ecuaciones de tercer grado sólo doblando el papel". (Eduardo Clemente /1990/pag.12).

La papiroflexia es además un buen instrumento en el proceso educativo. Las virtudes más evidentes en principio, son el desarrollo de la habilidad manual y mental, el de la concepción volumétrica y la coordinación de movimientos, que ayudan al escolar a tomar conciencia de la operatividad de las propias manos y estimula la creatividad.

### 3.4.2.6.4. Construcción de una caja sin tapa:

En un trozo de papel rectangular cuadriculado (un centímetro por cada lado) realicemos los siguientes pasos (pisando firme cada doblez, ver figura 28):

1. Doblamos por la mitad.

2 Doblamos nuevamente por la mitad.

3. Levantamos por una de las aberturas haciendo presión en el vértice cerrado y levantándolo hasta formar un triángulo isósceles formado sobre una base rectangular.

4. Doblamos media porción de triángulo, formando así un pentágono con dos pares de lados opuestos paralelos.

5. Tomando el pentágono, descansando sobre la base mayor y sosteniéndolo, del lado no paralelo a ningún otro, levantamos por la abertura que señala el ángulo recto, opuesto al lado no paralelo y haciendo presión en el vértice cerrado, levantamos hasta formar un triángulo con iguales características al formado en el punto 3.

6. Doblamos media porción de triángulo, formando un pentágono isósceles, con los dos lados más pequeños iguales y paralelos.

7. Doblamos cada una de las mitades, de las mitades del pentágono, en forma paralela a la línea central (formada por un doblez anterior y que divide el pentágono en dos partes iguales).

8. Volteamos la figura y realizamos los mismos pasos que en el punto 7. Obteniendo así, un pentágono similar al anterior pero menor y con los dos lados paralelos, ya no tan pequeños.

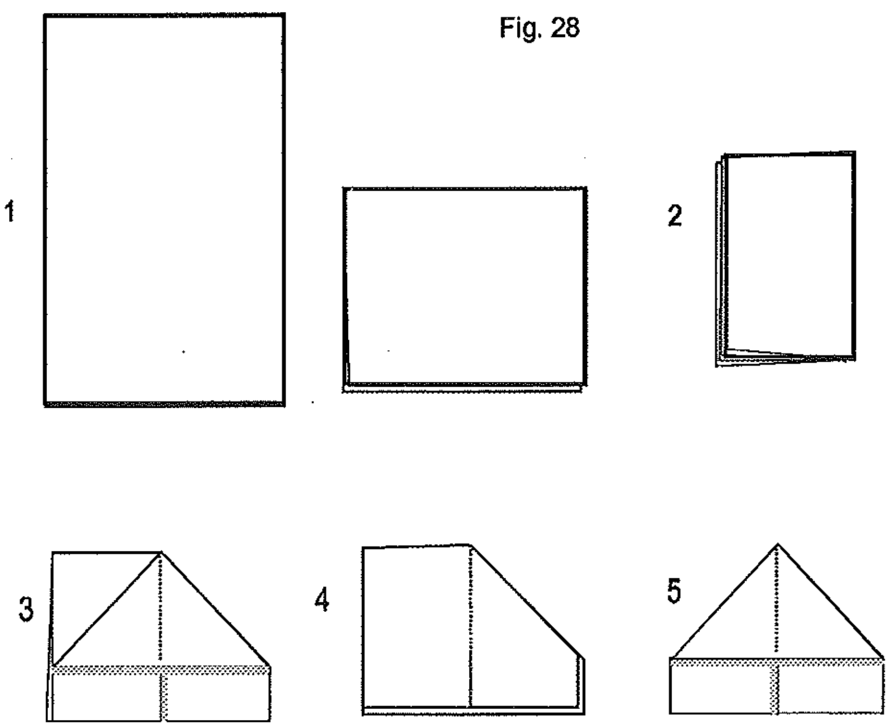
9. Doblamos una especie de porción rectangular visible hacia arriba.

10. Volteamos la figura y realizamos los mismos pasos que en el punto 9.

11. Levantamos la figura pentagonal obtenida, con el ángulo menor hacia abajo, abriendo la parte superior.

12. Le damos forma, de una caja sin tapa, haciendo presión en los lados laterales del fondo.

Fig. 28



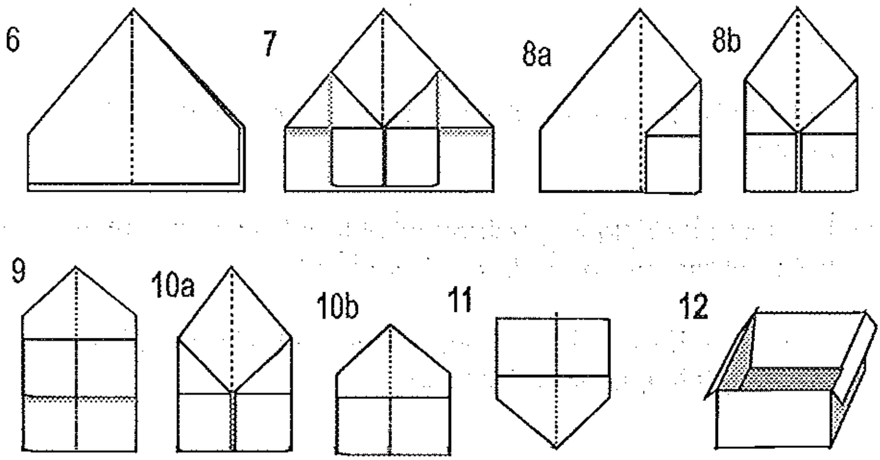



Fig. 28

### 3.4.2.6.5. Taller 7

Preguntas relacionadas a la construcción anterior:

1. ¿Cuántos centímetros mide cada una de las tres dimensiones de la caja?

2. ¿Cuántos centímetros cúbicos (máximo) de agua le caben a la caja?

3. Si ampliamos un centímetro cuatro veces, de tal forma, que un centímetro cuadrado en realidad mida 16 centímetros cuadrados. Construye una caja cuya base mida 16 centímetros cuadrados. ¿Cuál es su volumen?

## BIBLIOGRAFÍA


Alsina, Claudia, y otros. Invitación a la Didáctica de la Geometría. Madrid, Síntesis,1992.

Bolt, Brian. Actividades Matemáticas. Barcelona, Labor, 1988.

......... Más Actividades Matemáticas. Barcelona, Labor, 1988.

......... Aún Más Actividades Matemáticas. Barcelona, Labor, 1989.

Bolt, Brian y Hobbs, David.101 Proyectos Matemáticos. Barcelona, Labor,1991.

Camous, Henry. Problemas y Juegos con la Matemática. Barcelona, Gedisa, 1995.

Clemente, Eduardo, Papiroflexia, España, Plaza y Janes Editores. S.A., 1990.

Dickson, Linda. Brown, Margaraet, y Gibson, Olwen. El Aprendizaje de las Matemáticas. Barcelona, Labor, 1991.

Gardner, Martín. Mosaicos de Penrose y Escotillas Cifradas. Barcelona, Labor, 1990.

......... Viajes por el Tiempo. Barcelona, Labor, 1988.

......... Rosquillas Anudadas y otras amenidades matemáticas. Barcelona, Labor, 1987.

......... Inspiración ¡Ajá!. Barcelona, Labor, 1992.

......... ¡Ajá! Paradojas. Barcelona, Labor, 1983.

......... Circo Matemático. Madrid, Alianza, 1985.

Migal. Trucos con Palillos, España, Cofas, S.A, 1995.

Migal. Papiroflexia, España, Cofas, S.A, 1995.

Quatro Children´s Books Ltd. , El gran libro del tangram, España, Ediciones Grupo Zeta. 2000.

Revista Newton. N°18, Madrid, Unidad Editorial, 1998.

# LA ARITMETIZACIÓN DE LA GEOMETRÍA

JORGE CARDEÑO ESPINOSA

MEDELLÍN
2002

## 4. LA ARITMETIZACIÓN DE LA GEOMETRÍA

Se busca vincular la enseñanza- aprendizaje de la geometría con la aritmética, como una posible vía metodológica de mejorar de manera significativa la comprensión de los conceptos matemáticos básicos, que se orientan en la educación básica.

De otro lado, partiendo del contexto actual educativo y sus continuas reformas en nuestro país, establecer la relación entre las distintas categorías pedagógicas con referencia a indicadores de logro, logros, procesos y competencias a desarrollar en la matemáticas, pués una de las tendencias educativas de mayor influencia actual, tiene que ver con éste último enfoque metodológico.

Se trata pues de ejemplificar la permanente relación existente entre geometría y aritmética y a su vez crear la necesidad de definir un currículo básico de geometría en el ámbito escolar.


AUTOR<br>
JORGE CARDEÑO ESPINOSA<br>
Lic. Matemáticas-Física. U. De A.<br>
Director CEID-ADIDA<br>
Docente del<br>
Colegio José Acevedo y Gómez

"La Geometría es la expresión más elaborada del pensamiento lógico en el lenguaje de las Matemáticas".
COSME MATÍAS BURGOS
I. S. P. "Enrique José Varona", La Habana, Cuba

## 4.1. JUSTIFICACIÓN

Es necesario responder a la pregunta: ¿Qué implicaciones tiene asumir los Lineamientos Curriculares en el Área de Matemáticas por parte de los docentes y las docentes en las instituciones educativas?. Pretender dar respuesta a esto presupone una nueva mirada sobre la importancia de ésta ciencia como instrumento que posibilita el pensamiento y la creatividad en nuestros estudiantes, es la búsqueda permanente de que hacer y cómo hacer para que estos sientan lo importante que es aprender Matemáticas.

Lo primero a declarar es que el docente debe estar consciente de las profundas modificaciones que ha sufrido en lo teórico-práctico la nueva propuesta de educación en nuestro país a través de su Ley General. Lo cierto es que en esta nueva mirada la escuela aparece "curriculizada", pues toda acción, proyecto, innovación o estrategia que conlleve a mejorar los procesos de enseñanza aprendizaje en el aula y fuera de ella, se denomina genéricamente Curriculo[1].

Ahora, particularmente en el área de Matemáticas asumir los nuevos Lineamientos Curriculares es adentrarse en una nueva dinámica del proceso docente educativo y los procesos de

[1] Se entiende por Curriculo en el artículo 76 de la Ley 115 o Ley General de Educación: "El conjunto de criterios, planes de estudio, programas, metodología y procesos que contribuyen a la formación integral y a la construcción de la identidad cultural nacional, regional y local, incluyendo también los recursos humanos, académicos y físicos para poner en práctica las políticas y llevar a cabo el Proyecto Educativo Institucional".

enseñanza aprendizaje en ésta ciencia, por lo tanto, en ésta dirección de pensamiento, se puede decir que el sentido pedagógico hoy de los Lineamientos Curriculares es aportar a la discusión de las bases científicas, filosóficas, teóricas y epistemológicas de la ciencia Matemática. A pesar, de un currículo único, obligatorio, uniforme o prediseñado sin la intermediación y participación de los sujetos que orientan la enseñanza aprendizaje de ésta ciencia, se debe, buscar dar respuesta a los interrogantes:

¿Qué son las Matemáticas?
¿Cómo evolucionan las Matemáticas?
¿Qué piensan los diferentes expertos alrededor de estas y su enseñanza?
¿Qué teorías gnoseológicas dan respuesta al por qué es importante aprender Matemáticas y mediante que procesos del pensamiento?
¿Qué competencias podemos desarrollar y poseen aplicación en el campo de las Matemáticas?
¿Cómo desarrollar aprendizajes significativos a través de las Matemáticas?

No se trata solamente de pensar las Matemáticas desde el punto de vista platónico, logicista, formalista, intuicionista o constructuvista, es adentrarnos a tratar de comprender y entender como el estudiante se apropia de los conceptos matemáticos[2] y en que momento del proceso se hace necesario recurrir a la práxis de una u otra concepción del conocimiento, como una estrategia de trabajo que permita que los estudiantes accedan en forma mas ágil y comprensible a éste.

[2] Se dice: "Por concepto se entiende el reflejo mental de una clase de cosas, procesos, relaciones de una realidad objetiva o de la conciencia (o el reflejo de una clase de clases) sobre la base de sus características invariantes.

En esta explicación del concepto se habla sobre el reflejo mental. El reflejo verbal de la clase de cosas, procesos o relaciones, sobre la base de las características invariantes, se realiza mediante la definición". (Tratamiento de conceptos y definiciones matemáticos. W. Jungk, 1986, p. 58).

No está dicha la última palabra y por ello los Lineamientos en el área de Matemáticas provocan una mirada hacia la constante búsqueda de nuevos conocimientos y nuevas formas de pensar el acto educativo. En este caso, se pretende investigar y llevar a la práctica nuevas didácticas encaminadas al desarrollo de competencias y procesos integrales de formación que busquen el mejoramiento de los niveles académicos y formativos de los estudiantes que aprenden matemáticas. Si bien, los lineamientos nos presentan algunas bases teóricas de las diferentes formas de Pensamiento Matemático mediante la categoría conceptual de conocimientos básicos, también lo es, que no aportan en las formas metodológicas de aplicarlos y desarrollarlos en el aula de clase y fuera de ella. (en consonancia con la Ley General de Educación y el respeto por la metodología que aplica el propio docente - la libertad de cátedra-).

¿Cómo desarrollar los diferentes tipos de pensamiento propuestos en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas, en nuestros contextos escolares? Pretender dar respuesta a esta pregunta se constituye en un verdadero problema de investigación, para lo cual debemos diseñar, experimentar y construir propuestas metodológicas desde nuestras escuelas que conlleven a aportar en este campo de acción de la Educación Matemática, la cual busca hoy profundizar sobre el desarrollo del pensamiento y la creatividad en los alumnos. Tarea docente que se adelanta desde hace 10 años en el área de Matemáticas del Centro de Estudios e Investigaciones Docentes.

Para cumplir con esta significativa tarea histórica observamos que nuestra misión, visión, líneas generales de investigación y formación de docentes se corresponde con esta intencionalidad. (Líneas Generales para las Propuestas de Investigación en el CEID ADIDA, 2001).

Para adentrarse en la comprensión de los Lineamientos de Matemáticas es necesario el estudio y el serio conocimiento sobre los antecedentes filosóficos, epistemológicos e históricos que dan origen al actual enfoque de las Matemáticas en nuestro país, evitando la elaboración de conjeturas alrededor de si se presenta un verdadero cambio o simplemente estamos repitiendo teorías del pasado o ya reevaluadas.

Esta es la principal intención del presente texto: LA ARITMETIZACIÓN DE LA GEOMETRÍA A TRAVÉS DE LA FORMACIÓN POR COMPETENCIAS, incitando a los maestros y maestras a pensar en la necesidad de construir propuestas metodológicas para la enseñanza de la Matemática Escolar a través de la profundización en la educación básica de las asignaturas de aritmética y geometría, como una posible vía metodológica de enfatizar ésta última, dado los cambios en los currículos y las diferentes concepciones modernas acerca de la enseñanza de las Matemáticas.

Lo claro es que la situación actual de cambio en la Didáctica de las Matemáticas se viene dando según los expertos desde la década de los 60s y 70s hacia la llamada "matemática moderna". Señala el Doctor Miguel de Guzmán de la Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura, que entre las principales características de éste movimiento de renovación y sus efectos por él producidos se pueden contar los siguientes:

- Se subrayaron las estructuras abstractas en diversas áreas, especialmente en álgebra.
- Se pretendió profundizar en el rigor lógico, en la comprensión, contraponiendo ésta a los aspectos operativos y manipulativos.

- Esto último condujo de forma natural al énfasis en la fundamentación a través de las nociones iniciales de la teoría de conjuntos y en el cultivo del álgebra, donde el rigor es fácilmente alcanzable.

- La Geometría elemental y la intuición espacial sufrieron un gran detrimento. La Geometría es, en efecto, mucho más difícil de fundamentar rigurosamente.

- Con respecto a las actividades fomentadas, la consecuencia natural fue el vaciamiento de problemas interesantes, en los que la Geometría Elemental tanto abunda, y su sustitución por ejercicios muy cercanos a la mera tautología y reconocimiento de nombres, que es, en buena parte, lo que el álgebra puede ofrecer a este nivel elemental.

La patente carencia de intuición espacial es uno de los problemas que observamos hoy con frecuencia en nuestras propias aulas de clase y esto es una de las causas mediante las cuales nuestros estudiantes presentan dificultades en el momento de la comprensión de los conceptos matemáticos.

## 4.2. FUNDAMENTACIÓN PEDAGÓGICA Y CONCEPTUAL SOBRE COMPETENCIAS EN EL ÁREA DE MATEMÁTICAS

Las competencias y el desarrollo de estas en el ámbito escolar, no se constituyen en una tarea fácil sin la experticia del docente que orienta el área de Matemáticas en la Educación Básica, lo cual está en directa relación, con el dominio del contenido matemático por parte de éste.

Esto quiere decir, que bajo el enfoque de sistemas propuesto en los objetivos generales que se plantean en la Ley General de Educación y los Lineamientos Curriculares del Área de Matemáticas, es necesario también que los maestros reconozcan las relaciones existentes entre los diferentes sistemas y así establezca el conjunto de habilidades, acciones, destrezas y competencias a desarrollar en los escenarios escolares.

Conviene recordar que el marco teórico del programa de Matemáticas en la década de los 70s propuso el "Enfoque de Sistemas", el cual buscaba..."acercarse a las distintas regiones de las Matemáticas, los números, la geometría, las medidas, los datos estadísticos, la misma lógica y los conjuntos desde una perspectiva sistémica que los comprendiera como totalidades estructuradas, con sus elementos, sus operaciones y sus relaciones". (Lineamientos Curriculares del Área de Matemáticas. Ministerio de Educación Nacional, junio de 1998, página )

Este Enfoque de Sistemas sigue presente hoy en la actual normatividad y específicamente se trata en los objetivos generales de la educación colombiana, dando cuenta del trabajo investigativo realizado por personajes como el Doctor Carlos Eduardo Vasco quien utilizó la teoría de sistemas para reformular el programa de Matemáticas de la renovación curricular para el Ministerio de Educación Nacional.

El adentrarse en la comprensión de la Teoría General de Procesos y Sistemas implica para la educación matemática y para quien las enseña el adentrarse en las múltiples relaciones de los sistemas y los procesos que conllevan en este caso particular a los alumnos a aprender y esto ya es complejo. Si pretendemos definir que es un proceso, se constituye en un problema la comprensión lógica del vocablo. Se dice entonces que... "Los procesos son la categorización básica de lo real. No es propiamente definible qué es proceso. Puede utilizarse esa palabra en ciertas frases que todos parecemos comprender. Los procesos son siempre dinámicos, complejos en sí mismos, inasibles. Los cierto es que un proceso si puede describirse por dos de sus propiedades:

- Su complejidad o multiplicidad.
- Su temporalidad o dinámica". ( Teoría General de Procesos y Sistemas. Carlos Eduardo Vasco, 1995 )

Entender esto implica, desde la teoría cognitiva identificar etapas por las cuales se transcurre según determinadas escuelas psicológicas y el maestro ha de estar consciente de esta realidad, además de poseer claridad conceptual al respecto, para que en correspondencia se desarrolle la enseñanza aprendizaje de las Matemáticas de manera mas significativa. No se puede pensar que un estudiante, determine objetivamente si la proposición N $\subset$ Z es verdadera o falsa y fundamente su respuesta, si previamente no se ha tratado los dominios numéricos en mención, su orden, operaciones y propiedades. Podríamos hablar entonces en este sentido de ciertas etapas necesarias que pasan por niveles de desarrollo más simples hasta llegar a los más complejos.

Acceder a los sistemas implica descubrir relaciones homólogas[3] y esto requiere de un pensamiento de alto nivel, el cual no es tan frecuente en nuestras aulas de clase, debido en alguna medida al alto contenido de formalización en la enseñanza de las Matemáticas. Los conceptos matemáticos deberían pasar inicialmente por una discusión dialéctica (dinámica) acerca de su origen histórico, posteriormente por su significado práctico y finalmente por las relaciones e interdependencias con otros.

Sucede en la enseñanza de la Lógica (Sistema Lógico) que se proponga por ejemplo las siguientes proposiciones: Sea p: 15 es

[3] Homólogo: Que en dos o más figuras, organismos, conjuntos, etc., se corresponde con otros por su posición relativa, función, estructura, etc.: los lados o ángulos homólogos de dos polígonos semejantes. -

múltiplo de 3 y q: 21 es múltiplo de 7, se puede obtener la conjunción y su respectiva simbología:
15 es múltiplo de 3 y 21 es múltiplo de 7, p Λ q

En el sistema de conjuntos si:

$A = \{3,6,9,12,15\}$ *y* $B = \{7,14,21\}$, *entonces* $A \cap B =$ ‹

$\phi\ \Phi$, *lo que significa que* $A \neq B$,

Luego para el caso anterior el cardinal de A es 5 y el de B es 3, lo cual quiere decir que:

$A \cup B = \{3,6,9,12,14,15,21\}$, *que en el sistema numérico se traduce*: $A \cup B = n(A) + n(B)$, *por consiguiente* $: 5 + 3 = 8$

Descubrir estas relaciones e interdepencias no es tarea fácil en la mente de nuestros estudiantes o inclusive en la mente de nosotros los docentes, dado que en ella las relaciones entre los distintos pensamientos: lógico, numérico, variacional, espacial, entre otros, no se desarrollan como compartimentos estancos (conjuntos de partes), sino que de alguna manera permanecen relacionados e interrelacionados. Todo esto parece acontecer a gran velocidad de manera integral en los procesos de enseñanza aprendizaje ¿Cómo?...

Por ello una importante implicación que surge de este análisis de los Lineamientos Curriculares es la recategorización de un maestro con ciertas características de investigador de su propia práctica docente (investigación de aula) y en permanente estudio de su saber específico, que transita sin dificultades por los sistemas matemáticos y como verdadero investigador busca la mejor manera de que los alumnos perciban estos procesos de construcción y de deconstrucción de unos sistemas en otros.

Se puede pensar también en la relación existente entre las leyes lógicas que constituyen el conjunto de las bases teóricas sobre las que se fundamentan las reglas del pensar en forma correcta con otros sistemas. Una de las reglas de la lógica proposicional es la de Doble Negación.

$\sim (\sim p) \Leftrightarrow p$

¿Podríamos pensar análogamente esta ley en otro sistema o sistemas?

$(A')' = A$. Sistema de Conjuntos, lo cual nos dice que el complemento del complemento de un conjunto es igual al mismo conjunto.

$-(-7) = 7$. Sistema numérico, en lo que se conoce como propiedad del inverso aditivo.

Es claro que en los diferentes sistemas y pensamientos existen relaciones matemáticas, en las cuales se conserva el principio de identidad, que debe ser de manejo didáctico y metodológico por parte del docente, aunque no necesariamente exista correspondencia entre estos dos elementos, dada la complejidad de las ideas, además del obstáculo epistemológico que genera la enseñanza tradicional de las Matemáticas.

Se podrían buscar otros ejemplos que conduzcan a una mayor claridad sobre la necesidad de develar estas importantes relaciones entre los sistemas matemáticos y que conllevarían a pensar los "pensamientos" en forma integral y a través de competencias.

Los Lineamientos en éste sentido no se constituyen en doctrina, se deben asumir desde una mirada crítica, por ello se plantea que..."deben servir de orientación pero no reemplazan a los docentes en las decisiones que les corresponden tomar en asuntos como: contenidos, metodología y estrategias para la participación"[4]

El maestro ha de tomar, como punto de partida para la discusión pedagógica, científica y de diagnóstico, la situación actual de la Educación Matemática en nuestro país, a partir del Tercer Estudio Internacional de Matemáticas y Ciencias TIMSS, donde se declara tres tipos de currículo que según las evidencias teóricas y prácticas están en franca contradicción en los escenarios escolares: el currículo propuesto, el que se desarrolla en el aula y el que es aprendido por los estudiantes.

En cada una de nuestras aulas de clase esta realidad es bastante visible, de manera que surge la necesidad de que estos currículos estén articulados e igualmente más próximos unos de otros, de manera que los resultados obtenidos en la Educación y Formación Matemática sean satisfactorios, esto implica revisar a nivel institucional los Planes de Estudio y articularlos a las necesidades educativas de la comunidad.

¿Dónde entonces emergen las competencias y cuál es su relación con los Lineamientos Curriculares, el enfoque de evaluación cualitativa y la formación integral con relación a los procesos fundamentales del desarrollo humano propuesto hoy?

Es preocupante, pero se podría decir genéricamente, que no se ha realizado un estudio riguroso de lo favorable y desfavorable de las últimas reformas educativas y el mismo gobierno en todos sus niveles y muchos docentes, no hemos profundizado lo suficiente en la comprensión y entendimiento de los procesos cognitivos, comunicativos, valorativos y actitudinales, biológicos

[4] Lineamientos Curriculares de Matemáticas. MEN. Pag.18, julio de 1998.

y físicos, de expresión y experiencia estética y que además deben articular como un todo los procesos de enseñanza aprendizaje a través de indicadores de logro, logros y competencias.

En estos indicadores de logro y logros aparecen de manera implícita el desarrollo de competencias de acuerdo a contextos escolares y locales determinados. Lo que no alcanzábamos algunos a pensar mediante el enfoque de objetivos, aunque otros seguramente en el pasado lo realizaban de manera implícita. Analicemos el siguiente ejemplo[5]:

Supongamos que el objetivo de un docente, fuese el siguiente en la clase de sexto grado de educación básica: Resolver ecuaciones de primer grado con una incógnita. Esto nos llevaba a determinar mediante la observación que quien resuelva dichas ecuaciones sabe y en el caso contrario no sabe. Se trata pues de una simple clasificación de los seres humanos, pero no se indaga acerca del porque el estudiante posee dificultades en la interpretación y solución de dichas ecuaciones, que nivel de aproximación posee respecto al dominio pleno de ésta temática o lo que en el contexto del currículo cubano se denomina genéricamente el aseguramiento del nivel de partida.

Llegamos pues al hecho de que no nos hemos detenido a pensar cuáles son las estructuras matemáticas que debe poseer el estudiante (Preconceptos) para que su aprendizaje sea mas satisfactorio, en qué etapa del desarrollo evolutivo se encuentra, cuáles dificultades posee en torno a sus procesos de desarrollo, qué competencias poseen y cuáles están en desarrollo. Lo anterior porque la educación tradicional enmarca dentro de un modelo o teoría de aprendizaje claramente definido, más no integral como se pretende en la reforma educativa actual colombiana.

[5] Libro Inédito: Visión Histórica de la Evaluación Integral y Competencias Básicas. Jorge Cardeño

No hemos indagado respecto a nuestros estudiantes en éste tema en particular y en relación con los procesos si desde el :

1. Proceso cognitivo:

- Maneja adecuadamente el concepto de propiedad uniforme de la igualdad para las operaciones fundamentales: suma, resta, multiplicación y división.

- Conoce la definición de ecuación.

- Selecciona hábilmente las propiedades de la igualdad necesarias para resolver una ecuación de primer grado con una incógnita.

2. Proceso comunicativo:

- Describe verbalmente y por escrito el proceso de construcción y deconstrucción (solución de la ecuación), de una ecuación de primer grado con una incógnita.

3. Proceso valorativo y actitudinal:

- Establece relaciones de solidaridad y equilibrio entre iguales.

- Busca soluciones acertadas y concertadas a los problemas de su vida cotidiana.

- Muestra en el aula de clase y en general, una actitud de respeto y atención permanente.

- Refleja en sus acciones, la capacidad de solidaridad y equilibrio en la toma de decisiones.

4. Proceso biológico y físico:

- Su desarrollo mental corresponde al nivel de dificultad que presenta la solución de ecuaciones de primer grado con una incógnita.

- Representa mediante ecuaciones realidades del mundo concreto. Como por ejemplo: el desplazamiento rectilineo uniforme, acelerado y retardado uniforme, la temperatura y otros.

- Representa gráficamente coordenadas rectangulares, mediante la localización de parejas ordenadas en el plano cartesiano

5. Proceso de expresión y experiencia estética:

- Propone situaciones de la vida real que se ajustan a la solución de ecuaciones de primer grado con una incógnita.

- Participa en forma activa durante el desarrollo de las actividades propuestas en clase.

En el anterior análisis cada una de estas manifestaciones, indicios, progresos o evidencias detectables en nuestros alumnos se constituye en Indicadores de Logro I.D.L., ya que con base en cada uno de estos procesos del desarrollo integral se da una aproximación real al proceso de valoración y construcción del conocimiento por parte del educando, detectando proximidades y manifestaciones que evidencian la adquisición del logro o logros propuestos.

En estas acciones en contexto se develan competencias como: el análisis matemático de ecuaciones de primer grado en este caso particular, el dominio de algunas propiedades matemáticas con relación al concepto de igualdad (Ley Uniforme para el caso de las operaciones básicas, transposición de términos que conduce a la simplificación del proceso y propiedades de las operaciones básicas), además de competencias referidas a lo biofísico, como es el caso de la representación geométrica de puntos en el plano.

Así, se podrá dar paso a la generalización en la anterior ejemplificación llegando a concluir que la forma general de una ecuación de primer grado con una incógnita es: $ax+b=0$, con $a \neq 0$, de donde se que:

$ax=-b$ (restando b en ambos miembros)

De donde $x = -\frac{b}{a}$ (dividiendo por a ambos miembros), que es la solución única que posee esta ecuación.

Luego se puede pasar a la ejercitación, aplicando el proceso de solución general de la ecuación de primer grado.

EJEMPLO 1
Resolver $3x-9=0$

EJEMPLO 2
Resolver $2x+3-(x+4-2x)=5-(x+2)$

EJEMPLO 3
Resolver $\frac{2x-1}{3}+\frac{3x+1}{4}-\frac{3x-1}{6}=1$

A partir de este momento, no resultará desconocido la presentación de ecuaciones fraccionarias y la traducción del lenguaje escrito al simbólico, como el caso del enunciado: ¿Qué número aumentado en tres, dividido por el mismo número disminuido en uno, equivale a siete tercios?

Parece entonces existir una relación entre ecuaciones lineales y funciones lineales a nivel geométrico, lo cual nos conduce a preguntas que serían motivo de investigación. Por ejemplo: ¿Qué relación existe entre una ecuación lineal y una función lineal? ¿Cómo lograr una mayor comprensión por parte de nuestros estudiantes de los conceptos de ecuación y función?

Pensar por un momento en el paso de ecuación lineal a función lineal resulta interesante, pero se requiere de pensamiento formal.

Suponga la siguiente igualdad:

$3x-5 = 2x-3$, la cual se satisface para $x = 2$
Por lo tanto:

$1 = 3x-5 \qquad 1 = 2x-3$, podemos obtener otros resultados igualando a cualquier número real.

$2 = 3x-5 \qquad 2 = 2x-3$
$3 = 3x-5 \qquad 3 = 2x-3$

. .
. .
. .

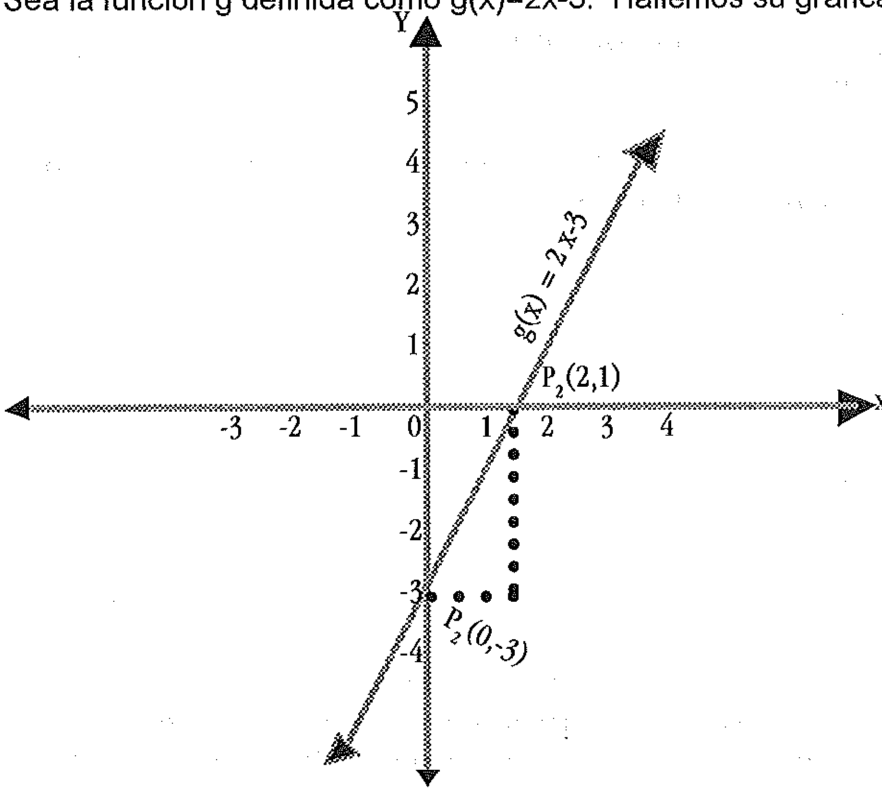
$y = 3x-5 \qquad y = 2x-3$

De esta manera, podemos pensar que $3x-5 = 2x-3$ representa la intersección de las rectas $y = 3x-5 \wedge y = 2x-3$, cuyas coordenadas del punto de intersección son $x=2$, $y=1$. Así hemos arribado a un término básico de la geometría, el punto, que carece de dimensión (idea intuitiva) y el conjunto continuo de puntos en una sola dirección nos definen una recta y una recta a su vez en el plano cartesiano representa una función lineal.

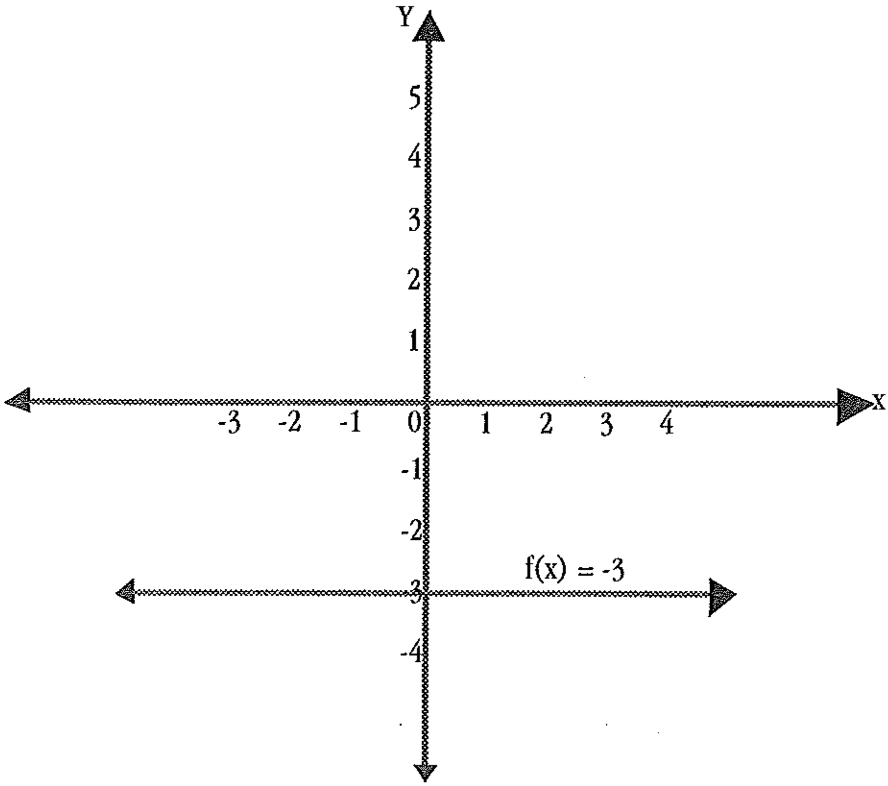
Resulta positivo que este proceso conduce a nuestros estudiantes, en grados posteriores a una mejor comprensión de los conceptos matemáticos de relación, función, ecuación e inecuación y el redescubrimiento del porqué en el caso particular de las funciones lineales se les asigna este nombre, lo cual conllevará a la representación geométrica en el plano cartesiano que para el caso en mención es una función lineal, si existen supongamos b y m, números reales, tales que para cada valor de x en el dominio de f, se cumple que: $f(x)=mx+b$.

EJEMPLO

Sea la función g definida como $g(x)=2x-3$. Hallemos su gráfica.



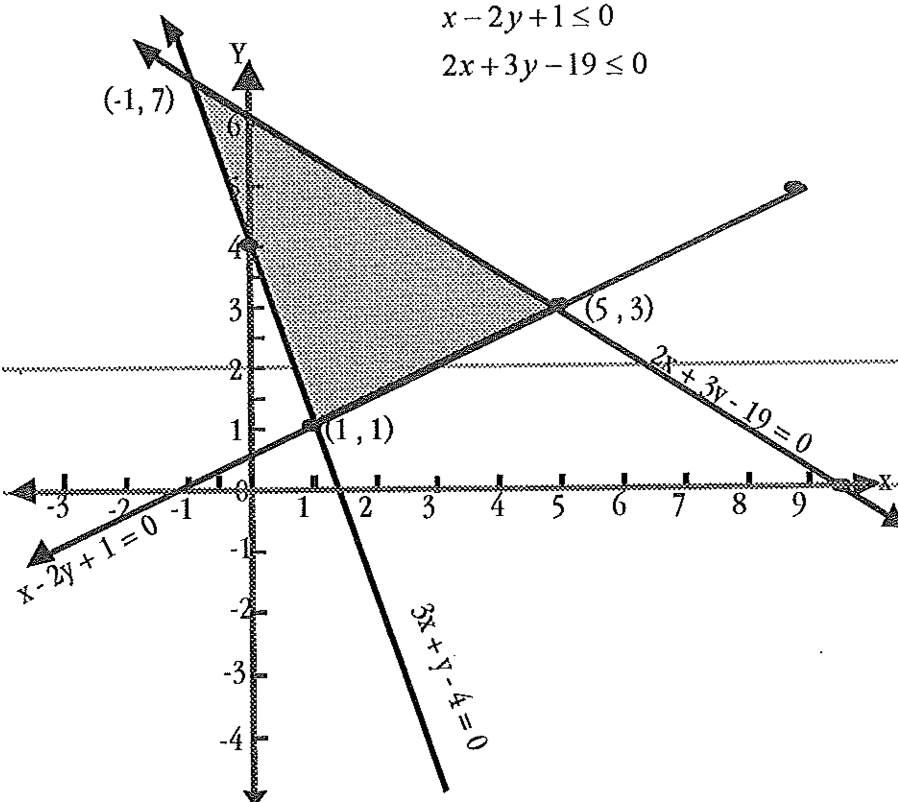
Si en el caso anterior, la m toma el valor de cero, o sea si la función lineal tiene pendiente igual a cero, se está frente al caso de f(x)=b (función constante)




Para no ser tan exhaustivos se llegaría más adelante a la resolución de sistemas de ecuaciones lineales con dos o tres incógnitas, como niveles superiores de la comprensión de funciones lineales y posteriormente a la solución de sistemas de inecuaciones lineales y a la representación geométrica de ambos conceptos matemáticos, que para el último caso se corresponde con un semiplano abierto, cerrado o la intersección de semiplanos (conjunto convexo poligonal). Este último como concepto previo de programación lineal y sus problemas de aplicación.

Un ejemplo cualquiera sería la representación gráfica de el conjunto de todos los puntos del plano cartesiano que satisfacen un sistema de inecuaciones dado:

$$3x + y - 4 \geq 0$$
$$x - 2y + 1 \leq 0$$
$$2x + 3y - 19 \leq 0$$




Se ha tratado de mostrar la complejidad en los procesos de enseñanza-aprendizaje de la educación matemática y la importancia de vincular la aritmética con la geometría, dado que de esta manera se posibilita una comprensión inicial e intuitiva de los conceptos matemáticos, facilitando el acceder a la abstracción, es decir, la formalización de esta importante ciencia cuasiempírica.

Tal vez se puede concluir, que la enseñanza de expresiones como:

$3 \cdot \square - 9 = 0$

$7 \cdot \square -18 = 38$,

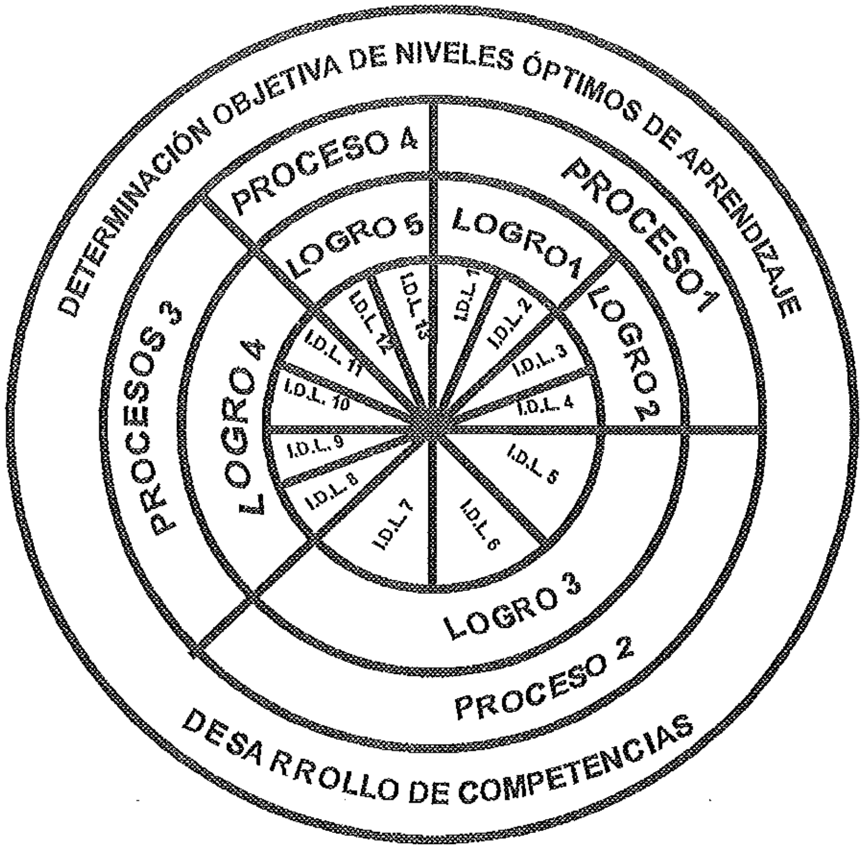
en la escuela básica primaria no sea un asunto tan simple como tradicionalmente se cree, dado sus futuros y complejos desarrollos.

Ahora miremos, los procesos necesarios en el proceso de enseñanza aprendizaje, de las Matemáticas y las ciencias en general, desde una perspectiva integral, los cuales se materializan en la escuela y permiten el paulatino desarrollo de competencias permanentes y variables en el transcurrir de la vida de los estudiantes:

# PROCESOS FUNDAMENTALES DEL DESARROLLO INTEGRAL DEL EDUCANDO

- PROCESOS DE DESARROLLO COGNITIVO
  - PENSAMIENTO LÓGICO FORMAL
  - CAPACIDAD PARA TRATAR PROBLEMAS
  - CREATIVIDAD
- PROCESOS DE COMPETENCIA COMUNICATIVA
  - CAPACIDAD DE EXPRESIÓN
  - PRODUCCIÓN ORAL Y ESCRITA
  - COMPRENSIÓN
  - ARGUMENTACIÓN
  - CRÍTICA
- PROCESOS BIÓLOGICOS Y FÍSICOS
  - DESARROLLO DE COMPETENCIA FÍSICAS
  - RELACIÓN E INFLUENCIA EN EL DESARROLLO SOCIAL Y SICOLÓGICO
- PROCESOS VALORATIVOS Y ACTITUDINALES
  - COMPORTAMIENTO RECTO Y JUSTO
  - CAPACIDAD DE VALORACIÓN
  - INTERACCIÓN
  - ASUNCIÓN RESPONSABLE DE POSICIONES
- PROCESOS DE EXPRESIÓN Y EXPERIENCIA ESTÉTICA
  - DESARROLLO DE LA SENSIBILIDAD
  - EMOTIVIDAD
  - CONTEMPLACIÓN
  - EL USO DEL LENGUAJE SIMBÓLICO

DISEÑO: JORGE CARDEÑO




## 4.3. GEOMETRÍA BÁSICA

Frente a este enfoque metodológico, de considerar la asignatura de geometría como eje central del currículo de Matemáticas de la educación básica mediante una mirada sistémica y procesal, es importante mostrar la importancia del desarrollo de un pensamiento intuitivo en los primeros años de escolaridad y pasar al plano de la ejemplificación para argumentar la coherencia y rigurosidad científica y posible de esta idea.

La creatividad y la experiencia práctica ha conllevado históricamente a los grandes descubrimientos en la ciencia Matemática.

Se señala como el surgimiento de los conceptos geométricos básicos y sus registros en el ámbito histórico existentes y más antiguos de la actividad del hombre en el campo de la Geometría, son unas tablas inscritas de arcilla cocida enterradas en Mesopotamia y que se cree a la fecha, en parte al menos, que proceden de los tiempos sumerios aproximadamente 3000 a. c. También existen tablas cuneiformes babilónicas que vienen de períodos posteriores, tales como la primera dinastía babilónica de la era del rey de Hammurabi, el Imperio Nuevo Babilónico de Nabuconodosor, y las eras siguientes persas y seleúcidas. De estas tablas vemos que la geometría antigua babilónica está íntimamente relacionada con la medición práctica.

Con respecto a la Geometría egipcia antigua aparecen los papiros de Moscú y Rhind, textos matemáticos conteniendo 25 y 85 problemas (1850 a. De C. Y 1650 a. De C.). Un notable ejemplo numérico es la fórmula correcta para el volumen de un tronco de una pirámide cuadrada, siendo h la altura, a y b las longitudes de los lados de las dos bases cuadradas y como su descubrimiento debe considerarse como un ejemplo extraordinario de inducción o como lo denomina Eric Temple Bell reconocido historiador matemático "la gran pirámide egipcia".

$$V = h \cdot \frac{(a^2 + \sqrt{ab} + b^2)}{3}$$

Con estos breves ejemplos, se quiere señalar la fortaleza del razonamiento empírico y como este puede describirse como la formulación de las conclusiones que se basan en la experiencia y en la observación; no está contenido ningún entendimiento real, y el elemento lógico no aparece. El razonamiento empírico requiere de experimentación constante y una buena dosis de intuición.

Esta intuición en el campo de la geometría, es posible si logramos establecer una vinculación directa entre ésta, la aritmética y la experimentación directa con las formas y figuras, trabajo en el cual se concentra el interés del Centro de Investigaciones, buscando fortalecer la enseñanza de ésta asignatura en los establecimientos educativos de nuestro departamento y ayudando a elaborar una propuesta metodológica y didáctica que permita este desarrollo.

El interés principal será el trabajar con maestros y maestras del nivel básico de la educación, construyendo y acompañando propuestas en este sentido.

## 4.4. EJEMPLIFICACIÓN

**PROBLEMA 1.**

Demuestre que: el área del sector circular, es igual al semiproducto de la longitud del radio y la longitud del arco que subtiende el ángulo central.

ESTRATEGIAS DE APRENDIZAJE

1. Análisis de las palabras claves del enunciado conocidas y desconocidas, para el último caso se darían a la tarea de consultar las definiciones.

| | | |
|---|---|---|
| Área | Círculo | Sector Circular |
| Semiproducto | Longitud | Radio |
| Ángulo Central | Arco | |

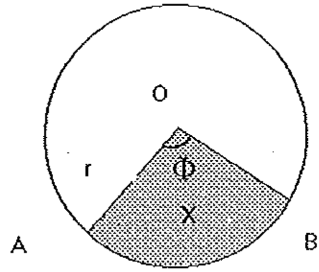
De igual manera, recordar las definiciones de circunferencia, radio y diámetro como elementos principales de ésta.

Arco: Es una porción cualquiera de circunferencia limitada por dos puntos.

Cuerda: Es el segmento que une dos puntos cualesquiera de una circunferencia.
Diámetro: Es toda cuerda que pasa por el centro.

Círculo: Porción del plano delimitada por la circunferencia. El círculo es el conjunto de todos los puntos interiores de la circunferencia.

2. Después de este paso previo, proceder a interpretar la definición planteada en el enunciado del problema, para luego dibujar la gráfica correspondiente al enunciado y compararla con la obtenida por otros compañeros.




x= Área del sector circular

3. Análisis de la gráfica, estableciendo la relación entre el área del círculo y la magnitud del ángulo de una vuelta, con el área del sector circular y el ángulo central formado.

4. Se pueden proporcionar impulsos a los estudiantes, en caso de no recordar algunas de éstas expresiones matemáticas.

¿ Cuál es el área del circulo ?

¿ A cuántos grados equivale una vuelta completa ?

5. Con las dos relaciones establecidas se calcula el área del sector circular por parte de los alumnos.

6. Se recuerda la formula para calcular la longitud de la circunferencia, a manera de impulso.

Mediante actividad práctica se puede construir varias circunferencias en cartón paja, luego recortarla, trazarle su diámetro y con ayuda de un metro de costura (plástico) medir la longitud de la circunferencia Lc y la longitud del diámetro D. Finalmente establecer una relación entre éstas dos. ¿Cuántas veces cabe el diámetro en la longitud de la circunferencia?. ¿A qué es igual la longitud de la circunferencia?

$$\frac{L_c}{D} = 3{,}1415...$$

$$\frac{L_c}{D} = \pi, \text{ entonces: } L_c = D.\pi$$

Como D = 2r, sustituyendo se obtiene:

$$L_c = 2r.\pi$$

$$L_c = 2\pi r$$

7. Se recuerda la conversión de grados sexagesimales a radianes, en caso de que se halla olvidado.

ZONA PRÓXIMA DE APRENDIZAJE

8. ¿Podemos establecer una relación análoga entre la longitud de la circunferencia y la longitud de un arco determinado, expresado en términos de la longitud del radio y el ángulo en grados?

$x$ = área del sector circular

$\pi \cdot r^2 \longrightarrow 360°$

$x \longrightarrow \theta°$

$x \cdot 360° = \pi r^2 \cdot \theta°$

$$x = \frac{\pi r^2 \cdot \theta°}{360°} \quad (1)$$

Como la longitud de la circunferencia es: $L_c = 2\pi r$,
La longitud de un arco está dado por: $\widehat{s} = \theta° \cdot r$, de donde:

$\frac{\widehat{s}}{r} = \theta°$ y como $360° = 2\pi$, sustituyendo en (1) se obtiene:

$$x = \frac{\pi . r^2 . \frac{\widehat{s}}{r}}{2\pi} \qquad x = \frac{\pi . r^2 \, \widehat{s}}{2\pi r} \qquad x = \frac{r . \widehat{s}}{2}$$

9. En la fórmula encontrada inicialmente para el área del sector circular se sustituye el ángulo central en función de la longitud del arco y la longitud del radio y el denominador por su equivalencia en radianes y finalmente se simplifica.

10. EJERCICIOS

a. Calcular el área de un sector circular en una circunferencia cuyo radio mide 2 cm y el arco subtendido por el ángulo central tiene una longitud de 9 cm.

b. ¿El área encontrada, es la misma utilizando las dos fórmulas obtenidas?

c. Si r= 6 cm y el área del sector circular x=36 cm², entonces ¿Cuál es la longitud del arco s?

11. TAREA

a. Comprobar si el área de un sector circular se puede calcular también mediante la relación matemática:

$$x_{s.c.} = \frac{s^2}{2\theta}$$

**PROBLEMA 2.**

TRATAMIENTO DE EJERCICIOS DE APLICACIÓN Y DE EJERCICIOS CON TEXTOS.

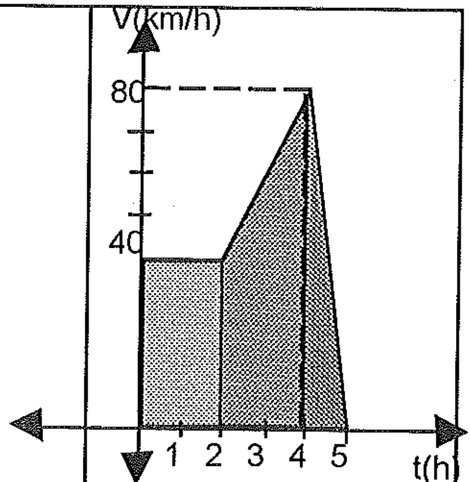
Tomado de: Sergio Ballester Pedroso, Bernardino Almeida, Aida Alvarez y otros. Metodología de la Enseñanza de la Matemática, 1999.

| FASES FUNDAMENTALES DEL TRABAJO CON PROBLEMAS | FASES PARCIALES DEL TRABAJO CON PROBLEMAS |
|---|---|
| 1. Orientación hacia el problema | - Búsqueda del problema o motivación.<br>- Planteamiento del ejercicio<br>- Comprensión del ejercicio. |
| 2. Trabajo en el problema. | - Precisión<br>- Análisis.<br>- Búsqueda de la idea de solución. |
| 3. Solución del problema. | - Realización del plan de solución.<br>- Representación del plan de solución. |
| 4. Fase de evaluación de la solución de la vía. | - Comprobación de la solución.<br>- Determinación del número de soluciones.<br>- Estimación y comprobación de los resultados obtenidos.<br>- Consideraciones retrospectivas.<br>- Consideraciones perspectivas. |

Analicemos a continuación el siguiente problema, mediante el empleo de estrategias heurísticas, para el caso de la Física Matemática y su relación con la Geometría.

| IMPULSOS<br>(ACTIVIDAD DEL PROFESOR) | ACTIVIDADES DEL ALUMNO |
|---|---|
| **1. ORIENTACIÓN HACIA EL PROBLEMA.**<br><br>La familia Galindo deciden realizar un viaje en su automóvil particular, el cual consume cuatro galones de gasolina corriente cada 200 Km.<br><br>Este automóvil se dirige de Medellín a Puerto Araujo con un movimiento variado, durante las dos primeras horas viaja con una velocidad de 40 km/h y en las siguientes 2 horas de recorrido viaja con un movimiento uniformemente acelerado hasta alcanzar una velocidad de 80 Km/h, a partir de éste instante durante la última hora de recorrido viaja con un movimiento uniformemente retardado hasta detenerse.<br><br>Se pregunta:<br><br>¿ Cuántos kilómetros en total recorrió el automovil ?<br><br>¿ Cuánto combustible consumió el automovil?<br><br>**Comprensión del ejercicio**<br><br>¿De que se trata el problema? | Formula el texto del problema con sus propias palabras, interpreta palabras claves como: |

| | |
|---|---|
| | consumo, combustible, distancia, movimiento acelerado, uniforme, retardado y otros. |
| **2. TRABAJO EN EL PROBLEMA** | |
| ¿ A qué rama de las matemáticas o ciencias en general pertenece el problema planteado ? | Pertenece a la Física |
| ¿ Qué es conveniente hacer para iniciar la solución de éste problema?<br><br>¿ Será necesario separar lo conocido de lo desconocido ? | Lo dado:<br><br>Consumo de combustible: \$ por cada 200 Km<br><br>Movimiento Uniforme: t=2h y Vc= 40 Km/h<br>Movimiento Uniforme Acelerado:t=2h<br>Vi= 40 Km/h y<br>Vf= 80 Km/h<br>Movimiento Uniforme Retardado:t=1h<br>Vi= 80 Km/h y<br>Vf= 0 Km/h<br><br>Lo buscado:<br>- Espacio total recorrido: S<br>- Consumo total de combustible. |
| ¿ Será necesario trazar una gráfica analítica que contenga la información dada ? | Alumno construye la gráfica: |




Se trata de buscar el espacio total recorrido y el costo total del combustible utilizado.

Busca problemas análogos por su contenido o forma, estos podrán encontrar problemas resueltos en libros de Física o Matemáticas.

¿ Has resuelto alguna vez un problema similar a éste ?

**3. SOLUCIÓN DEL PROBLEMA**

¿ Qué vía conocemos para resolver un problema de éste tipo?

El alumno reflexiona sobre la gráfica y las posibles relaciones entre los datos.

¿Qué fórmulas matemáticas nos permiten calcular de acuerdo a la gráfica los espacios recorridos por el automóvil?

*Área del rectángulo*:

$$A_r = b.h$$

*Área del trapecio*:

$$A_t = \frac{(b_1 + b_2)}{2}.h$$

| | |
|---|---|
| | *Área del triángulo:* $A_{\Delta} = \frac{b.h}{2}$ |
| ¿Están dadas todas las condiciones para resolver el problema ? | Sí, están dadas todas las condiciones. |
| ¿ Qué es necesario calcular ? ¿ Qué operaciones tendríamos que realizar ? | La suma de las áreas y el costo del combustible. $A_r = 2h.40\frac{Km}{h} = 80\ Km$ $A_t = \frac{\left(40\frac{Km}{h} + 80\frac{Km}{h}\right)}{2}.2h$ $A_t = \frac{\left(120\frac{Km}{h}\right).2h}{2} = 120Km$ $A_{\Delta} = \frac{1h.80\frac{Km}{h}}{2} = 40Km$ $S_{total} = 80Km + 120Km +$ $40Km = 240K$ |
| Tenemos todas las condiciones para calcular el costo del combustible consumido por el automóvil, durante el recorrido. | Sí, porque se tiene el espacio total recorrido y el costo del combustible por cada 200 Km. Precio de un galón de gasolina corriente: \$3141,18 |

| | |
|---|---|
| | 200 Km $12564,72<br>240 Km X<br>→<br>$X = \dfrac{240km.\$12564,72}{200Km}$<br>X = $ 150.077,66 |
| **4. FASE DE EVALUACIÓN DE LA SOLUCIÓN DE LA VÍA.** | Comprueba si existe alguna contradicción con las relaciones que se dan. |
| ¿Es compatible el resultado obtenido con el texto del problema? | Sí, cada figura que representa un movimiento tiene una sola medida de su área. |
| ¿ Es única la solución ? | |
| ¿Cómo procedimos para la solución del problema ? | 1. Representar gráficamente los datos.<br>2. Calcular las áreas que representan el espacio recorrido durante cada movimiento.<br>3. Sumarlas.<br>4. Calcular costo de combustible. |
| ¿Puedes resolver éste problema por otra vía? | Sí mediante las fórmulas de movimiento, que se emplean en la Física: |

| | |
|---|---|
| ¿Es aplicable ésta vía a la solución de otros problemas? | $S = v.t$<br>$S = (V_i + V_f).t$<br>$S = (V_i - V_f).t$<br>Sí, valorando esta posibilidad ante situaciones similares. |

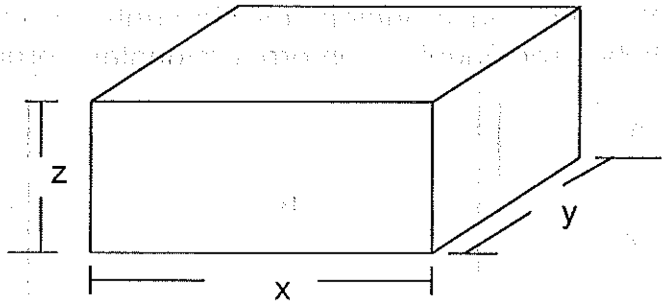
## 4.5. LAS MATEMÁTICAS EN EL NUEVO ICFES

Un aprendizaje adecuado de los anteriores conceptos matemáticos y geométricos desarrollados de manera didáctica con nuestros estudiantes, como se mostró en los dos ejemplos anteriores, puede favorecer mejores resultados en el nuevo enfoque de evaluación que plantea el ICFES, fundamentado en las competencias.

La nueva Prueba de Estado ICFES, señala cuatro ejes temáticos: Conteo, Medición, Variación y Aleatoriedad. El caso de interés en el presente trabajo es la Medición y sus ejes conceptuales como la medida, métrica y espacio, relaciones de equivalencia y proporcionalidad en medidas asociadas a formas geométricas, sus movimientos, propiedades y operaciones.

Esto último es el caso particular de interés en el presente documento, por lo tanto analicemos algunos ejemplos:

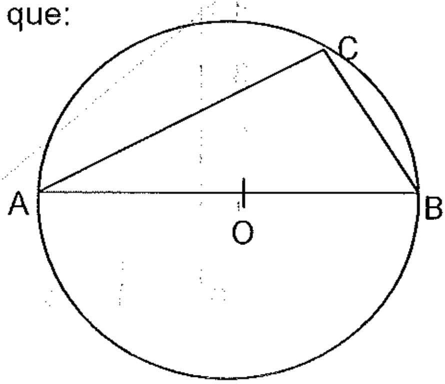
4.5.1. La siguiente figura ilustra las dimensiones de un sólido rectángular que será fabricado en cartulina:




Si x=6 cm, y= 8 cm y z= 10 cm, es posible construir la caja teniendo en cuenta que se desperdicia material al cortar, con un pedazo cuadrado de cartulina de:

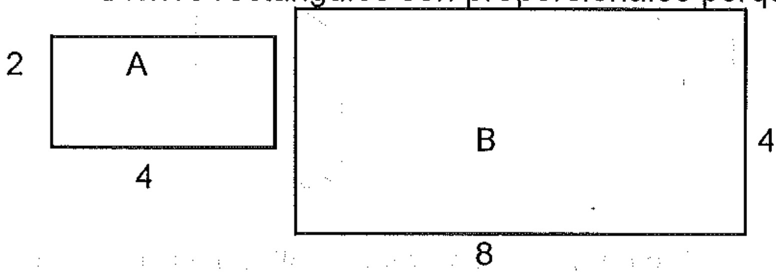
A. 12 cm de lado
B. 14 cm de lado
C. 16 cm de lado
D. 20 cm de lado

4.5.2. A partir de la siguiente figura, se puede calcular el perímetro del triángulo inscrito en la semicircunferencia, si se sabe que:



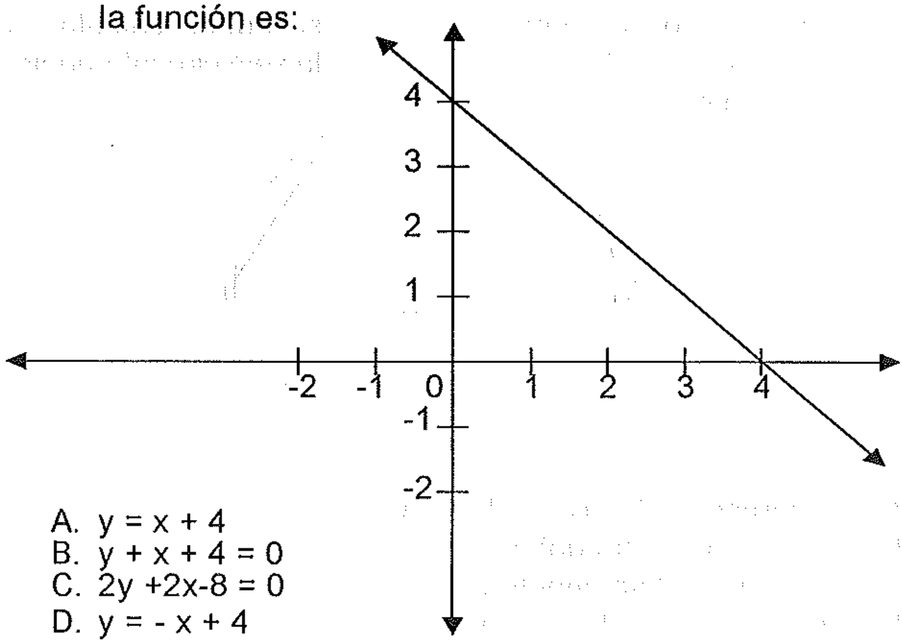

A. El perímetro del triángulo OAC
B. El radio de la circunferencia
C. La media del segmento BC
D. El perímetro de la circunferencia

4.5.3. Observe con atención los siguientes rectángulos: Dichos rectángulos son proporcionales porque:



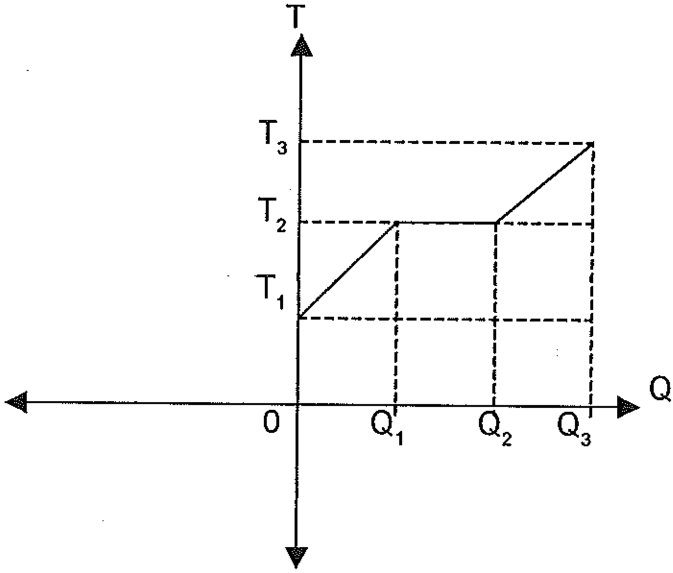

A. 8 es el doble de 4.
B. Los ángulos correspondientes formados por las diagonales son congruentes respectivamente
C. 2:4 = 4:8
D. El área de B es 4 veces el área de A

4.5.4. Con el fin de analizar el movimiento de una partícula, se muestra la gráfica correspondiente, la ecuación de la función es:




A. $y = x + 4$
B. $y + x + 4 = 0$
C. $2y + 2x - 8 = 0$
D. $y = -x + 4$

4.5.5. La gráfica muestra la relación entre la cantidad de calor Q suministrada a una sustancia **Y** a la temperatura **T** de la misma, durante un proceso termodinámico. De la siguiente gráfica se puede inducir que:




A. Existe un intervalo de valores de Q en el cual la temperatura se mantiene constante.
B. Durante todo el proceso la temperatura aumenta constantemente.
C. Existe intervalos en los cuales la temperatura disminuye durante el proceso.
D. El trabajo necesario para desarrollar el proceso es equivalente al área bajo la curva.

## BIBLIOGRAFÍA

Teoría General de Procesos y Sistemas, primera parte, reflexiones teóricas. Autor: Carlos Eduardo Vasco, 1995

Jairo Díaz Lucas. Coordinador Nacional de Investigación del TIMSS. Análisis y resultados de las pruebas de Matemáticas. Diseño, metodología y resultados del Tercer Estudio Internacional de Matemáticas y Ciencias TIMSS en Colombia. Ministerio de Educación Nacional. Universidad del Valle, Facultad de Ciencias, Cali, 1997.

Memorias: Primer Encuentro Regional del Profesores de Matemáticas con Énfasis en la Enseñanza de la Geometría. Universidad de Antioquia. Facultad de Ciencias y Artes, octubre 28 al 31 de 1997

Documento: Tendencias Innovadoras en Educación Matemática. Miguel de Guzmán. Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Tecnología, editorial popular, Barcelona, España, 1993, 25 páginas

Lineamientos Curriculares de Matemáticas. Áreas obligatorias y Fundamentales. Ministerio de Educación Nacional. Dirección General de investigación y Desarrollo Pedagógico. Grupo de Investigación Pedagógica, Santafé de Bogotá, 1998, 131p.

Memorias V Encuentro Departamental de Matemáticas. EXPERIENCIAS DIDÁCTICAS EN LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA EN ANTIOQUIA, CEID-ADIDA, agosto 26 y 27 de 1999.

Memorias VI Encuentro Departamental de Matemáticas. "DESARROLLO DEL PENSAMIENTO Y LA CREATIVIDAD EN LA PERSPECTIVA DE LOS NUEVOS LINEAMIENTOS CURRICULARES DE MATEMÁTICAS". CEID-ADIDA, septiembre 28 y 29 de 2000.

Dickson Linda, Brown Margaret y Gibson Olwen. El Aprendizaje de las Matemáticas. Ministerio de Educació y Ciencia. Editorial Labor, S.A.. Primera edición, Barcelona, España, 1991, 399p.

Myriam Henao Willes. El papel de la investigación en la conformación de comunidades académicas. Programa Nacional de Estudios Científicos en Educación. COLCIENCIAS. E-mail: mhenao@colciencias.gov.co, 2001.

Uribe Cálad Julio A. Elementos de Matemáticas serie 6° y 9°, Bedout Editores, 2001.

Matemáticas para el nuevo ICFES. Los Tres Editores Ltda., Cali - Valle. 2002, 138p.

# METACOGNICIÓN Y DIDÁCTICA
# LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA POR PROBLEMAS

CARLOS E. PINO GUERRA

MEDELLÍN
2002

## 5. METACOGNOCIÓN Y DIDÁCTICA LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA POR PROBLEMAS

Metacognición es la reflexión sobre el propio aprendizaje y sobre el proceso que se realiza al lograr el conocimiento; es reflexionar sobre la manera en que accedió a un tema específico, cuáles fueron los pasos realizados para alcanzar a elaborar un concepto o sistematizar una red conceptual. El papel del docente consiste en facilitarle a los alumnos esta reflexión, mediante ejercitaciones previas, los medios para acceder al conocimiento de la estructura científica, y concretar cada etapa con niveles de complejidad cada vez mayores.

La enseñanza a través de la resolución de problemas es actualmente el método más invocado para poner en practica el principio general de aprendizaje activo y de enculturación. Lo que en el fondo se persigue con ello es transmitir en lo posible de una manera sistemática los procesos de pensamiento eficaces en la resolución de verdaderos problemas.

Tengo un verdadero problema cuando me encuentro en una situación desde la que quiero llegar a otra, y no conozco el camino que me puede llevar de uno a otro.

AUTOR
CARLOS E. PINO GUERRA
Licenciado en Matemáticas U. de M.
Docente de la
Normal Superior de Medellín

## 5.1 INTRODUCCIÓN

En la didáctica actual está adquiriendo cada vez más relevancia la REFLEXIÓN SOBRE EL PROPIO APRENDIZAJE Y SOBRE EL PROCESO QUE SE REALIZA AL LOGRAR EL CONOCIMIENTO. A esta reflexión se le da el nombre de METACOGNICIÓN. Es importante que el alumno reflexione su propio conocimiento, sobre la manera en que accedió a un tema específico, cuáles fueron los pasos realizados para alcanzar a elaborar un concepto, sistematizar y llegar a una red conceptual.

El papel del docente consiste en facilitarle a los alumnos esta reflexión, mediante ejercitaciones previas, los medios para acceder al conocimiento de la estructura científica, y concretar cada etapa con niveles de complejidad cada vez mayores.

Es decir, el docente debe crear las condiciones para que el alumno reconstruya el saber: esta situación nos introduce en el tema de la METACOGNICIÓN y su utilización como medio eficaz para optimizar el proceso de aprendizaje.

La metacognición, en términos generales, se refiere a la capacidad del individuo de pensar acerca de su propio pensamiento y sobre su propia actividad cognoscitiva.

## 5.2 METACOGNICIÓN: SU CONCEPTUALIZACIÓN

Aunque el término es relativamente nuevo, la preocupación por la problemática de conocer cómo el hombre piensa sobre su propio conocimiento es tratada, por filósofos primero y por psicólogos después, desde hace tiempo. HANS AEBLI, director del Departamento de Psicología Pedagógica de la Universidad de

Berna, ya en 1982/83 dictó un seminario que tituló METACOGNICIÓN: ¿vino viejo en odres nuevos?.

Los estudios acerca de la temática comenzaron en la década del 70. Desde el punto de vista psicológico, lo inició JEAN FLAVELL. Este estudioso de la Psicología Evolutiva se preocupó por su propio razonamiento. Enunció la siguiente definición: "METACOGNICIÓN se refiere al conocimiento o conciencia que uno tiene acerca de sus propios procesos y productos cognitivos". FLAVELL, fundamentalmente trató de averiguar cómo se manifiesta la METACOGNICIÓN a lo largo de la evolución del individuo. Distingue entre:

El SABER METACOGNITIVO: concebido como la parte del saber almacenado que se refiere a la zona de realidad "pensamiento".

La EXPERIENCIA METACOGNITIVA: se relaciona con la gestión cognoscitiva y la mayoría de las veces son actividades cognoscitivas momentáneas.

Otros autores enuncian las siguientes definiciones:

La METACOGNICIÓN se refiere a la comprensión del saber, una comprensión que se exterioriza en una aplicación provechosa o en una representación directa del saber correspondiente.

La METACOGNICIÓN es nuestro grado de conciencia de nuestras actividades mentales.

CHADWICK, referenciando dicha conceptualización a los alumnos, expresa:
"es la conciencia de sus procesos y estados cognitivos que puede tener el alumno".

"es el proceso por el cual los estudiantes reflexionan sobre su propio conocimiento y sobre cómo está cambiando".

Refiriéndose al hecho de "aprender a estudiar" los psicólogos HERNÁNDEZ y GARCÍA consideran que la METACOGNICIÓN: "... supone tomar conciencia sobre los propios procesos intelectivos, permitiendo un mayor autocontrol sobre el propio aprendizaje".

Todos coinciden en que METACOGNICIÓN es el autoconocimiento de cómo se procede mentalmente para lograr su saber.

De acuerdo con la terminología de HANS AEBLI, el docente debe conocer las estrategias que favorecen esa reflexión y ayudan a la persona a apreciar que su conocimiento, para ser tal, sigue una secuencia determinada, es estructurado e interrelacionado, por ejemplo, de AUTO-OBSERVACIÓN y de EVALUACIÓN

### 5.2.1. El proceso de aprendizaje y la Metacognición

La METACOGNICIÓN tiene importancia para el proceso de aprendizaje. El alumno al reflexionar acerca de los pasos concretados para lograr un aprendizaje, evalúa lo positivo y lo negativo y puede de manera consciente modificar el rumbo de su aprendizaje. Es un conocer para hacer y mejorar lo que se hace.

La METACOGNICIÓN pasa a ser así una capacidad práctica. El que la posee se autoevalúa y autocritica permanentemente y de acuerdo con los resultados puede revelar etapas en las que se presentan las dificultades.

La organización secuencial y coherente de los contenidos matemáticos de tal forma que se expliquen y deduzcan unos de otros, es tarea fundamental del docente para que se desarrolle la capacidad práctica de la METACOGNICIÓN.

Para HANS AEBLI: "la METACOGNICIÓN es representación del conocimiento".

Según este autor, comprende tres aspectos que le permiten distintas formas de metacognición. Se pueden correlacionar aspectos y formas de la siguiente manera:

ANTONIJEVIC y CHADWICK plantean que la METACOGNICIÓN tiene tres funciones, equivalentes a los aspectos fijados por AEBLI:

a) Planificación del Aprendizaje: "el alumno tiene que tomar conciencia de la tarea que enfrenta... qué información tiene ya aprendida... debe fijar objetivos de corto alcance".

b) Supervisión sobre la marcha: el alumno debe preguntarse a sí mismo acerca de su progreso.

| ASPECTOS | FORMAS |
|---|---|
| a) Reconocimiento de determinados hechos cognitivos. | - Autoevaluación.<br>- Autoinstrucción: la persona se dice así misma qué quiere hacer y elabora un plan. |
| b) La representación de estos hechos (mediante conceptos). | - Evaluación de las acciones<br>- La estimación de la propia capacidad de rendimiento en relación con la dificultad de la tarea: hay un saber referido al propio poder o no poder. |

| ASPECTOS | FORMAS |
|---|---|
| c) La operación con estos conceptos verbales sustitutos (porque reemplazan a los hechos cognitivos originales). | METACOGNICIÓN de alto poder: la instrucción construye un plan. Pero una instrucción de nivel superior le dice "no debo olvidarme de proceder de acuerdo con el plan". |

c) Evaluación del éxito: es el análisis consciente del éxito que el alumno ha tenido, puede comparar varias estrategias que ha usado, con el fin de identificar las que fueron más eficaces.

La reflexión del alumno se inicia en el momento en que encara una tarea, donde como primera acción, piensa si la comprende. Pues es común encontrar alumnos que ni siquiera entienden qué tienen que hacer. Es decir no comprende la esencia del trabajo. Esta etapa se corresponde con la denominada por AEBLI: "reconocimiento de determinados hechos cognitivos".

Luego, es el mismo alumno quien fija las pautas de trabajo (AUTOINSTRUCCIÓN) y las autoevalúa una a una. Finalizada la tarea realiza un repaso mental de los procedimientos utilizados, reconociendo los más eficaces para lograr el conocimiento buscado.

Como vemos, distintos autores coinciden en que de esta manera, el alumno adquiere conciencia de cuánto aprendió y cómo.

"Aunque los maestros quizás crean que enseñan a pensar al enseñar que piensa otra persona, lo que hacen, es enseñar el producto del pensamiento de otra. Al confundir así el producto con el proceso, se los induce a error".

Considero que el proceso de aprendizaje y la capacidad de metacognición para el caso del trabajo matemático siguen esta secuencia:

| PROCESO | APRENDIZAJE | GUÍA DE PREGUNTAS |
|---|---|---|
| OBSERVAR | • Formulación del problema.<br>• Búsqueda de la información. | ¿Qué es?, ¿para qué sirve?, ¿cómo funciona?. ¿Qué conozco sobre el tema? ¿Qué técnica debo utilizar para abarcarlo?. |
| DESCRIBIR ANALIZAR | • Procesamiento Análisis de la situación. | ¿Cómo se puede dividir?. ¿Cuántas partes y categorías existen?.<br>¿En qué se diferencian?. |
| INTERPRETAR | • Estructuración de la información. | ¿Qué razonamientos, qué cálculos o construcciones hay que efectuar? |
| GENERALIZAR | • Elaboración de soluciones. | ¿Las soluciones elegidas son las adecuadas?. |
| VALORAR | • Valoración de la importancia de las mismas | ¿Qué importancia tiene?. |
| APLICAR | • Aplicación de la o las estrategias escogidas. | ¿Qué utilidad tiene?.<br>¿Qué errores presenta?.<br>¿Qué puede hacerse?.<br><br>¿Qué estrategias pueden dar buen resultado?. |

| METACOGNICIÓN | GUÍA DE PREGUNTAS |
|---|---|
| • Identificación de los objetos. | ¿Cuál es?, ¿qué tipo de problema es?, ¿de qué índole es?.<br>¿Qué información busqué?.<br>¿Qué técnica utilicé para seleccionar la información?. |
| • Recuperación de la información.<br>• Reconocimiento de cada hecho interviniente. | ¿Se adecúan a la resolución que tomé?.<br>¿Qué hechos reconocí?.<br>La comparación o clasificación ¿es la adecuada?. |
| • Arado de la red de relaciones. | Los razonamientos, los cálculos ¿son los correctos?.<br>La relación de estos datos... con... ¿está bien?.<br>¿Todos los elementos configuran la red?. |
| • Selección de alternativas. | La solución ¿es la correcta?.<br>¿No existe otra posibilidad?. |
| • Evaluación del nivel de adecuación a la realidad. | ¿Se ajusta a lo requerido?.<br>¿Qué es lo más significativo?.<br>¿Qué es necesario subsanar?. |
| • Identificación de la estrategia adecuada a la nueva situación. | La alternativa propuesta, ¿es posible de aplicar a la nueva situación?<br>El procedimiento seguido para aplicarla ¿es el adecuado?. |
| • AUTOCHEQUEO | ¿Qué aprendizaje no domino?.<br>¿Qué técnica requerida no domino?.<br>¿Qué pasos no resolví bien?. |

Las etapas, como puede apreciarse, responden a cada proceso de la ciencia matemática. Se enuncia una guía de preguntas, que son las que mentalmente se formula el alumno para arribar a la solución del problema. Paralelamente se hizo el posible listado de preguntas que puede realizarse cada uno cuando piensa acerca de los pasos seguidos para obtener la solución requerida.

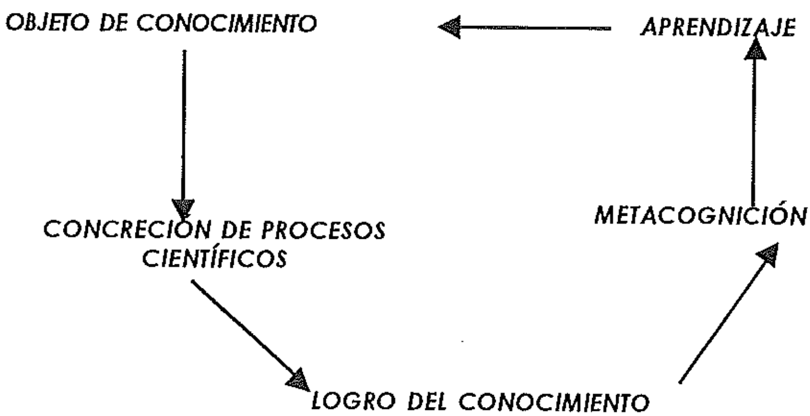
Las autopreguntas que se formulan los alumnos les permiten reflexionar críticamente acerca de su propio pensamiento. Al respecto dice MONEREO:

"El método de autointerrogación metacognitiva tiene un objetivo: conseguir que el alumno conozca las modalidades de procesamiento y decisión cognitiva que emplea con el fin de objetivarlas; para ello establece un sistema de autorregulación del proceso de pensamiento, a través de interrogantes que el sujeto debe hacerse a sí mismo antes, durante y después de la ejecución de la tarea".

La autointerrogación metacognitiva, con algunas variables, ha resultado ser un método eficaz para mejorar el autoconocimiento de los propios mecanismos de aprendizaje y comprensión.

De acuerdo con el esquema planteado, el alumno realiza una serie de pasos para resolver un problema, o bien lograr un conocimiento. Alcanzado el objetivo "lo valora" o formula un juicio crítico acerca de la alternativa elegida y a partir de ahí la puede aplicar en otro contexto semejante. Pero lo que queremos remarcar es el proceso metacognitivo que posteriormente realiza, que se constituye en un autocontrol de su pensamiento. Parte de las autopreguntas fundamentales: ¿qué pasos no resolví bien?, ¿qué técnica no manejo?, ¿qué aprendizaje no domino?, para llegar, repasando todas las etapas cognitivas, por el camino inverso, hasta la identificación del problema u objeto de conocimiento.

El proceso de aprendizaje es el siguiente: el alumno parte de un problema o de un tema, concretando las etapas del método científico y llega a formular la solución – conceptualización. Está capacitado para aplicar el nuevo conocimiento en cualquier otra circunstancia contextual semejante. Pero su aprendizaje lo concretó cuando mentalmente repasó los pasos transitados, a partir de sopesar la validez de las alternativas, los métodos y las técnicas utilizadas, para llegar por este camino a la identificación del tema. La representación gráfica de este proceso de aprendizaje y metacognición es:




Ante esto surge inevitablemente la pregunta: ¿hay estrategias que permitan el aprendizaje metacognitivo?. Es una inquietud de muchos científicos en los últimos años. La preocupación es INDAGAR en esta temática.

### 5.2.2 Las Estrategias Metacognitivas

¿Cómo aprender a aprender?. Evidentemente la toma de conciencia del mecanismo que condujo a la adquisición de un conocimiento, a la solución de un problema, es el proceso generativo más rentable. Es la verificación mental de las etapas realizadas, de la sistematización de la información y de la validez de cada una de las técnicas empleadas. Es la reconstrucción del saber por parte del alumno mediante las etapas del método científico. El objetivo es el aprendizaje, más que de contenidos, de la estructura y funcionalidad de la ciencia. Aprende así un mecanismo, que le permitirá actuar en otras oportunidades en que tenga necesidad de acceder a un determinado conocimiento matemático.

Por lo tanto, el alumno aprende la forma de proyectar una acción para llegar a una meta. Pero tiene que conocer cómo recorre el camino hacia la meta. El proceso mental de cada tramo de ese recorrido, con sus escollos, así como también el reconocimiento de la herramienta que le facilitó el acceso, le da la posibilidad de vivenciar nuevamente "el camino recorrido", juzgar y valorar cada uno de los pasos realizados.

Para optimizar el proceso de metacognición algunos de los aspectos a tener en cuenta son:

1. El profesor no será un distribuidor de conocimientos, sino que:

- Encuadrará los contenidos matemáticos en una teoría científica determinada, la cual estará respaldada por el marco filosófico, psicológico y epistemológico. Ese telón epistemológico debe constituir la estructuración de su clase. Con ello no queremos que el alumno aprenda la epistemología de la disciplina, sino que el trabajo que realice debe estar pautado por el profesor coherentemente, de acuerdo con ese contexto científico.

- Su actitud será de respeto a las diferencias individuales de los alumnos, quienes son el centro del proceso enseñanza – aprendizaje.

- Utilizará técnicas para facilitar el redescubrimiento del conocimiento por parte de los alumnos.

- Acostumbrará a los alumnos a analizar cada tema y a cuestionar distintos planteos.

- Introducirá actividades de reflexión sobre los procesos de aprendizaje implicados en tareas de la vida diaria.

- Creará situaciones problemáticas y promoverá las que parten de los alumnos.

- Agilizará, mediante reiteradas ejercitaciones, el repaso mental de cada uno de los pasos que tuvo que realizar el alumno para lograr el conocimiento y favorecerá la comparación de procedimientos usados para identificar el más eficaz.

- Estimulará la expresión del alumno, oral o escrita, del "pensamiento acerca de su pensamiento", para señalar errores y omisiones. Mediante preguntas le hará "pensar en voz alta" sobre lo que realiza".

Para hacer más consciente aún el proceso mental es importante que el alumno lo desarrolle por escrito.

- Facilitará la selección de las estrategias de aprendizaje que los propios alumnos identifiquen como eficaces a través de las prácticas en la clase.

- Ofrecerá la oportunidad de reflexionar y debatir sobre las tácticas de aprendizaje y los procesos mentales del aprendizaje de sus compañeros.

- Apoyará la implantación de nuevas estrategias metacognitivas a lo largo de todas las clases.

2. El tiempo: la efectividad de estas estrategias será mayor en la medida en que su aplicación comience desde los primeros años de escolaridad y se opere en distintas asignaturas. La aplicación aislada en un curso o en una disciplina tiene menor consistencia.

3. Difusión de la información: los alumnos deben conocer los objetivos, la utilidad y los beneficios que brindan las estrategias planteadas para lograr el aprendizaje y la metacognición.

4. Reconocimiento de toda la comunidad educativa: muchas veces un trabajo como el planteado se destruye porque existen agentes educativos que, hacen desvalorizaciones o adoptan actitudes desfavorables, ante los alumnos.

Enseñar a pensar acerca de su pensamiento "no puede ser un agregado, como un tema más, para enriquecer un programa". De esa manera, se crearía una dicotomía entre el método para aprender y la actividad intelectual acerca de ese aprendizaje. La adquisición, por una vía, del método para acceder a los conocimientos, y por otra, del trabajo mental de recomposición, no asegura frutos redituables.

El alumno debe adquirir una visión de conjunto acerca de los contenidos adquiridos y de la eficacia de las medidas tomadas en cuanto a la consecución del logro final repensando la estructura de su actuación. Para ello debe entender lo que hizo, saber con qué finalidad realizó las distintas etapas de una acción y por qué resultaron adecuadas o no. La reconstrucción de un conocimiento siguiendo los pasos por mera rutina constituye un saber inculcado, como lo es repetir de memoria un contenido.

En cambio, cuando el alumno logra armar mentalmente la estructura del proceso realizado para aprender determinados contenidos, el conocimiento adquirido significa algo más que el recuerdo de una secuencia de actividades y de la suma de datos informáticos. Al respecto, refiriéndose a la metacognición dice MONEREO:

Puede contribuir no sólo a desarrollar la autonomía de aprendizaje de nuestros estudios, sino también a dotarles de sistemas de autoanálisis, autorregulación y autooptimización de sus propias estrategias de enfrentamiento a tareas de enseñanza – aprendizaje.

No olvidemos que metacognición según AEBLI significa "representación del conocimiento". La representación supone un proceso de abstracción. La capacidad de abstraer varía de acuerdo con la edad, pero también con diferentes niveles. Esto implica que es necesario proceder con mucha cautela. La capacidad de representación, por ejemplo, no es la misma en todos los alumnos de 13 años. Si la metacognición requiere un proceso de abstracción, solamente los alumnos que hayan alcanzado niveles de estructuración lógica del pensamiento estarán en condiciones de "pensar sobre su propio pensamiento".

Se plantea esta cuestión: ¿ejercitar la metacognición puede beneficiar el proceso de aprendizaje en todos los niveles del sistema educativo?.

### 5.3 La enseñanza de las matemáticas por problemas

El objetivo básico del modelo didáctico propuesto es facilitar al alumno situaciones que posibiliten la reconstrucción del saber. Esto le permite pensar acerca de los pasos seguidos para hacerlo y le brinda elementos para valorar, juzgar y responder correctamente ante situaciones semejantes que se le presenten.

Se contribuye a la formación de una persona que selecciona, relaciona, compara, organiza, planifica, dotada de una actividad mental constructiva, que no permanece pasiva ante el objeto de aprendizaje. La RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS es una ejercitación de aplicación que facilita lo antedicho. El alumno al pensar en una acción para solucionar el planteo presentado, está planificando la forma de alcanzar una meta. Ello significa encontrar un camino para lograr el objetivo. Al recorrerlo habrá obstáculos y elementos facilitadores. Los primeros son las dificultades, que contribuyen también a la adquisición de la capacidad selectiva de utilizar el procedimiento para llegar antes y mejor a la solución.

Al respecto dice AEBLI:

"Es de desear que los alumnos tengan constante ocasión de abordar problemas y resolverlos por su propia cuenta las tareas más importantes de esta índole son las de aplicación. Proporcionan a los alumnos la oportunidad de aplicar en nuevas situaciones y objetos, conceptos, operaciones y también procedimientos generales ya conocidos"

Completan esta idea RATHS y WASERMANN de la siguiente manera:
"La solución del problema suele equipararse a la investigación. Esto podría incluir actividades tales como el planteo de problemas, la interpretación y evaluación de datos. Un problema implica que hay alternativas presentes. Sin alternativas, no hay problema, los problemas son siempre preguntas, pero las preguntas no son siempre problemas"

Resuelto el problema y en pos de la adquisición de la toma de conciencia del proceso realizado para lograrlo (METACOGNICIÓN) es importante el repaso mental de las etapas concretadas. Debe ser exteriorizado para permitir la evaluación por parte del docente, no ya del producto logrado, sino de la capacidad del alumno para reconocer las acciones realizadas.

Esta verificación comienza en clase, cuando se realiza una visión retrospectiva del trabajo. La misma no es una repetición tradicional, no apunta a los contenidos, sino que analiza la evolución del trabajo realizado, es una reflexión metodológica. Los alumnos puntualizan los procesos y las tareas mediante los cuales comprendieron el fenómeno estudiado. Por lo tanto, las actividades de captación, liberadas de los contenidos se ponen de manifiesto. Esta identificación hace más sencillo su aplicación en otra situación similar.

Los alumnos construyen nuevos procedimientos de acción, o nuevos aprendizajes, más fácilmente cuando emplean esquemas adquiridos anteriormente en otros conceptos.

Este es el momento en el cual el docente se cerciora de que la solución hallada no es producto simplemente de la reproducción estereotipada de saberes precedentes, sino resultado de una verdadera ELABORACIÓN.

La ELABORACIÓN en el campo cognoscitivo fue definida de la siguiente manera:

El proceso, a través del cual la mente, de modo personal y subjetivo, se aplica en forma activa y constructiva sobre una información determinada.

Al hablar de ELABORACIÓN, por lo tanto, presuponemos que el alumno pensó en varios caminos a tomar para llegar a la solución del problema, en distintas formas de acción, evaluó cada uno y ajustó los planes de acuerdo con los resultados. El término ELABORACIÓN lo usamos cuando, a partir de la información que posee, el alumno establece relaciones y construye una idea diferente a la expuesta en los textos. Sin embargo, en una primera etapa, nos conformamos con que ejercite algunas interrelaciones estructurales de un tema matemático. Posteriormente, poco a poco, será capaz de la construcción total de una red conceptual caracterizante de un tema matemático.

En la resolución de problemas existe toda una gama de niveles de complejidad que hay que equilibrar en cada año de escolaridad y período de ciclo lectivo.

Las problemáticas sencillas pero interesantes, estimulan el pensamiento y lo orientan hacia la meta. No son necesarias, por parte del docente, preguntas directas, solo las que marcan el rumbo a seguir. Los alumnos trabajan primero en forma desordenada, pero una vez establecida la secuencia, razonan de a dos las propiedades, los argumentos aducidos, juzgan los medios, las acciones parciales a realizar y otros. En clase discuten las propuestas con sentido crítico, sopesan la validez de cada una, ensayan la posibilidad de su realización. El resultado es el surgimiento de varias propuestas en las cuales se hace resaltar los problemas y los beneficios.

En la clase siguiente, se realiza una consideración retrospectiva de la tarea realizada. Los alumnos repasan con el pensamiento las acciones realizadas, es decir, las recapitulan interiormente. Recuerdan mentalmente las fases mediante las cuales planificaron las obras. El profesor solicita a un alumno la exposición oral de las tareas realizadas. Paralelamente, otro alumno escribe las distintas fases en el pizarrón. El resultado final es un cuadro esquemático de los pasos seguidos.

Nuestro objetivo es doble: que el alumno aprenda a resolver un problema empleando las etapas de un método generalizado, y que adquiera la capacidad de metacognición. Es necesario no caer en la presentación de una receta, a la cual los alumnos lleguen por aplicación mecánica.

Los pasos formalizados en la solución de problemas, como los pasos en el método científico del manual de laboratorio no son congruentes.

Los términos: método científico y resolución de problemas se han convertido en fórmulas exhortivas, más útiles a los profesores que a los científicos. A estos últimos les interesa hacer, los primeros por desgracia, parecen interesarse por un dogma cuya aceptación sin preguntas tratan de asegurar en forma catequística. Nos sentimos tentados a decir que se usa un método no científico y la resolución de problemas son deducciones y resúmenes de la manera cómo han organizado los datos. Cuando se hace un esfuerzo para que los alumnos se consagren a actividades de resolución de problemas, se advierte que se emprenderán varias operaciones del pensamiento. Cuando los alumnos reunen los datos pueden observar, comparar y analizar. Cuando el individuo usa la operación de acuerdo con un sistema que justifica, emplea un método científico.

El deseo de mejorar el aprendizaje de la matemática y de las ciencias en general, ha hecho que surgieran, como alternativas a la enseñanza tradicional, diversos modelos didácticos de enseñanza; entre ellos se puede citar la ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA POR PROBLEMAS.

Enseñar y aprender a revolver problemas se ha identificado como uno de los ejes centrales en la enseñanza de la matemática. Para explicar la característica general de este enfoque conviene definir lo que se entiende por PROBLEMA:

"Un problema es cualquier pregunta matemática que para ser solucionada requiere que la persona seleccione una(s) operación(es)". (R. Morton, 1927)

"Tenemos un problema cuando necesitamos investigar concienzudamente por una acción apropiada para llegar a concebirlo claramente, objetivo que no es alcanzable de inmediato. Por lo tanto, resolver un problema significa encontrar tal acción" (POLYA, 1925)

"El problema puede ser definido como cualquier situación, que produce por un lado un cierto grado de incertidumbre y, por otro lado, una conducta tendiente a la búsqueda de su solución" (PALACIOS, 1993).

"Problema es una pregunta que es desconcertante o difícil" (SCHÖENFELD, 1992).

"Por problema se entiende una tarea para la que un individuo o grupo requiere o necesita encontrar solución, pero para lo que no existe un procedimiento fácilmente accesible que la garantice o la determine completamente; el individuo o grupo debe realizar varios intentos para encontrar una solución" (F. LESTER, 1980)

GEORGE POLYA propone clasificar los problemas en:

**PROBLEMAS DE RUTINA**

Puede ser resueltos aplicando, directamente y en forma mecánica, una regla que el alumno no tiene dificultad para encontrar, también pertenece a este tipo de problemas que demandan la utilización correcta de un término o símbolo del vocabulario matemático, pero no hay en ellos INVENCIÓN alguna, ni desafío a la inteligencia (PROBLEMAS CERRADOS).

**PROBLEMAS DE NO RUTINA**

Los verdaderos problemas son aquellos que requieren, del alumno, un cierto grado de creatividad y de originalidad, son problemas para los cuales no se pueden identificar en forma directa un modelo de solución; son aquellos que requieren de estrategias como: chequear, trabajar hacia atrás, explorar patrones, argumentar y otros.

F. LESTER (1980) y R. CHARLES (1982), proponen clasificar los problemas en:

ESTÁNDAR

Requieren de traducción de un enunciado verbal en operaciones matemáticas.

NO ESTÁNDAR

Son problemas de proceso o investigación abierta, requieren para su solución el uso de métodos flexibles y de procedimientos de no rutina.

PROBLEMAS DEL MUNDO REAL

En estos problemas se necesita seleccionar y aplicar herramientas de la matemática en forma adecuada. Así cabrá hablar de la manipulación de objetos reales, la consulta de fuentes de información, suministro del algoritmo o no y otros.

ACERTIJOS

Estos problemas dependen de descubrir, "adivinar" estrategias inusuales para alcanzar su solución.

La mayoría de los autores coinciden en dar pautas metodológicas para la resolución de problemas, al estilo de las ofrecidas por POLYA, LABARRERE y MÜLLER: comprender el problema, búsqueda de la vía de solución, resolución y vista retrospectiva y su resolución con los momentos de la actividad. Estas pautas metodológicas tienen fundamento especial en la HEURÍSTICA y sus pasos se pueden resumir; así:

COMPRENDER EL PROBLEMA

Se refiere al ¿qué dice?. Inicialmente se lee el enunciado mediante una lectura global. Se relee el enunciado en forma analítica en busca de los datos y la incógnita. Si hay alguna figura relacionada con el problema debe dibujarse y destacar en ella la incógnita y los datos mediante una notación adecuada, esto es la modelación.

CONCEBIR UN PLAN

Se debe reformular el problema; es decir, determinar si puede enunciarse el problema de formas diferentes. El problema puede ser modificado mediante medios específicos como la generalización, la particularización, el empleo de analogías y el descartar una parte de las condiciones. El concebir un plan se refiere al ¿puedo decirlo de esta forma?, ¿cómo lo puedo resolver?, o sea, buscar la vía de solución.

EJECUTAR EL PLAN Y COMPROBAR CADA PASO

Para ejecutar el plan se deben hacer consideraciones y tener en cuenta algunas circunstancias como: conocimientos adquiridos, grado de concentración, empleo de analogías, aplicación de tanteos inteligentes y otras. Hace falta examinar los desarrollos, unos tras otros, para evitar cualquier error. El alumno debe estar seguro de la exactitud del proceso.

EXAMINAR LA SOLUCIÓN OBTENIDA

Es una visión retrospectiva, incluye el análisis de la solución y el análisis de procedimiento, además de la comprobación. Lo anterior responde a las preguntas ¿es correcto lo que hice?. ¿Existe otra vía de solución?.

La pregunta ¿para qué otra cosa sirve?. Permite establecer relaciones entre los problemas matemáticos y de estos con el mundo físico. Este procedimiento generalizado, para utilizar por el alumno, en la solución de problemas puede servir como un modelo para conducir la enseñanza de la matemática por problemas.

El trabajo propuesto por ALAN SCHÖENFLED juega un papel importante en la implementación de las actividades relacionadas con el proceso de resolver problemas en el aprendizaje de la matemática. SCHÖENFELD fundamenta su propuesta en lo que denomina la adopción de un MICROCOSMO MATEMÁTICO en el salón de clases. Esto es, propiciar en el aula de clases condiciones similares a las que los matemáticos experimentan en el proceso de desarrollo de la matemática.

Por su parte, MIGUEL DE GUZMÁN plantea la utilización del juego en la enseñanza de la matemática, señala la semejanza de estructura entre el juego y la matemática; presenta un modelo para favorecer el desarrollo heurístico a través de los juegos basados también en las fases propuestas por GEORGE POLYA, los reinterpreta para mostrar la semejanza de actitudes que se dan en la realización de un juego y en la resolución de un problema matemático.

Según SCHÖENFELD (1989), los principios epistemologicos de la resolución de problemas deben ser reconocidos por los alumnos. Estos consisten en lo siguiente:

- Encontrar la solución de un problema matemático no es el final de una empresa matemática, sino el punto inicial para encontrar otras soluciones, extensiones y generalizaciones del problema.

-Aprender matemática es un proceso activo que requiere discusiones de conjeturas y pruebas. Este proceso puede guiar a los estudiantes al desarrollo de nuevas ideas matemáticas; es necesario considerar actividades de aprendizaje que sean consistentes con los principios epistemológicos.

- La resolución de problemas es una actitud cognitiva compleja, que caracteriza una de las actividades humanas inteligentes. La teoría sistemática sobre los mecanismos de la resolución de problemas es un avance relativamente reciente de la psicología cognitiva.

## 5.4. CONCLUSIONES

Ante el trabajo con estrategias metacognitivas los alumnos reaccionan de manera diferente:

- Algunos, requieren constantemente la ayuda del docente. La

dependencia, en muchos casos, se debe a la falta de experiencia y de práctica en "pensar por sí mismo".
- Otros, son capaces de concentrarse en una tarea. Empiezan con gran interés pero se cansan pronto. No es suficiente decirles que tienen que pensar, es necesario proporcionarles actividades que los hagan pensar.

- En casi todas las clases hay un alumno seguro, que tiene la verdad incondicional. Suele ser categórico en proposiciones que carecen de pruebas reales. Estos alumnos necesitan de más ejercitaciones que los hagan pensar.

- Existen alumnos que se resisten a las ideas nuevas, a nuevas situaciones. Prefieren los caminos viejos pero conocidos. Pensar implica una nueva forma de enfrentar una situación, examinar las alternativas existentes y ensayar nuevas respuestas.

- Hay algunos que jamás se atreven a responder preguntas que los induzcan a pensar. Prefieren repetir lo ya expuesto porque tienen miedo a equivocarse. Ante la duda que les pueda surgir, prefieren callar. A medida que pasen por situaciones que los obliguen a pensar vencen esta falta de confianza en sí mismo.

- Otros alumnos no quieren pensar. Suponen que al docente le corresponde el trabajo de pensar y a ellos responder. Resisten todo cambio. Planteándoles constantemente actividades que los hagan pensar, proporcionándoles una buena orientación reflexiva, podrá contribuirse a modificar su forma de actuar.

Dentro de las ventajas de la resolución de problemas se puede citar:

- Resulta un componente importante en el estudio del conocimiento matemático.

- Posibilita desarrollar conceptos y teorías matemáticas, a partir de la propia resolución del problema.

- Contribuye a la solidez de los conocimientos.

- Contribuye al desarrollo del pensamiento lógico y creador de los alumnos.

A su vez tienen como limitaciones fundamentales:

- La preparación y motivación de los alumnos para ese tipo, tan exigente, de actividad.

- El tiempo disponible para trabajar con el programa.

- La dificultad de saber cuándo se aplica un procedimiento heurístico determinado. Existe el hecho de que, al ser las heurísticas suficientemente generales, pueden no decir nada en campos donde el resolutor no tiene suficientes conocimientos, ni se puede aplicar a la solución de todos los problemas.

A continuación daremos ejemplos de los distintos tipos de problemas según las clasificaciones antes anotadas:

1. Calcular el área de un trapecio cuyas bases miden 12 cm y 18 cms respectivamente y su altura mide 6 cms?. Respuesta: 90 $cms^2$.

2. Cuáles son las dimensiones máximas enteras de un rectángulo cuya área mide 32 $cm^2$?. Respuesta: b = 32 cms; a = 1 cm.

3. Dos tubos pueden llenar un depósito en 4 horas, cuando se usan ambos al mismo tiempo. ¿Cuántas horas se necesitarán

para que cada tubo, por sí solo, llene el depósito, si el de menor diámetro tarda 3 horas más que el de mayor diámetro?.
Respuesta: 6,77 h; 9,77 h.

4. Demuestre que, si $r_1$ y $r_2$ son las dos raíces de $ax^2 + bx + c = 0$, entonces.

a) $r_1 \times r_2 = \dfrac{c}{a}$ b) $r_1 + r_2 = \dfrac{-b}{a}$

5. Demuestre que, en todo triángulo rectángulo cada cateto es media proporcional entre su proyección sobre la hipotenusa y la hipotenusa entera.

6. Demuestre que, en todo triángulo rectángulo la altura es media proporcional entre los dos segmentos que ella determina sobre la hipotenusa.

7. Demuestre que, en todo triángulo rectángulo el producto de los dos catetos es igual al producto de la hipotenusa por la altura trazada desde el ángulo recto.

8. Demuestre que, en todo triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

9. Exprese: 0, 727272... como el cociente de dos enteros:
Respuesta: 8/11.

10. Cuál es el valor de la suma de los coeficientes de $(x + 1)^{19}$.
Respuesta: $2^{19}$

## BIBLIOGRAFÍA

AEBLI, Hans. (1973). "Una didáctica fundada en la psicología de Jean Piaget" Kapelutz, Buenos Aires.

POLYA, George, (1965). "¿Cómo plantear y resolver problemas?". Editorial Trillas. Ciudad México.

SCHÖENFELD, Alan (1985). "Mathematical problem solving". Academic Press, New York.

SCHÖENFELD, Alan, (1990). "Learning to think mathematically: problem, solving, metacognition, and sense making in mathematics, sin grows (1990): Handbook of research on mathematics teaching and learning (NCTM), pp. 334 – 366.

# LA ENSEÑANZA POR PROBLEMAS UNA ALTERNATIVA EN LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

JUAN SEBASTIÁN MENA MOSQUERA

MEDELLÍN
2002

# LA ENSEÑANZA POR PROBLEMAS UNA ALTERNATIVA EN LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

En un mundo, que viene cambiando a ritmos tan vertiginosos y donde la información fluye con tal rapidez se hace necesario, dotar a nuestros estudiantes de herramientas que le permitan y le exijan pensar. Se constituye la enseñanza por problemas en una alternativa metodológica, para el abordaje de las matemáticas y de otras ciencias, de tal manera que pueda proporcionarle la movilización del pensamiento en los estudiantes.

AUTOR
JUAN SEBASTIÁN MENA MOSQUERA
Licenciado en Matemáticas y Física
Universidad de Antioquia
Docente del
Colegio San Juan Bautista De La Salle
Catedrático Tecnológico de Antioquia

## 6. LA ENSEÑANZA POR PROBLEMAS UNA ALTERNATIVA EN LA EDUCACIÓN.

El desarrollo de las sociedades humanas ha estado ligado al avance de las ciencias.

Históricamente las ciencias permiten al ser humano realizar una compilación del conocimiento, para de esta manera, permitir a la sociedad que esa acumulación de conocimiento se perfeccione, con el objetivo de hacer más asequible el mundo al ser humano.

"Esencialmente los métodos y resultados científicos modernos, aparecieron en el siglo XVII gracias al éxito de Galileo al combinar las funciones del erudito y artesano. A los métodos antiguos de inducción y deducción, Galileo añadió la verificación sistemática a través de experimentos planificados, en los que empleó instrumentos científicos de intervención reciente" (Enciclopedia, Microsoft, Encarta 2000)

La matemática, tiene tradición como soporte para el desarrollo de otras áreas, dada su rigurosidad científica.

"Los lineamientos curriculares para la educación matemática, planteados por el Ministerio de educación Nacional (MEN), enfatizan en el enfoque de sistemas dividiendo la enseñanza de las matemáticas en varios sistemas: pensamiento numérico y sistemas numéricos, pensamiento espacial y sistemas geométricos, pensamiento métrico y sistemas de medida, pensamiento aleatorio y los sistemas de datos, pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos, resolución y planteamiento de problemas" (Lineamientos curriculares de Matemáticas, 1997).

Son algunas alternativas metodológicas para la enseñanza de las matemáticas:

El aprendizaje significativo y la enseñanza por problemas.
El aprendizaje significativo.

Es considerado como una propuesta de avanzada, en cuanto a que permite la movilización del pensamiento por parte de los estudiantes.

Ausbel, es uno de los principales representantes del aprendizaje significativo, de sus planteamientos se ingieren varios elementos:

- Es necesario crear condiciones de tal manera que el abismo entre el conocimiento nuevo, pueda ser pasado de una manera fácil.
- El concepto de mapa conceptual, permite interrelacionar los diferentes conocimientos.
- Lo significativo para una persona depende de su vivencia e intereses. (Tesis de didáctica de las matemáticas de Ana Gloria De Torres, Cuba, 1998.

## 6.1 IMPLICACIONES DEL APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO

El aprendizaje significativo ha demostrado ser una propuesta valiosa en la enseñanza de las matemáticas, se recomienda:

Debe suscitarse una actitud consciente y deliberada en el estudiante de tal forma que se constituya en forma de motivación.

Debe facilitarse la creación de un enlace cognitivo lo suficientemente fuerte que permita establecer la relación entre lo que el alumno sabe y lo que no sabe.

Vigotsky con su teoría del enfoque sociocultural, plantea que el aprendizaje es un proceso social e histórico, donde para el acercamiento al conocimiento influyen factores como la cultura, la época, las condiciones del aprendizaje. Existe una íntima relación entre pensamiento y lenguaje. El lenguaje es una manifestación del pensamiento.

El aprendizaje significativo tiene conceptos que son necesarios trabajar como son:

Zona de desarrollo próximo:

La zona de desarrollo próximo esta formada por varias etapas o niveles.

Nivel real de desarrollo, en este el estudiante denota la zona en la que realmente se encuentra, puede entonces detectarse allí la zona de desarrollo próximo o potencial.

Intervención del maestro:

Es necesario que el maestro en su capacidad de observación y su experiencia pueda permitir que se genere un desequilibrio en el estudiante, para aprovechar y lograr de este modo que hallan avances en el proceso cognoscitivo. Puede también el maestro propiciar el trabajo con pares.

## 6.2 LA ENSEÑANZA POR PROBLEMAS

Se entiende como enseñanza por problemas una metodología en la cual los estudiantes se ven sometidos sistemáticamente ante situaciones problémicas.

### *¿Qué es un problema?*

Para el investigador matemático Polya, "un problema significa buscar de forma consciente una acción apropiada para lograr un objetivo claramente concebido, pero no alcanzable de una forma inmediata.

Existen diferencias entre lo que es un problema y lo que es un ejercicio, autores como R, Borasi, realizan la clasificación de acuerdo con los elementos estructurales para la tipología de problemas:

1. El contexto del problema, situación en la cual se enmarca el mismo.
2. La formulación del problema, definición explícita de la tarea a realizar.
3. El conjunto de soluciones que pueden considerarse como aceptables para el problema.
4. El método de aproximación que podría usarse para alcanzar la solución.

"...la resolución de problemas debe erigirse como objeto de aprendizaje, fin en si misma, como contenido procedimental aplicable en cualquier situación..." (Contreras González, Luis Carlos, revista suma, 1997)

Son varias las posiciones que existen sobre resolución de problemas, al interpretar los mismos como un fin o como un medio.

En ocasiones, se entiende la resolución de problemas, como destreza básica a desarrollar en los estudiantes y en otras como una tarea muy compleja que da motivación a la clase. Consideramos que ambas posiciones no son excluyentes, sino que por el contrario se complementan para potenciar al educando. Opina el Dr. Contreras: "la resolución de problemas no es un simple añadido de la clase de matemáticas, ni algo exclusivo de los días anteriores a las vacaciones, en el impulso, el motor de la clase, lo

que pone al estudiante ante el reto de hacer matemáticas".
¿Es posible que existan modelos para solucionar problemas?

Algunos educadores y pedagogos consideran que hay tantos modelos como estudiantes hay, autores como el MSc Miguel Llivina (Cuba), han reflexionado sobre el tema, sobre lo cual pudiéramos entonces considerar:

Cuando se habla de modelo matemático para solucionar problemas, debe pensarse en estructuras de pensamiento, las cuales tienen un carácter psíquico y desde el punto de vista psicológico no es posible caracterizar las estructuras de pensamiento, la personalidad de un sujeto es muy compleja y existen elementos conscientes e inconsciente que son los que permiten actuar y tener motivaciones sin que él muchas veces al proceder se de cuenta de ello.

Surge entonces la inquietud de si al resolver problemas hay que tener una comprensión algorítmica de este proceder o si por el contrario se trata de una actividad heurística.

Al observar la definición inicial de lo que es un problema y su diferencia con lo que es un ejercicio, podemos considerar que el problema, si es una actividad que se encuentra enmarcada dentro de la heurística.

Son innumerables los autores que coiciden en que al resolver un problema "entra a funcionar el concepto de base orientadora, y dentro de la cual entran en funcionamiento tres unidades psíquicas: Instrumentación ejecutadora, estado cognitivo y estado metacognitivo" (Llivina Miguel, gestación de la conducta inteligente).

Se propone entonces según Polya, a grandes rasgos, cuatro fases bien definidas en la resolución de problemas.

1. Comprender el problema: Se lee varias veces el texto hasta lograr comprenderlo, se buscan analogías con otros problemas y palabras claves.
2. Análisis del problema: Aquí se relaciona, sintetiza, generaliza y se valora. Nos preguntamos si hemos encontrado problemas semejantes a éste, o si el problema puede enunciarse de otra manera.
3. Solución del problema: En esta fase el sujeto actúa, realiza operaciones, gráficos, comparaciones, evalúa.
4. Comprobar, evaluar y valorar: Se mira aquí no sólo el resultado, sino también que se hace un análisis retrospectivo de todo el proceso, se evalúan otras posibles vías de solución del problema.

Son limitaciones de la enseñanza por problemas:

El tiempo que requiere su implementación, sobre todo al comienzo.

El nivel que deben manejar los estudiantes de los contenidos, para posibilitar seguir avanzando, en grupos de menor nivel académico se dificulta más su implementación, lo cual no implica que no pueda hacerse,

**Ejemplos de solución de problemas**

A. La suma de las edades de un padre y su hijo es 65 años y el hijo tiene 25 años menos que el padre. Hallar la edad de ambos.

El maestro orienta el proceso a través de una conversación heurística (guiadas con preguntas con intencionalidad)

MAESTRO:

¿Qué datos nos piden y qué datos se nos dan?

ALUMNOS:

Nos dan las sumas de las edades de ambos y también su diferencia.

MAESTRO:

¿Como podemos utilizar dicha información?

ALUMNOS:

La información nos sirve para hallar la solución.

MAESTRO:

¿Y cómo podemos hacer esto?

ALUMNOS:

A través de ecuaciones.

MAESTRO:

procedamos a la solución.

ALUMNOS:

DATOS

Sea x la edad del padre

X = 25 Edad del Hijo

| | |
|---|---|
| Edad/padre + Edad/hijo = 65 | Planteamiento del problema |
| $x + x - 25 = 65$ | Planteamiento de la ecuación |
| $x + x - 25 + 25 = 65 + 25$ | Procedimiento de solución |
| $2x + 0 = 90$ | Suma |
| $\frac{2x}{2} = \frac{90}{2}$ $\quad x = 45$ | Simplificación |

MAESTRO: ¿Qué procedimiento utilizamos?

MAESTRO: ¿Cuál puede ser otra vía de solución?

B. EJERCICIO PROPUESTO POR EL DOCTOR PAUL TORRES (Instituto Superior Pedagógico "Enrique José Varona", La Habana Cuba)

EJERCICIO DE RESOLUCIÓN GEOMÉTRICA

Procedimiento de construcción de triángulo dados sus lados, y definición de triángulo equilátero.
Profesor: Se supone ya trabajada la construcción de triángulos, dados tres elementos.

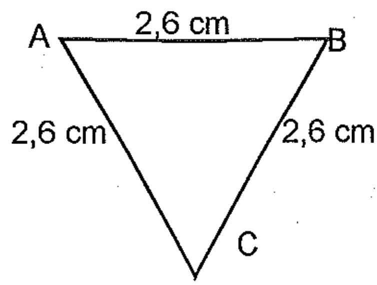
Profesor: ¿Se puede, bajo determinadas condiciones, realizar construcciones con un número menor de datos? ¿Cómo?

Profesor: ¿Qué es conveniente hacer para iniciar la resolución de un problema? Separar lo dado de lo buscado (regla heurística).

Profesor: ¿Que es conveniente hacer además en el caso de ejercicios geométricos (Elaborar una figura de análisis).

Profesor: ¿Qué hacer para avanzar en la resolución de ejercicios?. ¿De que métodos de construcción geométrica disponemos? ¿Podemos reducir la tarea a la obtención de puntos aislados o es necesario trabajar con toda figura?

C, dado como dato



¿A Cuántos puntos se reduce el problema si se traza el segmento AB?

Alumnos:
Como al trazar C = 2.6 cm, se tienen A y B, entonces el ejercicio se reduce a obtener C, por lo que debemos utilizar el método de los lugares geométricos.
Profesor:
¿En que consiste la utilización de este método?
¿Qué hacer para obtener la posición exacta de C?
¿Qué significa lugar geométrico que contenga a C?

Alumnos:
Necesitamos encontrar la intersección de al menos dos lugares geométricos que contengan a C.

Profesor:
Debemos interpretar el dato "triángulo equilátero" que significa que sus tres lados son iguales.

Profesor:
¿Qué lugares geométricos para C podemos inferir de ello?
¿A qué distancia de A y de B, se encuentra C?

Profesor:
¿Como obtenemos finalmente C?

Profesor:
¿Cuales entonces son los pasos de resolución?

## BIBLIOGRAFÍA

LECCIONES DE MATEMÁTICA Nº 1 CEID ADIDA. Medellín Colombia. Abril de 2001

LINEAMIENTOS CURRICULARES DE MATEMÁTICAS. MEN. Colombia. 1997.

APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO. Tesis de Ana Gloria De Torres. Instituto Enrique José Varona La Habana Cuba. 1999

# SOBRE LA ASIMILACIÓN Y LA EVALUACIÓN DE LA MATEMÁTICAS

MÓNICA PATRICIA MEJÍA COBALEDA

MEDELLÍN
2002

## SOBRE LA ASIMILACIÓN Y LA EVALUACIÓN DE LA MATEMÁTICA

Se pretende presentar a los maestros primero que todo una justificación de porqué enseñar matemáticas, la cual esta basada en la cantidad de aportes que ésta le brinda al ser humano para su desarrollo intelectual, social y personal.

Por otro lado, se busca inquietar a los maestros de matemáticas en como enseñar mejor, teniendo en cuenta que es la asimilación, cuál es su proceso y cómo saber su resultado.

En correspondencia con lo anterior, se brinda un pequeño bosquejo de cómo preparar las clases de matemáticas teniendo en cuenta las categorías rectoras del proceso de enseñanza - aprendizaje.

Por último, el artículo señala algunos aspectos y recomendaciones para la evaluación de la asimilación del contenido matemático, especificando las principales funciones que ésta debe cumplir y cómo hacer que sean realmente confiables al momento de tener que dar una valoración del aprendizaje de los estudiantes.

AUTORA
MÓNICA PATRICIA MEJÍA COBALEDA
Master de Didáctica de la Matemática del
Instituto Pedagógico Latinoamericano y Caribeño
Docente de
Colegio San Juan Bautista de la Salle
Politécnico Colombiano Jaime Isaza Cadavid

## 7. SOBRE LA ASIMILACIÓN Y LA EVALUACIÓN DE LAS MATEMÁTICAS

*"No se graba con solidez en la mente sino aquello que el entendimiento conoce rectamente y la memoria fija con cuidado"*
*(Comenio, 1995,p. 88)*

En los últimos años la Educación ha sido objeto de diferentes reformas en el ámbito mundial, como en: Estados Unidos (1983), España (1986), Japón (1987), Inglaterra y Gales (1988) y Francia (1989). En el ámbito latinoamericano, países como: Argentina, Chile, México y Venezuela también han hecho algunas reformas que inciden directamente en la Educación.

Con estas reformas educativas, los estados buscan que los ciudadanos se formen desarrollando capacidades críticas, analíticas, reflexivas y creativas; que sean autónomos, solidarios y libres; que tengan habilidades para solucionar problemas de diferente índole, para asimilar la tecnología necesaria para el progreso de la humanidad y que produzcan avances científicos significativos.

***La Constitución Colombiana de 1991 plantea una nueva conceptualización de la Educación, la cual es retomada en la Ley General de Educación (Ley 115) de 1994, donde se trazan los fines, los objetivos y las directrices para alcanzar el mejoramiento de la Educación en Colombia.***

Dentro de los fines de la Educación Colombiana, que plantea dicha Ley, se contempla: "el acceso al conocimiento, la ciencia, la técnica y demás bienes y valores de la cultura, el fomento de la investigación y el estímulo a la creación artística en sus diferentes manifestaciones" (Ley General de la Educación, 1994, p. 9)

Además, invoca "el desarrollo de la capacidad crítica, reflexiva y analítica que fortalezca el avance científico y tecnológico nacional, orientado al mejoramiento cultural y de la calidad de vida de la población, a la participación en la búsqueda de alternativas de solución a los problemas y al progreso social y económico del país". (Ley General de Educación, 1994, p. 9)

Es sabido que el estudio de la Matemática contribuye al desarrollo del pensamiento, entre ellos al desarrollo del pensamiento lógico, físico y creativo con fantasía, mediante el fortalecimiento de actividades mentales como: analizar, sintetizar, comparar, clasificar, generalizar, abstraer y concretar.

Además, la Matemática ayuda a fortalecer las habilidades propias para manejar rápida y seguramente medios auxiliares como instrumentos de medición y dibujo, tablas de cálculo, reglas y leyes, entre otras.

También aporta a la formación de la personalidad, creando en el individuo cualidades de disciplina, tenacidad, constancia y espíritu crítico; desarrolla la capacidad para utilizar correctamente el lenguaje matemático y por ende una formación lingüística que permite transferir este lenguaje al lenguaje común.

Por otra parte, la matemática aporta al desarrollo del pensamiento físico, la imaginación espacial y el pensamiento final.

El pensamiento físico se refiere al hecho de establecer reflexiones entre el mundo físico (movimientos, formas y transformaciones) y la geometría como (puntos, rectas y ángulos), que aparecen inmersos en el mundo real. Es la capacidad que tiene un individuo, que ha estudiado geometría, de pasar ante un edificio y ver en él el ortoedro o el cilindro que representa, de observar la trayectoria recta o curva que lleva un avión que pasa en su vuelo por el espacio aéreo y de comparar las formas y los tamaños de las cosas, entre otras, gracias a sus conocimientos geométricos.

La imaginación espacial "... ocurre ante todo en la enseñanza de la geometría, donde los alumnos se capacitan para imaginarse objetos espaciales y las relaciones entre estos. Sobre la base de datos verbales o representaciones planas y para trabajar correctamente con ellos" (Jungk, 1983, p.20).

Entiéndase como pensamiento final "los procesos del pensamiento encaminados a un producto final determinado... en este caso existe cuando el alumno tiene que realizar tareas de construcción" (Jungk,1983, p.20)

Con estas habilidades, cualidades y procesos de pensamiento, el hombre desarrolla una destreza maravillosa para solucionar todo tipo de problemas y construir diversas cosas que le sean necesarias en la vida.

En correspondencia, la Misión de Ciencia, Educación y Desarrollo propone, dentro de la reforma a la Educación, "dar prioridad al dominio de diversos marcos de pensamiento por parte de los alumnos, de manera que tengan capacidad de reflexionar, planear y hacer la monitoría de sus propios procesos mentales" (Colombia al Filo de la Oportunidad, 1996, p. 181)

Es por eso que la Matemática, siendo una de las ciencias que mayor contribución al desarrollo de procesos mentales brinda, se ha reestructurado en nuestro país, buscando el logro de objetivos que concreten la propuesta de la Misión de Ciencia, Educación y Desarrollo.

Para ello propone, en los objetivos de la Educación, que se busque: "el desarrollo de las capacidades para el razonamiento lógico, mediante el dominio de los sistemas numéricos, geométricos... así como para su utilización en la interpretación y solución de los problemas de la ciencia, la tecnología y los de la vida cotidiana". (Ley General de Educación, 1994, p.22)

Es claro que el aprendizaje de la Matemática es sumamente importante para el desarrollo de la sociedad, sin embargo a pesar de las reformas que se plantean falta mucho camino por recorrer para llegar a una asimilación creadora de la Matemática.

Hoy, se tiene la necesidad de motivar a los alumnos para que aprendan autónomamente, el maestro debe ubicarlos en el camino del saber, mediante sus propios conocimientos, acompañándolos en sus procesos, de modo que les brinde todas las posibilidades para lograr un nivel de asimilación del conocimiento lo más alto posible para cada uno sin importarle el camino, el método y los medios que utilice, pero considerando siempre como punto de partida para llegar a ese nuevo saber, todos los conocimientos ya existentes en los alumnos y la utilidad del nuevo aprendizaje. Frente a lo anterior, el expresidente de Colombia, Dr. Cesar Gaviria expresa:

"Nuestra sociedad demanda un sistema educativo capaz de formar ciudadanos libres y creativos, autónomos e innovadores, sin quienes no será posible consolidar una sociedad democrática y abierta, inserta en la economía global y en la cultura contemporánea" (Gaviria, 1993, p.27)

Aun cuando todo lo expresado es factible de alcanzar se vienen presentado una serie de dificultades en el proceso de enseñanza –aprendizaje a nivel mundial.

En correspondencia con lo anterior, expertos maestros de la educación Matemática como: Miguel de Guzmán, Alonso Takahashi, Liliana Siñeris, Paul Torres, entre otros, expresan que el aprendizaje de la Matemática es deficiente y en la medida que el estudiante avanza en su grado de escolaridad éste empeora.

Además desde finales del siglo pasado viene manifestándose la baja calidad en la educación colombiana, lo cual responde, entre muchas causas, a la falta de una adecuada formación de los maestros y de un mejoramiento sustancial en sus condiciones de vida, así lo manifiesta Gabriel García Márquez en el Informe de los Sabios:

*"Décadas de descuido, de desgreño en el manejo de la Educación en Colombia nos han dejado un entramado social débil, una capacidad productiva ínfima, baja competitividad, escaso civismo y una creatividad deformada."*

*(García, 1996, p.117 )*

Todo lo anterior conlleva a buscar una preparación adecuada de la enseñanza de la Matemática con el ánimo de mejorar el bajo nivel de asimilación que vienen demostrando los estudiantes.

Es así como se hace necesario perfeccionar la enseñanza de la Matemática buscando que el nivel de asimilación de ésta sea creador, lo que conlleva a un alto nivel de cultura y desarrollo social que en última instancia arroja un mejoramiento sustancial de la calidad de vida de los ciudadanos, una sociedad democrática, abierta y competitiva a nivel mundial.

Para ello, es importante saber qué es la asimilación, cuál es su proceso y cómo saber su resultado.

En primera instancia, la asimilación se reconoce como un término de la didáctica que nos indica el dominio que posee un individuo sobre determinada ciencia o la apropiación que se tiene de un contenido de enseñanza.

Es un principio didáctico que garantiza el conocimiento sólido del contenido de enseñanza, la comprensión total y profunda del objeto de estudio, saber expresar el pensamiento mediante el lenguaje verbal y ser capaz de utilizar dichos conocimientos en la practica para resolver las situaciones que se le presenten.

En segundo lugar, el proceso mediante el cual un estudiante asimila los conocimientos se da de diferentes maneras, las cuales son una base para el desarrollo del pensamiento y que culmina en la fijación de éstos.

Este proceso se inicia con el contacto del individuo con el objeto de estudio o una representación del mismo y a través de la comparación en sus variaciones le permite realizar abstracciones y generalizaciones entre otras.

Para poder desarrollar este proceso es necesario que el estudiante se exprese, que manifieste lo que observa, así exterioriza lo que considera del contenido de la enseñanza y lo convierte en su lenguaje interno, lo cual garantiza el dominio o apropiación del conocimiento.

No obstante, el conocimiento no se logra totalmente sin adquir la capacidad para realizar una actividad con él, es decir, las habilidades y los hábitos propios de un conocimiento determinado. Estos se obtienen de la aplicación constante y repetida del contenido de enseñanza en diversas situaciones matemáticas o extramatemáticas.

Cabe anotar que una buena asimilación del contenido de enseñanza determina en el estudiante características como: una actitud consciente, activa e independiente, desarrollo del lenguaje e interés cognoscitivo.

## 7.1. CARACTERÍSTICAS DE LA ASIMILACIÓN

**7.1.1. La actitud consciente:** consiste en la manera como un estudiante participa activamente en el proceso de aprendizaje, siendo consciente de lo que hace, lo cual se demuestra en la facilidad con que expresa lo aprendido, para ello es importante que el profesor le dé a entender al estudiante la finalidad del objeto de estudio, su valor y su vía de solución.

**7.1.2. La actitud activa:** se refiere a que el maestro dirige al estudiante a participar activamente en la construcción del nuevo conocimiento, poniendo en práctica sus habilidades, destrezas y hábitos.

**7.1.3. La actitud independiente:** es la que contribuye al desarrollo del pensamiento independiente del estudiante, logrando así aplicar los conocimientos y habilidades adquiridas en el aprendizaje para resolver autónomamente situaciones de la vida diaria.

**7.1.4. Desarrollo del lenguaje:** muestra la capacidad de pensar de los estudiantes, cundo ellos expresan verbalmente las experiencias acumuladas, lo que observan y aprecian del mundo y la ciencia objeto de estudio.

El lenguaje es el vehículo para la asimilación de los conocimientos mediante el cual convierte la realidad objetiva en la teoría y lo concreto en lo abstracto.

Por ello es importantísimo, que el maestro permita al estudiante expresar lo que ve, lo que percibe, las relaciones que identifica entre los objetos de estudio, sólo así se garantiza que existen las condiciones necesarias para adquirir el aprendizaje.

**7.1.5. El interés cognoscitivo:** se trata de la disposición que manifiestan los alumnos por el aprendizaje, las ganas de conocer nuevas cosas, la necesidad de realizar actividades cada vez mas complejas, la satisfacción por adentrarse en nuevos conocimientos, el deseo de aventurarse en nuevos conocimientos, las ansias de saber.

Este aspecto lo logran los estudiantes gracias a la disponibilidad del maestro para establecer una óptima motivación por el tema de la clase, que ayude a sus estudiantes a desarrollar el interés por el conocimiento, partiendo del propio amor por lo que él enseña; mostrándole al estudiante lo atractivo y útil que es el nuevo conocimiento, objeto de estudio.

El modo de alcanzar una buena motivación en los estudiantes es diverso, claro está que algunos de los procedimientos más destacados para lograrlo son:

- Utilizar un método en el proceso de enseñanza - aprendizaje adecuado a las necesidades de los estudiantes.
- Generar discusiones en torno a una pregunta inteligente, puntual y atractiva en el momento preciso.
- Enseñarles a utilizar las habilidades, los hábitos y las destrezas adquiridas para obtener nuevos conocimientos.
- Proponerles que sean atentos de manera individual y que utilicen todo su potencial para el trabajo en equipo, aportándole así a sus compañeros todo lo que está a su alcance.
- Proponer actividades que busquen el desarrollo creador del estudiante.

- Convencerlos de respetar la palabra de los compañeros y así poder ser escuchados con respeto.

Luego del proceso mediante el cual se asimilan los conocimientos se hace necesario saber cuáles son los resultados de dicha asimilación.

## 7.2. NIVELES DE ASIMILACIÓN

En correspondencia con lo anterior se tienen los diferentes niveles con los cuales un estudiante logra la asimilación del contenido matemático. Ellos son:

**7.2.1. Familiarización:** en este nivel se hacen representaciones muy generales del objeto de estudio, se obtiene un conocimiento de identificación del contenido; este nivel prepara al estudiante para niveles superiores. Es el comienzo de la asimilación.

**7.2.2. Reproducción:** el estudiante está en condiciones de utilizar el algoritmo o reproducir un modelo del objeto de estudio, en este caso puede funcionar muy bien la memoria y en algunas situaciones es muy mecánico lo que se hace, osea que no siempre se tiene absoluta comprensión del conocimiento.

**7.2.3. Aplicación o producción:** este nivel se caracteriza por la facilidad para resolver problemas. Él estudiante debe aplicar los conocimientos que posee, utilizar sus habilidades para resolver situaciones que se le planteen, debe comprender el objeto de estudio para poder utilizarlo de la manera más ágil, correcta y adecuada, con la intención de explicar o solucionar el problema que se le presenta .

**7.2.4. Creación:** se caracteriza por la capacidad de los estudiantes para obtener los medios que los ayuden a resolver un problema determinado, dadas pocas condiciones, el estudiante debe conseguir el resto de la información, la vía y los conocimientos necesarios para llegar al objetivo planteado. En este nivel es donde el estudiante es hábil para investigar, demostrar y construir el conocimiento nuevo.

De esta manera, se viene tratando de guiar el proceso de enseñanza – aprendizaje, convirtiendo la asimilación en parte de éste, lo cual conlleva a organizar la preparación cuidadosa y la ejecución precisa del mismo.

## 7.3 CATEGORÍAS DEL PROCESO ENSEÑANZA-APRENDIZAJE

Para ello, se deben identificar y preparar las categorías del proceso de enseñanza – aprendizaje, entre las cuales se tienen los objetivos, el contenido y el método.

**7.3.1. Los objetivos:** enuncian lo que deben lograr los alumnos en el desarrollo de habilidades, capacidades mentales y contenidos específicos. Los objetivos suelen clasificarse en:

- **Instructivos**: son aquellos que se refieren específicamente al campo del saber, es decir, cómo se hacen las cosas y poder hacerlas. Son estos los objetivos del saber y poder.

- **Desarrollo intelectual:** se refieren al campo de las elaboraciones mentales, donde se da el análisis, las abstracciones, las inferencias, la creatividad, las aplicaciones en la solución de problemas, entre otros.

- **Educativos:** en estos se expresa el campo de las cualidades de la persona, son los que propenden por que el estudiante se forme en ser crítico, reflexivo, analítico, responsable, ordenado, disciplinado, entre otros.

Con estas tres clases de objetivos se busca el desarrollo integral del estudiante, es valorado así en forma holística, lo cual debe ser la finalidad de la instrucción matemática. Además los objetivos cumplen las siguientes funciones:

**Determinativa:** pues a partir de ellos se puede seleccionar el tema o los contenidos a tratar con los estudiantes, el método a emplear para el tratamiento de dichos contenidos, la forma general en que se desarrollará la clase.

**Orientadora:** ya que le indican al maestro lo que los estudiantes deben lograr, estos a su vez deben estar enterados de los objetivos a cumplir pues como lo vimos anteriormente se trata de que el proceso de enseñanza – aprendizaje sea consciente y activo así su trabajo tendrá mayor sentido y orientación.

**Valorativa:** permiten comparar en cada estudiante el logro alcanzado, es decir, su nivel de asimilación o rendimiento académico, de allí se emite un juicio de valor que indica si se debe reorientar el proceso de aprendizaje del estudiante o se puede seguir adelante con otros contenidos.

Se puede concluir, por las funciones, la clases y la finalidad de los objetivos, que estos son la categoría rectora del proceso de enseñanza – aprendizaje de la Matemática.

En correspondencia con los objetivos y la primera función de éstos, está la categoría contenido.

**7.3.2. Los contenidos:** son todo aquello que se enseña, son el saber especifico de la Matemática. Lo componen los conceptos, las definiciones, los teoremas, los procedimientos algorítmicos, los procedimientos heurísticos, las habilidades para emplear estos conocimientos, las cualidades de la personalidad, los valores, las convicciones, entre otros.

Vemos que los contenidos se dividen en tres aristas, que son: el campo del saber, el campo del poder hacer y el campo educativo; pues siempre deben estar en correspondencia con la clasificación que se ha planteado para los objetivos y además deben ser de entero dominio del profesor.

No obstante, no es suficiente tener muy bien planteados los objetivos y seleccionar los contenidos, es necesario complementar estos con la selección de un adecuado método de enseñanza para garantizar unas buenas condiciones de trabajo docente educativo.

**7.3.3. El método:** es el conjunto de acciones del maestro, que provocan actitudes en el alumno, en relación con el contenido para lograr los objetivos propuestos.

El método se refiere al cómo enseñar, y tiene dos aspectos que lo caracterizan:

- **Aspectos Externos:** son los medios con que expone el profesor, las preguntas que hace sobre el contenido, los diagramas que utiliza, el control que realiza, los talleres y tareas que emplea para llevar a los alumnos al logro de los objetivos, en fin, todo lo que el profesor hace para enseñar un determinado contenido.

- **Aspectos Internos:** son las reflexiones que se deben hacer sobre cómo aprenden los estudiante, cuáles acciones hacer para ver que ocurre en la mente de ellos, se refiere a la ruta que sigue el procedimiento en el cerebro para llegar al conocimiento.

El método como proceso de enseñanza – aprendizaje de las matemáticas debe propender por resolver las contradicciones que en este proceso se presentan. Ellas son:

- El desequilibrio cognitivo: se refiere a las contradicciones a las que llega un estudiante en el momento de enfrentarse entre lo que sabe y el nuevo tema de estudio. El método debe buscar que el estudiante redescubra los conocimientos, que la materia se le presente como un reto agradable.

Según lo dicho, el maestro debe ser un impulsador que lleve a los estudiantes a un aprendizaje productivo; debe inducirlo a analizar a fondo los contenidos, qué dicen éstos, cuál es su historia, cuáles son sus consecuencias y sus limitaciones, cuál es su razón de ser y su utilidad, dónde está su génesis y cómo ha sido su evolución; buscar que se recreen con la tarea de reproducir una parte esencial de la experiencia original de dicho saber.

La otra contradicción se refiere a la relación entre la demanda del maestro y el nivel de desarrollo del estudiante.

La demanda del maestro es la exigencia que éste ejerce respecto al desarrollo de los estudiantes, en las preguntas, los ejemplos, los ejercicios, las tareas y todas aquellas acciones o medios que utiliza en el proceso docente – educativo.

**El Nivel de Desarrollo del Estudiante:** se refiere al nivel del conocimiento que ha adquirido éste, el cual es el nivel de asimilación que manifiesta frente a los diferentes temas de estudio.

❖ La demanda del maestro debe ser mayor que el nivel de desarrollo del estudiante, de modo que se produzca la posibilidad para que el estudiante atraviese con éxito la zona de desarrollo próximo, la cual como lo expuso L. Vigotski, es lo que hay entre el nivel real de desarrollo y el nivel de desarrollo potencial, es decir poder detectar qué y cuándo un sujeto puede hacer algo solo y que puede hacer para lograr a partir de allí y llegar al aprendizaje dirigido o potencial.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Demanda del maestro | ⇨ | zona desarrollo próximo | ⇨ | nivel de desarrollo del estudiante |

Se puede afirmar que la dificultad que se viene presentando en el aprendizaje de las matemáticas no es a causa del texto que se utiliza, ni del número de horas que se disponen para ésta, ni de la cantidad de estudiantes que hay en el grupo, ni mucho menos del contenido a enseñar; el problema realmente se presenta en el método de enseñanza, éste debe cambiarse o adecuarse al nivel de desarrollo de los estudiantes, al entorno donde se realiza el proceso de enseñanza - aprendizaje.

Se debe propender por un método que proporcione al estudiante la posibilidad de redescubrir los conocimientos matemáticos, que se le presente la materia como un reto que le guste, donde el maestro sea facilitador o impulsador que lleva al estudiante al aprendizaje productivo o creativo. Podemos concluir que una buena preparación del proceso docente–educativo tiene su inicio en la identificación y preparación de éstas categorías. Hasta ahora se ha trabajado en la solución de preguntas cotidianas que surgen en el ámbito de la educación, tales como: ¿para qué se enseña?, ¿para qué se aprende?, ¿qué se enseña?, ¿qué se aprende?, ¿cómo se enseña?, ¿cómo se aprende?.

Según lo anterior, se debe tener presente que el proceso docente-educativo de la Matemática, no es lineal, se divide en períodos y cambios de actividad en el transcurso de la dinámica del proceso. Son eslabones que llamamos funciones didácticas y en ellas se pueden destacar tres momentos que son:

- el primero es la preparación de la nueva materia, que consiste en asegurar el nivel de partida en cada estudiante para acceder al nuevo conocimiento, luego se hace la motivación para que el estudiante se sienta interesado o activo en la adquisición del nuevo saber y por último se hace la orientación hacia el objeto pues es allí donde el estudiante se entera definitivamente sobre qué se trabajará en clase.

- El segundo aspecto es el trabajo en la nueva materia, donde se elaboran los nuevos conocimientos hasta llegar a su definición, se hacen demostraciones, construcciones geométricas, se resuelven problemas, en fin, la tarea fundamental acá es el proceso de búsqueda del estudiante para llegar al objeto de estudio, es decir a su propio conocimiento.

- En última instancia, está el trabajo con la nueva materia el cual contempla dos momentos:

uno de ellos es la fijación o consolidación del conocimiento, este se realiza de diferentes formas como:

- **La ejercitación:** es la realización de ejercicios para uso del nuevo conocimiento.
- **La profundización:** donde se buscan las propiedades del objeto de estudio.
- **La sistematización:** consiste en verbalizar y redactar el nuevo conocimiento y la demostración del mismo; es importante comparar, analizar, buscar analogías, contraponer situaciones a lo dado, entre otras.
- **La aplicación:** se resuelven problemas matemáticos o extramatemáticos aplicando el conocimiento adquirido.

- **El repaso:** se hace la revisión del proceso, mediante el cual se adquirió el conocimiento, este se viene realizando en las demás formas de fijación y su tarea principal es reactivar el conocimiento en el estudiante.

El repaso debe hacerse inmediatamente se esta estudiando el tema pues es el momento en que hay mayor tendencia al olvido.

Cabe anotar que la importancia de la consolidación en el proceso docente – educativo es extrema pues el objetivo de esta es emprender una lucha contra el olvido, es decir adquirir conocimiento para un largo plazo. El otro momento del trabajo con la nueva materia es el control, allí el maestro verifica si el estudiante ha comprendido el objeto de estudio y cuál es el nivel de asimilación del mismo.

En este momento se efectúan las tareas, los talleres y todo tipo de actividades donde el estudiante demuestre las habilidades y conocimientos que ha adquirido.

En este tipo de actividades es importante tener en cuenta algunas recomendaciones como:

- Presentar los ejercicios de manera que éstos le propicien al estudiante una consciente actividad de aprendizaje.
- Que en los ejercicios se desarrollen las capacidades en forma integral .
- Que éstas sean significativas y motivadoras para el estudiante.
- Que lleven al estudiante a crear situaciones nuevas.
- Cada ejercicio debe contribuir a el desarrollo en los diferentes campos del aprendizaje.
- Se debe tener en cuenta la diferencia del aprendizaje en cada estudiante de modo que a menor nivel de aprendizaje se le

ayude con datos o explicaciones adicionales y a mayor nivel de aprendizaje se le aumente, dosificadamente, la cantidad y dificultad de ejercicios.

- Variar las condiciones de los ejercicios de modo que se hallen diferentes datos o se realicen nuevas cosas.
- Emplear en la redacción de los ejercicios la misma persona, preferiblemente la segunda y que sean claros y concisos.
- Procurar que la solución sea aplicable a múltiples situaciones, es decir velar por la universalidad de los ejercicios.

Recuérdese que la consolidación esta ligada a toda actividad de enseñanza-aprendizaje, ahora bien si éste esta adecuadamente planeado, debe considerar también la actividades de la evaluación.

Para abordar el tema de la evaluación debemos tener en cuanta que lo que se enseña en matemáticas debe ser de pleno conocimiento del maestro, este debe conocer su génesis y las posibles extensiones del mismo contenido, lo cual da posibilidades de diagnosticar el nivel de partida para el próximo aprendizaje y estimular la profundización con el tema de manera individual y extra escolar, buscando un proceso más productivo.

Para llevar a cabo un proceso de enseñanza- aprendizaje más productivo es importante tener en cuenta el nivel de desarrollo cognitivo de los alumnos, lo cual es la rapidez con que aprende cada individuo; todos somos suficientemente inteligentes para aprender algo y en particular matemáticas, pero cuando se nos está dando la oportunidad de aumentar el nivel de inteligencia.

En consecuencia con lo anterior, tenemos que no es necesario apresurarse en la enseñanza de la matemática, después de todo no se trata de dar una gran cantidad de información, sino que lo que se estudie, por poco que sea, se aprenda.

En el proceso de enseñanza-aprendizaje debe primar el enseñarle al estudiante a que recorra su propio camino y redescubra por si mismo las cosas que otros han dejado ya demostradas; una buena estrategia para ello es poner al estudiante en una situación similar a la que pudieron tener los matemáticos de otras épocas es decir, partir de la historia de la matemática para llegar a valorar, interpretar y aplicar los contenidos que hoy estudiamos, se debe buscar enseñar aprender.

Al respecto, Heideguer decía: "enseñar es más fácil que aprender, porque enseñar significa dejar aprender" .
Cuando todo esto se considera en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática, se esta buscando mejorar la calidad del aprendizaje de la misma; así que la evaluación que se haga del proceso debe buscar dar cuenta de lo que se logra día a día en el estudiante.

Según lo anterior, la evaluación debe ser educativa, la cual observa esencialmente los procesos que van elaborando los estudiantes y el profesor. La evaluación se asume como un proceso que considera al estudiante en forma holística, lo mira como el ser integral que es.

Respecto a la evaluación, el colectivo de especialistas del ICCP de cuba dice que "la evaluación es un componente esencial del proceso enseñanza – aprendizaje, que parte de la definición misma de los objetivos y concluye con la determinación del grado de eficiencia del proceso dado por la medida en que la actividad del profesor y el alumno haya logrado como resultado los objetivos propuestos" (Colectivo de especialista del ICCP, 1984).

## 7.4. FUNCIONES DE LA EVALUACIÓN

Es así como la evaluación debe cumplir las siguientes funciones:

### 7.4.1. Función instructiva:

Indica que a través de la evaluación el alumno también aprende, pues al ser evaluado se contribuye con la consolidación del aprendizaje, se incrementa la actividad creadora del alumno, se crea condiciones para asimilar la nueva materia en forma efectiva.

### 7.4.2. Función educativa:

Que favorezca una actividad más responsable hacia el estudio, contribuyendo a la atención voluntaria y permanente, tiene carácter motivador pues el alumno muestra mayor interés y fuerza cuando se autoanaliza, fortaleciendo su carácter y formándose capacidades constructivas; que sean críticos y autocríticos.

### 7.4.3. Función diagnóstica:

Con la evaluación se detectan las facilidades y dificultades individuales de los alumnos para que a partir de allí se fortalezcan los primeros y mejoren los últimos.

### 7.4.4. Función desarrolladora :

Que los alumnos deban hacer análisis, síntesis, inferencias, sacar conclusiones, etc; en las actividades dadas que se propongan, lo cual contribuye al desarrollo del pensamiento.

### 7.4.5. Función de control:

Que busque una comparación entre el nivel de asimilación actual del alumno y el anterior; que el maestro verifique cuanto se ha logrado respecto a lo programado.

Además se deben tener en cuenta los elementos que intervienen en la evaluación, ellos son los objetivos, los contenidos, los documentos y el sistema de evaluación que se emplea.

Al respecto, se plantea que se evalúa el logro de los objetivos, la evaluación comienza con los objetivos y termina valorando el logro de éstos. Son estos los objetivos de nivel, los generales de la asignatura y los específicos del grado.

En cuanto a los contenidos, la evaluación se debe programar de modo que coincida con los temas que se han visto en las clases. Existe una clasificación de contenidos que son: referente a los contenidos generales de las distintas asignaturas, los del plan matemático y el tema de la clase.

Con relación a los documentos se emplean lo que son el P.E.I, el plan de estudios, el programa de área y el plan de curso de donde debe surgir el plan de cada clase .
Además, referente a los tipos de evaluación o sistema evaluativo es importante planearla con la concertación de los estudiantes, teniendo en cuenta de respetar y cumplir lo que se acuerde; bien sea exámenes parciales y finales o una evaluación continua, frecuente y sistemática.

Cabe anotar, que si se ha optado por una evaluación de parciales y final y el estudiante a demostrado el logro del objetivo en los parciales, no se hace necesario evaluarlo nuevamente en el final.

Para llevar a cabo la evaluación matemática se pueden abordar diferentes clases de actividades:

- Las que llevan a la comprobación, es hacer un corte en un determinado momento para conocer el rendimiento académico de los estudiantes, se comprueba para controlar.

- Las que llevan a un control frecuente, sistemático continuo, son aquellas que de modo constante actúan para verificar los objetivos alcanzados; se divide en control previo, cuya tarea principal es diagnosticar y hacer un control sistemático, donde se comprueban los resultados que se van obteniendo durante el proceso.

- Y por último, las que llevan a un control de medición o calificaciones, es una comparación respecto a un patrón aportado, a partir de un objeto; por lo cual se emite una calificación o da una interpretación de las mediciones que permite arrojar un juicio de valor en una escala establecida.

En todo caso, cuando se realiza una evaluación se deben hacer preguntas que se ajusten al logro de los objetivos, a la realidad del estudiante, al nivel de asimilación que posee y al tipo de consolidación que se ha empleado.
Completando lo anterior, dichas evaluaciones deben ser:

- Válidas: que apunten a comprobar los objetivos vistos.
- Confiables: que al aplicarse en grupos de un nivel similar se obtengan resultados en un rango próximo.
- De fácil manejo: donde las preguntas sean claras, precisas y se tenga lo necesario o de lo contrario dar una aclaración.

No obstante, estas recomendaciones de forma se puede complementar con recomendaciones de fondo que aporten al mejoramiento de la ejecución de la evaluación en el proceso docente – educativo.

Teniendo en cuenta que el sujeto que se evalúa pasa por distintas etapas de desarrollo cognitivo, éstas se deben tener en cuenta para el planeamiento e implementación de las actividades de aprendizaje y evaluación, en cada etapa el estudiante esta en condiciones de realizar o adquirir experiencias y conocimientos que le ayuden a pasar a la etapa siguiente, este paso será mas ágil y productivo si el maestro diseña actividades agradables y positivas, acordes a la etapa en que se encuentran los estudiantes, con el ánimo de que las aprovechen en pro de su enriquecimiento y crecimiento personal.

Por otro lado, el sujeto como ser individual e integral, posee un ritmo particular que en el momento de aprender algo es diferente al de otros sujetos incluso de su misma edad en su misma etapa de desarrollo cognitivo o de su mismo grado, esta individualidad debe respetarse en el estudiante evitando así la frustración y el fracaso en el logro de los objetivos.

Para contribuir al respeto por la individualidad del sujeto y un buen proceso de evaluación, se pueden aprovechar al máximo situaciones que se presentan en clase como: las lecciones orales y escritas, las actividades para resolver en clase, los ejercicios propuestos, las lecturas, las mesas redonda, los debates, las preguntas y las respuestas que surjan frente a un tema determinado; ya que estas le están brindando información al maestro y al estudiante, no solo sobre su nivel de asimilación académico, también sobre sus logros en matemáticas, también dejan ver el interés, el esfuerzo y la motivación que tienen los estudiantes por la Matemática.

Además, estas actividades suelen disminuir en los estudiantes los grados de estres y tensión; los alejan de la idea de una "nota" y los motiva más a trabajar, claro está que toda actividad que se proponga debe ser evaluada para no permitir que el estudiante decaiga en sus elaboraciones y además desarrolle aptitudes de disciplina, responsabilidad, y puntualidad.

En correspondencia con lo anterior, se obtiene una evaluación integral del alumno cuando se tiene como idea principal de evaluar, no estigmatizar o clasificar los estudiantes en buenos y malos, sino en descubrir sus debilidades para actuar sobre ellas y superarlas.

Recuérdese que la Matemática, es una de las ciencias que más atemoriza a un buen porcentaje de estudiantes y si el proceso de enseñanza- aprendizaje se desarrolla de manera amena, productiva y constructiva acompañada de una evaluación que le ayude a complementar su conocimiento, a afianzar su saber; entonces se estará trabajando en procura de una mayor calidad de la educación matemática pues el estudiante que se acomode al proceso en mención desarrollará una actitud positiva frente a su aprendizaje de la matemática.

## BIBLIOGRAFÍA

1. Aguilar, Mendes y otro. "la asimilación del contenido de la Enseñanza". Editorial libros para la educación. Ciudad de la Habana 1979.

2. Almeida, Bernardino y otros " Metodología de la Enseñanza de la matemática I y II". Ed. pueblo y educación. Ciudad de la Habana 1992.

3. De Guzmán, Miguel "Tendencias Innovadoras en Educación Matemática" Ed. Popular. Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación y la Cultura. 1993.

4. Gimeno Sacristán, J y Pérez Gómez, A. " la Enseñanza: su Teoría y su práctica" Ed. AKAL. Madrid, 1989.

5. Mejía, Mónica. "la Enseñanza de la Gometría Mediante el Método Heurístico" .Tesis de maestría. Medellín, 2002.

6. Rodríguez, Rafael. "¿Nueva Cultura de la Evaluación Cualitativa?".

7. Santana de Armas, Hilario. "la evaluación del Aprendizaje de la Matemática" , pedagogía 99. Ciudad de la Habana, 1999.

8. Takahashi, Alonso. "El Maestro y su Oficio". Medellín, 1991.

9. Vasco, Carlos. " Un nuevo Enfoque para la Didáctica de las Matemáticas" .Ed. Jotamar Ltda. Tunja, 1994.

10. Vigotsky, L.S. "Pensamiento y Lenguaje". Ed. Pueblo y Educación. Ciudad de la Habana.

# PROPUESTA DIDÁCTICA PARA LOGRAR UN APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO DE LA SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN LINEAL

HERNÁN DARÍO ORTIZ ALZATE

MEDELLÍN
2002

# 8. PROPUESTA DIDACTICA PARA LOGRAR UN APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO DE LA SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN LINEAL[1]


## RESUMEN

La propuesta didáctica para lograr el aprendizaje significativo de la solución de la ecuación lineal comprende el planteamiento de una red conceptual como estrategia de intervención pedagógica, en la cual se integran diferentes métodos aplicados en su solución, reportados en la literatura sobre el tema, bajo una recontextualización en el proceso de su enseñanza. Con ello, se procura dotar de significado a cada uno de los aspectos fundamentales involucrados en el proceso de solución de la ecuación lineal, como son: la acepción del signo igual como identidad e igualdad ecuacional, el afianzamiento de las identidades aritméticas y de las equivalencias e identidades algebraicas, el planteamiento de ecuaciones como sistemas en equilibrio y el desarrollo de algoritmos para su solución.



AUTOR
HERNÁN DARIO ORTIZ ALZATE
Especialista en la enseñanza de las Matemáticas
Docente en el
Colegio Saul Londoño Londoño


[1] Este artículo toma como base los elementos desarrollados en la Monografía "ESTRATEGIAS PARA UN APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO DE LA SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN LINEAL" 1998, y cuyo coautor es Nuredine Gaviria Bedoya.

## 8.1. INTRODUCCIÓN

Uno de los aspectos fundamentales en la enseñanza de las matemáticas consiste en lograr que los alumnos en los primeros años de la básica secundaria interioricen, de manera significativa, los algoritmos aplicados en la solución de las ecuaciones lineales. Este propósito toma mayor relevancia, dado que es común observar que en el proceso de la solución de ecuaciones, los alumnos se ven enfrentados a problemas de orden cognitivo, evidenciados en el momento en que requieren pasar de una solución netamente intuitiva (caso $X+3 = 8$) a una solución reflexiva (caso $3X+5 = 224$). Adicionalmente, los alumnos manifiestan dificultades durante el proceso de la solución de ecuaciones lineales cuando se ven enfrentados a la necesidad de usar las propiedades formales de las operaciones y a la aplicación del orden en que las operaciones se deben ejecutar, especialmente, cuando se presenta más de una ocurrencia de variable.

Atendiendo a la necesidad de menguar los problemas mencionados anteriormente, se propone el uso de una red conceptual, ajustada a la concepción teórica planteada por el profesor Orlando Mesa[1], acorde con una propuesta didáctica integral. Dicha red conceptual consiste en la selección de un motivo o problema inicial, la organización básica de los contenidos temáticos que el motivo permite desarrollar, la estructuración de niveles de conceptualización, la selección de preguntas y actividades fundamentales, las posibilidades de motivación hacia otros aprendizajes y la evaluación de los procesos de aprendizaje.

[1] MESA B. , Orlando. Criterios y Estrategias para la enseñanza de las matemáticas, Santafé de Bogotá. 1997.

## 8.2. CONCEPCIÓN DE LA ESTRATEGIA DE INTERVENCIÓN

La estrategia de intervención propuesta, parte de considerar como motivo de aprendizaje a los diferentes métodos de solución de ecuaciones lineales recopilados de la literatura sobre el tema por Hernán Ortiz y Nuredine Gaviria[2], dado que poseen un fuerte componente activo o reflexivo que permiten captar el interés del estudiante, generando la construcción de aprendizajes significativos.

La exposición de los contenidos temáticos que sustentan la estrategia de intervención se organiza en orden creciente de complejidad, de modo que posibilite la significación de los distintos aspectos involucrados en la solución de las ecuaciones lineales. Dicha exposición de contenidos implica concepciones de la psicología, la epistemología y la matemática formal.

Para el desarrollo de la estrategia se proponen actividades y preguntas que permitan el afianzamiento de los distintos aspectos involucrados en la solución de ecuaciones.

Las actividades consideradas son de tipo libre y dirigida. Las actividades libres permiten el descubrimiento de relaciones, producto del análisis y la reflexión sobre hechos y temáticas relacionadas. Las actividades dirigidas permiten la conducción hacia un objetivo particular.

Las preguntas elaboradas son de tipo cerradas y abiertas. Las preguntas cerradas son aquellas cuyo fin es registrar los logros alcanzados al rededor de los aprendizajes básicos. Las preguntas abiertas son aquellas cuyo fin es promover la reflexión, la creatividad y la investigación.

---

[2] ORTIZ,H y GAVIRIA, N. Estrategias para un aprendizaje significativo de la solución de la ecuación lineal. Universidad de Antioquia, Medellín, 1998.

## 8.3. ESTRUCTURACIÓN DE LA RED PARA EL DESARROLLO DE LA ESTRATEGIA DE INTERVENCIÓN

### 8.3.1. A. Afianzamiento del concepto del signo igual, " = ", en el contexto de la solución de ecuaciones lineales.

Como requisito previo al proceso de solución de la ecuación lineal se debe dar claridad sobre las acepciones de la igualdad que han de ser involucradas, con especial énfasis en las de identidad y equivalencia .

#### 8.3.1.1. Definiciones y conceptos

**8.3.1.1.1. Acepciones de la igualdad:** Según el diccionario enciclopédico Espasa, el término igualdad corresponde a:

En términos generales

- conformidad de una cosa con otra en naturaleza, forma, calidad o cantidad.

- correspondencia y proporción que resulta de muchas partes que uniformemente componen un todo

En términos matemáticos

- Expresión de equivalencia de dos cantidades.

Para C. Pisot y M. Zamansky[4], la noción de igualdad representada por el símbolo " = " tiene varias acepciones en matemáticas:

[3] ESPASA CALPE S.A., Madrid, 1997
[4] PISOT, C y ZAMANSKY, M. Matemáticas generales. Álgebra- Análisis. 1967.

- Igualdad como identidad: $x = y$, la cual significa que no se distinguirá x de $y$. Así, $3 = 3$.

- Igualdad como condicional; igualdad entre los dos miembros de una ecuación; $ax = b$ .

- Igualdad como definidor de símbolos, ejemplo: $y = f(x)$

- Igualdad como isomorfismo entre dos conjuntos, ejemplo: $\frac{n}{1} = n$.

- Igualdad como equivalencia, ejemplo: $\frac{4}{6} = \frac{6}{9}$ .

Entre tanto, de acuerdo con Martín Socas y otros[5], en aritmética el signo " = " se entiende como una "acción" física, el cual, unas veces sirve para conectar un problema con su resultado numérico como en $3 + 5 = \square$; otras veces permite "relacionar" dos procesos que dan el mismo resultado $3 \times 4 = 4 + 4 + 4$, y en algunos casos relaciona la secuencia de pasos intermedios de un proceso que conduce a un mismo resultado $3 \times (5 - 2) + 4 = 3 \times 3 + 4 = 13$ (trece)

Al respecto, Kaye Stacey y Mollie MacGregor[6], consideran que la interpretación de las ecuaciones por parte de los estudiantes puede ser influenciada por experiencias anteriores en aritmética, por ejemplo, cuando su fundamentación ha sido tal que el signo igual le significa "dar o hacer", como en "3 más 5 da 8". Mencionan los autores que tal hecho se evidencia cuando los estudiantes usan el signo igual para dar respuestas parciales

[5] SOCAS, MARTIN y Otros. Iniciación al Álgebra. España: Síntesis, 1989
[6] STACEY, K and MacGREGOR; M . Ideas about symbolism that students bring to Algebra. En: The Mathematics Teacher, Vol 90; No 2; 1997.

moviéndose de izquierda a derecha, como en $3+5=8\times 7=\frac{56}{2}=28$, siendo un uso restringido pero familiar para el signo igual, el cual se considera un obstáculo para el entendimiento del proceso a seguir en la solución de las ecuaciones.

Por su parte Consuelo Moros[7], plantea que "para el trabajo matemático es importante concebir la igualdad y el signo mediante el cual se representa, como una relación de equivalencia". Esta connotación es necesaria en consideración a que, para ciertos propósitos, es posible y conveniente cambiar una expresión por otra, que tenga el mismo valor de certeza y que simplifique los procedimientos.

Adicionalmente, para Martín Socas[8] y otros, aparece una connotación importante en el sentido del signo " = " en su paso de la aritmética al álgebra, en la cual, el sentido de la igualdad se conserva cuando en el álgebra se trabaja con tautologías algebráicas, ejemplo: $5x+5=5.(x+1)$, pero no en expresiones como $4x-3=2x+7$, que tan sólo es verdadera cuando $x=5$.

En este orden de ideas, se puede inferir que para muchos niños la conservación de la igualdad no es una condición obvia para resolver ecuaciones, por lo tanto, su trascendentalidad en el proceso de solución tiene que ser bien estructurada.

**8.3.1.1.2. Concepto de identidad:** Desde el punto de vista de la lógica y de acuerdo con P. Suppes y S Hill[9], en

[7] MOROS, C y Otros. Iterpretaciones y usos del signo igual. En: Iniciación al álgebra escolar; Universidad de Caldas, Caldas, 1997; p 25 – 42

[8] SOCAS, MARTIN y Otros. Iniciación al Álgebra. España: Síntesis, 1989

castellano se pone con frecuencia alguna forma del verbo "ser" (como: "es", "era", "son", "eran") entre dos términos para indicar que nombran o se refieren a una misma cosa, por ejemplo:

Gabriel García Márquez es el primer novelista colombiano en ganar el Premio Nobel de Literatura

Definiendo: e = Gabriel García Márquez
q = el primer novelista colombiano en ganar el Premio Nobel de Literatura

lo cual, se puede simbolizar en la forma: e = q.

Para dichos autores el signo igual, " = ", se denomina también "signo de identidad", sin embargo, es común utilizar el verbo " ser" en otro sentido que no corresponde al de identidades, ejemplo:

a. Gabriel García Márquez es un escritor colombiano; donde "Gabriel García Márquez" nombra o indica la misma cosa que "un escritor colombiano".

b. Los perros son animales; donde perros son idénticos a animales.

En los anteriores ejemplos no se cumple que:

a. Un escritor colombiano sea igual a Gabriel García Márquez
b. Animales sea igual a perros

[9] SUPPES, P y HILL, S. Introducción a la lógica matemática. Bogotá: Reverté, 1993

Para decidir cuándo una proposición puede traducirse utilizando el signo de identidad es necesario precisar lo que significa esta acepción, por lo cual, se debe recordar que el signo de identidad se coloca sólo entre términos que han de ser nombres de una cosa y la misma cosa, porque dos cosas distintas no son una misma cosa.

Así, es como los autores en mención exponen el siguiente ejemplo ilustrativo: dos lápices nuevos de la misma caja, aunque tengan una apariencia tan igual que no se distingan, son sin embargo, lápices distintos -no idénticos-, por lo que sería falso decir "primer lápiz = segundo lápiz"; dado que decir que son iguales o idénticos significaría que son el mismo lápiz, y no que son tan análogos que no se distinguen. Es por ello, por lo cual el signo " = " no se coloca entre dos cosas, sino entre dos símbolos de expresiones, significando que las dos expresiones se refieren a una misma cosa o son la misma cosa. Así se puede decir:

Medellín = la capital del departamento de Antioquia. (se refieren al mismo sitio)

$4 \times 5 = 2 \times 10$ (se refieren a la misma cantidad)

Los autores considerados exponen que si bien la idea es simple, en el lenguaje usual son frecuentes las confusiones, dado que se usan las palabras "igual" o "idéntico" de una forma que no es estrictamente exacta ( para el ejemplo tratado "estos lápices son idénticos" ), es decir, de una forma no concordante con el sentido matemático y lógico preciso.

**8.3.1.1.3. Concepto de equivalencia:** De acuedo con P. Suppes y S. Hill[10], "dos proposiciones se dicen que son lógicamente

[10] SUPPES, P y HILL, S. Introducción a la lógica matemática. Bogotá: Reverté, 1993

equivalentes si, en cualquier posible asignación de certeza, las dos tienen el mismo valor de certeza"

Ejemplo: dadas dos proposiciones p, q se presenta las posibilidades

| p | q | $p \gamma q$ | $q \gamma p$ | $p \longleftrightarrow q$ |
|---|---|---|---|---|
| V | V | V | V | V |
| V | F | F | V | F |
| F | V | V | F | F |
| F | F | V | V | V |

En el caso que $p \leftrightarrow q$ sea tautológico (es decir verdadero), se considera que existe una equivalencia tautológica entre la proposición p y la proposición q, es decir, $p \Leftrightarrow q$. Esto es, ambas proposiciones son lógicamente equivalentes (ambas verdaderas o ambas falsas).

sea la proposición 1. p: $3 + 4 = 7$
sea la proposición 2. q: $3 + 8 = 11$
por lo tanto, $p \Leftrightarrow q$ [lo cual significa que tienen el mismo valor de verdad, más no que son idénticas (iguales)]

Este planteamiento tiene importancia en el sentido de que al ser equivalentes las dos proposiciones pueden ser intercambiadas, es decir, a partir de una de ellas obtener la otra, así:

$$3 + 4 = 7 \Leftrightarrow 3 + 4 + 4 = 7 + 4 \Leftrightarrow 3 + 8 = 11$$

Por su parte Gategno (1974), citado por Consuelo Moros[11], plantea que la relación de equivalencia, "es considerada la

[11] MOROS, C y Otros. Interpretaciones y usos del signo igual. En: Iniciación al álgebra escolar; Universidad de Caldas, Caldas, 1997; p 25 – 42

relación más comprensiva, flexible y por lo tanto la más útil, la más amplia, dado que para ciertos propósitos es posible cambiar un item por otro, mientras que, por ejemplo, la identidad apunta a un atributo el cual no cambia".

Ejemplo:

La expresión $3 \times 2 + 3$ es idéntica a la expresión $3 \times (2+1)$ dado que ambas se refieren al mismo atributo, veamos:

$3 \cdot 2 + 3 = 9$ y $\quad 3 \cdot (2 + 1) = 9$
$\quad 6 + 3 = 9 \qquad 3 \cdot (3) = 9$
$\qquad 9 = 9 \qquad\quad 9 = 9$

así, $3 \times 2 + 3 = 3 \times (2 + 1)$

La expresión $3x + 3$ es idéntica a la expresión $3 \cdot (x + 1)$, dado que para cualquier valor de x siempre se cumplirá que $3x + 3 = 3 \cdot (x + 1)$, es decir, ambas expresiones se referirán a la misma cantidad.

La expresión $3 \cdot 2 + 3 = 9$ es equivalente tautológicamente a la expresión $3 \cdot 2 + 3 - 5 = 9 - 5$ dado que ambas expresiones son lógicamente equivalentes, es decir, ambas son ciertas (una de ellas puede deducirse de la otra), veamos:

$$\begin{array}{ccc} 3\times 2+3=9 & \text{y} & 3\times 2+3=9 \\ 6+3=9 & & 3\times 2+3-5=9-5 \\ 9=9 & & 6+3-5=9-5 \\ & & 9-5=9-5 \\ & & 4=4 \end{array}$$

La expresión $3x + 3 = 9$ es equivalente a la expresión $x + 1 = 3$, dado que la segunda se puede deducir de la primera y ambas poseen el mismo valor de verdad para el mismo valor de x

$$
\begin{aligned}
&3x+3=9\\
&3(x+1)=9\\
&\frac{3\cdot(x+1)}{3}=\frac{9}{3}\\
&x+1=3
\end{aligned}
$$

donde ambas expresiones se cumplen para $x=2$

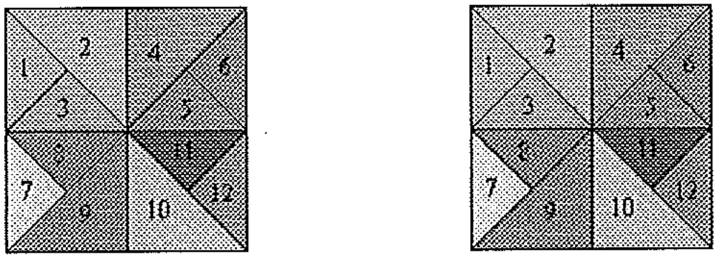
### 8.3.1.2. Actividades y preguntas
### 8.3.1.2.1. Actividades libres

1) Actividades libres

a) Observe su cuerpo y establezca que partes de éste son similares, "iguales".

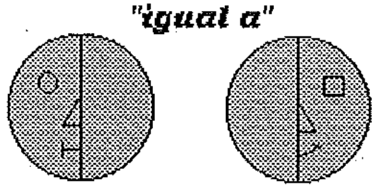
b) Exprese qué entiende por ser similar, ser igual o idéntico y ser equivalente. Dé ejemplos.

c) Arme pares de figuras similares, "iguales", con el material resultante de recortar cada uno de los siguientes modelos, de modo que las partes coloreadas y numeradas queden ubicadas en posiciones similares y dibújelas. Posteriormente, sustraiga alguna de las partes de cada uno de los pares de figuras armadas (correspondientes al mismo color y número) y dibújelos, analice cada nuevo par de figuras resultantes, ¿cómo resultan ser entre sí, el nuevo par de figuras?.

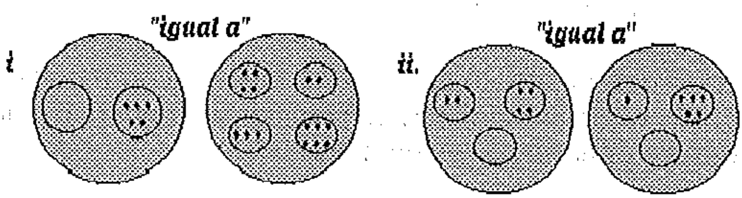


### 8.3.1.2.2. Actividades dirigidas

a) Complete las figuras de modo que queden similares, "iguales".

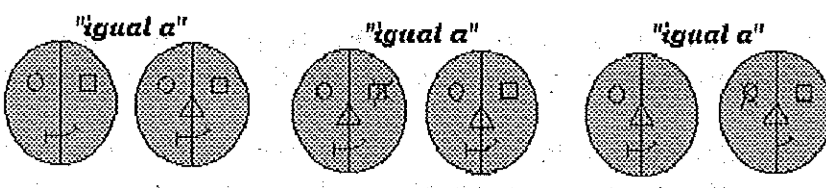



b) Determine la cantidad de puntos, que debe contener el círculo vacío en cada par de figuras, de modo que la cantidad de puntos del lado izquierdo sea igual a la cantidad del lado derecho.

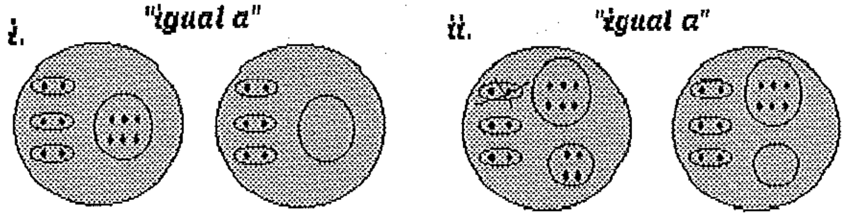



*por qué ?* ____        *por qué ?* ____

c) Complete la siguiente secuencia de figuras de modo que cada par de figuras queden similares, "iguales", adicionando elementos (dibujándolos) o eliminándolos (tachando con una equis X).



d) Complete la siguiente secuencia de figuras, adicionando o eliminando la cantidad de puntos necesarios, para que se "conserve la igualdad" en la cantidad de puntos en ambos pares de figuras.




### 8.3.1.2.3. Preguntas Cerradas

a) Cuando se realiza una acción a un lado de una igualdad, ¿qué se debe hacer en el otro lado de la igualdad, para que se "conserven" iguales ambos lados?

b) Cuando dos objetos o cantidades iguales son modificados, adicionando o eliminando el mismo elemento o cantidad a ambos lados, qué se obtiene como resultado?

### 8.3.1.2.4. Preguntas abiertas

a) ¿Qué otro tipo de operaciones diferentes a la adición o eliminación se pueden realizar en una igualdad para obtener una nueva igualdad, equivalente a la inicial ?
b) ¿ Qué ventajas se pueden obtener al hacer transformaciones de las igualdades ?

## 8.3.2. Afianzamiento de las identidades aritméticas, identidades algebráicas y equivalencias algebráicas.

Antes de dar inicio a la solución de la ecuación lineal se debe hacer claridad sobre lo que significa y lo que se pretende con la generalización matemática[12] y sobre el papel que juega el simbolismo en la conceptualización[13]. De igual forma se debe dar claridad sobre los conceptos de identidad aritmética e identidad algebraica.

La estrategia desarrollada acoge la metodología propuesta por Nicolas Herscovicks y Carolyn Kieran[14], de partir de identidades aritméticas para dar significado a las identidades algebráicas.

#### 8.3.2.1. Definiciones y conceptos

**8.3.2.1.1. Concepto de generalización matemática:** Para Luis Radford[15] la generalización depende de los objetos matemáticos que están siendo generalizados, es decir, no es una actividad libre del contexto, existiendo muchas clases de generalizaciones que pueden todas ser muy diferentes.

Algunas de las formas de generalización que pueden presentarse son:

a) cuando los términos numéricos son reemplazados por variables, ejemplo $3\times 5 = 5\times 3$ en $a\times b = b\times a$ .

b) cuando modelos o esquemas obtenidos en situaciones concretas, generalmente numéricas, son entendidos, ejemplo: $2, 4, 6, 8, \ldots, 2n$

Para McLellan y Dewey, citados por K. Lovell[16], la generalización comprende dos subprocesos:

---

[12] Ver . SKEMP, Richard. Sicología del aprendizaje de las matemáticas. Madrid: Morata, 2ª Ed, 1993.

[13] Ver. PHILIPP, Randolph. The Many Uses of Algebraic Variables. En: The Mathematics Teacher. Vol 85; No 7; 1992.

[14] HERSCOVICS, N and KIERAN, C. Constructing Meaning for the Concept of Equatión. En: The Mathematics Teacher. Vol 73; No 8; 1980.

[15] RADFORD L. Some Reflections on Teaching Algebra Through Generalization. En: Approaches to Algebra. Perspectives for Research and Teaching. Netherlands, 1996.

[16] LOVELL, K. Desarrollo de los conceptos básicos matemáticos y científicos en los niños. Madrid: Morata, 6ª Ed., 1986

a. Abstracción o exclusión de todas las cualidades específicas de cada objeto, excepto su "unicidad" o "singularidad".

b. Agrupación de objetos para formar una clase o conjunto homogéneo.

**8.3.2.1.2. Concepto de identidad aritmética:** Es una igualdad que involucra, únicamente, símbolos numéricos y símbolos operacionales. Ejemplo: $3 \times 5 + 12 = 60 \div 2 - 3$.

Toda igualdad aritmética es una identidad porque relaciona expresiones equivalentes que corresponden al mismo atributo o cantidad.

**8.3.2.1.3. Concepto de identidad algebráica:** Es una igualdad que además de símbolos numéricos, involucra símbolos literales, entre los cuales, por convenciones establecidas, unos representan números paramétricos[17] (números conocidos) y otros representan números generalizados, que hacen que dicha igualdad se satisfaga para un rango determinado de valores, como en las siguientes expresiones:

$3x + 3 = 3(x+1)$; x representa un número generalizado (cualquiera)

$(ax)^2+2abx+b=(ax+b)^2$; $\begin{cases} \text{x representa un número generalizado (cualquiera)} \\ \text{a,b representan números paramétricos} \end{cases}$

$\log x^2 = 2 \log x$, x representa un rango de números generalizados (de valores positivos)

Cuando mediante el símbolo "=" se relacionan expresiones equivalentes, se establece una identidad. Ejemplo:

Las expresiones $3x+3$ y $\dfrac{12 \cdot (x+1)}{4}$ son equivalentes, esto es,

[17] Parámetro: variable que, en una familia de elementos, sirve para identificar cada uno de ellos mediante su valor numérico.

se cumple que para cualquier valor de x se obtiene el mismo resultado, por lo tanto, $3x+3=\frac{12\cdot(x+1)}{4}$ es una identidad.

De lo anterior se desprende que toda identidad es una equivalencia.

**8.3.2.1.4. Concepto de ecuación lineal en términos de una variable:** Es una expresión de la forma ax + b = c, donde x es la incógnita y a, b, c son números paramétricos (con $a$ diferente de cero para que exista la ecuación). Ejemplo: 3x + 8 = 35. .

Cada parte que compone una ecuación, y que está separada por el signo igual, recibe el nombre de miembro de la ecuación, izquierdo y derecho.

Las ecuaciones, no son afirmaciones verdaderas universalmente, es decir, el signo " = " no conexiona identidades, sino que obliga a las incógnitas a tomar un valor para que la expresión sea verdadera, valor al cual se le denomina solución de la ecuación.

Las expresiones 3x + 3 y 2x + 5 no son equivalentes, esto es, no se cumple que para todos los valores de x se obtiene el mismo resultado, por lo tanto, 3x + 3 = 2x + 5 es una ecuación.

**8.3.2.1.5. Los símbolos literales y sus diferentes usos:** Randolph Philipp[18] plantea que se deben diferenciar las maneras en que las variables son usadas en contextos matemáticos, y usa el concepto de "símbolo literal" para describir el uso matemático de una letra, reconociendo que una variable no necesita ser representada por un símbolo literal, ejemplo:

$$9 \times \blacksquare + \triangle = 9$$

[18] PHILIPP, Randolph. The Many Uses of Algebraic Variables. En: The Mathematics Teacher. Vol 85; No 7; 1992

El autor citado plantea que los símbolos literales pueden ser usados como constantes, parámetros, cantidades variantes, incógnitas, etiquetas, números generalizados y como símbolos abstractos, así:

| ALGUNOS USOS DIFERENTES DE SÍMBOLOS LITERALES | | |
|---|---|---|
| 1. Etiquetas | $f, Y$ | en $3f = 1Y$ (3 pies en una yarda) |
| 2. Constantes | $\pi,\ e,\ c$ | Número irracional pi,base del logarítmo natural $e$, $c$ velocidad de la luz |
| 3. Incógnitas | $x$ | en $5x - 9 = 9$ |
| 4. Números Generalizados | $a, b$ | en $a + b = b + a$ |
| 5. Cantidades variantes | $x, y$ | en $y = 9x - 2$ |
| 6. Parámetros | $m, b$ | en $y = mx + b$ |
| 7. Símbolos abstractos | $a, x$ | $a * x = x$ (identidad para la operación $*$ ) |

Un símbolo literal implica una "incógnita" cuando la meta es solucionar una ecuación, ejemplo: x + 8 = 19, donde se requiere determinar el valor de x, de modo que haga la ecuación verdadera. Los símbolos literales se refieren a "números generalizados" cuando todos los valores reemplazantes de los símbolos literales resulten en una proposición verdadera, como con las identidades o en las tareas de transformar una expresión, ejemplo: al simplificar 2t + 3t -9, en 5t - 9, está implícita la identidad 2t + 3t = 5t.

Al respecto Martín Socas y Otros[19], plantean que no parece adecuado para el desarrollo del álgebra hacer una introducción de la misma viendo las letras como un objeto, lo cual sería un

[19] SOCAS, MARTIN y Otros. Iniciación al Álgebra. España: Síntesis, 1989

contexto demasiado específico que ahogaría su desarrollo posterior. Análogamente, un comienzo del álgebra de forma que se considerara a los símbolos literales como incógnitas específicas con un único valor, también limitaría el proceso posterior. Por lo tanto, plantean que una introducción más adecuada podría ser considerar las letras como números generalizados, lo cual permitiría pasar desde la aritmética hacia su generalización y de esta al álgebra.

### 8.3.2.2. Actividades y preguntas

#### 8.3.2.2.1. Actividades libres

a) Utilizando alguna de las distintas operaciones $(+, -, \times, \div)$, o combinándolas, elabore cinco identidades aritméticas.

b) A partir de las identidades obtenidas en el ejercicio a), realice nuevas operaciones $(+, -, \times, \div)$ a ambos lados de la igualdad de modo que se generen nuevas identidades.

c) En cada una de las identidades obtenidas en el ejercicio b), cambie uno de los números por un símbolo literal. ¿Qué representa ése símbolo literal ?

d) Cambie los símbolos literales asignados en el ejercicio c), por un número diferente al dado inicialmente. Escriba lo que sucede.

#### 8.3.2.2.2. Actividades dirigidas.

a) Realiza las siguientes operaciones e indica los pares de ellas, en las cuáles se obtiene el mismo resultado.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1) | $6 + 12 =$ | 5) | $3 \times 7 + 4 + 1 =$ |
| 2) | $4 (6 + 3) =$ | 6) | $2 \times 5 + 3 =$ |
| 3) | $5 + 8 =$ | 7) | $4 \times 6 + 12 =$ |
| 4) | $3 + 4 + 5 + 6 =$ | 8) | $10 - 5 + 3 \times 7 =$ |

b) En el espacio en blanco escriba la expresión del lado derecho que iguala a la del lado izquierdo, es decir, que den el mismo resultado.

| | | |
|---|---|---|
| $8 + 12 =$ | ______ | $(7 \times 3) - 9$ |
| $2 \times 8 + 6 =$ | ______ | $(18 + 36) \div 3$ |
| $17 - 7 + 2 \times 4 =$ | ______ | $4 + 6 + 12$ |
| $6 + (15 - 3) \div 2 =$ | ______ | $3 \times 5 + 4 + 1$ |

c) En las siguientes igualdades que valor representan ■, ▲, ●, ◆?

1) ■ + 12 = 3 + 4 + 5 + 6 ■ = ______ por qué?

2) ▲ + 8 = 2 × ▲ + 3 ▲ = ______ por qué?
2

3) 3 × ● + 4 + 1 = 10 − 5 + 3 × ● ● = ______ por qué?

4) 4 × ◆ + 12 = 4 ( ◆ + 3) ◆ = ______ por qué?

d) En las siguientes igualdades, ¿qué valor representan a, m, z Y n?

1) $a + 12 = 3 + 4 + 5 + 6$ $a$ = ______ ¿por qué?

2) $m + 8 = 2m + 3$ $m$ = ______ ¿por qué?

3) $3z + 4 + 1 = 10 - 5 + 3z$ $z$ = ______ ¿por qué?

4) $4n + 12 = 4(n + 3)$ $n$ = ______ ¿por qué?

e) En cada una de las siguientes igualdades, asigna un valor al símbolo literal diferente a los encontrados en el ejercicio d).

1) $a$ = ____ ____ + 12 = 3 + 4 + 5 + 6

¿Qué pasa con la igualdad ?________

2) $m$ = ____ ____ + 8 = 2___ + 3

¿Qué pasa con la igualdad ?________

3) $z$ = ____ 3___ + 4 + 1 = 10 - 5 + 3___

¿Qué pasa con la igualdad ?________

4) $n$ = ____ 4___ + 12 = 4 (___ + 3 )

¿Qué pasa con la igualdad ?________

**8.3.2.2.3. Preguntas cerradas**

a) Si en una igualdad se efectúa una operación $(+, -, \times, \div)$, en uno solo de los lados del signo igual, ¿qué pasa con la igualdad?. ¿Qué se debe hacer en el otro lado del signo igual, para volver a obtener una igualdad?

b) ¿Qué representan los símbolos ■, △, ●, ◆, $a$, $m$, $z$ y $n$, en los ejercicios c) y d), de la actividad 2) ?

c) ¿En la misma actividad, qué diferencia hay entre lo que representan $a$ y $m$ y lo que representan $z$ y $n$?.

d) ¿Al transformar las igualdades del ejercicio d), de la actividad 2), realizando nuevas operaciones $(+, -, \times, \div)$, sobre ellas, qué nuevos valores toman $a$, $m$, $z$ y $n$ ?.
¿Qué se puede concluir con relación a las nuevas igualdades surgidas?

**8.3.2.2.4. Preguntas Abiertas**

a) Dada la expresión $3x + 2 = 3x + 5$, ¿qué valores puede tomar $x$ ? ¿Qué se puede concluir?

b) Dada la expresión $5x+3=6x-4$, ¿qué operaciones se pueden realizar para dejar la "x" sola en un lado de la igualdad?

### 8.3.3. Afianzamiento del planteamiento de ecuaciones.

En el proceso de solución de la ecuación lineal es fundamental concebir las ecuaciones lineales como sistemas en equilibrio y comprender lo que conlleva el plantearlas. Esto, partiendo desde su representación simbólica. Para el logro de ello, se hacen adaptaciones de los modelos propuestos por Joe Austin y Hans Vollrath[20]; por Vicente Jimenes[21] y por Martín Soca y otros[22].

#### 8.3.3.1. Definiciones y Conceptos

**8.3.3.1.1. Modelamiento de ecuaciones:** De acuerdo con Claude Janvier[23] la modelación en general implica una fase de formulación que es completada con una fase de validación. Durante la formulación la situación es examinada con el propósito de establecer relaciones entre las variables implicadas. Esta fase de formulación comprende una serie de transformaciones matemáticas u operaciones que conduzcan a un modelo con representación simbólica. La fase de validación consiste en probar la validez del modelo chequeando las situaciones que se propone representar.

Para el citado autor el modelo tiene doble estatus. De un lado, está declarado en términos matemáticos y permanece independiente de la realidad de la cual emerge. Este estatus abstracto queda confirmado por la aplicación de reglas que implican manipulación de símbolos, probando una relación

20 AUSTIN, J and VOLLRATH, J. Representing, Solving, and Using Algebraic Equations. En: Mathematics Teacher, Vol 82; No 8; 1989.
21 JIMENES, Vicente. Cómo lograr una enseñanza activa de las matemáticas. España: CEAC, 1990.
22 SOCAS, MARTIN y Otros. Iniciación al Álgebra. España: Síntesis, 1989
23 JANVIER, Claude. Modeling and the Initiation into Algebra. En: Approaches to Ágebra. Perspectives for Research and Teaching. Netherlands, 1996.

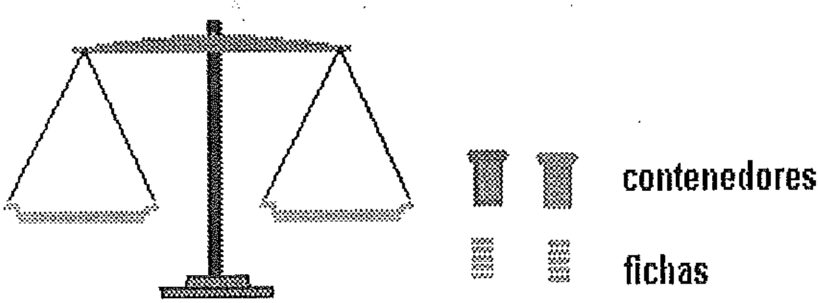
matemática entre las "entidades" del modelo. De otro lado, representa objetos concretos o relaciones que pueden ser medidas. Luego, los elementos del modelo (los parámetros de la fórmula, los rasgos globales del gráfico, las características de las tablas) que previamente no han tenido significado deben dársele significado contextual en la situación bajo consideración.

**8.3.3.1.2. Equilibración de ecuaciones:** Equilibrar significa hacer que una cosa se mantenga igual o proporcionada a otra, lo cual, en el contexto de la solución de ecuaciones lineales, corresponde a: lo que se hace a un lado de la igualdad, debe hacerse en el otro.

### 8.3.3.2. Actividades y preguntas

#### 8.3.3.2.1. Actividades libres

a) Dados una balanza de brazos iguales en equilibrio, unas fichas y unos contenedores, donde cada contenedor sólo podrá incluir en su interior igual número de fichas y considerando que el peso de cada contenedor es despreciable, realice las siguientes actividades:

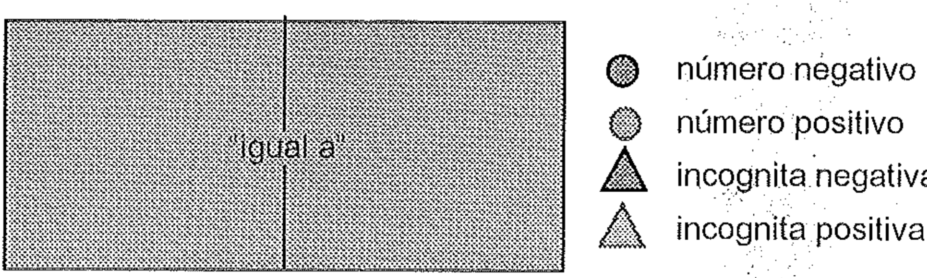



(Adaptado de Austin y Vollrath,1989)

Si al interior de cada contenedor se introduce un número determinado de fichas (escoger cualquier cantidad):
i) Colocar fichas en uno o ambos platillos y contenedores en uno solo de los platillos, de tal manera que la balanza se conserve en equilibrio. Escriba la representación simbólica de tal situación, representando el número de fichas del contenedor por una "incógnita".

ii) Colocar fichas en uno o en ambos platillos y contenedores en los dos platillos, de manera que la balanza se conserve en equilibrio. Escriba la representación simbólica de tal situación.

b) Dados un tablero dividido en dos por un segmento de línea, fichas de forma triangular y circular, de colores azul y rojo. Los triángulos para representar incógnitas y los círculos para representar la unidad. El color azul para representar incógnitas y números positivos, el color rojo para representar incógnitas y números negativos.




(Adaptado de Martín Socas y otros, 1989; Vicente Jimenes, 1990)

Si lo que se represente en el lado izquierdo del segmento central debe ser "igual" a lo que se represente en el lado derecho, realice las siguientes actividades, considerando que la incógnita representa un número determinado (escoger cualquier número):

i) Colocar fichas circulares en uno o en ambos lados y sólo fichas triangulares en sólo uno de ellos, de manera que se establezca la igualdad. Escriba la representación simbólica de la situación.

ii) Colocar fichas circulares en uno o en ambos lados y fichas triangulares en ambos lados, de manera que se establezca la igualdad. Escriba la representación simbólica.

### 8.3.3.2.2. Actividades dirigidas

a) Dadas las condiciones del ejercicio a), de la actividad 1), representar en la balanza de brazos las siguientes ecuaciones:

| | |
|---|---|
| 1. $3+x=10$ | 4. $p+4=2p$ |
| 2. $4y=12$ | 5. $3z+5=4z+1$ |
| 3. $3+5m=13$ | 6. $k+11=2k+5+k$ |

Dadas las condiciones del ejercicio b), de la actividad 1), representar en el tablero de fichas las siguientes ecuaciones:

| | |
|---|---|
| 1. $2x+6=12$ | 4. $3m-4=10-4m$ |
| 2. $-z=5$ | 5. $2p+3=p-8-5p$ |
| 3. $4-2y=10$ | 6. $3k+12=3(k+4)$ |

### 8.3.3.2.3. Preguntas cerradas

a) Si al plantear una ecuación se determinó que el contenedor o la incógnita representaba un valor específico. ¿Cómo se pudo establecer, representativamente, el equilibrio o igualdad en el modelo de la balanza o la igualdad en el tablero de fichas?

b) ¿Se podrá en el modelo de la balanza representar una situación como $x+4=0$? Explique. ¿Se podrá representar en el tablero de fichas la misma situación? Explique.

c) ¿Cúal es la diferencia esencial entre los modelos de la balanza y el del tablero de fichas, con respecto a las ecuaciones que se pueden representar con cada uno ellos?

#### 8.3.3.2.4. Preguntas abiertas

a) ¿Cúal es la diferencia entre representar la ecuación asignando previamente el valor de la incógnita y representar una ecuación dada, desconociendo dicho valor?

b) ¿Es posible representar cualquier ecuación usando alguno de los modelos anteriores? Explique.

### 8.3.4. Afianzamiento de la solución de ecuaciones lineales.

Para la comprensión de los algoritmos involucrados en la solución de la ecuación lineal, se debe tener claridad sobre los conceptos de transformaciones equivalentes; reversibilidad, jerarquización y orden de las operaciones; de las propiedades de las operaciones formales y de las igualdades; así, como del concepto de solución.

Para esta parte de la propuesta se adaptan las ideas desarrolladas por Pedro Puig[24] ; Gastón Mialaret[25] ; Martín Socas y otros[26] , y por Nicolas Herscovicks y Carolyn Kieran[27] .

#### 8.3.4.1. Definiciones y conceptos

**8.3.4.1.1. Concepto de solución:** Es el conjunto de valores que convierten en verdadera a una función proposicional expresada mediante una igualdad. Las ecuaciones pueden tener una o

[24] PUIG A, Pedro. La Matemática y su enseñanza actual. Madrid: Condor, 1960.
[25] MIALARET, Gastón. La resolución de problemas matemáticos. En: Psicología y aprendizaje. Nº 9; 1985; p 33-48
[26] SOCAS, MARTIN y Otros. Iniciación al Álgebra. España: Síntesis, 1989
[27] HERSCOVICS, N and KIERAN, C. Constructing Meaning for the Concept of Equatión. En: The Mathematics Teacher. Vol 73; No 8; 1980.

múltiples soluciones, de acuerdo con el grado de la ecuación, e inclusive no tener solución (conjunto vacio) para un conjunto numérico en particular. Por ejemplo $x^2 + 2 = 0$, no tiene solución en el conjunto de los reales $(R_e)$, pero es una ecuación cuya solución en $R_e$ corresponde al conjunto vacío.

**8.3.4.1.2. Las transformaciones en la solución de ecuaciones:**

Martín Socas y otros, plantean que la causa de los errores en la solución de ecuaciones, radica, principalmente, en el desconocimiento del significado del signo igual. Observándose que, en la solución de las ecuaciones, los alumnos trabajan una parte de la igualdad sin modificar el otro miembro de la misma manera.

Es por lo anterior que se propone que, en la solución de ecuaciones, se debe proceder de arriba hacia abajo mediante transformaciones sucesivas de la relación de expresiones, las cuales han de ser transformadas aplicando las mismas operaciones a ambos lados de la igualdad.

Para trabajar con ecuaciones se requiere, interpretar el signo igual que aparece explícitamente y reconocer expresiones equivalentes cuando no se dan.

Sin embargo, Rey Pastor y Pedro Puig[28], plantean que: "las transformaciones que estudia el álgebra no suelen transformar las ecuaciones en otras equivalentes, sino simplemente consecuencia de ellas, de tal modo que puede asegurarse que toda solución del problema propuesto debe satisfacer a la ecuación final, es decir, se tiene la seguridad de no haber perdido

[28] REY PASTOR y PEDRO PUIG, 1948

solución ninguna al adoptar ésta última ecuación abandonando las anteriores; lo que no podrá asegurarse es que todas las soluciones de ésta última satisfagan a las condiciones impuestas, y habrá que desechar las que no cumplan, es decir, las soluciones extrañas, introducidas por las transformaciones algebraicas".

Manifiestan los citados autores que como las transformaciones que conservan la equivalencia son muy escasas y no bastan para llegar a la ecuación o sistema de ecuaciones resolubles, deberán utilizarse solamente aquellas transformaciones que no hagan perder soluciones, es decir, las que conducen a ecuaciones consecuencia de las anteriores; pues de lo contrario, además de introducirse soluciones extrañas podrán perderse soluciones verdaderas.

Es así como los mencionados autores exponen que las transformaciones de una ecuación que conservan la "equivalencia" son: la adición a los dos miembros de una misma constante o función entera; la multiplicación de los dos miembros por una misma constante distinta de cero. No conservan, en cambio, la equivalencia (sino ciertas condiciones) las operaciones siguientes: adición de funciones fraccionarias; multiplicación por una función cualquiera, entre otras. Sin embargo, como estas transformaciones conservan todas las soluciones, es decir, satisfacen al proceso deductivo directo, pueden usarse sin inconveniente, y hasta son indispensables para llegar a la solución buscada, con la sola condición de aplicar a los resultados el proceso reductivo inverso que, en este caso, tan sencillo, se reduce a una simple "comprobación", sustituyendo en las condiciones propuestas los valores obtenidos para desechar aquellos que no la satisfacen.

**8.3.4.1.2. La reversibilidad en las operaciones:** Según Orlando Mesa[29], podemos interpretar la reversibilidad como la capacidad

[29] MESA B., Orlando. Contextos para el diseño de las situaciones problema en la enseñanza de las matemáticas. Medellín, 1997, Inédito.

del pensamiento para anular o compensar una acción realizada con objetos materiales o simbólicos. Gracias a la reversibilidad podemos considerar simultáneamente, las relaciones entre el "todo" y las "partes".

La adición y la sustracción constituyen una relación fuertemente estructurada, esto es, no se puede comprender la una sin la otra. Simbólicamente, asociadas al modelo: $a+b=c$, están los modelos: $c-a=b$ y $c-b=a$. Así un niño comprende, significativamente, la adición $8+2=10$, con las sustracciones: $10-2=8$ y. $10-8=2$ Existe, también, una relación fuertemente estructurada entre las operaciones multiplicación y división.

Simbólicamente, para el esquema $a \times b = c$, existen los esquemas de la división:

$\frac{c}{a}=b$ y $\frac{c}{b}=a$. El niño comprenderá el significado del esquema

$4 \times 3 = 12$ asociado a los esquemas: $\frac{12}{3}=4$ y $\frac{12}{4}=3$.

**9.3.4.1.4. Jerarquización de operaciones:** El orden jerárquico, ascendente, en el desarrollo de las operaciones es: potenciación, multiplicación y adición; este orden se cumple también, para las operaciones inversas, así: radicación, división y sustracción, siempre y cuando no aparezca signo de agrupación alguno.

La multiplicación es la simplificación de la adición, es decir, toda multiplicación indica una adición, por lo tanto, la multiplicación tiene menor valor jerárquico que la adición. Es por ello, que en un ejercicio donde aparezcan adiciones y multiplicaciones, se debe resolver primero las multiplicaciones y luego las adiciones.

Ejemplo:

Resolver: $6+4\times5$

$4\times5$ es lo mismo que $5+5+5+5$

por tanto, $6+4\times5$ es lo mismo que $6+5+5+5+5=26$

La potenciación tiene implícita la multiplicación y ésta a su vez, la adición, por lo tanto la potenciación tiene menor valor jerárquico que la multiplicación y la adición, es decir, se debe resolver primero la potencia, luego el producto y por último la adición, en aquellos ejercicios donde aparezcan las tres operaciones combinadas. Ejemplo:

Al resolver: $7+8\times2^4$

$2^4$ es lo mismo que $2\times2\times2\times2=16$

$8\times2^4$ es lo mismo que $8\times16$

$8\times2^4$ es lo mismo que $16+16+16+16+16+16+16+16$

por tanto, $7+8\times2^4$ es lo mismo que

$7+16+16+16+16+16+16+16+16=135$

La adición y la sustracción tienen igual orden jerárquico, por lo tanto, es indiferente cual de ellas se resuelve primero, ejemplo:

Al resolver: $5+8-6$

$$(5+8)-6=5+(8-6)$$
$$13-6=5+2$$
$$7=7$$

La multiplicación y la división tienen igual valor jerárquico, por lo tanto, es indiferente cual de ellas se resuelve primero, ejemplo:

tanto, es indiferente cual de ellas se resuelve primero, ejemplo:

Resolver: $\dfrac{5\times 6}{2}-9 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{30}{2}-2=5\times\dfrac{6}{2}-9 \\ 15-9=5\times 3-9 \\ 6=15-9 \\ 6=6 \end{cases}$

Debe quedar claro que el orden jerárquico de las operaciones, en un contexto general depende de la expresión particular que se tenga, ejemplo:

Resolver : $\dfrac{\sqrt{4\times 3^2}}{2}-1 \Rightarrow \left\{\dfrac{\sqrt{4\times 9}}{2}-1=\dfrac{\sqrt{36}}{2}-1=\dfrac{6}{2}-1=3-1=2\right.$

**8.3.4.1.5. Orden de las operaciones:** El valor jerárquico de las operaciones se puede cambiar utilizando los signos de agrupación, los cuales indican el orden en que se deben desarrollar las operaciones. En el desarrollo de las operaciones aritméticas, primero se debe dar solución a las operaciones que se encuentren más interiormente en un sistema de signos de agrupación. Por lo general, para dicho sistema, se establece que los signos de agrupación más interiores sean los paréntesis, luego los corchetes y como signos más exteriores las llaves. Es así como primero se debe dar solución a las operaciones que se encuentren dentro de un paréntesis, luego las que se encuentren entre corchetes y por último a las que se encuentren entre llaves.

Ejemplos:

a) Para resolver $(7-2)^2$ se debe resolver primero la operación que se encuentra dentro del paréntesis y este resultado elevarlo al cuadrado $5^2=25$

b) Resolver: $[3 \times (4+5) - 7$

Solución: $[3 \times (4+5) - 7] = [3 \times 9 - 7] = [27 - 7] = 20$

De acuerdo con Kaye Stacey y Mollie Mac Gregor[30], en una oración simple del lenguaje ordinario, los cuentos descritos ocurren en el orden establecido a menos que algún cambio de orden sea especialmente indicado, ejemplo: cuando se lea la instrucción: "introduzca" su cheque y selle el sobre, se quiere decir que la primera cosa a hacer es poner el cheque en el sobre. La misma instrucción puede ser expresada como: "antes" de sellar el sobre asegúrese de que su cheque fue introducido. La palabra "antes" significa que sellar el sobre, si bién, fue escrito primero en la oración no es la primera cosa a hacer. En una ecuación matemática las indicaciones para el orden no son los mismos que en el lenguaje ordinario. Ellos incluyen paréntesis (los cuales no son usados como en el lenguaje ordinario) e indicaciones más sutiles que deben ser deducidas de un conocimiento de las reglas formales para la precedencia de operaciones.

**8.3.4.1.6. Propiedades de las operaciones formales, adición y multiplicación:** En el conjunto de los números reales $(R_e)$, están definidas las operaciones: adición ( + ) y multiplicación (.), las cuales verifican las siguientes propiedades (llamadas también axiomas de campo):

a) **Clausurativa:** Para todo $a, b \in R_e : a + b = c, \quad \text{tal que} \quad c \in R_e$

$$a \cdot b = d, \quad \text{tal que} \quad d \in R_e$$

b) **Conmutativa:** Para todo $a, b \in R_e : \quad a + b = b + a$

$$a \cdot b = b \cdot a$$

[30] STACEY, K and MacGREGOR, M . Ideas about symbolism that students bring to Álgebra. En: The Mathematics Teacher, Vol 90; No 2; 1997.

c) **Asociativa:** Para todo $a, b, c \in R_e$: $a+(b+c)=(a+b)+c$

$$a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$$

d) **Modulativa:**

- Existe el real cero tal que, para todo a $\in R_e$: $a+0=0+a=a$
- Existe el real uno tal que, para todo a $\in R_e$: $a\cdot 1=1\cdot a=a$

El real **cero** es llamado: **módulo o elemento neutro** para la adición.
El real **uno** es llamado: **módulo o elemento neutro** para la multiplicación.

e) **Invertiva:** - Para cada número real $a$, existe un real único llamado el opuesto de $a$, y que se denota $-a$, tal que: $a+(-a)=0$ .

- Para cada número real $a\neq 0$, existe un real único llamado el recíproco de $a$, y que se denota $a^{-1}$ ó $\frac{1}{a}$, tal que: $a\cdot a^{-1}=1$ ó $a\cdot\left(\frac{1}{a}\right)=1$

Debe notarse que $-a$ no representa siempre un número negativo, aunque en algunas ocaciones puede serlo. Asi, - 3 es negativo y el opuesto de 3, mientras que - (- 5) es positivo y es el opuesto de - 5.

El opuesto de ***a*** también se conoce como inverso aditivo de ***a***.
El recíproco de ***a*** también es llamado inverso multiplicativo de ***a***.

f) **Distributiva de la multiplicación:** Para todo $a, b, c \in R_e$:

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$$

$$a\cdot(b-c)=a\cdot b-a\cdot c$$

g) **Recolectiva de la multiplicación:** Para todo $a, b, c \in R_e$:

$$a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c)$$

$$a \cdot b - a \cdot c = a \cdot (b - c)$$

**8.3.4.1.7. Propiedades de la igualdad:** La relación de igualdad cumple con las siguientes propiedades:

a) **Uniforme:** Si $a = b$, entonces, $a + c = b + c$.

b) **Reflexiva:** $a = a$; $b = b$.

c) **Propiedad simétrica:** Si $a = b$, entonces, $b = a$

d) **Propiedad transitiva:** Si $a = b$ y $b = c$, entonces, $a = c$.

**8.3.4.1.8. Solución de ecuaciones lineales con una ocurrencia de variable:** Como estrategia en el proceso de solución de ecuaciones lineales con una ocurrencia de variable, se propone realizar en primera instancia todas las operaciones aritméticas posibles, posteriormente establecer el orden de las operaciones implicadas en el planteamiento, esto es, tomándolas desde la operación más interior hasta la más exterior. Establecido lo anterior, se procede al estructuramiento del orden de las operaciones que deben ejecutarse en el proceso de solución de la ecuación, basándose para ello en el proceso reversible de las operaciones implicadas en el planteamiento, las cuales se deben desarrollar en el lado contrario de la igualdad al de aquel en que se planteó la operación (proceso que se conoce como transposición de términos). Esto es, desde la operación reversible más exterior, hasta la operación reversible más interior. Ejemplo:

en el proceso de solución de la ecuación $\dfrac{3x + 3^2}{2 \times 5} = 3$, primero resolvemos las operaciones aritméticas posibles,

quedando: $\frac{3x+9}{10}=3$. Posteriormente, se establece el orden de las operaciones implicadas en su planteamiento y en el proceso de solución. Para esta ecuación:

| **Orden de la operaciones en el planteamiento** | | **Orden de la operaciones reversible en el proceso de solución** | |
|---|---|---|---|
| más interior | Multiplicación | más interior | división |
| | Adición | | sustracción |
| más exterior | división | más exterior | multiplicación |

Así, el proceso de solución se entiende como un proceso reversible, esto es, un proceso que involucra "deshacer" o revertir las operaciones implicadas en su planteamiento.

Para el ejemplo tratado:

1°. Se "deshace" la operación más exterior, determinada en el planteamiento de la ecuación, mediante la operación reversible de esta, es decir, el número que estaba dividiendo en un lado de la ecuación pasa a multiplicar en el otro lado de la igualdad.

$$3x+9=3\cdot 10$$

2°. Se "deshace" la siguiente operación en orden de ejecución en el planteamiento de la ecuación, es decir, el número que estaba siendo sumado a un lado de la igualdad pasa a ser restado en en otro lado de la igualdad.

$$3x=30-9$$

3º. Se "deshace" la posterior operación en orden de aparición en el planteamiento de la ecuación, es decir, el número que

estaba multiplicando a un lado de la igualdad pasa a dividir al otro lado de la igualdad.

$$x = \frac{21}{3} = 7$$

**8.3.4.1.9. Solución de ecuaciones lineales con más de una ocurrencia de variable:** Para este tipo de ecuaciones se plantea hacer uso de la aplicación de las propiedades de la igualdad y de las operaciones.

Ejemplo de solución de ecuaciones utilizando las propiedades de las operaciones y de la igualdad

| | |
|---|---|
| $ax + b = c$ | ecuación dada |
| $ax + b + (-b) = c + (-b)$ | propiedad uniforme de la igualdad |
| $ax + 0 = c + (-b)$ | propiedad del inverso aditivo |
| $ax = c - b$ | propiedad modulativa y ley de signos |
| $\frac{1}{a}(ax) = \frac{1}{a}(c - b)$ | propiedad uniforme de la igualdad |
| $\left(\frac{1}{a} \cdot a\right)x = \frac{1}{a}(c - b)$ | propiedad asociativa de la multiplicación |
| $1.x = \frac{c - b}{a}$ | propiedad del inverso multiplicativo |
| $x = \frac{c - b}{a}$ | propiedad modulativa de la multiplicación |

Al observar el proceso seguido, se puede considerar la siguiente secuencia

$$ax + b = c$$
$$ax = c - b$$
$$x = \frac{c - b}{a}$$

en la cual, se puede resumir su desarrollo en los siguientes términos:

- la cantidad que estaba siendo sumada a un lado de la igualdad pasa a ser restada en el otro lado de la igualdad

- la cantidad que estaba multiplicando a un lado de la igualdad pasa a dividir en el otro lado de la igualdad

Este proceso de simplificación algorítmica se conoce como transposición de términos.

Ejemplo: solucionar la ecuación. $\frac{x+13}{2} = 10$

Solución aplicando las propiedades de la igualdad y de las operaciones

$$\frac{x+13}{2} = 10$$
$$\left(\frac{x+13}{2}\right) \cdot 2 = 10 \cdot 2$$
$$x + 13 - 13 = 20 - 13$$
$$x = 7$$

Solución aplicando la transposición de términos

$$\frac{x+13}{2} = 10$$
$$x + 13 = 10 \cdot 2$$
$$x = 20 - 13$$
$$x = 7$$

Cuando se presenta más de una ocurrencia de variable, lo más conveniente es tratar la solución de las ecuaciones siguiendo el modelo vertical con aplicación de las propiedades de la igualdad y las operaciones.

Ejemplo: Resolver la ecuación: $ax + b = cx + d$

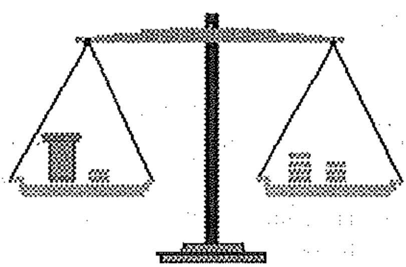
Proceso de solución:

$$
\begin{array}{rcl}
ax + b & = & cx + d \\
-b & = & -b \\
\hline
ax + 0 & = & cx + d - b \\
\hline
ax & = & cx + d - b \\
-cx & = & -cx \\
\hline
(a-c)\cdot x & = & 0 + d - b \\
\hline
\dfrac{(a-c)}{(a-c)}\cdot x & = & \dfrac{d-b}{a-c} \\
\hline
x & = & \dfrac{d-b}{a-c}
\end{array}
$$

## 8.3.4.2. Actividades y preguntas

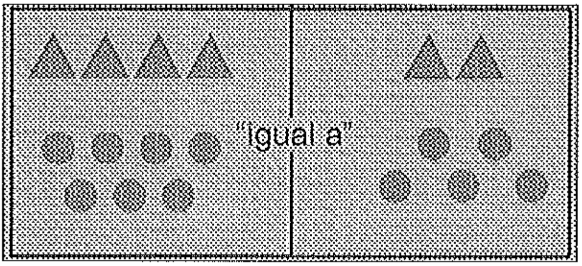
### 8.3.4.2.1. Actividades libres

a) Considerando que el peso del contenedor es despreciable y dada la situación de equilibrio en la figura, plantear nuevas situaciones de equilibrio, adicionando o quitando fichas o contenedores (con igual cantidad de fichas en su interior cada uno), al esquema proporcionado. Escriba simbólicamente la nueva situación de equilibrio.



$$x + 2 = 7$$

b) Considerando que la situación representada en el lado izquierdo del tablero es igual a la representada en el lado derecho, plantear nuevas situaciones de igualdad, al esquema dado, adicionando o quitando fichas triangulares o circulares. Escriba simbólicamente la nueva situación de equilibrio.




$$-4x+7=2x-5$$

c) Describa cuál es el proceso que sigue al vestirse y cuál es el proceso que sigue al desvertirse (las mismas prendas). Examine las distintas posibilidades en el orden de vestirse y desvestirse las prendas. Existe alguna relación entre el orden al vestirse, con respecto al orden al desvestirse (las mismas prendas).

d) Dados los números 4, 8, y 12 escribir las posibles igualdades que se pueden obtener con ellos, mediante las distintas operaciones matemáticas.

e) Dados los números 3, 5, y 15 escribir las posibles igualdades que se pueden obtener con ellos, mediante las distintas operaciones matemáticas.

f) Dada la expresión, $\frac{(3+5)\times 8}{2}=32$ escribir nuevas igualdades que puedan obtenerse haciendo uso de los mismos números.

### 8.3.4.2.2. Actividades dirigidas

a) Utilizando el modelo de la balanza o el tablero de fichas y haciendo transformaciones sucesivas, hallar el valor de la incógnita en las siguientes ecuaciones, esto es, dejando la incógnita sola y positiva a un lado y el valor numérico en el otro:

1. x + 8 = 11
2. 3x + 9 = 5x + 1
3. -x + 12 = 4
4. 2x + 5 = -4x + 13
5. -3 + 2x = -5 + x - 4x
6. 2 • (x + 3) = -x + 12

b) Si la ecuación $8m+3=35$ puede ser representada por el diagrama:

$$\boxed{m} \to (x8) \to (+3) \to \boxed{35}$$

y su solución puede hallarse como:

$$\boxed{35} \to (-3) \to (\div 8) \to \boxed{4}$$

Donde $m=4$. Describa el proceso seguido en la solución.

c) Represente de manera similar al diagrama anterior, cada una de las siguientes ecuaciones y halle la solución:

1. 5 + x = 18
2. $7x=42$
3. $8k-(-5)=61$
4. $\dfrac{9p}{-15}=3$
5. $\dfrac{11p-10}{5}=20$
6. $\dfrac{7k}{6}-3=11$

d) Solucione las anteriores ecuaciones, según el siguiente modelo vertical para la solución de la ecuación: 7x + 5 = 9x -1

$$
\begin{array}{rcr}
7x+5 & = & 9x-1 \\
-5 & = & -5 \\
\hline
7x & = & 9x-6 \\
+6 & = & +6 \\
\hline
7x+6 & = & 9x \\
-7x & = & -7x \\
\hline
\dfrac{+6}{2} & = & \dfrac{2x}{2} \\
\hline
3 & = & x
\end{array}
$$

e) Utilizando el modelo vertical, solucionar las siguientes ecuaciones

1. $\dfrac{7x+9}{2} = 3x+8$

2. $\dfrac{-4x-3}{5} = 2-x$

3. $7\cdot(2x+8) = 10\cdot(3x-4)$

4. $\dfrac{6x-3}{-5} = \dfrac{2x+77}{7}$

5. $\dfrac{8x+4}{5} - 12 = \dfrac{2x-13}{3} - 5$

### 8.3.4.2.3. Preguntas Cerradas

a) ¿ Es posible con el modelo de la balanza y el tablero llegar a la solución $x = \dfrac{2}{3}$ ?. Explique.

b) Dado que: 4 + 8 = 12 y 4 = 12 - 8 ó 8 = 12 - 4

3 x 5 = 15 y 3 = $\frac{15}{5}$ ó 5 = $\frac{15}{3}$

¿Qué representan los anteriores resultados ? Explique.

e) ¿Qué relación existe entre los resultados planteados en el literal b, de este numeral, y la forma gráfica de representar la solución en el literal b, de la actividad 2, de esta sección ?

**4) Preguntas Abiertas**

a) ¿Por qué es importante pasar de los modelos a la forma abstracta o simbólica?

b) ¿Por qué las ecuaciones de la forma $ax+b=cx+d$ se denominan ecuaciones lineales?

c) ¿Qué representa el que las ecuaciones lineales tengan una solución, varias soluciones o ninguna solución?

d) ¿Puedes indicar otra forma, diferente a las vistas, de solucionar las ecuaciones lineales?

## 8.4 CONCLUSIONES

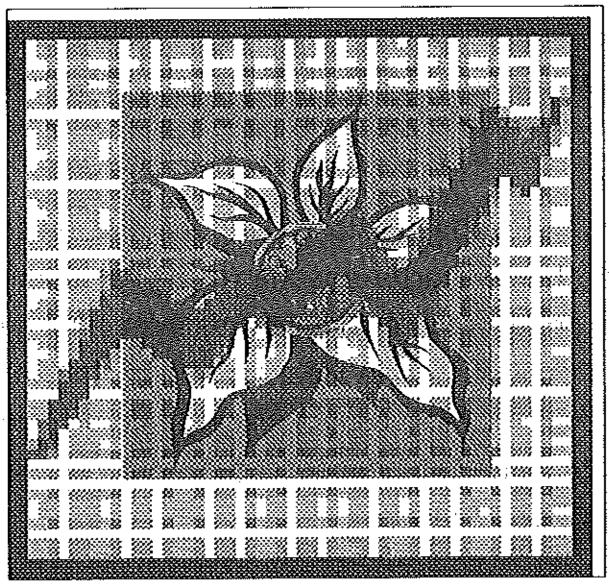
- No es viable utilizar un único método, de los tratados, para darle significado a todos los procesos involucrados en la solución de ecuaciones lineales. Por lo tanto, es indispensable el tratamiento de los diferentes métodos, de manera significativa, de modo que se logre la interiorización de los algorítmos involucrados en ellos, como son: las transformaciones equivalentes, la reversibilidad de las operaciones, la jerarquización y la ordenación de las operaciones.

- Para lograr la significación de los algoritmos de la solución de ecuaciones lineales es fundamental tratar la acepción del signo "igual" como identidad y como igualdad ecuacional, con el propósito de que el alumno interiorice la necesidad de hacer transformaciones equivalentes, indispensables para el álgebra, como una extensión de la acepción de igualdad utilizada en la aritmética, en donde la acción (operación) origina directamente el resultado.

- Se debe dar claridad al significado del símbolo literal involucrado en la ecuación lineal; esto es, como incógnita o como número generalizado, primordial para el tratamiento en el álgebra.

# MATEMÁTICA EN TRAJE

# DE FANTASÍA



RUBÉN DARÍO HENAO CIRO*

*Quien estudia los números, deja de ser uno más*

## 9. MATEMÁTICA EN TRAJE DE FANTASÍA


RESUMEN

El trabajo es un artículo de artículos interdependientes que muestran la relación entre matemática, belleza, vida, poesía y arte. Es una exquisita combinación de palabras, metáforas, imágenes y conceptos que testimonian el trabajo matemática literatura.

La otra cara del trabajo está presupuestada en la sentida necesidad de humanizar la enseñanza de la matemática, de sensibilizar a profesores y estudiantes del área para que utilicen la ciencia en beneficio de la vida. Es una invitación a pensar juntos un espacio flexible, común, cargado de emociones para motivar el estudio de la matemática que, esta vez, se presenta vestida en traje de fantasía.



AUTOR

RUBÉN DARÍO HENAO CIRO

Master en Didáctica de la Matemática, Instituto Pedagógico Latinoamericano y Caribeño (IPLAC), La Habana, Cuba

Docente en

Colegio Manuel José Caycedo

## 9.1 INTRODUCCIÓN

A pesar de las múltiples aproximaciones que se han dado entre la ciencia y el arte, todavía hay quienes conservan un paralelismo entre ellos y se niegan a disfrutar de los rasgos comunes que comparten.

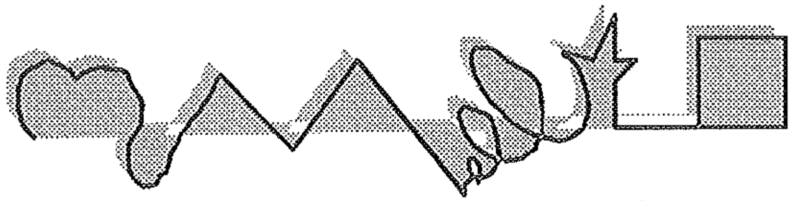
Pretendo explicar la cercanía entre la poesía como expresión de lo bello y la matemática como revelación del espíritu en forma y cantidad. Para ello exploro diferentes rincones de la condición humana: indago por la belleza en la matemática, comparo las verdades que se forman en ella y a su alrededor, profundizo sobre la importancia de la imaginación y la fantasía en el trabajo matemático, recorro el andamiaje poético para estudiar su relación con lo matemático e interpreto los fulgores poéticos de la matemática hasta llegar a afirmar con Proclus, el filósofo Neoplatónico del siglo V: "*Donde hay número, hay belleza*".

Todo el texto se mueve en dos direcciones: una es la integración permanente que debe existir entre la matemática, la literatura y la vida, y otra es la humanización del profesor de ciencias, especialmente el de matemáticas.

Para lograr mi propósito, me muevo por apartados que guardan una relación de interdependencia; finamente unidos entre sí. Al final escribo la bibliografía consultada y sugerida para quien desee profundizar en el tema.

Debido a la naturaleza de este ensayo, es lógico pensar que no es la única ni la última palabra; en él no hay verdades absolutas sino verdades exquisitas. Mi cometido, como educador, es darle continuidad a la discusión sobre la integración didáctica que puede hacerse en la matemática, desde el preescolar hasta estudios de postgrado. Mi esperanza, en consecuencia, es contribuir a la humanización de su enseñanza.

## 9.2 SENSIBILIZACIÓN FRENTE A LA MATEMÁTICA



James Joseph Sylvester, matemático inglés, reveló en sus escritos una sensibilidad comparativa entre la matemática y las bellas artes: *"Acaso no puede describirse la música como una matemática de los sentidos y la matemática como una música de la razón"* (Newman, 1985, p.289), dejando claro que el matemático debe sentir su trabajo así como el músico siente la música.

El estudiante que no está seducido frente a la belleza artística de la matemática, se empeña en construir barreras para evadir la responsabilidad que tiene con su intelecto, y se declara imposibilitado para estudiarla, ayudado por el profesor de turno quien, muchas veces, no escribe mensajes, ni palabras completas en el tablero, sino que se acostumbra a las variables, a los símbolos y a las abreviaciones; se hace poco expresivo y declara así un silencio sospechoso frente a la sensibilización del contexto matemático o incluso, imposibilitándose para participar en un debate interdisciplinario.

La matemática, como ciencia, es un producto de la libre imaginación, de tal magnitud que se deja afirmar como un arte; cobra vida y belleza en la poesía, en la música, en el juego, en la estética, entre otras disciplinas que significan el viaje del hombre y la mujer por el cosmos.

Quienes así lo vemos, le encontramos sentido a las palabras de Rabrindranath Tagore, poeta y educador hindú, premio Nóbel de 1913:

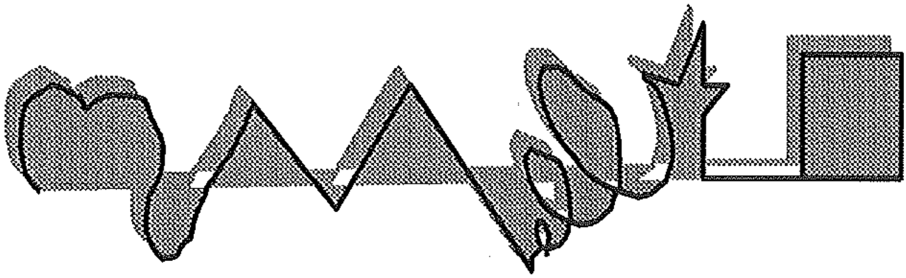
"Para mí las tablas de multiplicar están escritas en los pétalos de las flores y en las nervaduras de las hojas. Sin saberlo las mariposas, las transportan sobre sus alas. He dicho esto a mis amigos profesores de matemáticas proponiéndoles que sacaran de ello partido para sus enseñanzas. Han alzado los hombros y tratado mis ideas de claro de luna. Sin duda se trata de que ellos no son poetas, como yo no soy matemático".

La matemática no nace para asustar a niños y a jóvenes ni para reiterarles su fracaso escolar cuando no la estudian. Yo, como maestro de matemáticas, debo ser un motivador hacia el desarrollo del pensamiento matemático. En efecto, a propósito de mi frase de combate: "no hay efecto sin afecto", amo mi ocupación y soy capaz de contagiar a mis semejantes de tal manera que ellos quieran ser maestros, o en el menor de los casos, estudiantes apasionados de la matemática.

El profesor de matemáticas está en el deber de mostrar permanentemente el encanto de la obra matemática así como de presentar la genialidad del hombre que hay detrás de cada trabajo matemático.

La invitación es a que profundicen en esas almas bellas que han entregado su esencia creadora; a que sean profetas que animen a sus estudiantes a ver la tierra prometida que ya ustedes han descubierto. Cuando lo hagan, les garantizo que ni ustedes, ni sus clases, volverán a ser lo mismo.

## 9.3 EL AMOR EN LA MATEMÁTICA



Hasta hace poco no podía ver despejado el camino; el horizonte era borroso e incluso el espacio próximo era inseguro. Caminaba como en la infancia; creyendo que al frente, donde las montañas marcan su línea en el encuentro con el firmamento, terminaba la extensión de la tierra, allí estaba el fin del mundo. Crecí varios años con esa falsa idea en la cabeza, la misma que me hacía permanecer con los brazos cruzados por temor a llegar hasta la cima y descubrir lo inesperado o morir, como pensaba que les ocurría a todos aquellos que lo hacían.

A los trece años, obligado por mi padre, sentí el primer susto fuerte cuando, a caballo, nos dirigimos a un pueblo que quedaba al otro lado de la montaña. A medida que se reducía la distancia a la cima, mi corazón tamborileaba de miedo, pero tenía la firme compañía de mi padre; por eso el susto se convirtió en asombro. ¡Vaya sorpresa! Descubrí que el mundo era más grande de lo que yo pensaba, y que había más mundo después de mi mundo. Hoy, veinte años después, vuelvo a tener la misma sensación al descubrir la existencia de estructuras posibles para homologar esta realidad real. ¿Cuál fue mi descubrimiento? Tal vez no he descubierto nada, sino que siempre ha estado ahí, adyacente a lo que soy, siempre ha sido así y ese argumento fue el que me descubrió.

Mi descubrimiento va ligado a la práctica operatoria de la clase de matemáticas, o en cualquier otro espacio en el cual se requiera romper el silencio para dar paso al conocimiento. Yo sabía que podía aprender porque soy un eterno aprendiz. Yo sabía que podía enseñar matemáticas y geometría, pero no sabía que podía enseñar a amar a través de la matemática, y menos sabía que yo en las aulas, tanto como enseñar geometría había enseñado algo más; había formado un conjunto de valores a través de la geometría. Había mejorado vidas y familias, había orientado personas hacia puntos más elevados, había formado principios tendientes a mejorar la relación entre las personas.

Por eso, cuando leo tratados de Juan Amós Comenio, Werner Jungk y José Martí, entre muchos otros, me ocurren dos cosas: 1) recuerdo a mi padre, quien escasamente sabía firmarse, pero tenía un profundo respeto por la vida y por el ser humano, y 2) me doy cuenta de que no voy solo por las aulas.

Juzguen ustedes, ya que es inevitable escribir, al menos, tres apuntes.

*"Un matemático ama su ciencia. Eso no es suficiente para un profesor de matemática, él debe además, amar al niño, conocer sus capacidades y condiciones, si le quiere transmitir conocimientos, desarrollar capacidades y habilidades matemáticas"* (Jungk, 1979, p.6)

*"Educar rectamente a la juventud no es imbuirle un párrago de palabras, frases, sentencias y opiniones tomadas de los autores sino abrir el entendimiento de las cosas para que broten arroyos de él como de fuente viva y como de las yemas de los árboles broten hojas, flores y frutos".* (Comenio, 1995, p.85)

*"Educar es depositar en cada hombre toda la obra humana que le ha antecedido: es hacer a cada hombre resumen del mundo viviente, hasta el día en que vive: es ponerlo a nivel de su tiempo, para que flote sobre él, y no dejarlo debajo de su tiempo, con lo que no podría salir a flote: es preparar al hombre para la vida".* (Martí, 1961, p.19)

Ese es mi descubrimiento. No he caído en el extremo de reducirlo todo a una sencilla charla de parque. He llegado a la clase a hacer construcciones geométricas, a demostrar teoremas, a resolver problemas, a elaborar conceptos matemáticos, pero lo más importante es que he hecho la pausa antes de trabajar con el problema para escuchar el argumento del estudiante sobre el para qué se debe resolver, por qué se debe construir, cuál es la ganancia para la humanidad con dichos contenidos.

En ese debate reflexivo, paralelo al desarrollo de la materia, he conocido el estado mental de mis estudiantes, me he enterado de sus problemas, de sus hambres, de los reveses de su adolescencia y de tantos otros sucesos que les pasa y que el profesor ignora. Haber valorado el poder de la palabra con afecto y efecto en el trabajo de clase, es lo que me ha posicionado como profesor que no olvida a sus estudiantes en la necesidad de aprender mucho más que matemáticas.

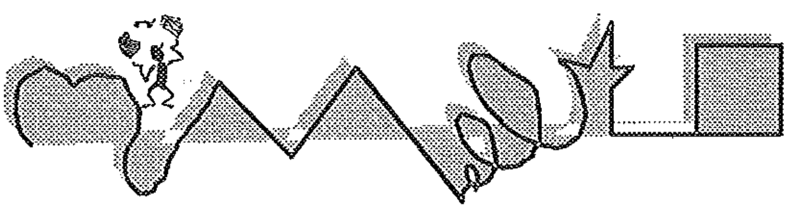
Hace poco lo corroboré, al ver cómo desfilaban por la vida personas que no eran sicarios ni delincuentes, no eran matemáticos, ni geómetras, y en algunos casos, ni profesionales, pero se podía leer en sus rostros cómo la matemática había hecho su trabajo de formadora de carácter; actuaban con cordura y madurez, tenían en su caminar la esencia que el conocimiento les había legado: unidad, equilibrio, rectitud, reflexividad, armonía, conciencia, entre otros valores y actitudes que pueden ser formados a través de la matemática. Podían orientarse con valentía y rectitud en la conquista de un mundo mejor para ellos y para los suyos.

¡Vaya sorpresa! Descubrí que el mundo podía ser mucho más grande de lo que yo suponía, y que en ese mundo había la posibilidad de fundir el amor, la vida y la matemática.

El ya citado Sylvester es un ejemplo de esta fusión. Escuchen sus palabras y adviertan la fuerza viva que se deriva de sus argumentos:

*"El matemático vive mucho y vive joven; las alas del alma no se desprenden de él tempranamente, ni sus poros se entorpecen con las primeras partículas que vuelan de los caminos polvorientos de la vida vulgar"* (Newman, 1985, p.290)

## 9.4 LA BELLEZA DE LA MATEMÁTICA



Arthur Cayley, matemático inglés, al hablar de la extensión de la matemática moderna, expresa: "*Una extensión atestada de bellos detalles, no una extensión de simple uniformidad como un plano sin objetos, sino una región de un bello país contemplada al principio desde la distancia, pero que habrá que recorrer y estudiar en cada detalle: ladera y valle, río y peña, bosque y flor. Pero, como en todo, también en una teoría matemática la belleza puede percibirse, pero no explicarse*" (Newman, 1985, p.267)

Haga usted un ejercicio para entender, en parte, las palabras de Cayley: seleccione un poema que para usted sea bello y trate de explicarle dicha belleza a otra persona. O hágalo si prefiere con una pintura, una escultura o una verdad matemática. A menudo me encuentro con "situaciones" que reconozco como bellas pero cubiertas de dificultad para describir dicha belleza. Lo mismo ocurre con la matemática. Sin embargo, con la naturalidad que se enseña a reconocer las partes del cuerpo humano, voy a entrar en varios detalles que testimonian lo bello en la matemática.

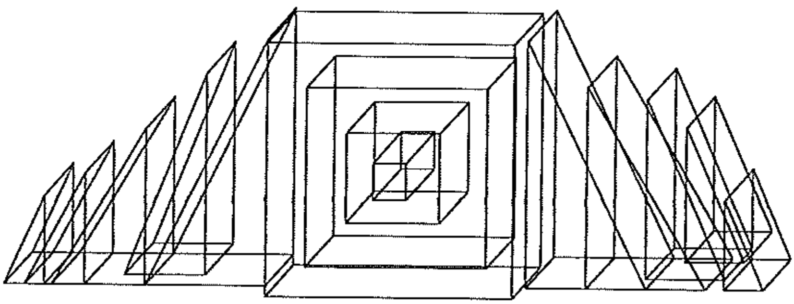
Las obras del poeta, así como las del pintor o las del matemático, deben ser supremamente bellas para que perduren en la mente. Podría decir que la belleza es la primera prueba en un mundo donde no hay lugar permanente para las mentes antiestéticas. En forma análoga, los malos algún día entenderán que la maldad no sólo es una empresa mala, sino que no tiene asidero en la mente del mundo intelectual.

La matemática es esencialmente bella. No hay lugar en ella para enunciados incoherentes; en vez de definir la fealdad, está en una permanente renovación, movida por la simetría, la continuidad y la perfección. Se ve alimentada por la expresión humana; por el contacto permanente entre el hombre/mujer y su medio; está poéticamente expresada en la forma y en la cantidad. El arte se nutre de su exquisitez como una bella mujer que se maquilla con los mejores productos.

Algunas personalidades tenían una visión racionalista del arte: Leibnitz, matemático alemán, veía en la música el ejercicio oculto de un espíritu aritmético que no sabía lo que estaba cantando. Santo Tomás de Aquino, teólogo y filósofo italiano, definió la belleza como el esplendor y el orden. Para Schelling, filósofo alemán, la belleza es la representación de lo infinito en lo finito.

Boileau, poeta francés, en uno de sus célebres versos dice: *"No hay serpiente, ni monstruo odioso que no pueda llegar a gustarnos por medio del arte".*

La matemática cumple con el condicionamiento puesto por la belleza a todo aquello que deba calificarse como bello.



En primer lugar, es clara la perfección y la integridad de la matemática al tener completez en cada una de sus partes y en el todo. No puede ser bello, como tampoco válido, un triángulo de dos lados, o un cuadrado que tenga uno de sus lados más largo que otro. Un prisma oblicuo es perfecto e íntegro en su definición como lo que es. Un conjunto es completo si se utilizan los elementos lógicos que lo forman.

Observe la siguiente sucesión: **1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55...** Probablemente usted no reconozca nada estético en dicha sucesión. Pero si reconoce que cada número, excepto el uno, se forma con la suma de los dos anteriores, entonces encuentra una interesante secuencia que se hace más admirable cuando la vea en los gajos de algunas plantas, así como la vio Fibonnaci. En segundo lugar, la matemática tiene proporción y armonía; existe concordancia de las partes entre sí, así como de las partes con el todo. Es agradable ver como los contenidos matemáticos se necesitan mutuamente; están interconectados unos con otros.

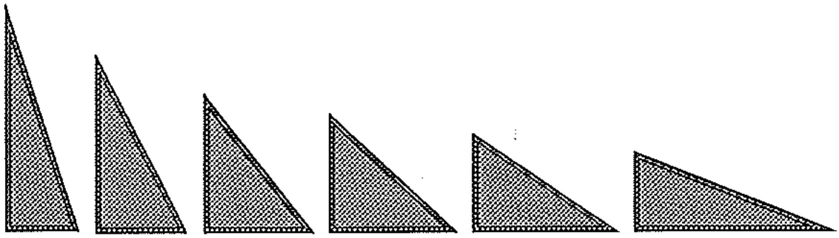
Existe, además, una bella sinonimia entre contenidos. Un ejemplo breve de este particular es:

| | |
|---|---|
| En lógica: | La negación de la negación de p es p. |
| En conjuntos: | El complemento del complemento de A es A. |
| En aritmética: | El inverso del inverso de "a" es "a". |
| En estadística: | El evento contrario del evento contrario de A es A. |

Resulta muy grato además, al estudiar triángulos rectángulos, ver como al estirarlos o angostarlos por uno de sus vértices, el ángulo recto permanece quieto, pero los ángulos agudos se compensan entre sí para no dañar la regla armónica que deben cumplir al sumar entre los dos 90 grados.

La observación anterior se extiende a los catetos. Observe que los catetos se alargan o se acortan para corresponderse mutuamente con el ángulo más grande o más pequeño: "en todo triángulo rectángulo, el cateto mayor se opone al ángulo agudo de mayor medida".

En tercer lugar, la matemática abre caminos con su esplendor y claridad. Es muy satisfactorio resolver una situación que parecía irremediable. La matemática sirve para interpretar mejor el mundo; para significar nuestra evolución y conocer a fondo los fenómenos



que nos rodean. ¿Quién no ha sentido alegría al resolver un problema matemático?. La resolución exitosa de problemas matemáticos nos infla el pecho hasta el punto de mirarnos al espejo y vernos más bonitos y más capaces. Nos sumimos en la autocontemplación a partir de la belleza matemática.

A menudo me toca ver como los estudiantes que resuelven problemas matemáticos enderezan su cuello y hacen ademanes entusiastas frente a la conquista obtenida. Sin duda, entender la ciencia matemática los hace ver más bellos y los proyecta como mejores personas.

En cuarto lugar, la matemática tiene sus propias leyes internas, las mismas que la hacen ver como una obra de arte. Es bella una construcción geométrica o la demostración de un teorema. Así como puede percibirse una belleza generalizada en las propiedades de las operaciones aritméticas. La ley clausurativa, por ejemplo, se enuncia en la suma de números naturales, similar a cualquier operación entre iguales:

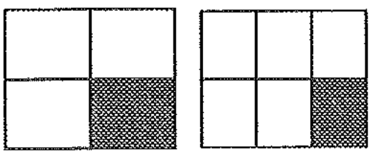
*La suma de dos números naturales da como resultado otro número natural.*
*La unión de dos especies vivas da como resultado otra especie viva.*

Cuando se mata, ejemplo común en nuestro país, se rompe, entre otras muchas leyes, con la ley clausurativa; porque la relación de dos seres vivos debe generar vida y no muerte.

Todo proceso debe redundar en el mejoramiento de la condición humana.

Lo que se necesita es el desarrollo consciente de la sensibilidad frente al trabajo matemático. La matemática calibra el pensamiento, aclara el camino hacia la comprensión del todo, no sólo opera en el campo de la razón sino también en el campo de la emoción, de ahí que estemos llamados a contemplar su belleza para luego trasladarla a los seres y a las cosas que nos rodean.

En quinto lugar, la belleza, como la matemática, encuentra una exacta justificación en la vigilante relación entre forma y razón; contenido e idea; figura y medida. La belleza de un teorema matemático depende de su sencillez y formalidad, y está sometida a la comprensión de quien fundamenta o de quien atiende a la demostración.



$\frac{1}{4}$ $\frac{1}{6}$

*Más que bello es justo afirmar que entre dos fracciones de igual numerador es mayor la que tenga menor denominador*

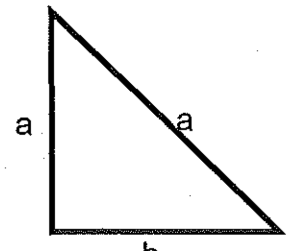
$$\frac{1}{4} > \frac{1}{6}$$

Cómo no valorar la trascendencia de enunciados que nos ayudan a una mejor captación del mundo como aquel que dice "el camino más corto entre dos puntos es la línea recta" o propiedades que permiten el discernimiento en lo social y en todos los órdenes como la ley transitiva:

Si a es mayor que b y b es mayor que c, entonces a es mayor que c.

Si A es representante de B y B es representante de C, Entonces A es representante de C

Continuando con la belleza de los enunciados matemáticos, en un triángulo rectángulo de catetos a y b, y cuya hipotenusa es c, pueden admirarse varios saberes geométricos que funden la verdad con la belleza:




La hipotenusa es mayor que cualquiera de los catetos.

La suma de los catetos es mayor que la hipotenusa.

El área del triángulo rectángulo es la mitad de la del rectángulo.

La suma del cuadrado de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa.

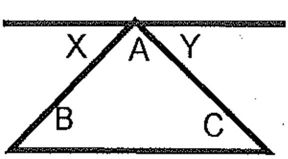
La suma de los ángulos agudos del triángulo es 90° grados.

Es sorprendente la demostración que se hace de teoremas, en la cual uno va hilvanando como por arte de magia una serie de verdades, para ello construye, reemplaza, despeja, iguala, recuerda, hasta obtener una verdad final.

Por ejemplo: En todo triángulo la suma de los ángulos interiores es igual a 180°.

Hipótesis: ABC Triangulo Tesis: $A + B + C = 180°$

**Figura**




| Verdad | Razón |
|---|---|
| 1. $X + A + Y = 180°$ | Los 3 forman un ángulo llano |
| 2. $X = B$ | Porque son alternos internos |
| 3. $\beta \quad y = c$ | Porque son alternos internos |
| 4. $B + A + C = 180°$ | Sustituyendo 2 y 3 en 1 |
| 5. $A + B + C = 180°$ | Ley conmutativa en la suma |

Otro ejemplo de belleza matemática puede verse en los siguientes productos, aunque en todo resultado hay belleza.

$$
\begin{gathered}
11 \times 11 = 121 \\
111 \times 111 = 12321 \\
1111 \times 1111 = 1234321 \\
11111 \times 11111 = 123454321 \\
111111 \times 111111 = 12345654321 \\
1111111 \times 1111111 = 1234567654321 \\
11111111 \times 11111111 = 123456787654321 \\
111111111 \times 111111111 = 12345678987654321
\end{gathered}
$$

Finalmente, la belleza matemática, como cualquier otra belleza, necesita ser ilustrada. De la misma manera como se enseña apreciación musical, debe enseñarse apreciación matemática; esto es, mostrar el inquietante camino desde la antigüedad hasta nuestros días, enseñar a disfrutar de las grandes sinfonías matemáticas creadas por la mente humana como: la geometría fractal, la teoría de los números, los mundos que se derivan de las formas planas, las paradojas del infinito, las formas espaciales que retratan el mundo en que vivimos, entre otras muchas bellezas que yacen escondidas en la formalización matemática que, día a día, llena los tableros y las mentes.
Quien no tenga la capacidad de asombrarse frente a los resultados de la matemática, no merece ser un maestro de la misma.

## 9.5 LA VERDAD ARTÍSTICA DE LA MATEMÁTICA

Leo Kofler plantea: "*En la identidad de forma y contenido la forma artística plasmada por el poeta en su obra no puede considerarse como acabada y suficiente sino cuando corresponde a la verdad, cuando es verdadera; e inversamente, el contenido expresado sólo alberga la verdad cuando recibe la forma que corresponde y expresa la verdad*" (Kofler, 1972, p.43)

La verdad matemática necesita de la demostración, bien sea por la vía lógica, o por la práctica real en la cual se pueden mostrar resultados posibles. Existen varias formas de demostrar que 20 dividido 4 da 5, una de ellas es la aplicación del algoritmo de la división, otra puede ser la utilización de material concreto para mostrar 5 montoncitos de a 4 ó 4 montoncitos de a 5. La verdad matemática puede someterse a la duda ya que es fácil encontrar el camino que demuestre la veracidad o falsedad de los enunciados.

En el teorema: En todo triángulo, un ángulo exterior es igual a la suma de los dos ángulos interiores no adyacentes: X=A+B, la verdad establecida puede mostrarse a través de un número finito de gráficas que la verifiquen, puede pedirse al grupo que construya por lo menos una gráfica donde no se cumpla el enunciado, que lo contradiga con certeza. O puede, finalmente, demostrarse el teorema utilizando una serie de verdades anteriores como: suma de ángulos interiores de un triángulo, ángulos adyacentes y sustitución de variables.

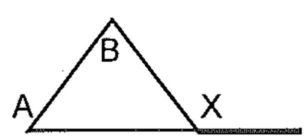
Los problemas cognoscitivos que se plantea el artista ha de resolverlos artísticamente, así como los teoremas matemáticos se demuestran por la vía matemática.

La verdad artística está sujeta, por su parte, a la armonía, a la completez y a la representación de una realidad definida por el artista quien agrega los elementos en la obra de acuerdo con su estado emocional, con el conocimiento que tenga de la realidad que quiere representar, perturbado por ella y a su vez "sacando de adentro" lo que él tiene definido como verdadero. Es lógico pensar que un artista no puede representar aquello que no conoce.

Si el arte no refleja la realidad, si no permite una construcción de la verdad y del bien, no contiene la verdad, o encierra en sí una verdad muy cuestionable frente al sentido de lo verdadero. Derivo este sentir de una definición humanizadora del arte, de Chester Morris: *"El arte es un lenguaje para formar valores", y* establezco el paralelo: La matemática es un lenguaje para formar principios, actitudes y valores.

La sensibilidad es el elemento para definir una obra de arte como verdadera, verdad calificada por el ser sensible que se deja atraer por la obra y que puede verla incluso con los ojos cerrados. Pero, la percepción y la intuición que llevan a percibir una obra de arte como verdadera, nos pueden conducir a una verdad distante de ser una verdad matemática. Se puede apreciar una recta sin serlo, un triángulo que sea rectángulo puede no verse así. Por eso la matemática tiene definida una serie de símbolos y precisiones que no dan lugar a la intuición equivocada.

La matemática, libre de interpretaciones equívocas, es cierta, si se piensa la certeza como la formulación matemática de la verdad. La certeza es una de las verdades incondicionales de la matemática. En ella no se presiente la verdad sino que se encuentra. Dicha certeza se fundamenta en las relaciones de los números, de las figuras, en



la naturaleza de la lógica, incluso en los fenómenos de variación.

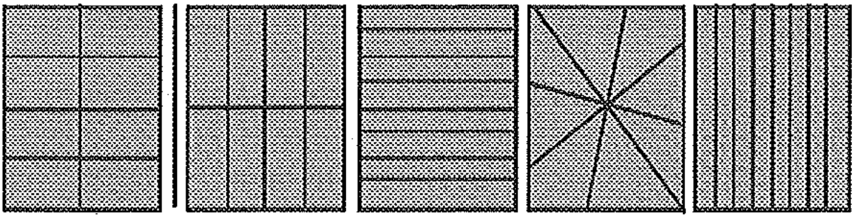
René Descartes, filósofo y matemático francés, preserva la posibilidad de la certeza cuando nuestro pensamiento después de la duda metódica, encuentra una idea clara que escapa de las finas telarañas de la duda y nos obliga a consolidarla como verdad y a sumarnos a ella.

En muchos casos las pruebas que se aplican a los estudiantes tienen un ingrediente adivinatorio, dado que el profesor piensa de una manera diferente a como piensan sus estudiantes. Observe el siguiente ejemplo, ocurrido en un primer semestre de matemáticas.

La pregunta formulada fue: Imagine que usted toma una hoja tamaño carta (28x22) y la corta exactamente a la mitad, luego junta las dos mitades y corta de nuevo a la mitad, después junta las cuatro partes iguales y corta exactamente a la mitad.

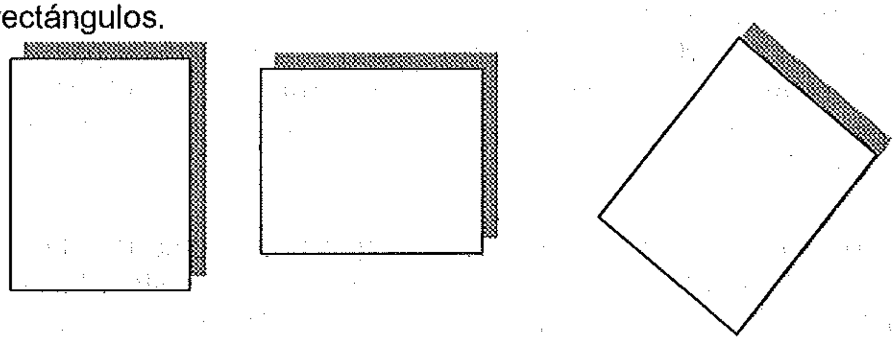
Después de los tres cortes, ¿cuál es el número de rectángulos? ¿Cuál es el ancho de cada rectángulo pequeño?

El primer problema surgió cuando los estudiantes imaginaron el corte o cortaron de una manera diferente a la que yo había imaginado. De este hecho se derivaron varias respuestas y no una sola como era lo esperado.

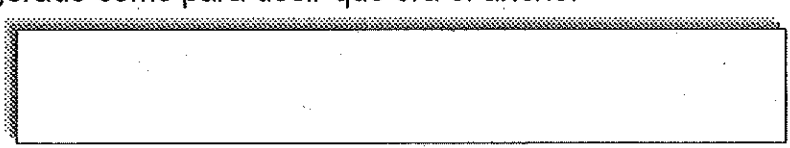


El segundo problema interesante que surgió fue el de determinar el ancho de cada rectángulo pequeño, suponiendo incluso que todos doblaran de la misma forma. Para unos el ancho era 11 cm y para otros era 7 cm. ¿Cuál era el ancho que ellos estaban considerando?

Para que usted entienda la magnitud de la discusión que se nos presentó, señale el ancho de cada uno de los siguientes rectángulos.

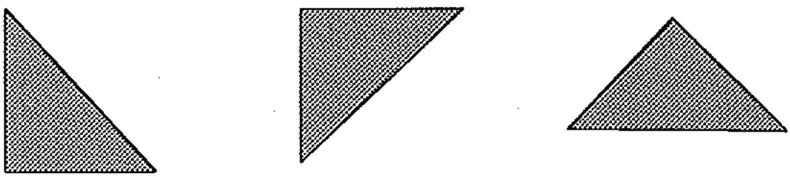


Alguno llegó a decirme que la tercera figura no tenía ancho. Finalmente, para ayudar a la comprensión tuve que dibujarles una carretera. Nadie dudó sobre cuál era el ancho y cuál era el largo. En este caso el largo o la longitud de la carretera era exagerado como para decir que era el ancho.



¿Cuál es el ancho? ¿Cuál el largo? ¿Qué criterios matemáticos existen para no confundirse y elegir el camino correcto?

La nueva enciclopedia Larousse registra "ancho: dícese de lo que tiene más o menos anchura", refiriéndose a un espacio físico que visto de frente puede decirse que tiene anchura. Más adelante, la citada enciclopedia dice: "la menor de las dos dimensiones principales de los cuerpos". Esta segunda acepción nos permite cerrar momentáneamente la discusión, no sin antes concluir que, en estos casos, la verdad matemática no cambia al voltear o mover la figura de análisis; es decir, los tres triángulos siguientes son rectángulos, aunque cierta costumbre matemática reconozca más fácilmente el primero que los otros dos.



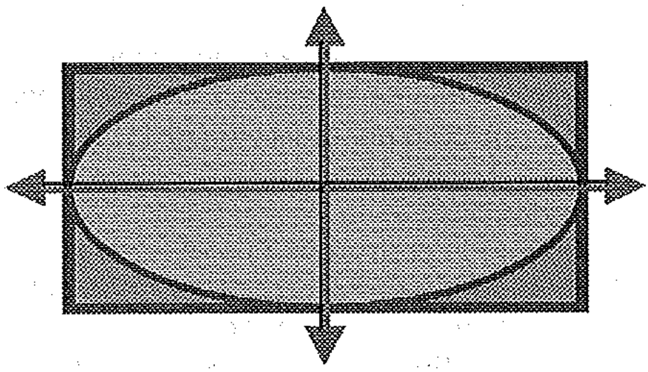
La verdad matemática puede demostrarse en la vigilante relación entre el pensamiento y la realidad contextual. Así la verdad brota ante nuestros ojos y nos guía por el camino de la ciencia.

La mencionada verdad dista de la verdad artística en cuanto es muy subjetivo hablar de la certeza de una obra de arte. El arte verdadero, si bien se funda en la verdad reflejada del mundo real, no puede poseer la verdad absoluta, por mucha generalización que tenga. Sobre arte se dicen muchas verdades, sujetas a una técnica, a un estilo o a un artista en particular.

El arte es a la imaginación como la matemática es a la razón. Pero no por eso se deja de buscar en la matemática la verdad artística. Podemos mostrar como la imaginación llegó a concebir grandes adelantos en la matemática. La matemática es un arte en cuanto es producto de la libre imaginación. Al arte no puede aplicarse el criterio de la verdad científica porque va más unido a la imaginación que a la investigación, a pesar de tener una correspondencia con la realidad.

En este sentido, puede hablarse de una verdad artística de la matemática que dista de la verdad científica porque, como es lógico, no puede asegurarse que un triángulo es un cuadrilátero de tres lados, o que tres más tres es igual a nueve, suena divertido sin lugar a dudas pero no constituyen verdades matemáticas. De ser así, terminaríamos aceptando que la mitad de uno es el ombligo y no un medio, o que la mitad de 8 es 3 porque si lo cortamos con una tijera por la mitad (ξ|3) queda un 3.

Una vez les pregunté a los estudiantes de grado once, en una clase sobre desarrollo del pensamiento metafórico en la matemática, ¿qué veían en la figura siguiente?



Hubo más de veinte respuestas diferentes, desde "un huevo encarcelado" o "una cajita para guardar sueños" hasta "una elipse inscrita en un rectángulo". En mi concepto, todos decían la verdad.

La verdad va ligada a la concepción que se tenga de los objetos que están en juego. Depende tanto del instante en el que se está trabajando como de los referentes que tengan los estudiantes. Hay proposiciones cuyo valor de verdad está sumergido en la ambigüedad; pueden ser verdaderas ahora y sin embargo dentro de un tiempo ser falsas. Cuántas veces nos ocurre en el salón de clases que lo que queremos sentar como verdadero es entendido por los alumnos como falso. La interpretación momentánea los lleva a dudar de la verdad que se está diciendo.

La proposición: "la distancia entre dos puntos es la línea recta" es tan verdadera como la proposición: "la distancia entre dos puntos es una curva". Son verdades que van ligados al contexto; la primera a la geometría euclidiana y la segunda a las geometrías no euclidianas. Las dos se constituyen en verdades geométricas, más no así la verdad enunciada por el escritor que dijo: "la distancia más corta entre dos puntos es la risa", ni la propaganda que dice "la distancia más corta entre dos puntos es la tarjeta débito".

Al escribir en el tablero, el profesor de matemáticas debe no sólo indagar al estudiante sobre la verdad que él ve allí representada, sino también orientarlo hacia lo que él quiere que se incorpore como verdadero. Todavía más, debe enunciar las características esenciales de lo que él está presentando como verdadero, libre de apreciaciones personales. Las cosas tienen su propio lenguaje y sus propias verdades.

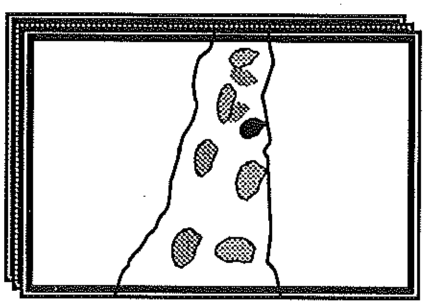
Por eso, los estudiantes que dijeron que, símbolo lógico que quiere decir para todo, era una A al revés, o que, símbolo que representa el infinito, era un ocho acostado, o el alumno que expresó que Ö, símbolo de la radicación, era una "ere" empinada, tenían tanta razón circunstancial como los que expresaron el significado matemático correcto de los símbolos.

No estoy diciendo que se convalide cualquier tipo de verdad en la enseñanza de la ciencia, ya que reconozco la condición de universalidad del lenguaje científico así como su función referencial. Lo que si debe hacerse es aceptar la verdad del estudiante y ayudarle a modificarla en caso de error interpretativo.

Dos líneas pueden ser paralelas para un observador mientras que para otro no. Pero la certeza del enunciado matemático que las define como tal no permite dudar. Aunque un observador no las vea paralelas, las líneas son paralelas porque la verdad circunstancial exige que sean paralelas, así el profesor no las haya trazado con regla y compás ni con la escuadra.

Confieso que me sorprendí mucho viendo aquel cuadro en el cual había pájaros volando de izquierda a derecha, mientras mi compañero veía peces nadando de derecha a izquierda. Estábamos en el mismo plano y mirando el mismo cuadro, lo que pasaba era que yo miraba la parte blanca de la obra mientras que él miraba la parte azul. En efecto, eran dos verdades totalmente contrarias pero verdades las dos. Habíamos caído en el ingenio de Escher.

Frente al siguiente cuadro, qué ven ustedes: Un marco recostado en el tallo de un árbol, una ameba en un microscopio, un cuadro que muestra un camino con pequeños charcos, o acaso una jirafa que pasa frente a su ventana.



Lo que queremos dar a entender es que los sentidos pueden engañarnos en el momento de ratificar las verdades, matemáticas o no, de ahí que se tenga que diferenciar entre verdad relativa y verdad absoluta.

A propósito del absoluto y respecto a las parábolas del evangelio utilizadas por Jesucristo, encontré en la red un chiste bastante curioso:

Les dijo Jesús a sus discípulos:

- En verdad os digo que $y = x^2$

  Los discípulos comentan entre sí, y dice Pedro:
- Maestro, no entendemos...

  Jesús lo increpa:
- ¡Es una parábola bruto!

Para los que no son entendidos en la materia, $y=x^2$ es una función que al ser graficada origina un tipo de parábola. ¿Se imaginan ustedes estar hablando de parábola, como la gráfica, a un joven que la está entendiendo como la enseñanza o moraleja?.

Según la Mathematical Gazette, cuando Tennyson escribió La Visión del Pecado, Charles Babbage, el matemático, lo leyó. Se dice que a continuación, escribió la siguiente carta al poeta:

En su, por otro lado, bello poema, hay un verso que dice: Cada momento muere un hombre / Cada momento nace uno. Es evidente que de ser esto cierto, la población del mundo sería estable. Lo cierto es que la tasa de nacimientos excede ligeramente a la de defunciones. Yo sugeriría que en la próxima edición de su poema escriba: Cada momento muere un hombre / Cada momento $1\frac{1}{16}$ nace.

Hablando estrictamente, esto no es correcto. La cifra real es un decimal tan largo que no cabría en la línea, pero creo que $1\frac{1}{16}$ será una aproximación suficiente para la poesía

Olvidó Babbage, el matemático, que el oficio del poeta, como dice Samuel Jonson, no es examinar lo individual sino la especie; observar las propiedades generales y las apariencias a grandes trazos. El poema, como obra de arte, crea su propio mundo, distante del mundo en el cual se mueve el matemático.

Queda servida la anécdota como un bello espectáculo sobre la verdad. Es cierto que el poeta como artista debe reflejar la realidad, no una realidad deforme frente a la rigidez del matemático que todo lo comprueba. En este caso el poeta no renuncia a la verdad, sino que aproxima la verdad de una manera similar como lo propone el matemático. Además, la verdad sigue dando vueltas, y otro poeta bien podría preguntar ¿cómo es posible que $\frac{1}{16}$ de hombre nazca?. Por lo tanto, esta verdad puede ser ignorada por el poeta sin violar las reglas que le permiten reflejar la realidad.

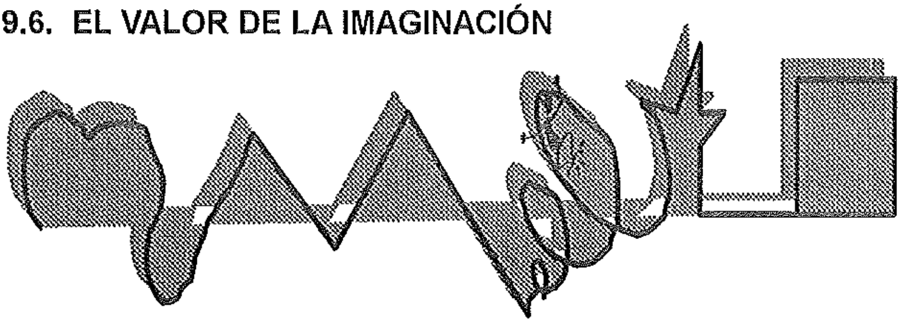
Algún estudioso extremista bien puede pronunciarse de manera similar respecto a un Poema de Bertold Brecht que termina diciendo:

"Veinte más veinte es igual a cuarenta
Cuarenta más cuarenta es igual a mil
Mil más mil es igual a la unidad"

¿Acaso puede afirmarse que Brecht no sabía sumar?

Bien lo dice Heráclito: "El mar es el agua más pura y la más impura. Para los peces es potable y buena; para los hombres impotable y fatal" (Diógenes, 1985, p.135)

## 9.6. EL VALOR DE LA IMAGINACIÓN



Para Francis Bacon, pintor irlandés, "la imaginación es la facultad que se halla en la base de la poesía (...) la imaginación, la memoria y la razón son las tres facultades del alma racional". (Mora, 1994, p.324)

Es lícito entonces disfrutar de las ayudas que puedan proporcionar el entendimiento, la imaginación, los sentidos y la memoria.

Según Kant, "por medio de la imaginación se produce una síntesis que no da origen todavía al conocimiento, pero sin la cual el conocimiento no es posible". (Mora, 1994, p.324)

"La imaginación es más importante que el conocimiento". Si esto lo hubiera dicho uno de los artistas de la actualidad, probablemente nos iríamos en contra de tal afirmación, pero resulta que lo dijo Albert Einstein, el científico más representativo de todos los tiempos.

Navin Sullivan afirma: "el matemático es totalmente libre, dentro de los límites de su imaginación, para construir el mundo que le plazca" (Newman, 1985, p.410)

Voltaire dice que Había más imaginación en la cabeza de Arquímedes que en la de Homero. Imagínense ustedes, semejante imaginación la de Voltaire para comparar a Arquímedes con el poeta griego, autor de la Iliada y la Odisea: 30.000 versos para crear un mundo a la medida del hombre, donde los dioses tienen la misma imaginación que los mortales.

Es innegable la abstracción requerida para el estudio de la matemática, así como los resultados casi mágicos que se obtienen en su trabajo.

Las secciones cónicas, por ejemplo, fueron tratadas 17 siglos antes de que fueran sospechadas sus aplicaciones en la balística, la astronomía y la navegación. ¿Qué podría haber seducido al matemático y gran geómetra, Apolonio de Perga, en su trabajo sobre las secciones cónicas sino una inmensa curiosidad intelectual ligada a su capacidad imaginativa?

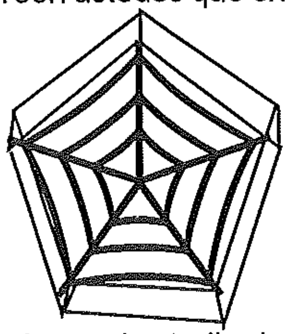
Arthur Cayley, abogado inglés, apasionado investigador del álgebra, en 1843 transfirió el lenguaje de la geometría a los sistemas de ecuaciones de más de tres variables, de esa manera inventó una geometría de cualquier número finito de dimensiones, antes que se descubriera su uso en termodinámica, mecánica y estadística.

Cuando Fermat contribuyó al estudio del álgebra abstracta, no sospechaba que años después, y muy reciente, le encontraran uso en las ciencias físicas, particularmente en la mecánica cuántica moderna.

Los números poligonales llamaron la atención a los pitagóricos del siglo VI a. c., debido a las virtudes místicas de tales números. El impulso aquí fue no sólo místico si no lo extremadamente imaginario. Cualquiera que estudie la historia remota de la matemática puede ser testigo del misticismo numérico estudiado desde Pitágoras hasta la doctrina Platónica de las ideas. Veinte siglos después, estas divertidas peculiaridades fueron extensamente investigadas por expertos para llevarlas al análisis combinatorio.

Los números imaginarios, definidos por Leonard Euler "Una magnitud se denomina imaginaria cuando no es mayor que cero ni menor que cero, ni igual a cero, esto es algo imposible, como por ejemplo $\sqrt{-1}$ o en general $a+b\sqrt{-1}$ ", fueron trabajados sin la mínima sospecha de que la física encontrara aplicación para un trabajo tan cargado de imaginación como para llamar a dichos números imaginarios.

Esto sin mencionar la imaginería impresa en el trabajo de muchos colegas que buscan elevar los niveles de comprensión en el aula a la creatividad con fantasía, o sin mencionar a aquellos que han llenado páginas sobre el trabajo recreativo en la matemática, y entonces hablan de números amigos, números primos, números perfectos, primos gemelos, números capicúas, números triangulares, y hasta de números bonitos. ¿Creen ustedes que existen números bonitos?



Queda como tarea indagar el estudio de Karl Von Frish, étologo austríaco, y de otros humanistas, quienes han descubierto sorprendentes resultados matemáticos y geométricos en los seres vivos, y que nos han puesto a dudar respecto a si existe un nivel de entendimiento, y por consiguiente un lenguaje animal o vegetal. Imagínense por un momento una telaraña, cuanta imaginación hecha forma y necesidad de sobrevivencia. Imagínense los hexaedros en los cuales almacenan su cera las abejas, animales capaces de comunicarse de manera sorprendente.

Al escribir sobre la imaginación en la ciencia, no puedo dejar de mencionar a Johan Kepler, astrónomo de gran sensibilidad por los números y la música. En su trabajo matemático, propuso el método para calcular el tamaño de áreas comprendidas dentro de límites curvos.

Sólo por amor a los números y guiado por la imaginación, hizo prodigiosos cálculos, aunque su trabajo se considere astronómico. Desde temprana edad, a pesar de sus limitaciones económicas, empezó a soñar con la armonía del cosmos, desde la aritmética, la geometría y la música. Se preguntaba todo el tiempo: ¿Por qué eran seis los planetas? ¿Existe alguna relación entre sus distancias orbitales, o entre sus órbitas y los tiempos empleados en describirlas?

Una de sus leyes nace de un trabajo manual en el cual inscribe en un círculo un gran número de triángulos equiláteros, lo cual suponía que podía ser válido en las órbitas de los planetas.

Al observar que sus resultados no eran satisfactorios, se le ocurrió la idea de probar con formas espaciales, y con gran entusiasmo representó la órbita terrestre con una esfera, en torno a ella circunscribió un dodecaedro, y trazó otra esfera en torno a aquel, que correspondía aproximadamente a la órbita de Marte; en torno a esta, nuevamente un tetraedro, cuyos vértices señalaban la esfera de la órbita de Júpiter; en torno a esta esfera se situaba un cubo, que señalaba aproximadamente la órbita de Saturno.

El descubrimiento imaginado era ficticio y accidental. En la actualidad sabemos que había errores en sus suposiciones, sin embargo, Kepler estudió con mucho agrado y no sintió arrepentimiento alguno por el tiempo perdido durante días y noches que dedicó a dar rienda suelta a su imaginación matemática.

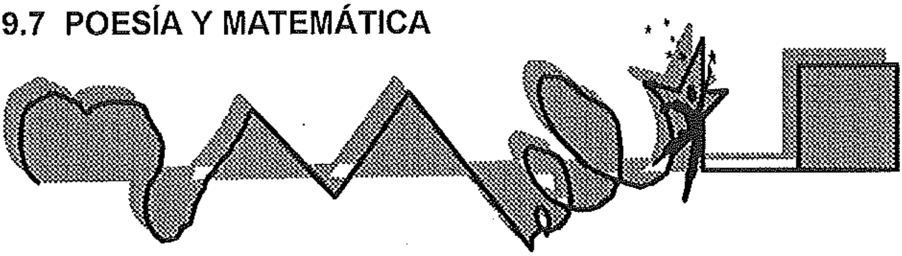
Ahora sabemos también que los planetas siguen caminos situados en el mismo plano. Todos se desplazan en el mismo sentido alrededor del sol. El tiempo que tarda cada uno en dar una vuelta constituye el año para él. El planeta más próximo al sol, Mercurio, tarda tres meses en dar la vuelta al sol, Marte dos años, y Plutón, el planeta más alejado del sol, 248 años. Ese movimiento se debe a la atracción gravitatoria que el sol ejerce sobre los planetas. Cada planeta gira también sobre sí mismo; esta rotación constituye el día para él: en Júpiter, el día dura 10 horas y en Mercurio 59 de nuestros días terrestres.

¿No creen ustedes que son maravillosos estos resultados derivados de la imaginación de un genio?.

Herbert Westren Turnbull, respecto a la imaginación de Kepler, afirma: "La luz de las estrellas que radiaba desde puntos a una infinidad de leguas de distancia, sugirió a Kepler que en geometría, las líneas paralelas tienen un punto común en el infinito. Por tanto Kepler no sólo descubrió algo interesante para el astrónomo, sino también hizo progresos esenciales en geometría".

Kepler, considerado el padre de la mecánica celeste, participa de la imaginería inventiva que motiva a los hombres a soñar, de tal suerte que escribe un libro llamado "El Sueño", obra de ficción científica en la que la luna aparece poblada de extrañas criaturas.

## 9.7 POESÍA Y MATEMÁTICA



La poesía fortalece tanto el pensamiento como cualquier otra disciplina que revele la esencia del hombre. Así lo han demostrado grandes pensadores, escritores y poetas de la talla de Nietzche, Heidegger, René Char, Homero, Parménides y Sócrates, entre muchos otros. La poesía y la filosofía van íntimamente unidas al razonamiento matemático, están penetradas por el ser pensante y en la antigüedad se trataban como si fueran una sola cosa, mientras que hoy en día se lucha por integrarlas en el ámbito educacional.

Leyendo ese bello poema de amor de Pablo Neruda, que dice: "Nosotros los de entonces ya no somos los mismos", me viene a la memoria Heráclito, quien también poéticamente y tal vez con más verdad matemática enuncia "No es posible entrar dos veces en el mismo río, pues la segunda vez nosotros ya no somos los mismos". La filosofía Heraclítea del "Todo fluye" es un bello poema de naturaleza científica. Observen: "Diversas aguas fluyen para los que se bañan en los mismos ríos. Y también las almas se evaporan de las aguas". (Diógenes, 1985, p. 133)

Cuando uno lee a Parménides y su poema "De La Naturaleza", como mínimo confirma la cuantía poética para referirse al ser y a su naturaleza, en el cual se habla por doquiera, sobre lo uno y lo múltiple, sobre el ser y el no ser, sobre la homogeneidad del ser, con unas sutiles pinceladas matemáticas que pueden ser desapercibidas por el racionalista exagerado. Se trata de un poema épico de carácter alegórico, escrito para retar al filósofo, seducir al matemático y deleitar al poeta, y ¿no es acaso la palabra poética el mejor recurso para nombrar al ser?. Vea un fragmento de ese bello poema:

"Nacer y perecer, ser y no ser. Cambiar de lugar o mudar de tono en relación con el color. Además, y dado que posee un último límite, el ser está terminado por todas partes, semejante a la masa de una esfera bien redondeada igual en todas direcciones a partir del centro. Ni mayor ni menor podría ser cualquiera de sus partes (...) No hay en efecto un No-Ser que le impida alcanzar la homogeneidad, ni ser alguno que pueda aumentarlo o disminuirlo, ya que por entero se manifiesta inviolable. Así pues, idéntico por todas partes a sí mismo, alcanza igualmente sus límites." (Parménides, 1983, p.142)

A continuación, otros comentarios que reafirman mi convencimiento sobre la comunión entre matemática y poesía.

"Hay hombres, decía mi maestro, que van de la poética a la filosofía; otros que van de la filosofía a la poética. Lo inevitable es ir de lo uno a lo otro, en esto como en todo"

Antonio Machado

"El encanto de la obra poética es que el lector va adivinando entre la bruma de las palabras una silueta del castillo de la verdad. Es una verdad que no permite someterla a fórmulas matemáticas, una verdad irracional, para decirlo crudamente".

Joaquín Vallejo Arbeláez

"[Las matemáticas]...son tan independientes del mundo exterior como la música y son producto de la libre imaginación creadora. Y no resulta difícil descubrir que los matemáticos se ven empujados por los mismos incentivos y experimentan las mismas satisfacciones que los demás artistas. La literatura matemática está llena de términos estéticos, y el matemático que dijo que estaba menos interesado en los resultados que en la belleza del método por el cual los había hallado, no estaba expresando un sentimiento poco común".

J. W. Sullivan

"No se puede evitar la cantidad. Se puede volar hacia el mundo de la poesía y de la música, y nos encontramos cara a cara con la cantidad y el número en sus ritmos y en sus octavas".

Alfred Whitehead

La matemática y su perfección no pueden reducirse a una simple cadena de metáforas o a una sucesión de versos bien logrados en el ejercicio de la poesía. Los problemas de la matemática no pueden quedarse en la mera expresión lingüística, hay que resolverlos y para resolverlos hay que estudiar matemáticas; hay que convertirlos a un modelo matemático y llevarlos a caminar por su trasparencia soluble, por su exclusiva dificultad, por sus finos razonamientos y por la perfección de su aplicabilidad.

La poesía nace de nuestra necesidad por comunicarnos en el ámbito espiritual, estético o afectivo. Es lógico pensar que estos niveles de percepción y expresión van ligados a la matemática. La matemática como disciplina de trabajo es un recogimiento del espíritu en torno a una serie de actividades. El hombre que domina la matemática es bello, modesto y virtuoso, lejos de cualquier bajeza que pueda engendrar su propia alma.

Ya la mera construcción de hipótesis o de problemas requiere de buen juicio y de conocimiento, así como de una acérrima actividad intelectual. La sola creación de hipótesis puede ser una gran obra de genio poético o creador, pero no puede decirse que sea científica, en la medida que lo creado no es verdadero ni falso, por lo tanto no es conocimiento. Esta situación sugiere que si la matemática es el estudio de situaciones puramente imaginarias, los poetas tienen que ser grandes matemáticos, especialmente los que hacen composiciones de argumentos intrincados y enigmáticos.

La matemática está llena de pares e impares, rectas y curvas, unidades, tríos, decenas, millones, puntos, superficies, sólidos, teoremas, axiomas, conjuntos y una cantidad de cosas difíciles de incrustar, a primera vista, en la vida cotidiana, pero con un poco de ingenio y disciplina se logran vivenciar, incluso recrearlas en la poesía.

Para un matemático lo más satisfactorio es descubrir o redescubrir un teorema o crear un problema matemático, así como para el poeta, es su poema lo que lo enorgullece.

Ahora, si la poesía es tanto lo que se dice como la manera de decirlo, mucho más fácil pensar que se puede presentar el discurso matemático de una manera poética. Sería invitar al asombro de los resultados matemáticos, en los cuales no hay lugar para el engaño y se vive la dimensión precisa de la belleza o, si se quiere, la dimensión bella de la precisión.

Karl Weierstrass, matemático berlinés que probó que un sistema hipercomplejo conmutativo de dimensión n>2 siempre tiene divisores diferentes de cero, nos legó esta frase: "un matemático que no tenga algo de poeta jamás será un matemático completo".

No se asombren ni crean que para ser matemáticos completos tienen que empezar a escribir poesía. Se trata más bien de vivenciar la dimensión estética de la matemática y no ser simples transmisores de procedimientos y resultados.

El mismo Descartes, padre de la geometría analítica, en un ensayo de juventud titulado Olympica, dice: "Existen frases en los escritos de los poetas más serias que en los de los filósofos. La razón es que los poetas escribieron guiados por su entusiasmo y el poder de su imaginación. Existen en nosotros chispas de conocimiento ocultas como en un pedernal. Los filósofos las sacan a la luz mediante la razón. Los poetas las hacen saltar mediante la imaginación y estas son las más brillantes".

Tanto la matemática como la poesía constituyen un móvil que nos transporta a la autoconciencia y nos eleva a un nivel digno y enigmático. No es pertinente acuciar una separación a sabiendas que la fusión ha sido admitida por los grandes matemáticos, quienes han sentido con pasión y certeza dicho acercamiento.

Lagrange, matemático francés, reconocido por la originalidad de su obra y por la belleza de sus escritos, posee tal grandeza y sencillez que Hamilton ha descrito su mecanique analytique como un poema científico. ¿Saben ustedes qué es un poema científico?

Douglas Jimenez, investigador Venezolano, refiere como en 1960, al recibir el Nóbel de literatura, el poeta francés Saint John Perse pronuncia un vibrante discurso en el que reclama la legitimidad de la poesía frente a la ciencia. "Basaba su reclamo, el laureado poeta en el hecho indiscutible de que tanto el científico como el escritor dedican su vida a la actividad creativa, sostenida en primerísimo lugar por ese hermoso don del pensamiento que hemos llamado intuición" (Ibáñez, 1998, p.7)

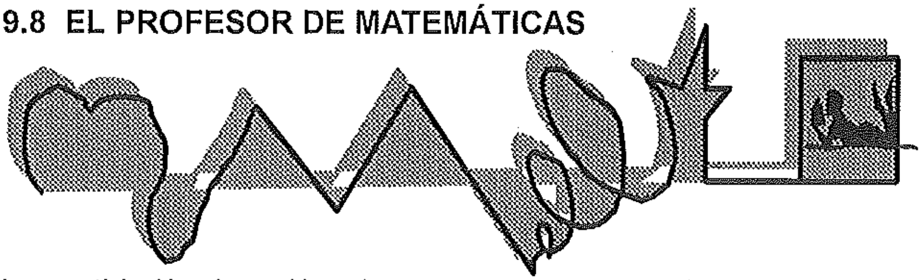
El poeta recurre a la pureza y a la exactitud en su oficio, sus versos tienen una longitud, una medida y un ritmo que son estudiados desde la métrica. En poesía se habla de pareados, tercetos, cuartetos, quintillas, según el número de versos de cada estrofa sea dos, tres, cuatro o cinco. Los versos a su vez se clasifican en pentasilábicos, heptasilábicos o endecasilábicos, según tengan cinco, siete u once sílabas.

Lo anterior lleva al poeta a pensar en la medida de sus poemas; una longitud que es, por otra parte, muy bien explicada en La Filosofía de la Composición de Edgar Allan Poe.

El profesor de matemática tiene que valerse de la poesía, la música y el arte, para motivar su trabajo en el aula; puede humanizar desde la matemática al advertir su belleza y la enorme sensibilidad de los matemáticos que han contribuido al desarrollo de tan hermosa ciencia.

Sería poco grato hablar del teorema de Pitágoras sin referir, así sea mínimamente, el vasto legado espiritual de la escuela Pitagórica. Así como resultaría injusto presentar la geometría plana sin destacar la importancia de Euclides en el desarrollo de ésta, o sin hablar de "Los Elementos", libros especiales donde aparece la matemática euclidiana. Como también sería un profesor indiferente quien presente la derivada sin mencionar las enormes coincidencias entre Leibnitz y Newton.

## 9.8 EL PROFESOR DE MATEMÁTICAS



La cantidad le sirve al hombre para encarar con acierto la realidad. Es frecuente escuchar a personas que dicen que todos hacen "esto" o "aquello", que la mayoría son "algo", que más o menos "tal cosa", siendo partícipes de meras parletas, frases sin sentido total, comparadas con la seguridad y la nitidez derivadas de la cantidad apropiada, el dato bien logrado o la estadística puntual. No se trata de lanzar aporías adivinatorias, sino de buscar la manera de expresar la verdad mediante el discurso.

Es innegable que entre decir: "en Colombia hoy son muchos los desempleados" y decir "El índice de desempleo en Colombia es del 20 %" hay mucha diferencia; el segundo enunciado no sólo encierra el primero, sino que produce pensamiento matemático.

La práctica matemática tiene que llevar a formar personas competentes en el desarrollo de actividades que requieran del sentido numérico, la imaginación espacial, el análisis variacional, entre otros. Personas que sean capaces de resolver problemas no sólo de la matemática sino de la vida práctica que los rodea. Profundicemos en esta práctica matemática.

Calcular el 16% de una cantidad, mentalmente, resulta de gran utilidad para las personas que frecuentemente se enfrentan al pago del IVA. Este proceso se puede enseñar en dos pasos.

**1.** Para multiplicar un número abreviadamente por 16, se le agrega un cero, se saca la mitad y se suman estos dos resultados con el número inicial.
Ejemplo: 5x16= 50 (se agrega un cero) + 25 (se saca la mitad) + 5(el mismo número) = 80
Ejemplo 2: 31x16=310+155+31=496.
Ejemplo 3: 52x16=520+260+52=932.

Nota: Este procedimiento se fundamenta en la escritura del número 16 como 10+5+1 y en la ley distributiva de la suma respecto al producto, observe:

12x16 = 12x(10+5+1) = 12x10+12x5+12x1 = 120+60+12 = 192

**2.** Para extraer mentalmente el 16% de un número se hace el mismo procedimiento del caso anterior, teniendo en cuenta que al trabajar con porcentajes se cancelan dos ceros o se separan las dos últimas cifras del número inicial.
Ejemplo:
el 16% de 24.000 es 240 x 16= 2400 + 1200+ 240= 3840.
Otro ejemplo: el 16% de 48.500 es
485x16=4850+2425+485=7.760.

Al trabajar áreas y volúmenes se deben resolver problemas prácticos no sólo en el papel sino en la pared; es decir, hallar de verdad el área de varias superficies y el volumen de algunos cuerpos.

En una ocasión, también a manera de ejemplo, fue un padre de familia a pedirme el favor de reforzar a su hija, de grado sexto, en el manejo de las cuatro operaciones y que no la promoviera al grado siguiente hasta que no fuera experta en dicha temática. Decía el angustiado padre que él era conductor de bus y que cada día tenía que hacer la liquidación a su jefe. La niña era quien debía ayudarle a hacerla y en varias oportunidades se equivocaba y ponía en riesgo su trabajo y su economía.

La niña debía encontrar la cantidad de dinero para el dueño del bus y la cantidad que le quedaba a su padre, con base en los siguientes datos:

- Para saber el número de pasajeros transportados, debía restar el número de la registradora con el número que había anotado en la mañana.
- La diferencia encontrada debía multiplicarla por $440, para saber cuanto le entregaba al patrón.
- Debía confrontar que la cantidad que quedaba era lo mismo que el producto entre dicha diferencia y $10, que representaban su comisión.

Se trataba, sin lugar a dudas, de habilidad numérica.

En términos generales, podemos afirmar que se debe enseñar a tomar conciencia sobre los hechos de la vida utilizando los conocimientos matemáticos.

La cantidad nos rodea; veamos cuantas cosas se nos cuantifican por fuera y por dentro, sin contar las cantidades que desconocemos, que son infinitas. La cantidad se nos presenta en el cosmos, en las cosas terrenales, incluso en la música, en el rostro de la gente, en la comedia de la vida y más todavía en la tragedia.

Galileo fue el primero en expresar que no se puede comprender la naturaleza si no se aceptaba la idea de que estaba escrita en lengua matemática. La física se estudia partiendo de la existencia de magnitudes escalares y vectoriales, entendiendo que los cuerpos son masas, que los movimientos son fuerzas y que el universo está regido por principios matemáticos. La veracidad de una proposición se mide por la forma como esta pueda ser demostrada por métodos matemáticos.

Para Pitágoras, el hombre podía definir su lugar en el vasto movimiento de la vida a través de su inteligencia del número, según él todo fenómeno puede explicarse mediante los números.

Sócrates, filósofo griego, en su sentencia: *"Se debe estudiar la geometría hasta que uno sepa recibir y dar tierra medida"* (Diógenes, 1985, p. 80) quiso decir que la geometría y desde luego la matemática debe encaminarse a la recta moral y a la justicia en los tratos para no quedarse en meras especulaciones, tal vez por eso exhortaba a los jóvenes a tapar su fealdad con la sabiduría

La matemática no sólo ayuda al desarrollo del pensamiento, si no que debe potenciar al individuo para su realización personal y social; esto es, debe formar principios, actitudes y valores individuales y grupales que le permitan expresar su sentir, mejorar su paso por el planeta e interpretar mejor los signos que llegan del universo.

Para lograr lo anterior, un profesor de matemáticas necesita implementar una formación por competencias, entendidas como las capacidades con que una persona cuenta para poner en juego el saber matemático. Los objetivos planteados deben orientarse al desarrollo de la competencia matemática; esto es, a que el estudiante sepa qué hacer con lo que sabe; que demuestre sus capacidades, no en una prueba escrita, si no en una situación práctica que requiera del conocimiento matemático.

Lógicamente, no podemos separar las competencias literarias de la formación matemática, ni de ningún otro oficio.

Contrariamente, toda profesión debe estar enriquecida por el desarrollo del lenguaje. Es el lenguaje el que permite la contextualización de la matemática en la ciencia, para fomentar la investigación, en la cotidianidad, para significar la realidad, y en la escuela, para educar de manera integral.

Para sugerir una competencia textual y comunicativa en la enseñanza de la matemática, me permito sugerir la incorporación de lecturas pertinentes al trabajo matemático. En mi experiencia como profesor de matemáticas, en la universidad y en la secundaria, han sido de gran utilidad libros como: "El diablo de los números" del Alemán Hans Magnus Ensensberger; "La conquista de la felicidad" de Bertrand Russell; "El escarabajo de oro" de Edgar Allan Poe; "Alicia a través del espejo" de Lewis Carroll; "El aleph" de Jorge Luis Borges; "El túnel" de Ernesto Sábato; "El teorema del loro" del francés Denis Guedj; "Malditas matemáticas: Alicia en el país de los números" del italiano Carlo Frabetti, "Fermat: el mago de los números" de Blas Torrecillas Jover, "Póngame un kilo de matemática" de Carlo Andrada Heranz, "Máthema: el arte del conocimiento" de Fausto Ongay, "El Electrón es Zurdo y Otros Ensayos Científicos, de Isaac Asimov, "Los Matematicuentos; presencia matemática en la literatura" de Alfredo R. Palacios y otros, "Historia e Historias de Matemáticas" de Mariano Perero, y, para someter a consideración: "Poemática; PO351A matemática" de mi autoría, entre muchos otros que podría listar.

En consecuencia, el profesor de matemática debe, no sólo, tener dominio del contenido para garantizar un buen aprendizaje en sus alumnos y establecer los mecanismos de control para vigilar el cumplimiento de los objetivos, sino también, saber comunicarse con sus alumnos. Esa comunicación oral y escrita debe ser vigilada constantemente para controlar el cumplimiento de sus objetivos.

Con cierta frecuencia se habla de profesores con mucho conocimiento matemático pero incapaces de transmitirlo a sus estudiantes. El profesor debe permitir el intercambio de ideas, la fluidez de la palabra, la argumentación espontánea, y para ello, él debe ser un ejemplo activo en el dominio del lenguaje. El ejemplo puede tanto como la palabra. Debe mantener orientado el proceso mediante la pregunta constante y efectiva. Más que formular respuestas, debe saber formular preguntas.

Teniendo un buen dominio del contenido y siendo un buen comunicador, puede pensarse en un buen profesor, pero hay más, hay una facultad muy importante que hará que ese profesor y esa educación matemática no se vayan al olvido: el buen trato.

Muchos profesores universitarios, incluso de secundaria, se dedican exclusivamente al plano cognitivo, pero descuidan el emocional, es como si hubieran perdido la capacidad de asombrarse, la capacidad de enseñar con alegría. Creen que para ser buenos profesores deben renunciar a su condición de afectividad hacia el estudiante.

Un estudiante podrá olvidar los teoremas de la geometría euclidiana, podrá olvidar la ley de la gravitación universal, podrá olvidar la formación de la célula, o tildar una palabra esdrújula, pero no podrá olvidar a quien lo trató con amor y dignidad, a quien lo corrigió con la única intención de hacerlo una persona de bien.

Otras facultades que debe tener un profesor en su práctica matemática, desde mi óptica, son: reconocer la importancia de su grupo como laboratorio didáctico, humano y matemático; tener un profundo convencimiento de lo que pueden ser capaces de hacer sus estudiantes; impulsar a sus discípulos al descubrimiento del saber: motivarlos a que descubran lo que él ya descubrió; convencer, y no vencer, con la razón y la verdad y no con la autoridad.

## 9.9 RECOMENDACIONES FINALES

Bertrand Russell, en un ensayo sobre las funciones del maestro, dice: "*El maestro, como artista, el filósofo y el hombre de letras, sólo puede ejecutar adecuadamente su trabajo cuando se siente un individuo dirigido por un impulso creador interno, no denominado ni ahejorrado por la autoridad exterior*" (Russell, 1950, p. 45)

El profesor de matemáticas debe abandonar esa pretensión dañina de que sólo el de español es quien enseña a leer y a escribir, el de educación artística es quien debe enseñar apreciación estética o el de físico-química es quien debe enseñar a experimentar. Debe ser capaz de integrar a la enseñanza de la matemática toda manifestación de lo bello y lo verdadero. Pero esto solamente podrá lograrlo si tiene una visión amplia y flexible de los contenidos que debe enfrentar en el aula de clases. Si se siente capacitado para interpretar el mundo matemático en un sentido estético y presentárselo al estudiante de la forma más agradable posible, despertar el asombro de ellos por el conocimiento de la misma manera como debió ser despertado en él.

La matemática debe enseñarse ligada a la vida y a todas las formas que la manifiesten, a través de la matemática debe enseñarse a respetar la palabra, la verdad científica y, sobre todo, la vida. Si la enseñanza de la matemática no lleva en su seno un profundo respeto por la vida, no debe darse.

Nunca estará de menos reflexionar y debatir, en cualquier clase, sobre temas relevantes que contextualicen el saber científico. Hacer de la clase un bello poema científico.

Amar la ciencia, enseñar a respetar y a valorar la vida; sólo así seremos verdaderos maestros.

## BIBLIOGRAFÍA


BAQUERO GACHARNÁ, Marina y PARRA ROZO, Omar. El diseño educativo. Universidad Santo Tomás de Aquino. Bogotá, 1990.

BEIGDEBER, Oliver. La Simbología. Oikos-tau Ediciones. Barcelona España, 1971.
BELL, E. T. Historia de las Matemáticas. McGraw-Hill Book. México, 1949.

CIARI, Bruno. Modos de enseñar. Avance S. A. Barcelona, España, 1977

COMENIO, Juan Amós. Didáctica magna. Porrúa, S.A. México, 1995.

DAVIES, Ivor K. Dirección del Aprendizaje. Diana S. A. México, 1979.

DESCARTES, René. Reglas para la dirección del espíritu. Alianza Editorial S. A. Madrid, 1984.

EINSTEIN, Albert. Mi visión del mundo. Tusquets editores Barcelona, 1980

ESCANDÓN H, Rafael. Curiosidades matemáticas para toda ocasión. Tipografía Icolven. Medellín.

FERRANDEZ, Adalberto et al. Tecnología didáctica, teoría y práctica de la programación escolar. Ediciones CEAC S.A. Barcelona, 1993.

FERRATER MORA, J. Diccionario de Filosofía. Ariel S. A. Barcelona, 1994.

GALLEGO-BADILLO, Rómulo. Discurso constructivista sobre las tecnologías Libros Y Libres, S. A. Bogotá, 1995.

Gran Enciclopedia Temática La Clave del Saber. Editorial Printer Colombiana Ltda. Bogotá Colombia.

HENAO WILLES, Myriam. Documento: El significado de la investigación científica en la formación del docente universitario. Colciencias. Junio de 2000.

IBÁÑEZ F., Miriam. Historia de la matemática, consideraciones didácticas. Colección pedagógica "Dulce María Escalona". La Habana, Cuba, 1998.

JAMES, William. Pragmatismo. Proyecto Editorial S.A. Madrid España 1984

JUNGK, Werner. Conferencias sobre metodología de la enseñanza de la Matemática 1. Editorial Pueblo y Educación. La Habana, 1979.

KOFLER, Leo. El Arte Abstracto y Literatura del Absurdo Barral Editores S. A. 1972.

LAERCIO Diógenes. Vidas de los más ilustres filósofos griegos, Volúmenes I y II. Editorial Iberia S. A. Barcelona España, 1985.

MARTI, José. Ideario Pedagógico. Ministerio de Educación, República de Cuba. La Habana, 1961.

NEWMAN, James R. Sigma; el mundo de las matemáticas, Tomo 6. Ediciones GRIJALBO, S. A. Barcelona, España

NICKERSON, Raymond et al. Enseñar a pensar, aspectos de la aptitud intelectual. Editorial Paidos Ibérica S.A. España, 1990.

NOT, Louis. Las Pedagogías del Conocimiento. Editorial Presencia Ltda. Santafé de Bogotá, 1994.

Nueva Enciclopedia Larousse, tomo quinto. Planeta S. A. Barcelona, España, 1981.

PARMÉNIDES-HERÁCLITO Historia del Pensamiento Aguilar Argentina S. A. Barcelona España, 1983.

PERELMANN, Y. El Divertido Juego de las Matemáticas Editorial Círculo de lectores Bogotá

Revista Cubana de Educación Superior, Vol. 12, No. 3. Editorial Universidad de la Habana, 1992.

RUSSELL, Bertrand. Ensayos Impopulares. s.e. 1950

PARRA CASTRILLÓN, Eucario. Elementos Para La Docencia Universitaria. Universidad Cooperativa de Colombia. Medellín, 2001.

TAHAN, Malba. El Hombre Que Calculaba. Traducción del profesor Mario Coppetti.

VÉLEZ, Antonio. Documento: "Las Matemáticas y el Mundo Maravilloso de los Seres Vivos". Revista Universidad de Antioquia.

VERLEE WILLIAMS, Linda. Aprender con Todo el Cerebro Ediciones Martínez Roca S.A. España 1986

VIEDNA, Juan A. Geometría Intuitiva Editorial Norma Cali, Colombia.

# PROPORCIONALIDAD Y SUS APLICACIONES

ERASMO ANTONIO PUERTA GÓMEZ
JESÚS GILBERTO RODRÍGUEZ PEDROZA
HÉCTOR EMILIO CORREA MUÑOZ

MEDELLÍN
2002

## 10. PROPORCIONALIDAD Y SUS APLICACIONES

Con esta propuesta metodológica pretendemos, mediante cinco talleres, que el estudiante aprenda en forma significativa el concepto de proporcionalidad y lo aplique en la resolución de problemas. Nuestro aporte radica en la utilización de rectángulos, para demostrar por medio de áreas las propiedades de la proporcionalidad. En el primer taller se plantea una conducta de entrada para verificar el nivel de conocimiento de los educandos y terminando con el taller de los diferentes tipos de aplicación de la proporcionalidad en situaciones de la vida diaria.

AUTORES: Los Especialistas en la
enseñanza de las matemáticas
de la Universidad de Antioquia
ERASMO ANTONIO PUERTA GÓMEZ
Educador del Colegio
Fe y Alegría Nueva Generación de Bello
JESÚS GILBERTO RODRÍGUEZ PEDROZA
Educador del
IDEM de Carolina del Príncipe
HÉCTOR EMILIO CORREA MUÑOZ
Educador del
Liceo Kennedy Municipio de Medellín

**A LA DIVINA PROPORCIÓN**

A tí, maravillosa disciplina
media, extrema razón de la hermosura
que claramente acata la clausura
viva en la malla de tu ley divina.

A ti, cárcel feliz de la retina,
áurea sección, celeste cuadratura,
misteriosa fontana de mesura
que el universo armónico origina.

A tí, mar de los sueños angulares,
flor de las cinco formas regulares,
dodecaedro azul, arco sonoro.

luces por alas un compás ardiente.
Tu canto es una esfera transparente.
A tí divina **Proporción de oro.**

Rafael Alberti

## 10.1. INTRODUCCIÓN

Considerando que la proporcionalidad es uno de los temas básicos en los currículos de la educación básica, presentamos a los maestros este trabajo de tipo didáctico consistente en una estrategia de intervención pedagógica para su enseñanza con un enfoque fundamentalmente geométrico.

Esta propuesta, consiste en una serie de talleres tendientes a desarrollar la red conceptual básica en la formación del esquema de la proporcionalidad. El primero de ellos, servirá de conducta de entrada con el fin de ubicar el estado de los conocimientos previos que debe tener el estudiante para abordar con éxito los nuevos conceptos.

Los otros cuatro talleres se desarrollarán a través de actividades, teniendo en cuenta los contenidos básicos y algunas de sus aplicaciones. Ellos serán: "De la fracción a la proporción", "Geometría de la proporción", "Interpretación de la proporción mediante áreas" y "Aplicaciones de la Proporción". Cada una de las actividades se basarán en las acciones que los estudiantes desarrollarán especialmente en equipos con orientación del profesor a través de instrucciones precisas y preguntas cerradas y abiertas, de la cuales se sacarán conclusiones para ser puestas en común en una plenaria.

El trabajo brinda la posibilidad de, a partir de los conocimientos previos de los estudiantes, construir modelos concretos para la solución de problemas, pasar luego a modelos matemáticos más generales y, lo más importante, integrar la aritmética y el álgebra con la geometría.

## 10.2. *EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN*

La proporcionalidad es uno de los temas fundamentales en el currículo de la educación básica secundaria, por lo tanto es necesario elaborar una estrategia de intervención pedagógica acorde con el desarrollo intelectual del estudiante.

## 10.3. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

La proporcionalidad desempeña un papel relevante en la formación intelectual de la persona. De ahí la necesidad de elaborar una estrategia de intervención pedagógica que permita, de un lado, tener en cuenta el desarrollo cognitivo del estudiante. Y por otra parte, permita integrar diferentes áreas del conocimiento, especialmente la aritmética y la geometría, pues como se ha formulado, esta última ha sido relegada a un segundo plano, provocando la carencia de significación en los contenidos aritméticos y algebráicos.

Se considera por algunos autores que la edad para formar el esquema de la proporcionalidad corresponde a la etapa de transición entre las operaciones concretas y las operaciones formales, la cual consideran estos autores que está entre 11 y 14 años, sin embargo, hay quienes afirman que las operaciones formales apenas empiezan a conformarse a los 15 ó 16 años.

## 10.4. OBJETIVOS

### 10.4.1 General

Diseñar una estrategia metodológica para la enseñanza de las proporciones y sus aplicaciones para el ciclo de básica secundaria.

### 10.4.2 Específicos

10.4.2.1 Integrar la aritmética y la geometría en la enseñanza de las matemáticas, a través de las proporciones.

10.4.2.2 Diseñar situaciones problema que permitan al alumno apropiarse del pensamiento proporcional de manera significativa.

10.4.2.3 Resaltar la importancia de la proporcionalidad en la aplicacióna situaciones de la vida real.

10.4.2.4 Proponer al profesor actividades con buena fundamentación aritmética y geométrica que induzcan al alumno a la matematización y ejercitación algorítmica.

## 10.5. ASPECTOS METODOLÓGICOS

La proporcionalidad presenta la posibilidad de integrar la aritmética con la geometría; por su conexión con problemas extraídos de lo concreto y por sus diversas aplicaciones a situaciones de otras áreas, permite utilizar el método de resolución de problemas para desarrollar su red conceptual y por ende facilita el trabajo en grupo.

Teniendo en cuenta estos criterios y las orientaciones trazados por Miguel de Guzmán en su documento "Enseñanza de las Ciencias y las Matemáticas"[1] y por Orlando Mesa Betancur en el documento "Contextos para el diseño de situaciones problema en la enseñanza de la matemática" abordaremos nuestro trabajo señalando algunas consideraciones que se deben tener en cuenta en el diseño de una situación problema y del trabajo en grupo.

### 10.5.1. Diseño de una situación problema:

Miguel de Guzmán plantea:
"La enseñanza por resolución de problemas pone énfasis en los procesos de pensamiento, en los procesos de aprendizaje y toma los contenidos matemáticos, cuyo valor no se debe dejar en

[1] GIL PEREZ, Daniel y GUZMÁN OZÁMIZ, Miguel. Enseñanza de las ciencias y las matemáticas: Tendencias e Innovaciones. España. Editorial Popular 1993.

absoluto de un lado, como campo de operaciones privilegiado para la tarea de hacerse con formas de pensamientos eficaces"[2] y sugiere el proceder para este método:

**"Propuesta la situación problema de la que surge el tema, manipulación autónoma por los estudiantes, familiarización con la situación y sus dificultades, elaboración de estrategias posibles, ensayos diversos por los estudiantes, herramientas elaboradas a lo largo de la historia, elección de estrategias, ataque y resolución de los problemas, recorrido crítico, afianzamiento formalizado, generalización, nuevos problemas, posibles transferencias de resultados, de métodos, de ideas..."[3]**

Orlando Mesa, sugiere el siguiente proceso: "Definir una red conceptual básica con referentes en el saber formal, pero de acuerdo con las condiciones individuales de los estudiantes y su contexto socio-cultural; seleccionar un motivo que facilite las actividades y el planteamiento de interrogantes, establecer varios estados de complejidad conceptual, precisar la estrategia de intervención didáctica, escoger los ejercicios y problemas prototipo que deben comprender los estudiantes, señalar posibilidades para la ampliación, acoger un proceso para la evaluación de los logros".[4]

Cada problema corresponde a una situación particular, de acuerdo a esa situación se acogen los elementos pertinentes del proceso.

### 10.5.2. El trabajo en grupo.

El desarrollo de una situación problema es más efectiva si se trabaja en grupos. Ya que esto proporciona, según Miguel de

[2] Ibid.P.111
[3] Ibid. P.112
[4] MESA, Orlando. Contextos para el diseño de situaciones problema en la enseñanza de la matemática. 1997. P.27

Guzmán posibilidades de enriquecimiento, por las distintas formas de afrontar el trabajo, se puede aplicar el método desde diferentes perspectivas, el grupo proporciona apoyo y estímulo, el trabajo con otros permite contrastar los progresos y da la posibilidad de prepararse mejor para ayudar a nuestros estudiantes a mejorar sus conocimientos.

Sugiere además, un diseño de trabajo en equipo consistente en grupos de 5 ó 6 estudiantes que realizan sesiones de hora y media repartida en dos momentos. El primero, para presentar el problema y discutirlo. Esta etapa durará media hora. En el segundo momento se elige un moderador, un secretario y un relator, cada uno con funciones específicas dentro del grupo. El o los problemas deben ser verdaderos retos pero sin exceder la capacidad del grupo de resolverlos en un tiempo sensato. En el grupo debe reinar un ambiente de cordialidad, libre de inhibiciones y sin competitividad para que cada integrante exponga sus puntos de vista sin temor, este es el papel del moderador.

Un esquema de trabajo puede tener cuatro fases:

El grupo se familiariza con el problema.

Se buscan las estrategias posibles.

Selecciona y lleva adelante las estrategias más adecuadas.

Reflexiona sobre el proceso que ha seguido.[5]

Aunque el autor no lo indica, es necesario realizar una plenaria para socializar las conclusiones generales y aclarar los conceptos, elaborar modelos en conjunto y a partir de aquí proponer nuevos problemas que tengan que ver con los temas tratados.

5 Ibid P. 114-116

### 10.5.3. Red conceptual

Bloque 1: De la Fracción a la Proporción.
Concepto de fracción.
Fracciones equivalentes.
Concepto de razón.
Términos de una razón.
Concepto de proporción.
Términos de una proporción.

Bloque 2: Geometría de la proporción.
Ampliación y reducción de un segmento.
Homotecia.
Semejanza.

Bloque 3: Interpretación de la Proporción mediante áreas.
Propiedad fundamental de las proporciones.
Otras propiedades de las proporciones.
Magnitudes directamente proporcionales.
Magnitudes inversamente proporcionales.

Bloque 4: Aplicaciones de la proporcionalidad.
Porcentajes.
Mezclas.
Regla de tres simple y compuesta.
Repartos proporcionales.

## 10.6. ESTRATEGIA METODOLÓGICA

Nuestro método consiste en proponer una serie de actividades que conduzcan a la apropiación de los conceptos de la proporcionalidad, sus propiedades y aplicaciones de una manera significativa.

El primer taller consiste en una conducta de entrada para determinar el nivel de desarrollo del estudiante, los conocimientos previos utilizables en la adquisición de nuevos conceptos, el grado de significación de la fracción y equivalencia de fracciones y la habilidad en la aplicación de éstas en problemas cotidianos, lo que nos permite elaborar los otros talleres de acuerdo a las necesidades de los educandos.

El segundo taller se denomina: "De la Fracción a la Proporción", contiene esencialmente actividades que parten de los conocimientos previos de los alumnos sobre el significado de fracción y equivalencia de fracciones. La fracción como comparación de cantidades nos conduce al concepto de razón. Partiendo de la equivalencia de fracciones se llega al concepto de proporción, presentando situaciones problema donde se vea clara la igualdad entre dos razones.

El tercer taller se llama "Geometría de la Proporción", busca una integración entre aritmética y geometría partiendo de la duplicación, triplicación, reducción a la mitad y a la tercera parte de un segmento utilizando el geoplano con actividades previas para familiarizarse con su uso y habiendo diagnosticado el conocimiento del estudiante sobre las nociones de segmento y paralelismo, se pasa a la aplicación de homotecias en el geoplano de figuras planas para establecer el factor de conversión, el cual funciona como operador (ampliador o reductor) y para determinar las relaciones pertinentes entre lados y ángulos homólogos de las figuras originales y las homotéticas lo cual nos conduce a la noción de semejanza.

Definido el concepto de proporción, tanto a partir de las fracciones equivalentes y situaciones problema corrientes, como a partir de las homotecias es necesario establecer algunas de sus propiedades que posibilitan la solución de variados problemas.

Para tal efecto el cuarto taller denominado "Interpretación de la proporción médiante áreas" presenta una primera actividad con ejemplos numéricos donde se observe el cumplimiento de las propiedades. Pero como estos ejemplos no garantizan la generalización se introduce un proceso geométrico con rectángulos de áreas equivalentes, y partiendo de la propiedad fundamental construimos dos rectángulos de áreas equivalentes, uno con las dimensiones de los medios y el otro con los extremos de una proporción dada. Esta es una actividad dirigida en la cual los estudiantes reflexionan sobre sus acciones hasta llegar a una deducción algebráica y con ella al enunciado de cada propiedad. De esta manera el alumno va ingresando a las formas de razonamiento formal, superando lo meramente intuitivo, partiendo de la experiencia.

También utilizamos el mismo proceso, de construcción de rectángulos, para inducir la proporcionalidad directa e inversa. La primera, variando una de las dimensiones y dejando la otra constante para observar qué pasa con el área, ubicando los rectángulos en un plano cartesiano para observar la variación (lineal), al mismo tiempo que se elabora una tabla de valores para determinar el cociente entre las cantidades variables lo que hace encontrar una constante (Constante de proporcionalidad). La segunda, en la misma forma pero con rectángulos equivalentes para observar qué sucede con una dimensión cuando varía la otra, el comportamiento en el plano y la forma de hallar la constante de proporcionalidad. Se diferenciarán los términos correlación y magnitudes proporcionales. La gráfica en el plano cartesiano nos permite visualizar el carácter de relación funcional de la proporcionalidad.

Nuestra propuesta metodológica propicia el trabajo en equipo. Inicialmente el alumno trabaja sólo con el material de apoyo, tratando de establecer relaciones y explicar sus observaciones. Luego el trabajo en grupo permite un enriquecimiento con las observaciones de los demás y ejercita la capacidad de síntesis en el alumno. El material del que hablamos, específicamente, es el de rectángulos y triángulos construidos en cartulina, de tal manera que el joven pueda efectuarle algunas transformaciones y analizarlas, ya que el mero dibujo no le permite hacerlo concretamente.

De los tipos de material Emma Castelnuovo dice:

*"...el material individual y el material colectivo.* ***El primero****, como se especifica, se da a cada alumno; el alumno trabaja por sí mismo, hace y deshace, compone y descompone para volver a componer de nuevo. Y explica una y otra vez por escrito sus trabajos. Tal material tiene como fin general, ejercitar las facultades de síntesis del alumno.*

***El segundo tipo,*** *por el contrario, es un material "para la clase"; lo muestra el profesor, pero sin dar ninguna explicación. El comentario, la interpretación será dada por los alumnos posiblemente por escrito - volvemos entonces a un trabajo individual - para que el uno no se vea influenciado de las palabras del otro. Se trata en general, de un dispositivo, de un modelo* móvil - inclusive una película - que se analiza en sus transformaciones"[6].

Al finalizar cada taller, hay ejercicios de aplicación para motivar en los alumnos la necesidad de profundizar en estos temas.

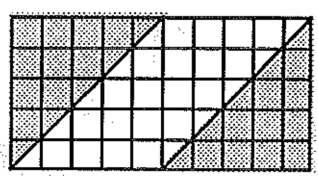
## 10.7. ESTRATEGIA DE INTERVENCIÓN PEDAGÓGICA

### 10.7.1 Taller de conducta de entrada

***Escribir F ó V según sea falso o verdadero. Tenga en cuenta que todas las fracciones aquí nombrabas son positivas.***

[6] Castelnuevo, Emma. Didáctica de la Matemática Moderna. Mexico Ed. F Trillas. 1970.p.79

1. ( ) Al simplificar una fracción se obtiene otra fracción equivalente
2. ( ) Si se suma al numerador y al denominador de una fracción un mismo número, se obtiene otra fracción equivalente.
3. ( ) Al amplificar dos fracciones no equivalentes, es posible obtener una misma fracción.
4. ( ) Siempre es posible simplificar una fracción.
5. ( ) Siempre es posible amplificar una fracción.
6. ( ) $\frac{2}{3}$ es equivalente a $\frac{4}{9}$.
7. ( ) En dos fracciones con igual denominador, es mayor la fracción que tiene mayor numerador.
8. ( ) En dos fracciones con igual numerador es menor la fracción que tiene menor denominador.
9. ( ) Si dos fracciones son iguales entonces sus numeradores y sus denominadores respectivos son iguales.
10. ( ) Ningún número fraccionario, es número entero.
11. ( ) Si dos obreros pintan una casa en 8 días, entonces 4 obreros la pintarían en 16 días.
12. ( ) A mayor velocidad se recorre una mayor distancia en un mismo tiempo.
13. ( ) Si Juan tiene una cuenta de ahorros, recibe más intereses, por sus ahorros al 2% mensual que al 20% anual.
14. ( ) Una fracción equivalente a 3,5 es $\frac{14}{4}$



15. ( ) El área sombreada equivale a la mitad de la del rectángulo.

***Complete las siguientes expresiones***

I. Con los números 12, 38, 19 y 24 se forman las fracciones equivalentes ________ Y ______

2. La fracción equivalente a $\frac{2}{5}$ con denominador 20 es: ______

3. El valor de x para que $\frac{2}{3}$ sea equivalente a $\frac{8}{X}$ es: ______

4. En las siguientes fracciones $\frac{3}{6}$, $\frac{6}{12}$, $\frac{18}{36}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{8}{24}$, no es equivalente a las demás, la fracción: ______

5. El simplificador de la fracción $\frac{15}{24}$ para que sea equivalente a $\frac{5}{8}$ es: ______

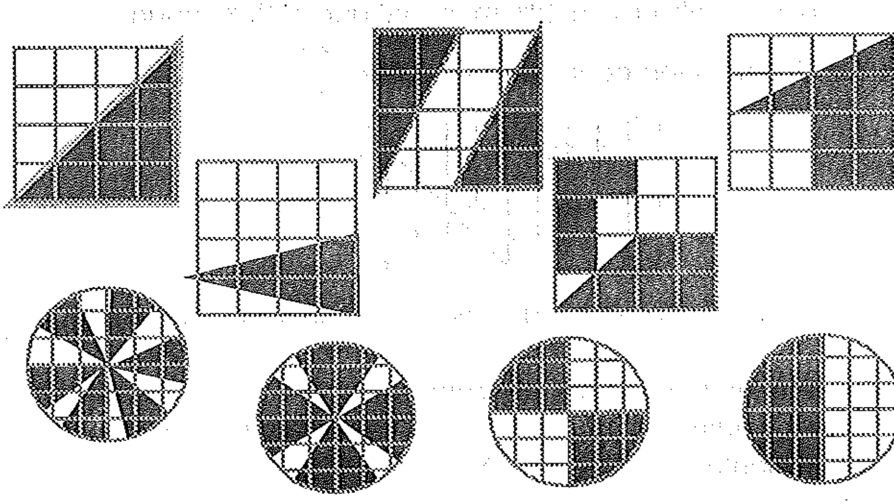
6. Si 5 x 6 = 30 x 1 entonces dos fracciones equivalentes son: ______ y ______

7. Si un segmento mide 3 cm., y otro segmento es 5 veces mayor que él, entonces la longitud del otro segmento es: ______

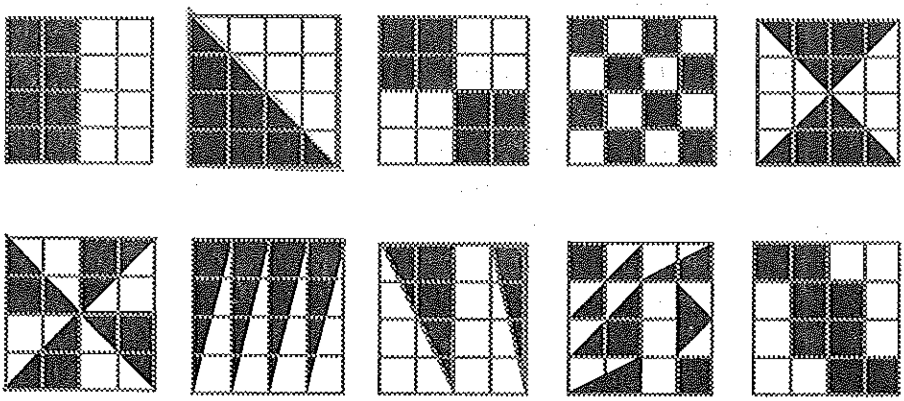
8. Escribe el número que corresponda en cada cuadro de tal manera que resulten fracciones equivalentes:

a. $\frac{12}{\square} = \frac{\square}{3}$ b. $\frac{12}{\square} = \frac{6}{\square}$

9. ¿Qué fracción representa la parte sombreada de la figura?



10. En las siguientes figuras, hay una que se diferencia de las demás en un aspecto, ¿cuál de ellas es?



***Realice los siguientes ejercicios.***

1. Encuentre por simplificación 2 fracciones equivalentes a $\frac{36}{42}$
2. Un ciclista recorre 150 Km. en 5 horas ¿Qué distancia recorrerá en 7 horas?
3. Escriba en correspondencia las fracciones que son equivalentes $\frac{3}{5}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{9}{15}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{8}{12}$, $\frac{10}{15}$, $\frac{8}{10}$ y $\frac{15}{20}$.
4. Juan compra una plantación de árboles frutales con la garantía de que los $\frac{2}{3}$ son naranjos, encontró que los árboles eran 12. ¿Cuántos de ellos debían ser naranjos para cumplirse la garantía? ¿Qué fracción de los árboles no son naranjos?
5. Si tres niños se comen tres conos en tres minutos, entonces ¿cuántos minutos se demorarán 20 niños en comerse 20 conos.?
6. Cada golpe sobre un clavo lo hunde el doble del anterior. El primer martillazo lo hunde un centímetro. Si el clavo mide 15 cms. ¿cuántos martillazos se requieren para clavarlo totalmente?
7. Si un ladrillo pesa dos libras más medio ladrillo, entonces, ¿cuántos pesan 6 ladrillos?.
8. Pedro tiene 29 años y su hijo 9, ¿qué edad tendrá Pedro cuando su hijo tenga el triple de la edad actual?

9. La cabeza de un cocodrilo es la mitad del tronco y el tronco los $\frac{2}{7}$ de la cola. Si el tronco mide un metro, entonces ¿cuánto mide el cocodrilo?

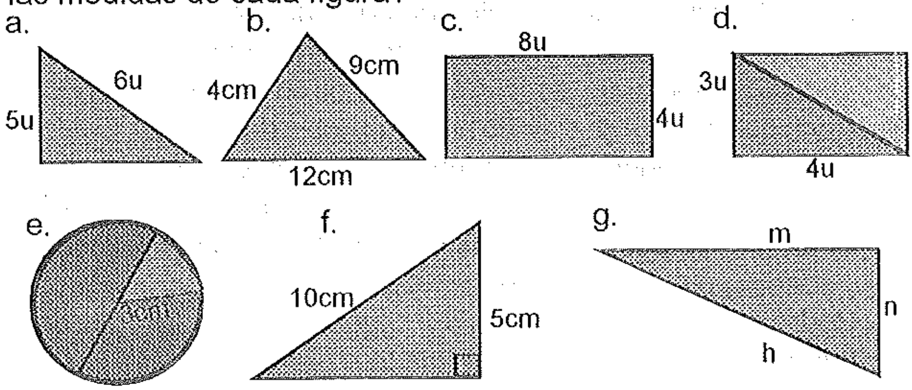
## 10.7.2 Taller 1 de la fracción a la proporción

*"Si la matemática es una ciencia que participa mucho más de lo que hasta ahora se pensaba del carácter de empírica, sobre todo en su invención, que es mucho más interesante que su construcción formal, es necesario que su inmersión en ella se realice teniendo en cuenta mucho más intensamente la experiencia y la manipulación de los objetos de los que surge"*

*Miguel de Guzmán*

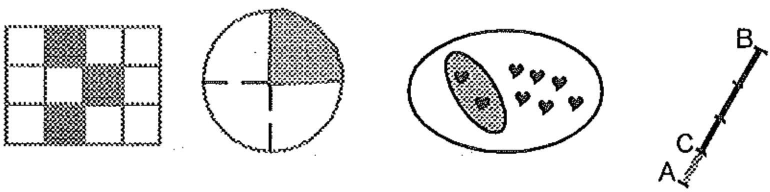
Con este taller, pretendemos partir del significado de fracción que poseen los estudiantes para inducirlos al concepto de razón, mediante sus experiencias. Deberán establecer que dos cantidades se pueden comparar (relacionar) aunque representen diferentes magnitudes formando un cociente que se denomina razón. Mediante una situación problema se notará que al comparar cantidades bajo unas condiciones dadas son susceptibles de obtenerse razones iguales, lo cual denominaremos proporción.

***ACTIVIDAD 1.*** ¿Cuáles cocientes se pueden establecer entre las medidas de cada figura?



*NOTA:* Se sugiere que se divida el grupo en equipos a criterio del profesor y a cada uno se le asigne una o varias figuras.

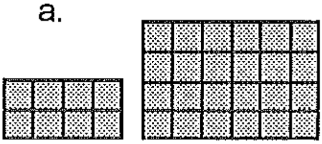
***ACTIVIDAD 2.*** En cada una de las siguientes figuras, exprese la relación existente entre la parte sombreada y el total de la figura:



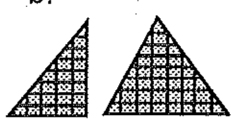

¿Qué se puede decir de las anteriores relaciones?
¿Qué relaciones existen entre la parte coloreada y la que está sin colorear de cada una de las figuras?
¿Qué se observa?

***ACTIVIDAD 3.*** Observe las siguientes figuras y establezca la relación de las áreas entre cada pareja de figuras que se dan a continuación:

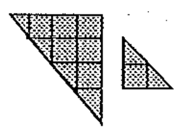
a.



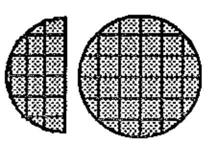
b.



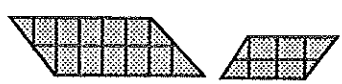
c.



d.



e.



1. Encuentre las áreas de cada par de figuras
2. Establezca la razón entre la figura de la izquierda y de la derecha de cada par.
3. Escriba la razón entre las áreas (izquierda con derecha).
4. ¿Qué se puede concluir?

**NOTA:** El profesor orientará la actividad con el fin de establecer igualdad entre dos razones y con ello definir proporción.

En la actividad 2, se obtuvieron las siguientes razones: $\frac{3}{12}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{8}$, $\frac{1}{4}$. Estas razones son constantes. ¿Por qué?.

Podemos establecer las siguientes proporciones: $\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$ ¿Qué otras proporciones podemos hallar?

Si el cociente de $\frac{a}{b}$ es igual al cociente de $\frac{c}{d}$ resultará la siguiente igualdad o proporción: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

*Definición: la igualdad de dos razones se llama proporción.*

Es de anotar que la expresión $\frac{\sqrt{2}}{3}$ es también una razón en la cual $\sqrt{2}$ es el antecedente y 3 el consecuente y, sin embargo, ella no es una fracción. ¿Por qué?.

Toda fracción es una razón pero no toda razón es una fracción. ¿Por qué?

### 10.7.3. Taller 2 geometría de la proporción

"Como reacción a un abandono injustificado de la geometría intuitiva en nuestros programas, del que fue culpable la corriente hacia la "matemática moderna"; hoy se considera una necesidad ineludible, desde un punto de vista didáctico, científico, histórico, volver a recuperar el contenido espacial e intuitivo en toda la matemática, no ya sólo en lo que se refiere a la geometría"

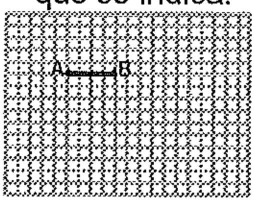
Miguel de Guzmán[7]

[7] GIL PÉREZ, Daniel y GUZMÁN OZÁMIZ, Miguel. Enseñanza de las Ciencias y las Matemáticas: Tendencias e Innovaciones. España: Editorial Popular, 1993. P.126

De acuerdo con este planteamiento, es necesario integrar la geometría con la aritmética y el álgebra. La proporcionalidad brinda una oportunidad excelente para cumplir este propósito y como el mismo autor lo manifiesta nos permitirá avanzar desde lo intuitivo hasta la comprensión integral de los conceptos y su simbolización[8]. Por eso presentamos un modelo de la proporción a través de homotecias.

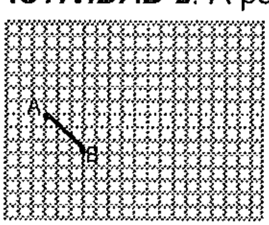
***ACTIVIDAD 1.*** Dado el segmento: $\overline{AB}$

1. Construir en el geoplano, otro que cumpla la característica que se indica:




   a. Que sea el doble
   b. Que sea el triple
   c. Que sea la mitad
   d. Que sea la cuarta parte
2. ¿Qué razones existen entre el segmento original y cada uno de los segmentos construidos?
3. ¿Qué razones hay entre cada uno de los segmentos construidos y el segmento original?
4. ¿Qué relación hay entre los segmentos del literal a y b?
5. ¿Entre el a y el c?, ¿Entre el a y el d?, ¿Entre el c y el d?.
6. ¿Cómo se expresa que dos magnitudes están en relación de 2 a 3?

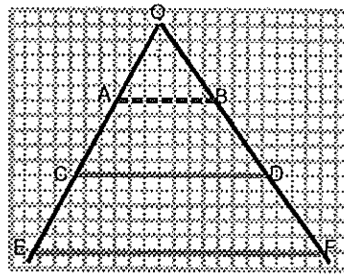
***ACTIVIDAD 2***. A partir del segmento $\overline{AB}$ realice lo siguiente:




1. Duplicar el segmento
2. Triplicar el segmento
3. Reducir a la mitad
4. ¿Cuál es la razón entre las medidas de cada segmento ampliado o reducido y el segmento original?
5. Repita los numerales 1, 2 y 3 con un segmento cualquiera utilizando regla y compás.

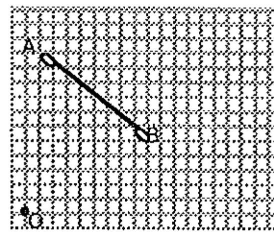
[8] Ibid. P. 101

*ACTIVIDAD 3.* Dado un segmento y un punto exterior, duplicar y triplicar las distancias entre el punto y los extremos del segmento.

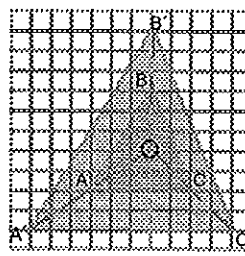



**Solución:** en el geoplano:

1. Desde el punto O, trace las Líneas que pasen por los extremos del segmento $\overline{AB}$
2. Duplique y triplique los segmentos $\overline{AO}$ y $\overline{BO}$ y marque los puntos C, D, E y F.
3. Mida las distancias $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ y $\overline{EF}$ ¿Qué observa?
4. Repita la actividad con el siguiente segmento:




*ACTIVIDAD 4.* Construir un triángulo ABC en el geoplano. Ubicar un punto 0 interior a él. Duplicar los segmentos, y trazar el triángulo A'B'C'




1. Halle:

$$\frac{\overline{AO}}{\overline{A'O}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OB'}} = \frac{\overline{OC}}{\overline{OC'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}$$

2. ¿Cómo son sus razones?
3. ¿Cómo son sus ángulos? ¿A con A'; B con B' y C con C'?
4. Repita la misma actividad con un punto exterior al triángulo

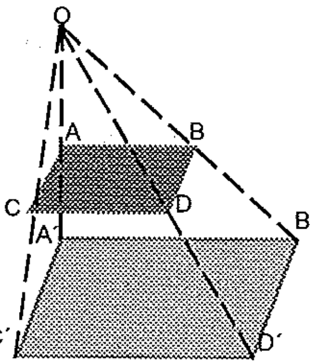
*Se dice que el triángulo A'B'C', es homotecia del triángulo ABC, cuyo centro es O y el factor de conversión o razón de homotecia es 2. En ellos se cumple que son paralelos y se llaman lados homólogos.*

$$\overline{AB} \parallel \overline{A'B'}$$
$$\overline{AC} \parallel \overline{A'C'}$$
$$\overline{BC} \parallel \overline{B'C'}$$

***Conclusiones:***

1. Las razones de los lados son iguales.
2. La figura conserva la misma forma.
3. Los lados se duplican.
4. El área se multiplica por el cuadrado de la razón
5. Los ángulos se conservan iguales.
6. Los lados homólogos son paralelos.
7. Las figuras son paralelas.

***ACTIVIDAD 5.*** Realizar las mismas acciones de la actividad anterior con un cuadrilátero




Construya algunas proporciones entre los cuadriláteros ABCD y A'B'C'D'

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{A'D'}} = \frac{1}{2}$$

En la actividad realizada:

La proporción es: $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{C'D'}}$ Se lee $\overline{AB}$ es a $\overline{A'B'}$ como $\overline{CD}$ es a $\overline{C'D'}$

Realice una homotecia a un pentágono, o hexágono (polígono)

**SEMEJANZA:** Dos figuras son semejantes si tienen la misma forma.

En la actividad anterior ABCD es semejante a A'B'C'D' y se representa: $\underset{ABCD}{\square} \sim \underset{A'B'C'D'}{\square}$

En toda semejanza, los lados homólogos son proporcionales y los ángulos correspondientes son congruentes.

## TÉRMINOS DE UNA PROPORCIÓN

En la actividad anterior escribimos la proporción: $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \dfrac{\overline{CD}}{\overline{C'D'}}$

La cual se puede escribir: $\overline{AB} : \overline{A'B'} \equiv \overline{CD} : \overline{C'D'}$

Así $\dfrac{3}{12} = \dfrac{1}{4}$ se puede escribir $3:12 \equiv 1:4$

AB y C'D' son extremos y A'B' y CD son medios.

Al 3 y al 4 los llamamos extremos, al 12 y al 1 los llamamos medios.

**Extremos**: Antecedente de la primera razón y consecuente de la segunda.

**Medios**: Consecuente de la primera y antecedente de la segunda.

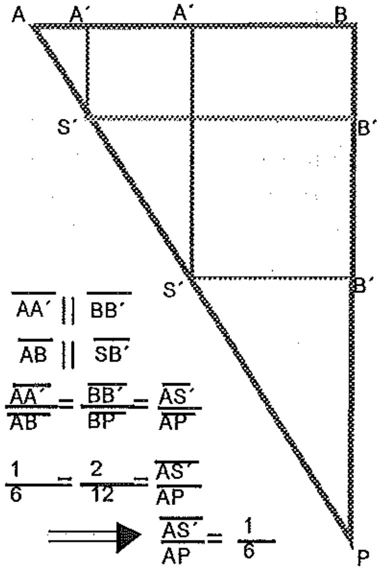
(Adaptación de Programa de matemáticas de séptimo. MEN).

$\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ ó $a : b \equiv c : d$; a y d son extremos, y b y c son medios.

***Cada uno de los términos de una proporción se llama cuarta proporcional.***

***ACTIVIDAD 6***. Tomando como referencia el teorema de Thales, utilizamos el pantógrafo como una de sus aplicaciones.

Si trasladamos A' hasta la mitad de $\overline{AB}$ y se traza $\overline{A'S'}$, paralela a $\overline{BP}$ se obtiene:



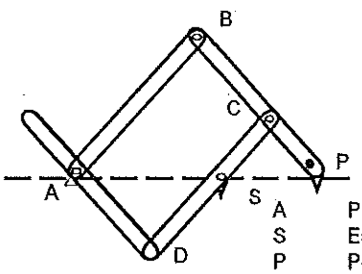

$$\frac{\overline{AA'}}{\overline{AB}} = \frac{1}{2} \quad y \quad \frac{\overline{BB'}}{\overline{BP}} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

o sea que: $\frac{\overline{AA'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{BB'}}{\overline{BP}} = \frac{1}{2}$

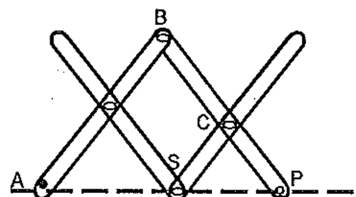
Además: $\frac{\overline{AA'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{BB'}}{\overline{BP}} = \frac{\overline{AS'}}{\overline{AP}}$

Así, sucesivamente, podemos obtener otras relaciones, comiendo corriendo A' sobre el segmento $\overline{AB}$ y trazando paralelas a $\overline{BP}$, con lo cual siempre obtendremos la relación: $\frac{\overline{AA'}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{BB'}}{\overline{BP}} = \frac{1}{2}$

## *UTILIZACIÓN DEL PANTÓGRAFO PARA HACER HOMOTECIAS.*




A Punto Fijo
S Estilete
P Punta Lectora
ABCD Paralelogramo




Este pantógrafo está graduado para duplicar, observe que $\overline{AS}$=SP por lo tanto $\overline{AP}$=2AS

Con el pantógrafo, es posible obtener figuras semejantes a la original, cuyo contorno se sigue con la punta lectora P, en cualquier posición, dibujadas por el estilete S (reducir), pero si cambiamos el estilete S por la punta P, obtendríamos una copia duplicada.

### 10.7.4. Taller 3 interpelación de la proporción mediante áreas

"EL verdadero sentido del principio básico constructivista que afirma el reconocimiento del otro consiste en que, reconocer al otro es aceptarlo en su estado actual de conocimiento. Es partir de él para acompañarlo hacia otros niveles de comprensión. Es ayudarle a superar las contradicciones y la ignorancia"

*Orlando Mesa Betancur*[9]

Sin pretender ser netamente constructivistas, consideramos este principio pertinente para esta parte de nuestro trabajo, pues al partir de situaciones corrientes y de los conocimientos del alumno, queremos que él observe el cumplimiento de ciertas propiedades en las proporciones, las cuales pueden ser verificadas utilizando áreas equivalentes.

Considerando que el estudiante tiene claros los conceptos de área y de perímetro, podrán establecer relaciones entre lados y perímetro y entre lados y área para establecer la diferencia entre correlación directa y proporcionalidad directa, observando que existe una constante llamada "constante de proporcionalidad" que actúa como operador multiplicativo.

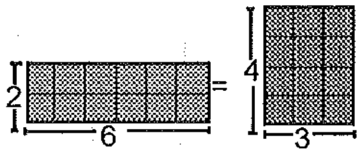
Además de deducir que se trata de una relación funcional lineal que graficada produce una línea recta. El mismo proceso se sigue con la correlación y proporcionalidad inversa.

**ACTIVIDAD 1. PROPIEDAD FUNDAMENTAL**

Dada la proporción $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$

[9] MESA BETANCUR, Orlando. Criterios y Estrategias para la enseñanza de las Matemáticas, Vol 1 pág. 8.

¿Cuáles son sus extremos? ¿Cuáles son sus medios?
Construya un rectángulo con sus extremos y halle su área.
Construya un rectángulo con sus medios y halle su área.

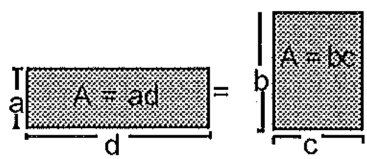



¿Qué concluye de éstas áreas?

Haga lo mismo con las siguientes proporciones: $\frac{3}{2} = \frac{12}{8}$ En:

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ¿qué podemos concluir?

Solución General:




Propiedades fundamentales $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \longrightarrow ad = bc$ .
Producto de extremos iguales a productos de medios.

1. Determinar cuáles de los siguientes pares de razones son proporciones.

a $\frac{3}{9}$ y $\frac{5}{15}$ b $\frac{11}{22}$ y $\frac{2}{14}$ c $\frac{0.32}{0.054}$ y $\frac{0.064}{0.5}$

d $\frac{6}{5/8}$ y $\frac{2/5}{1/8}$ e $\frac{1}{3}$ y $\frac{12}{4}$ f $\frac{24}{3}$ y $\frac{8}{1}$

2. Para cada una de las siguientes proporciones, complete las implicaciones, expresando el término que se indica en función de los demás.

a $\frac{3}{5} = \frac{6}{10}, \Longrightarrow 3 \times 10 =$

b $\frac{75}{90} = \frac{50}{60}, \Longrightarrow 75 =$

c $\frac{15}{9} = \frac{90}{54}, \Longrightarrow 90 =$

d $\frac{15}{9} = \frac{X}{24}, \Longrightarrow X =$

e $\frac{m}{27} = \frac{n}{180}, \Longrightarrow m =$

f $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \Longrightarrow \frac{ad}{c} =$

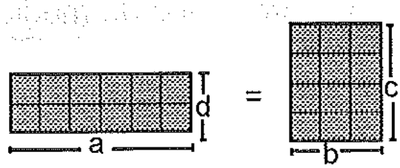
3. Escribir todas las proporciones que encuentre con los números 6, 12, 8 y 9.

### *ACTIVIDAD 2.*

1. Dada la proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, por la propiedad fundamental

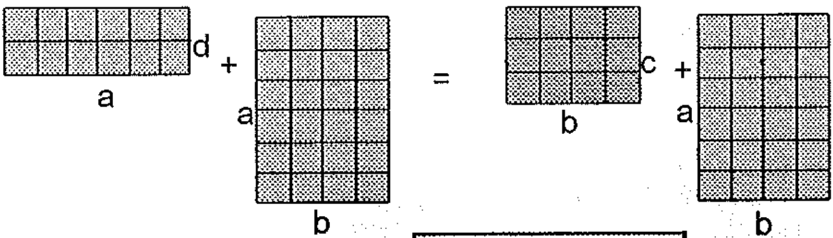
   ad=bc

   Construya dos rectángulos, uno de dimensiones a y d, y el otro de dimensiones b y c.



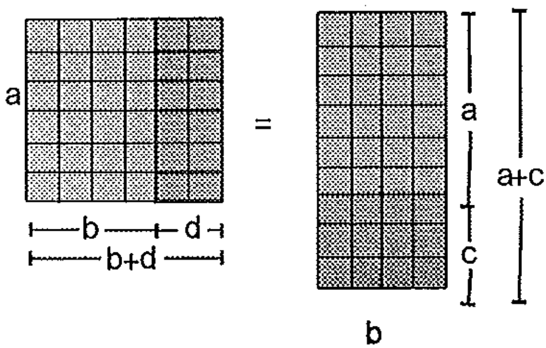

$\boxed{ad = bc}$

Agreguemos a ambos lados rectángulos de lados a y b.




$$\boxed{ad + ab = bc + ab}$$

Haciendo acoplamientos, quedan los siguientes rectángulos equivalentes.




$$\boxed{a(b+d) = b(a+c)}$$

Nuevamente, aplicando la propiedad fundamental, se tiene que:

$$\frac{a}{b} = \frac{a+c}{b+d}$$

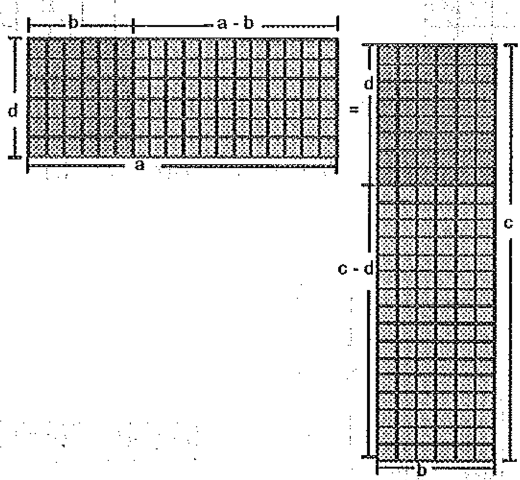
Lo que se traduce: Dada la proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, se obtiene la proporción:

$$\frac{a}{b} = \frac{a+c}{b+d} \quad \text{ó} \quad \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$$

La cual se puede leer así:

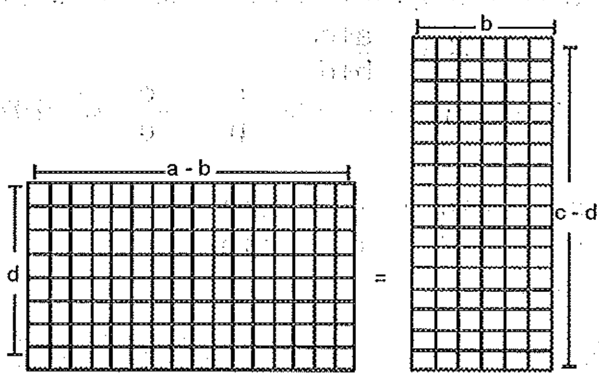
**En toda proporción, la suma de los antecedentes es a la suma de los consecuentes como un antecedente cualquiera es a su consecuente.**

**ACTIVIDAD 3.** *a partir de la proporción* $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$*, por la propiedad fundamental ad = bc*




$\boxed{ad = bc}$

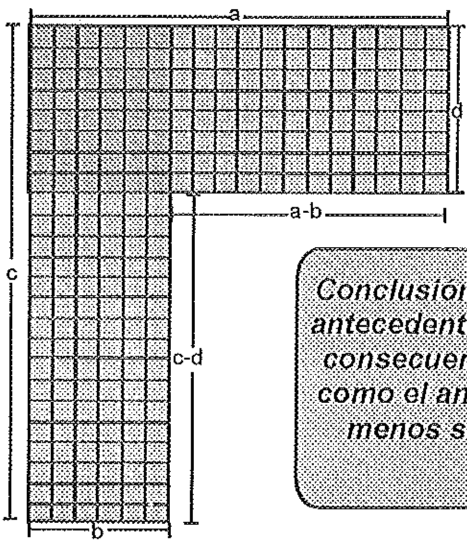
Recorta dos rectángulos de áreas equivalentes ad y bc respectivamente; si de ambos lados quitamos el rectángulo de longitud bd, nos quedan dos rectángulos de áreas equivalentes (Ley Uniforme)




$\boxed{d(a-b) = b(c-d)}$

Y aplicando la propiedad fundamental, queda la siguiente proporción:

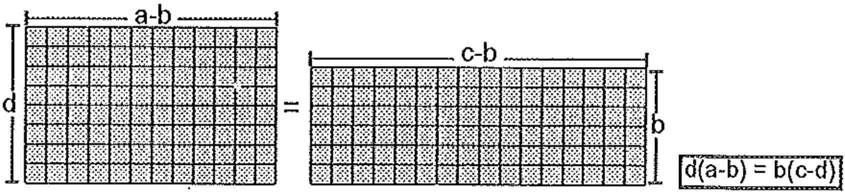
$$\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$$

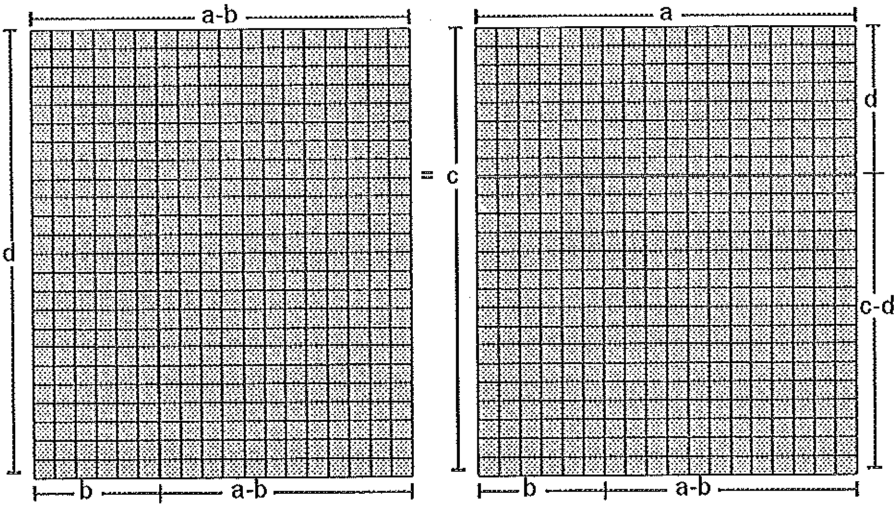



Otra forma de obtener e resultado es como lo muestra la figura.

***Conclusión:** En toda proporción, el antecedente de la primera menos su consecuente, es a su consecuente como el antecedente de la segunda menos su consecuente es a su consecuente.*

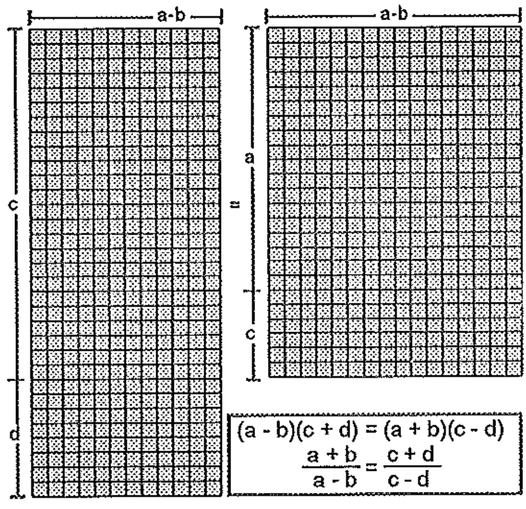
***ACTIVIDAD 4.*** A partir de d(a-b) = b(c-d) concluida en el ejercicio anterior agreguemos a ambos lados un rectángulo de dimensiones a y c.






$$\boxed{d(a - b) + ac = b(c - d) + ac}$$

Como ad = bc. Del lado Izquierdo quitemos el rectángulo bc y del lado derecho ad, conservando la equivalencia de áreas. Hacemos un acoplamiento de los rectángulos a ambos lados de la igualdad Resulta:



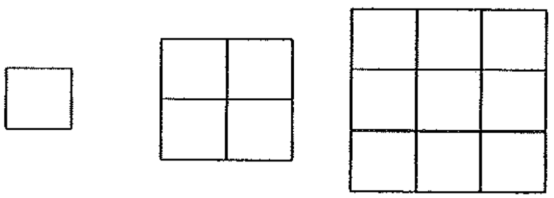

$$(a - b)(c + d) = (a + b)(c - d)$$

$$\frac{a + b}{a - b} = \frac{c + d}{c - d}$$

***CONCLUSIÓN:*** En toda proporción, la suma del antecedente de la primera razón con su consecuente, es a la diferencia, como la suma del antecedente de la segunda razón con su consecuente es a la diferencia.

***ACTIVIDAD 5.*** Para diferenciar correlación directa de proporcionalidad directa.

1. Se tiene la siguiente unidad $\square$, el menor cuadrado que se puede formar con cuadrados iguales a éste, es él mismo y el siguiente en orden es el que tiene cuatro unidades. El tercero es de tres por tres.



2. Elaboremos una tabla con el área y el lado

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| L (cm) | 1 | 2 | 3 | 4 |
| A (cm) | 1 | 4 | 9 | 16 |

3. Realizamos las divisiones: Área entre lado

$\begin{array}{r|l} 9 & \underline{3} \\ 0 & 3 \end{array}$ $\qquad$ $\begin{array}{r|l} 16 & \underline{4} \\ 0 & 4 \end{array}$ $\qquad$ $\begin{array}{r|l} 1 & \underline{1} \\ 0 & 1 \end{array}$ $\qquad$ $\begin{array}{r|l} 4 & \underline{2} \\ 0 & 2 \end{array}$

observamos los resultados y comparamos con los de la actividad anterior:

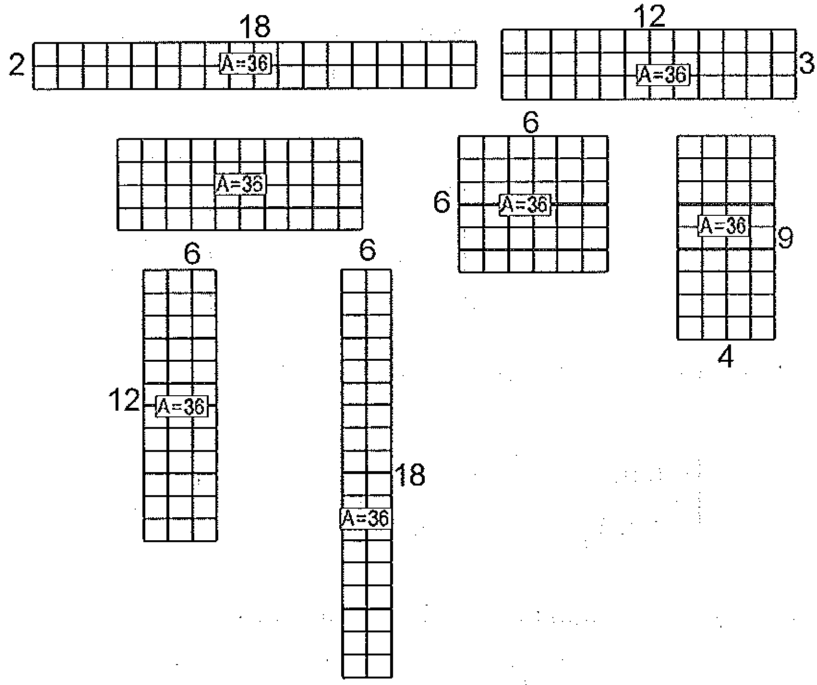
¿Cuál es la diferencia?

¿Hay un operador multiplicativo que aplicado al lado siempre da como resultado el área?

¿Con las razones anteriores se pueden obtener proporciones?

***NOTA:*** *Como complemento a las actividades anteriores, se ubican las parejas en un plano cartesiano para observar el comportamiento.*

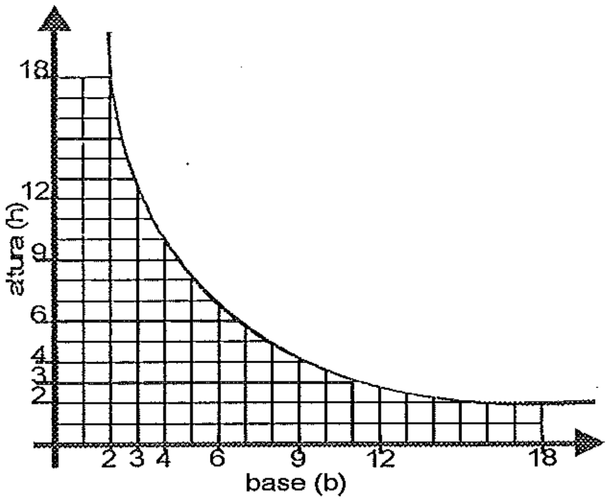
***ACTIVIDAD 6*** [10]. Construyamos rectángulos de áreas equivalentes, sean por ejemplo los rectángulos cuya área es de 36 unidades cuadradas.




¿Qué ocurre con la base cuando se aumenta la altura del rectángulo al doble?

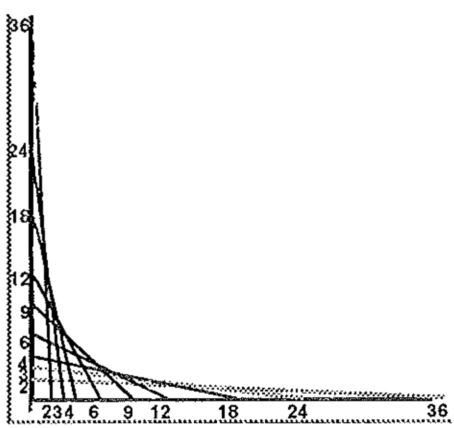
Superpongamos los rectángulos en forma descendente con respecto a la altura así:

[10] Adoptado de Didáctica de la Matemática Moderna de Emma Castelnuovo. Editorial F. Trillas, S.A. México 1970. Pag. 167




Obsérvese que, intuitivamente los vértices libres de cada rectángulo forman una curva. Dicha curva se denomina rama de hipérbola. Se puede obtener una mejor gráfica si se hace en papel milimetrado logrando así más rectángulos y por lo tanto, más vértices libres.

Repitamos la misma actividad con triángulos rectángulos de áreas equivalentes. Sea A = 36 unidades cuadradas .



El área de cada triángulo, con catetos en los ejes coordenados es de 36 unidades cuadradas. Vemos como las hipotenusas de cada triángulo van formando la hipérbola.

## 10.8. APLICACIÓN DE LA PROPORCIONALIDAD

"Existe en la actualidad una fuerte corriente en educación matemática que sostiene con fuerza la necesidad de que el aprendizaje de las matemática no se realice explorando las construcciones matemáticas en sí mismas, en las diferentes formas que han cristalizado a lo largo de los siglos, sino en continuo contacto con las situaciones del mundo real que les dieron y les siguen dando su motivación y vitalidad"[11]

La proporcionalidad se constituye en una herramienta para resolver problemas del mundo real y que permiten establecer una relación entre ese mundo y el lenguaje matemático. Además los mismos problemas nos conducen a crear modelos para resolver otros.

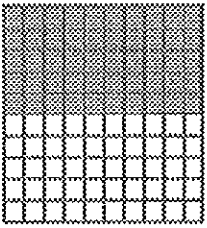
En este taller escogeremos algunas situaciones o problemas modelos para inducir a formar los conceptos de regla de tres, porcentajes, repartos proporcionales y mezclas.

### 10.8.1. Porcentajes

Se pide al alumno que establezca de dos formas distintas la razón, entre la parte sombreada y el todo de la siguiente figura. Primero como partes de, y segundo como cociente entre áreas, así:

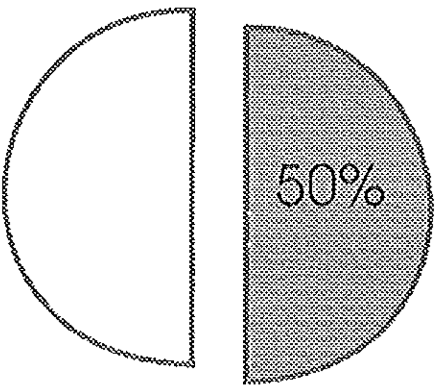
La parte sombreada se representa como $\frac{1}{2}$ o también $\frac{50}{100}$ porque

[11] De Guzmán Miguel. Enseñanza de las Ciencias y la Matemática. Tendencias e innovaciones Educación Ciencia y Tecnología. Editorial Popular S.A. Madrid. 1993. pag.116.



hay 50 cuadrados coloreados de 100. $\frac{1}{2} = \frac{50}{100}$.
Por anterior se establece la proporción: La razón $\frac{50}{100}$ se puede escribir 50% (que se lee "cincuenta por ciento").

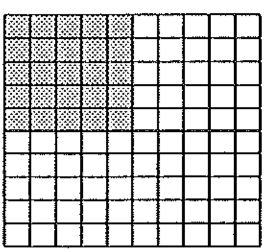
Se induce al alumno a que concluya que la mitad de una magnitud de algo es equivalente al 50% de: Así por ejemplo, en el círculo, la parte sombreada es el 50% (la mitad).



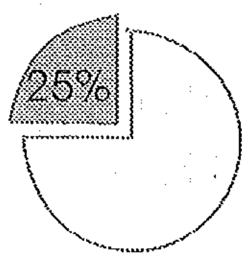

Si en un grupo de 50 alumnos, 25 son hombres y el resto mujeres, entonces se puede decir que el 50% del grupo es de hombres y el otro 50% es de mujeres. Así, el 50% de 50 que
Se escribe:

$\frac{50}{100}(50)=25,\ \frac{1}{2}\ (50) = 25$

De idéntica manera podemos establecer otras proporciones que representaremos como porcentajes.



$\frac{1}{4}$ = 25/100 25%
La parte no sombreada sería entonces el 75% que equivale a $\frac{3}{4}$



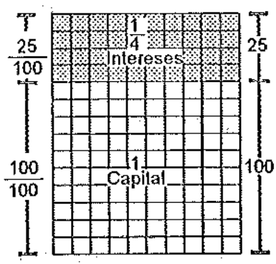
Así por ejemplo, si un comerciante ahorra $500.000 durante un año y en ese tiempo recibe unos intereses del 25% del valor ahorrado, entonces al final del año, por intereses recibirá:

$$\frac{25}{100}(500000) = 125000 = \frac{1}{4}(500000) = 125000$$

El significado de la expresión 25% ($\frac{25}{100}$) es que por cada $ 100 que ahorra, recibe $25. Entonces se establece la proporción:

$$\frac{25}{100} = \frac{X}{500000} \Longrightarrow X = 125000$$

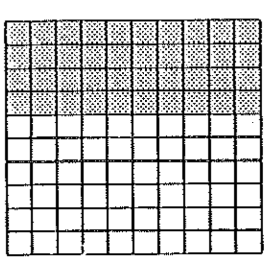
Si se pide cuánto recibe éste por lo ahorrado y los intereses, esto sería el 125%, porque sería todo ( 100%) más el 25%. Geométricamente se explica así:




$$\frac{125}{100}(500000) = \frac{5}{4}(500000) = \frac{2500000}{4} = 625000$$

$$1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

La parte sombreada es



$$S = \frac{2}{5} = \frac{40}{100}(40\%)$$

Y en su defecto, la parte no sombreada es: 60%

*EJERCICIO*

En un almacén, hay una promoción especial por la compra de cada camisa de marca *Kamiss*. Dicha promoción es del 40% de descuento del valor asignado. Si María, quiere comprar una de esas camisas cuyo valor asignado es \$40.000. ¿Cuánto deberá pagar por ella?

**Solución**: Si a María le hacen un descuento del 40%, quiere decir que pagará el 60% del valor asignado, esto es:

$$\frac{60}{100} = (40000) = \frac{120000}{5} = (40000)$$

## 10.8.2. MEZCLAS

*HELADO DE CREMA*

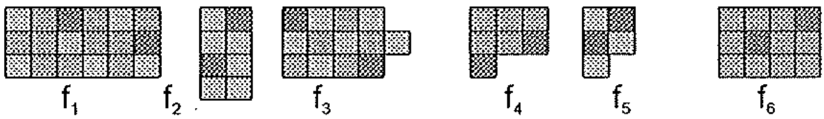
| | |
|---|---|
| Ingredientes : | 4 tazas de leche |
| (para seis porciones) | 1 taza de azúcar |
| | 1 cucharadita de esencia de vainilla |
| | 2 cucharadas de maizena |
| | 3 huevos |

Se requiere hacer helado que alcance para 26 porciones, ¿Qué cantidad se necesita de cada ingrediente?

Se puede enunciar el mismo tipo de ejercicio con preparación de concreto, químicos, alimentos, entre otros.

*COMPONENTES DE FUNGICIDAS:* Se dispone de seis fungicidas para frutales designados por $f_1$, $f_2$, $f_3$, $f_4$, $f_5$ y $f_6$.

Cada figura geométrica indica la composición en miligramos de las sustancias A(rojo), B(Amarillo) y C(azul) contenidas en los distintos fungicidas. La sustancia A sólo actúa como nutriente para los frutales, en tanto que las sustancias B(amarillo) y C(azul) actúan directamente contra algunos tipos de hongos[12].




Sustancia A   Sustancia B   Sustancia C

**Preguntas:**

1. ¿Cuál fracción representan cada una de las sustancias A,B y C en cada uno de los fungicidas?
2. Complete el siguiente cuadro, en el cual se relaciona la cantidad que hay en cada sustancia en cada uno de los fungicidas.

| Fungicidas / Sustancia | $f_1$ | $f_2$ | $f_3$ | $f_4$ | $f_5$ | $f_6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Sustancia A | 2 | 2 | | | | |
| Sustancia B | | | | 2 | | |
| Sustancia C | | | | | | 10 |

3. ¿En cuál fungicida hay menos porcentaje de la sustancia A?
4. ¿En cuál fungicida hay mayor porcentaje de la sustancia B?
5. ¿En cuál fungicida hay mayor porcentaje de la sustancia C?
6. Se adelanta un experimento que permita determinar la efectividad de la sustancia B en el control de un hongo determinado. En este caso, ¿cuáles son los fungicidas que se deben seleccionar para el experimento?
7. Haga lo mismo para la sustancia C

[12] Problema adaptado, tomado de: UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA. Examen de Admisión: Guía para orientar e ilustrar. Agosto 21 de 1989, Medellín

8. ¿Será igual el porcentaje de la sustancia B relativo a la composición total de los fungicidas $f_1$, $f_2$ y $f_{s3}$? Explique.
9. ¿Cuál es la sustancia que corresponde a la tercera parte de la composición total del fungicida? Explique.

***Solución.*** Para darle respuesta a los demás interrogantes, escribimos en forma de razón el contenido de cada sustancia en cada uno de los fungicidas con respecto a la composición total.

| Fungicidas / Sustancia | $f_1$ | $f_2$ | $f_3$ | $f_4$ | $f_5$ | $f_6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Sustancia A | $\frac{2}{18}$ | $\frac{2}{8}$ | $\frac{2}{13}$ | $\frac{2}{7}$ | $\frac{2}{5}$ | $\frac{2}{12}$ |
| Sustancia B | $\frac{6}{18}$ | $\frac{6}{8}$ | $\frac{6}{13}$ | $\frac{0}{7}$ | $\frac{3}{5}$ | $\frac{0}{12}$ |
| Sustancia C | $\frac{10}{18}$ | $\frac{0}{8}$ | $\frac{5}{13}$ | $\frac{5}{7}$ | $\frac{0}{5}$ | $\frac{10}{12}$ |

En el cuadro se lee claramente, por ejemplo, que el fungicida $f_1$ tiene en composición total 18 miligramos distribuidos así: 2 de la sustancia A, 6 de la B y 10 de la sustancia C.


| Fungicidas / Sustancia | $f_1$ | $f_2$ | $f_3$ | $f_4$ | $f_5$ | $f_6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Sustancia A | $\frac{2}{18}$ | $\frac{2}{8}$ | $\frac{2}{13}$ | $\frac{2}{7}$ | $\frac{2}{5}$ | $\frac{2}{12}$ |
| Sustancia B | $\frac{6}{18}$ | $\frac{6}{8}$ | $\frac{6}{13}$ | $\frac{0}{7}$ | $\frac{3}{5}$ | $\frac{0}{12}$ |
| Sustancia C | $\frac{10}{18}$ | $\frac{0}{8}$ | $\frac{5}{13}$ | $\frac{5}{7}$ | $\frac{0}{5}$ | $\frac{10}{12}$ |


Ahora, con el objeto de dar una mayor visualización del orden de estas fracciones, se reescribió con igual antecedente, (igual numerador) y tendremos en cuenta que: Si dos fracciones tienen igual numerador, es mayor la que tiene menor denominador y, ensu defecto, es menor la que tiene mayor denominador.

Observe que con la fracción $\frac{3}{5}$ obtuvimos otra equivalente así:

(Aquí el factor de conversión es 2).

$$\frac{3 \times 2}{5 \times 2} = \frac{6}{10} \quad \text{esto es} \quad \frac{3}{5} = \frac{6}{10}$$

El cuadro anterior, nos muestra fácilmente la solución de las preguntas 2 a 8. Por ejemplo, la solución a la pregunta 3 es $\frac{2}{8}$ que es la de mayor denominador.

En el caso de las preguntas 6 y 7 observe la gráfica inicial que, por ejemplo, de los 6 fungicidas los únicos que no poseen sustancia C (azul.) son los fungicidas $f_2$ y $f_5$, quiere ello decir que si se emplean estos 2 fungicidas en el experimento no dará pie a ambigüedades ya que no interviene la sustancia C, de lo contrario, no se puede concluir cuál de las dos sustancias es la que actúa sobre el tipo de hongo.

| Fungicidas / Sustancia | $f_1$ | $f_2$ | $f_3$ | $f_4$ | $f_5$ | $f_6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Sustancia A ▩ | $\frac{1}{9}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{2}{7}$ | $\frac{2}{5}$ | $\frac{1}{6}$ |
| Sustancia B ▩ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{3}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | $\frac{3}{5}$ | 0 |
| Sustancia C ▩ | $\frac{5}{9}$ | 0 | $\frac{2}{5}$ | $\frac{5}{7}$ | 0 | $\frac{5}{6}$ |

10. Para darle solución a la pregunta 9 y dejar abiertas otras posibles preguntas de ese tipo, escribimos el cuadro con las fracciones equivalentes pero simplificándolas al máximo. (ver cuadro anterior).

### 10.8. 3. Regla de tres

Se trata de tomar problemas corrientes para elaborar un modelo que permita solucionar problemas de regla de tres simple directa e inversa y regla de tres compuesta.

Según los programas del MEN de séptimo grado para resolver problemas de regla de tres simple, se deben tener en cuenta los siguientes tres aspectos:

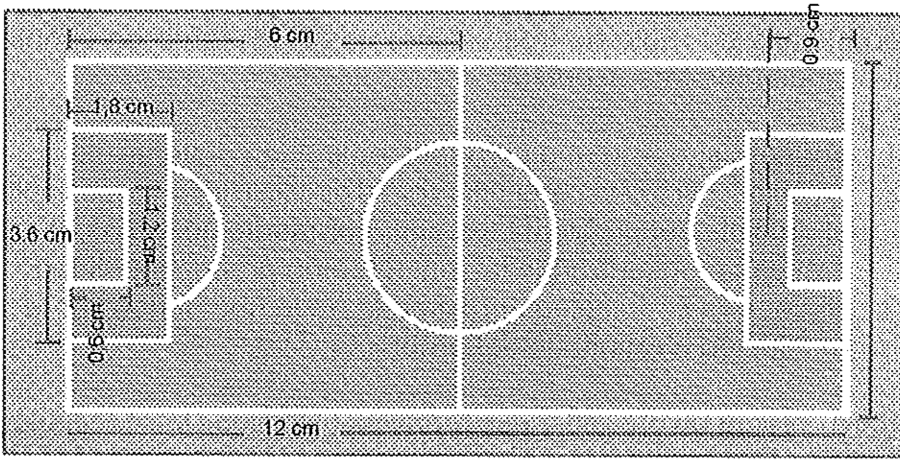
1. Verificar si existe una correlación directa o inversa.
2. Establecer si existe proporcionalidad directa o inversa mediante el análisis del problema, ya sea, por medio de tablas, de gráficas o encontrando la constante de proporcionalidad.
3. Hacer una estimación aproximada de lo que puede ser la resolución o resultado del problema.

Para obtener un operador que reduzca, utilizamos las fracciones propias (de la forma $\frac{a}{b}$, tal que $a<b$, $b\neq 0$. Para obtener un operador que amplíe una magnitud, se emplea una fracción impropia (de la forma $\frac{a}{b}$, tal que $a>b$, $b\neq 0$)

***ACTIVIDAD 1***. Un obrero pega 600 adobes semanalmente trabajando cinco días

1. ¿Cuánto tiempo se demora para pegar 5400 adobes.?
2. ¿A qué magnitudes se refiere el texto?
3. ¿Están las magnitudes directamente correlacionadas? ¿Por qué?
4. ¿Son directamente o inversamente proporcionales? ¿Por qué?
5. ¿Cómo lo resolverías?

***ACTIVIDAD 2.*** El gráfico, es un dibujo a escala de una cancha real en el cual cada centímetro representa 10 metros de las dimensiones reales de la cancha. En ella se remarcan las divisiones que posee una cancha de fútbol.




Se pide:

I. Hallar las dimensiones reales de la cancha (incluyendo sus divisiones, también marcadas a escala).
2. Se desea cambiarle la gramilla a la cancha ¿Cuántos metros cuadrados de gramilla se requieren?
3. Si una empresa engrama la cancha en tres días y por cada metro cuadrado de gramilla instalado cobra $100.000, ¿cuánto se le pagaría a la empresa por el engramillado de la cancha?
4. Si otra empresa que cotizó el engramillado de la cancha se demora dos días en hacerlo y cobra en total $7'920.000. ¿Cuánto estaría cobrando por s metro cuadrado?
5. Si se decide contratar a las dos empresas para engramillar la cancha, cada una con las mismas condiciones de los numerales 3 y 4, ¿qué fracción de la cancha engrama cada una, sabiendo que comenzaron a la misma hora y que se hace a un ritmo constante?, ¿Cuánto costará el engramillado total?, ¿Cuánto se le pagará a cada empresa?

## BIBLIOGRAFÍA


RODRÍGUEZ, Alba Nubia y CARVAJAL., Arizaldo. Guía para la elaboración de proyectos de investigación social. 1994

SEPÚLVEDA, Ramón. Propuesta pedagógica con el uso de mediadores que dinamizan la conceptualización, la aplicación y la formalización del modelo de la proporcionalidad en la educación básica. Medellín: Universidad de Antioquia, Tesis de Grado, 1997.

PASTOR, Rey y PUIG, A. Elementos de Geometría Racional, Nuevas Gráficas. Madrid, 1963.

CATEGNOC C. y otros. El material para la enseñanza de las Matemáticas, Madrid: Aguilar, 1964.

ORTHON, Anthony. El aprendizaje de las Matemáticas: cuestiones, teoría y práctica en el aula. Madrid, Morato, 1990.

GIL PÉREZ, Daniel y de GUZMÁN OZÁMIZ, Miguel. Enseñanza de las ciencias y la matemática. Madrid. Editorial popular, 1993.

VASCO, Carlos y otros. Programas curriculares del Ministerio de Educación Nacional: Matemáticas 7º grado. Bogotá: MEN, 1989.

PACIOLI, Luca. La divina proporción. Buenos Aires: Editorial Losada, 1946

DICKSON, Linda y otros. El Aprendizaje de las matemáticas. Labor, 1991.

CASTELNUOVO, Emma. Didáctica de la Matemática Moderna. México Trilas, 1970.

MESA, Orlando. Contextos para el diseño de situaciones problema en la enseñanza de la Matemática. Medellín: Universidad de Antioquia, 1997.

RODRÍGUEZ, Jorge y ROJAS G, Pedro Javier. La comunicación en la Matemática escolar. En: Revista Educación y Cultura N°40, CEID FECODE. Mayo de 1996. P. 16.

MESA, Orlando. Criterios y estrategias para la enseñanza de las Matemáticas. Editorial enlace gráfico, Medellín, 1994.

Impreso por

EDITORIAL AIRES LITOGRÁFICOS E.U.

Tels. 254 2785 - 254 3431

## Secretaría de Asuntos Pedagógicos y Educación Sindical

# El CEID - ADIDA, un espacio de Reflexión Pedagógica e Investigativa al servicio de La Comunidad Educativa