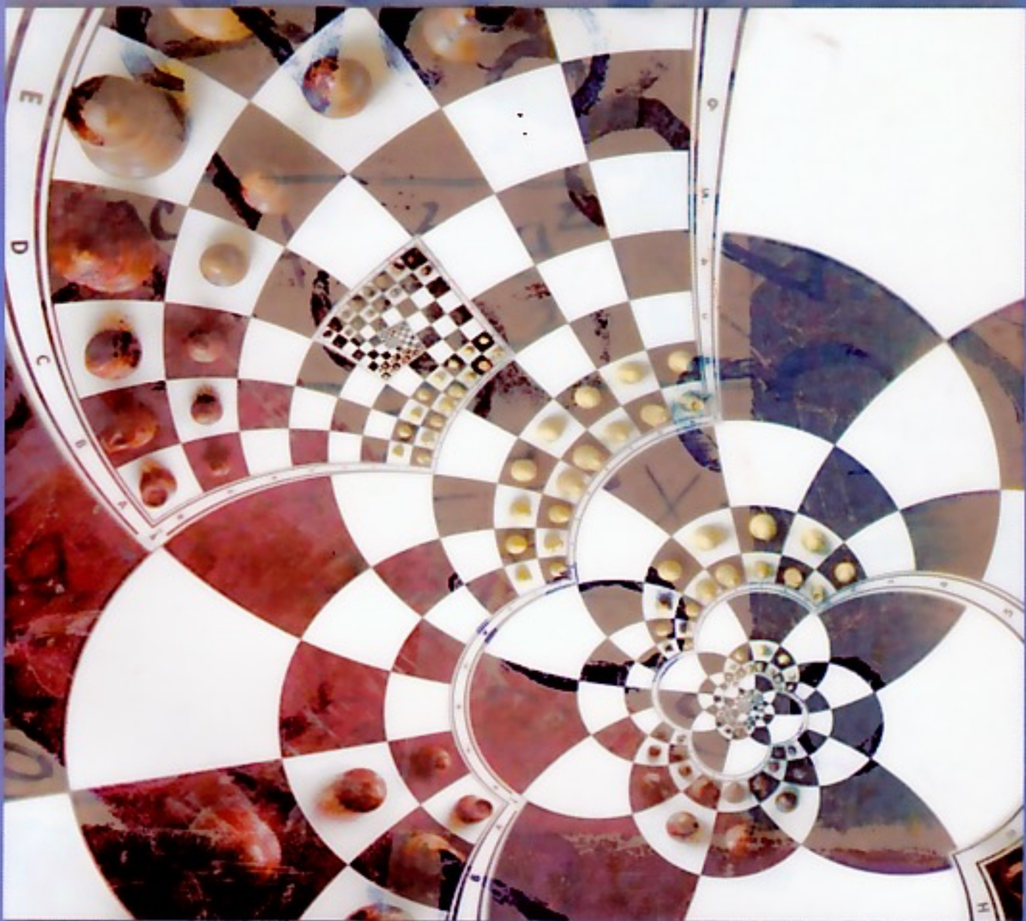
Lecciones de Matemáticas
Número Cuatro



Propuestas Alternativas para la Enseñanza - Aprendizaje de las Matemáticas

CEID ADIDA

Centro de Estudios e Investigaciones Docentes
LINEA DE INVESTIGACIÓN: EDUCACIÓN MATEMÁTICA
GrupLAC en Colciencias: CALIDAD DE LA EDUCACIÓN

LECCIONES DE MATEMÁTICAS NÚMERO CUATRO

PROPUESTAS ALTERNATIVAS PARA LA ENSEÑANZA APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

LÍNEA DE INVESTIGACIÓN: "EDUCACIÓN MATEMÁTICA". ELIME

CEID ADIDA
Centro de Estudios e Investigaciones Docentes

MEDELLÍN
2010

® CENTRO DE ESTUDIOS E INVESTIGACIONES DOCENTES CEID - ADIDA
® EQUIPO LÍNEA INVESTIGACIÓN MATEMÁTICA EDUCATIVA Y ESCOLAR

LÍNEA DE INVESTIGACIÓN: "EDUCACIÓN MATEMÁTICA"

ISBN____________________

Primera Edición: septiembre de 2010
500 Ejemplares

Diseño de Carátula: Diego León Correa

Digitación: Jorge Cardeño Espinosa- Emely Ardila B.

Comité Técnico de Revisión:

Jorge Cardeño Espinosa
Director Línea de Investigación: "Educación Matemática". CEID - ADIDA
León Vallejo Osorio
Secretario de Asuntos Pedagógicos y Educación Sindical. ADIDA
Jonás Causil Burgos
Director CEID-ADIDA

Impreso y hecho en Colombia/ printed and made in Colombia.
AIRES EDITORES ASOCIADOS
Ardila Benítez y Asociados Ltda.
aireseditores@hotmail.com - aireseditores@gmail.com
Cra 39a N° 66c 31 Tel.: 254.2785/3102/3431

CEID-ADIDA. Tel. 2291020 Fax. 2291032
E-mail: adida@une.net.co - Web: www.adida.org.co
http://elimeceid.ning.com

LECCIONES DE MATEMÁTICAS NÚMERO CUATRO

Jorge Cardeño Espinosa
Director Línea de Investigación: "Educación Matemática"

ELIME:

Luis Gonzaga de J. Restrepo Ramírez
Carlos Humberto Ospina Noreña
Mercedes Arrubla Carmona
Fanny Guevara Mena
Hernán Darío Ortiz Alzate
Diego León Correa Arango
Diego Antonio Ceballos Nieto
Diego Herrera Sepúlveda
Jhon Jairo Mahecha Bautista

"Comprender las cosas que nos rodean es la mejor preparación para comprender las cosas que hay mas allá."

Hipatia (aprox. 370-aprox. 415)

"Vivir sin filosofar es, propiamente, tener los ojos cerrados, sin tratar de abrirlos jamás."

René Descartes

Sesostris... dividió las tierras de Egipto entre sus habitantes... Si el río se llevaba una parte de la porción asignada a un hombre... el rey enviaba a otras personas para examinar y determinar, por medio de una medición, la extensión exacta de la pérdida... A partir de esta práctica, creo yo, es como se llegó al conocimiento de la geometría en Egipto en primer lugar, de donde pasó más tarde a Grecia.

Herotodo

"Soy profesor a favor de la esperanza que me anima a pesar de todo.
Soy profesor contra el desengaño que me consume y me inmoviliza.
Soy profesor a favor de la belleza de mi propia práctica"

Paulo Freire

CONTENIDO

PRESENTACIÓN

Se busca con el presente texto aportar los elementos teóricos, metodológicos y didácticos que se requieren como punto de partida para el mejoramiento de los procesos de enseñanza-aprendizaje del área de Matemáticas, afectando de manera significativa la calidad de la educación matemática que se orienta en las instituciones públicas de nuestro departamento. Lo cual se refleja en Las Pruebas Saber, PISA y las de ingreso a la Educación Superior realizadas en el ámbito nacional e internacional. Lo anterior, en consecuencia con la búsqueda de soluciones alternativas al problema histórico de los bajos desempeños en esta ciencia, buscando mejorar la calidad académica y formativa de nuestros estudiantes en ésta área fundamental del currículo.

De otro lado, dar a conocer a partir del presente texto experiencias pedagógicas que los docentes desarrollan o modelos teóricos propuestos desde la práctica pedagógica. Por ello, se muestra de cerca el trabajo pedagógico que se realiza desde diferentes contextos sociales y educativos, pretendiendo despertar el interés por la conformación de comunidades académicas que piensan el problema de la enseñabilidad de las Matemáticas, sus procesos generales y el desarrollo de competencias intelectivas en el área.

Una constante es la preocupación de los docentes por el nivel académico de sus estudiantes, por ello, se invita a despertar el interés por la construcción y proposición de currículo alternativo que tengan como punto de partida el contexto socio-cultural, buscando elevar su comprensión y deseo de aprender matemáticas y así caminar hacia la calidad de la educación pero en lo concreto, dado que debería ser una preocupación de la comunidad intelectual en general el cómo mejorar el proceso docente educativo, teniendo presente que los docentes, no son los únicos culpables del bajo rendimiento escolar, ni los demás sugetos del sistema educativo, sino que es necesario buscar alternativas de solución frente a las complejidades de las instituciones educativas, de nuestra realidad actual y del acto educativo en sí mismo.

Nadie niega la relevancia de una pertinente metodología en el aula, el manejo a profundidad del contenido matemático, la disposición del aprendiz, la responsabilidad compartida familia-escuela, pero también la ausencia del Estado manifestada en su interés de masificar y regular sin diferenciar contextos, de afectar los derechos de sus trabajadores (docentes), de la falta de infraestructura escolar y otros. Pero de otro lado, más allá de estas contradicciones se debe ser parte de la solución y no de la profundización de los problemas, a pesar de las incertidumbres y desventajas sociales actuales.

Para ello, se debe contagiar a todos del conocimiento científico y matemático, buscando el desarrollo de habilidades de aprendizajes básicos para la vida y la misma subsistencia, del deseo de hacer las cosas bien, del reconocimiento del bien histórico de la humanidad que se hace bastante perceptible en los desarrollos de las Matemáticas, de ser capaces de despertar el deseo por el aprender y la curiosidad como fuente de motivación, de luchar contra la pérdida de la exigencia académica en la escuela facilitada por la actual nomatividad en relación con el sistema de evaluación y promoción en Colombia, entre otros. Lo anterior, nos puede conducir hacia una sociedad más crítica y autocrítica, al desarrollo de aprendizajes significativos de los conceptos básicos en ésta ciencia y que aún no deja de constituirse en una de las dificultades de aprendizaje más notoria en todos los establecimientos públicos del orden municipal, departamental y nacional.

Es necesario nuevas miradas desde y para las Matemáticas, para no continuar pensando finalmente que éstas son una ciencia exacta o formal. En el presente texto se apunta hacia este esfuerzo intelectual, didáctico y pedagógico. Por ello, resulta bastante apresurado este comentario que ronda la mente de muchos sujetos en la Escuela sobre las Matemáticas. Para precisar Kurt Freidrich Gödel[1] nacido el 28 de abril de 1906 en Brünn, Moravia (Austria- Hungría, en el día de hoy República Checa) mostró el resultado más revolucionario de la Lógica del siglo XX, el famoso teorema de incompletitud, publicado en 1931.

Jorge Cardeño Espinosa
Director Línea de Investigación: "Educación Matemática"
CEID-ADIDA

[1] Gödel probó que todo sistema formal que contuviera a la aritmética elemental (un ejemplo de este sistema serían las Matemáticas como un todo) es incompleto. Además, por el camino encontró que la consistencia de dichos sistemas era imposible de probar. Esto no significó el fin del Formalismo, pero supuso un duro golpe para este.

También hizo grandes contribuciones a la Teoría de Conjuntos, como la demostración de la consistencia relativa del axioma de elección y de la hipótesis del continuo respecto del resto de los axiomas. Además, hizo importantes contribuciones al estudio del problema de la decisión, definió por primera vez las funciones recursivas, probó la consistencia de la lógica y aritmética clásica respecto de la intuicionista, se ocupó de la cosmología relativista y encontró soluciones sorprendentes a las ecuaciones del campo gravitatorio de la relatividad general.

AGRADECIMIENTOS

A las Juntas Directivas de ADIDA, tanto saliente como entrante por su empeño real de apoyar la investigación educativa y la producción intelectual de los maestros del Departamento de Antioquia y sus afiliados, respaldando permanentemente el trabajo pedagógico e investigativo de su Centro de Estudios e Investigaciones Docentes CEID, el cual se constituye en un espacio de discusión, análisis y crítica constructiva al servicio del magisterio y la comunidad educativa en general.

También a los integrantes de la actual línea de investigación: «Educación Matemática». ELIME, por su trabajo sistemático, constancia y permanencia en el tiempo, durante más de 15 años de existencia en ADIDA, en pro de la calidad de la educación de nuestro departamento y del país.

Determinación de los Puntos Notables de un Triángulo en Término de sus lados

HERNÁN DARÍO ORTIZ ALZATE

Especialista en Enseñanza de las Matemáticas,
Universidad de Antioquia.
Educación Matemática. ELIME. CEID-ADIDA

MEDELLÍN
2010

INTRODUCCIÓN

En el desarrollo de la geometría se acostumbra determinar la ubicación de los puntos notables del triángulo por métodos sintéticos, analíticos o dinámicos. Los métodos sintéticos corresponden a procedimientos constructivos, con regla y compás, sin referencia a un sistema de coordenadas, los cuales conllevan la inexactitud propia de los instrumentos y la imprecisión en la manipulación de éstos por parte del dibujante, siendo métodos netamente intuitivos visuales. Los métodos analíticos, por su parte, arrojan datos exactos, con referencia a un sistema de coordenadas. Estos métodos requieren de la referencia de las coordenadas y ubicación en el plano cartesiano de los vértices del triángulo, y la posterior determinación de parámetros como puntos medios, pendientes, ecuaciones de rectas y puntos de intersección, claves para establecer la ubicación de los puntos notables, todo haciendo uso de fórmulas y procedimientos de la geometría analítica. Requieren de gran desempeño matemático y cálculos diversos, siendo netamente abstractos, en los cuales se acostumbra el uso de ayudas visuales. En los métodos analíticos difícilmente se parte de conocer las longitudes del triángulo. Los métodos dinámicos son los más versátiles porque conjugan los dos anteriores y permiten una excelente visualización a partir de la manipulación de software creado para tal fin, en ellos se puede partir de conocer la longitud de los lados y determinar con exactitud la ubicación de los puntos notables, pero requiere de acceso a un ordenador y pericia en el manejo del software.

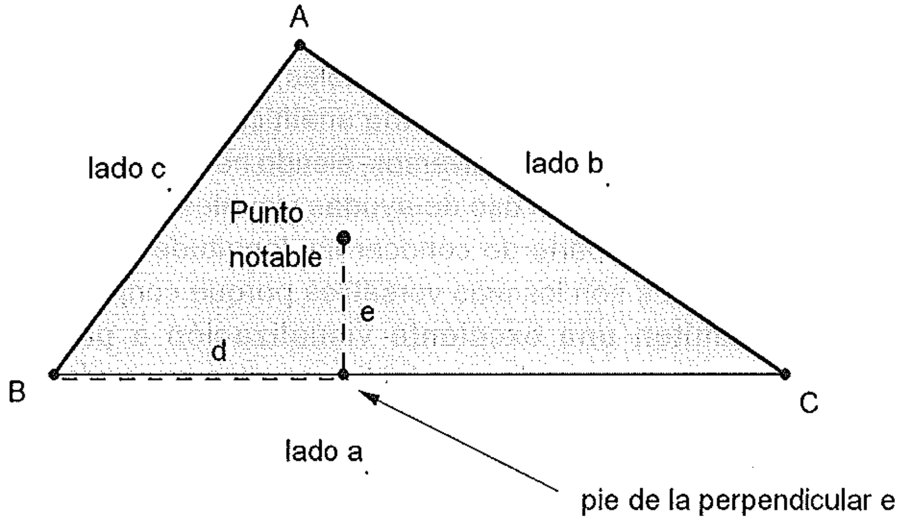
Con el presente documento se pretende divulgar otra manera de determinar la ubicación de los puntos notables del triángulo, respecto a uno de sus vértices, y las distancias entre ellos, a partir del conocimiento de la longitud de los lados. En este método se hace uso de fórmulas algebraicas[1] directas, que permite hacer cálculos exactos, sin requerir de la manipulación del ordenador ni de construcciones geométricas elaboradas.

[1] La determinación de las fórmulas divulgadas en este documento hacen parte del escrito más extenso , el cual está en preparación por parte del autor.

CONSIDERACIONES INICIALES

En todo triángulo ABC con lados a opuesto al vértice A, b opuesto al vértice B y c opuesto al vértice C, se puede determinar la ubicación de los puntos notables BARICENTRO, INCENTRO, CIRCUNCENTRO y ORTOCENTRO, en términos de los lados del triángulo, cuando éstos son conocidos.

Para determinar la ubicación del punto notable, se establece como punto de referencia el vértice B del triángulo y se determinan la distancia e, correspondiente a la medida del segmento que va desde el punto notable hasta el lado $\overline{BC}$ o su prolongación y es perpendicular a éste, y la distancia d, correspondiente a la medida del segmento sobre la línea que contiene a $\overline{BC}$, que va desde el vértice B hasta el pie de la perpendicular **e,** con lo cual las coordenadas del punto notable será P(d,e).



Los valores de d se consideran positivos hacia la derecha de B y se consideran negativos hacia la izquierda de B.

Los valores de e se consideran positivos hacia arriba de BC y se consideran negativos hacia abajo de BC.

DETERMINACIÓN DEL BARICENTRO O GRAVICENTRO DE UN TRIÁNGULO.

Definiciones básicas:

Mediana de un triángulo: es el segmento de recta que une el punto medio de un lado de un triángulo con el vértice opuesto.

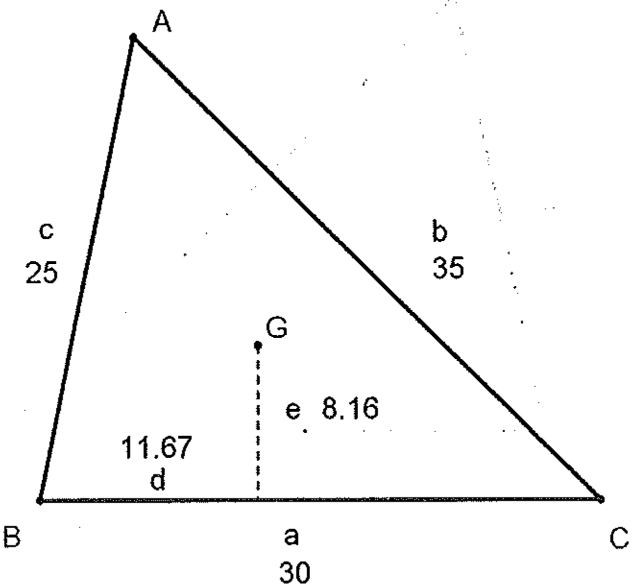
En un triángulo se pueden trazar tres medianas, una por cada vértice del triángulo, las cuales se cortan en un punto denominado BARICENTRO o GRAVICENTRO.

El baricentro o gravicentro es el centroide o centro de gravedad del triángulo.

La ubicación del baricentro en términos de los lados del triángulo, corresponde a:

$$G\,(d,e) = G\left(\frac{3a^2 + c^2 - b^2}{6a}, \frac{\sqrt{4a^2c^2 - (c^2 + a^2 - b^2)^2}}{6a}\right)$$

Para el triángulo de lados $a = 30$; $b = 35$; $c = 25$ se tiene $G\ (11.67\ ,\ 8.16)$



DETERMINACIÓN DEL CIRCUNCENTRO DE UN TRIÁNGULO.

Definiciones básicas:

Mediatriz de un segmento: es la recta que pasa por el punto medio de un segmento y es perpendicular a éste.

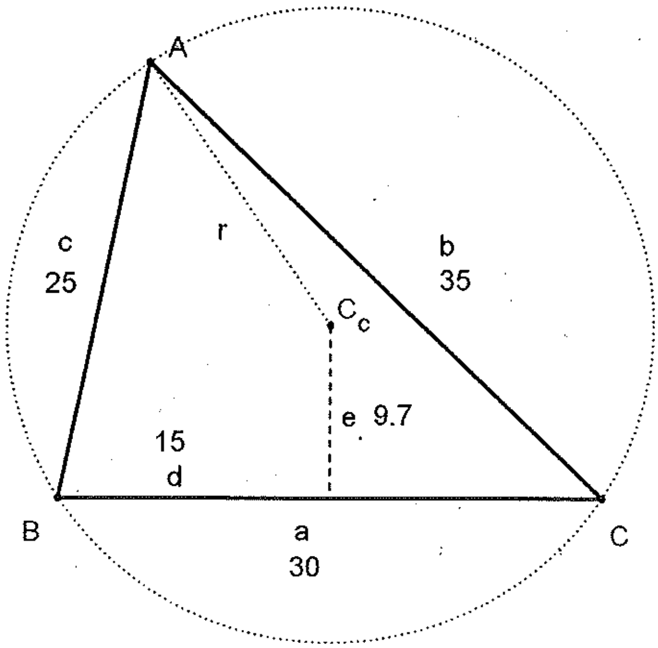
En un triángulo se pueden trazar tres mediatrices, una por cada lado del triángulo, las cuales se cortan en un punto denominado CIRCUNCENTRO.

El circuncentro es el centro de una circunferencia circunscrita que pasa por los vértices del triángulo.

La ubicación del circuncentro en términos de los lados del triángulo, corresponde a:

$$C_c\,(d,e)=C_c\left(\frac{a}{2},\frac{a(c^2+b^2-a^2)}{2\sqrt{4a^2c^2-(c^2+a^2-b^2)^2}}\right)$$

Para el triángulo de lados $a=30;\ \ b=35;\ \ c=25$ se tiene $C_c\ (15\ ,9.7)$



La fórmula para determinar el radio de la circunferencia circunscrita en términos de los lados del triángulo es:

$$d(C_c,A)=r=\frac{abc}{\sqrt{4a^2c^2-(c^2+a^2-b^2)^2}}$$

Así para los valores dados de a,b y c se tiene que $d(C_cA)=r=5.0817\approx 5.1$

DETERMINACIÓN DEL ORTOCENTRO DE UN TRIÁNGULO.

Definiciones básicas:

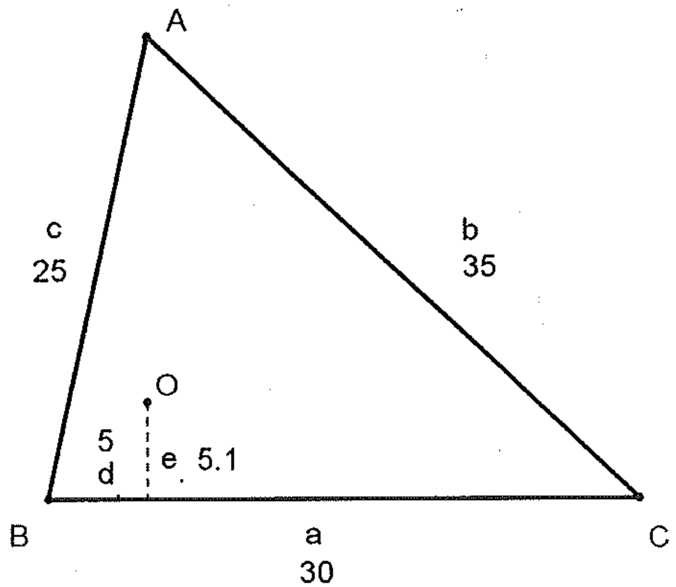
Altura de un triángulo: es el segmento de recta que va desde un vértice de un triángulo hasta el lado opuesto o su prolongación y es perpendicular a éste.

En un triángulo se pueden trazar tres alturas, una por cada vértice del triángulo, cuyos segmentos o sus prolongaciones se cortan en un punto denominado ORTOCENTRO.

La ubicación del ortocentro en términos de los lados del triángulo, corresponde a:

$$O(d,e)=O\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2a},\frac{a^4-(c^2-b^2)^2}{2a\sqrt{4a^2c^2-(c^2+a^2-b^2)^2}}\right)$$

Para el triángulo de lados $a=30$; $b=35$; $c=25$ se tiene $O\,(5\,,\,5.1\,)$



DETERMINACIÓN DEL INCENTRO DE UN TRIÁNGULO.

Definiciones básicas:

Bisectriz de un ángulo: es la recta que divide a un ángulo en otros dos ángulos congruentes entre sí.

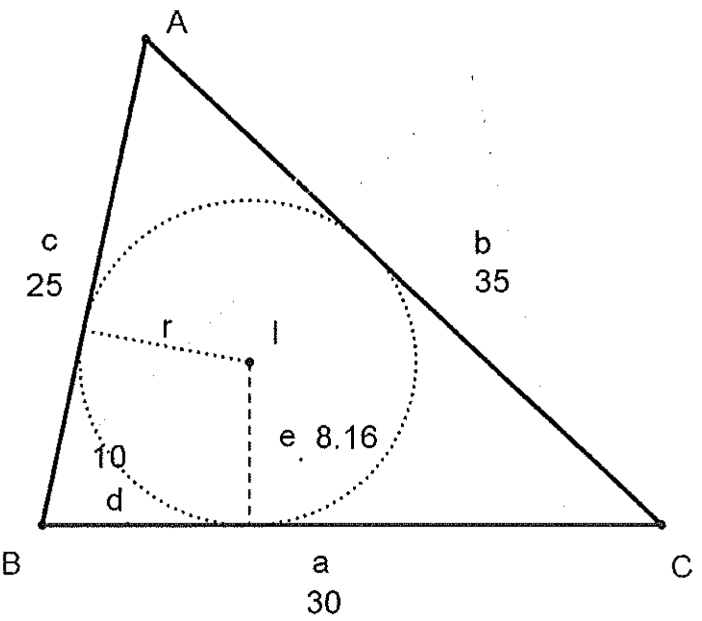
En un triángulo se pueden trazar tres bisectrices, una por cada ángulo del triángulo, las cuales se cortan en un punto denominado INCENTRO.

El incentro es el centro de una circunferencia inscrita que es tangente a los lados del triángulo.

La ubicación del incentro en términos de los lados del triángulo, corresponde a:

$$I\,(d,e) = I\left(\frac{a+c-b}{2}, \frac{\sqrt{4a^2c^2-(c^2+a^2-b^2)^2}}{2(a+b+c)}\right)$$

Para el triángulo de lados $a = 30;$ $b = 35;$ $c = 25$ se tiene $I\ (10,\ 8.16)$



La fórmula para determinar el radio de la circunferencia inscrita en términos de los lados del triángulo es:

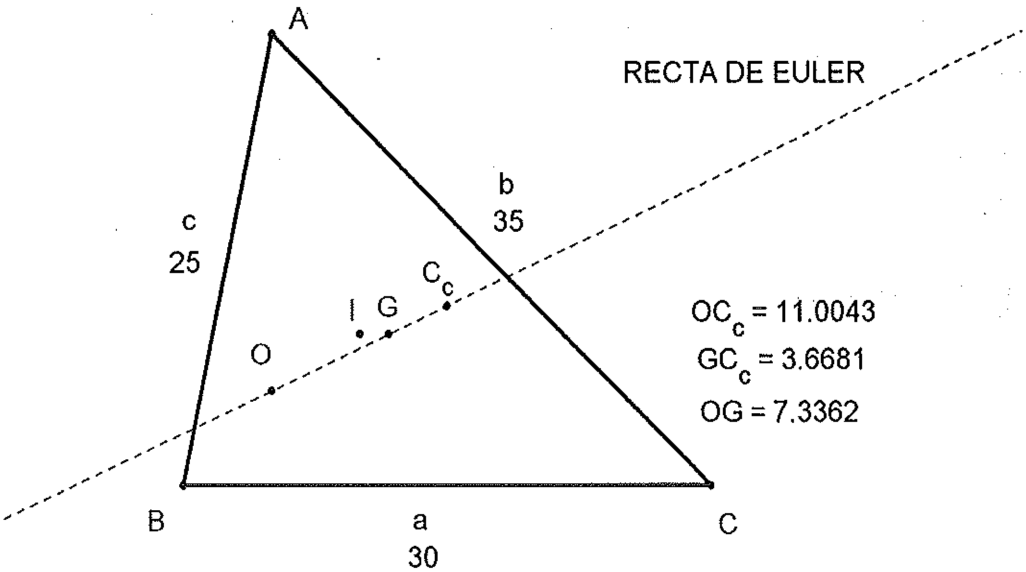
$$r = \frac{\sqrt{4a^2c^2 - (c^2 + a^2 - b^2)^2}}{2(a+b+c)}$$

Así para los valores dados de a, b y c se tiene que $r = 8.16497 \approx 8.2$

PUNTOS NOTABLES Y RECTA DE EULER

Al ubicar conjuntamente los puntos notables de cualquier triángulo se observa que el ortocentro, el baricentro y el circuncentro están alineados. La línea que contiene a éstos puntos notables recibe el nombre de RECTA DE EULER. Puede también observarse que la distancia entre el ortocentro y el baricentro es igual al doble de la distancia entre el baricentro y el circuncentro.

Para el triángulo de lados $a = 30;\ b = 35;\ c = 25,$



La fórmula para determinar la distancia entre el ortocentro y el circuncentro en términos de los lados del triángulo es:

$$d\ (OC_c) = \frac{1}{2a}\sqrt{(c^2-b^2)^2 + \frac{[2a^4-(c^2-b^2)^2-a^2(c^2+b^2)]^2}{4a^2c^2-(c^2+a^2-b^2)^2}}$$

Así para los valores dados de a, b y c se tiene que $d(OC_c) = 11.0043 \approx 11$

La fórmula para determinar la distancia entre el baricentro y el circuncentro en términos de los lados del triángulo es:

$$d\ (GC_c) = \frac{1}{6a}\sqrt{(c^2-b^2)^2 + \frac{[2a^4-(c^2-b^2)^2-a^2(c^2+b^2)]^2}{4a^2c^2-(c^2+a^2-b^2)^2}}$$

Así para los valores dados de a, b y c se tiene que $d(GC_c) = 3.6681 \approx 3.7$

EJERCICIO

Determine la ubicación de los puntos notables circuncentro, baricentro, ortocentro e incentro, y calcule la distancia entre el ortocentro y el circuncentro para el triángulo de lados $a = 7,\ b = 6\ \ c = 10$

Cualquier comentario sobre el documento en divulgación enviarlo al correo electrónico

herdaror@hotmail.com

Las Áreas Mágicas.
Una Reflexión

CARLOS JULIO ECHAVARRÍA H.
MIGUEL MONSALVE

Universidad Nacional de Colombia
Sede Medellín

MEDELLÍN
2010

PREGUNTAS ORIENTADORAS:

a) ¿cuántas figuras hay en la serie 1? ____________

b) ¿cuántos vértices tiene cada una de las figuras de la serie 1?
____

c) ¿en qué posición de la serie se ubica la figura con el número 3?
____

d) ¿cuántas unidades (u) mide el lado mayor de la figura con el número 4? _____________________

d) ¿cuál de las series 1 y 3 tiene más figuras? __________

e) ¿cuántas figuras más tiene la serie 5 con respecto a la serie 3?
____

LAS ÁREAS MÁGICAS. UNA REFLEXIÓN.

RESUMEN

Las ideas que en estos trabajos queremos compartir con los maestros son muy básicas y nos permiten pensar un poco la geometría, las relaciones entre los cuadriláteros, la noción del área y de manera muy creativa buscar configuraciones de rectángulos que en momento de determinar su área, estamos expresando algunas situaciones de factorización, como en el caso del factor común, trinomios y de diferencias de cuadrado; la factorización cobra sentido geométrico, el nivel de comprensión aumenta notablemente y el trabajo con los estudiantes puede iniciarse mucho antes del grado noveno o puede hacerse un trabajo posterior a los logaritmos permitiendo la comprensión de algunos casos de factorización de las relaciones geométricas.

Estas ideas que hemos trabajado en el GRUPO ÁBACO las hemos pensado desde el reconocimiento histórico a los ÁRABES, quienes nos indicaron los caminos antes del simbolismo que, desde el renacimiento europeo, predomina en la expresión matemática de las ideas; este taller presenta un modelo geométrico de la factorización de polinomios cuadráticos y permite el desarrollo de la intuición y la creatividad para resolver las diferentes situaciones que se presentan.

Carlos Julio Echavarría H.
Miguel Monsalve G.
Universidad Nacional de Colombia
Sede Medellín

EL TRIÁNGULO DE PASCAL

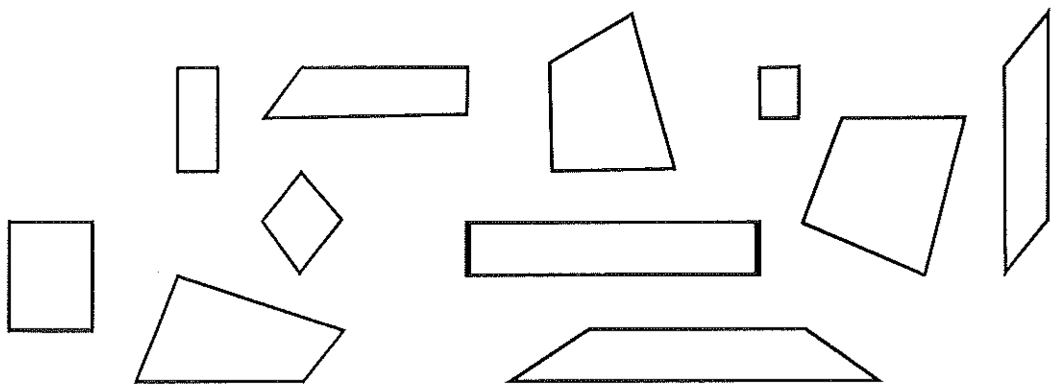
Estas actividades nos permiten visualizar estrategias de suma, en las cuales se ponen en evidencia la comprensión del sistema decimal de numeración posicional, llegar a las leyes de formación de diferentes sucesiones numéricas, tales como los números triangulares, números piramidales entre otros; es posible visualizar estructuras fractales y poder acercarnos a las ideas de auto semejanza e interacciones; el conteo combinatorio también lo podemos pensar y ver en el triángulo de pascal, las potencias de base dos y por supuesto los logaritmos de base dos; el binomio de Newton se puede relacionar con el Triángulo de Pascal para obtener sus coeficientes numéricos.

Esta es una actividad integradora, de esa en las cuales no importa el tiempo que dediquemos a su realización, pues nos permite viajar por muchas ideas con diferentes niveles de comprensión.

ÁREAS MÁGICAS

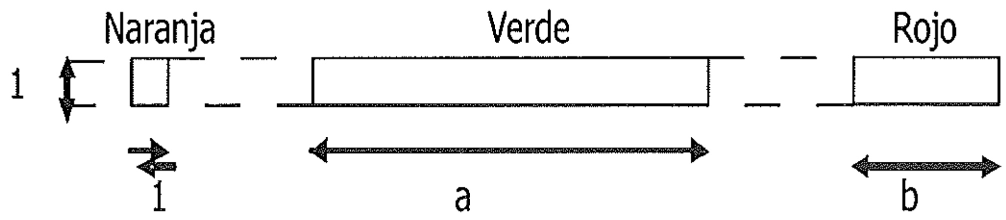
Materiales:	Regletas.
No. de páginas:	2

1. SELECCIONA ENTRE LOS CUADRILÁTEROS, LOS RECTÁNGULOS(R) Y LOS CUADRADOS(C):



2. COMPLETA:

- **EL ÁREA DE UN CUADRADO ES: ____________**
- **EL ÁREA DE UN RECTÁNGULO ES: ____________**



TERMINA DE LLENAR LA TABLA:

FIGURA	COLOR	ÁREA
Cuadrado pequeño	Naranja	
Rectángulo 1	Verde	
Rectángulo 2	Rojo	
Rectángulo 3		
Cuadrado mediano		
Cuadrado grande		

ÁREA 1	ÁREA 2	ÁREA 3	ÁREA 4	ÁREA FINAL
2 x 1	2 x 5	2 x 3		
2 x 3	3 x 6	3 x 3		
1 x a	2 x a	4 x a		
a x b	5 x b	2 x a	10	
a x b	5 x b	2 x a	15	
a x b	5 x b	2 x a	6	
a x b	5 x b	2 x a	8	
b x b	4 x b	3		
a x a	6 x a	8		
b x b	6 x b	9		
a x a	8 x a	16		
b x b	3 x b	2		
a x a	-5 x a	6		
b x b	-2x b	1		
a x a	-7 x a	12		
b x b	-3 x b	2		
a x a	-a x 1			
b x b	-1			
a x a	-4			
b x b	4 x b	-12		
a x a	a	-2		
a x a	2 x a	-15		
a x a	-2 x a	-3		
a x a	- x a	-8		
a x a	-3 x a	-10		
2 x a x a	7 x a	3		
3 x b x b	8 x b	4		
3 x a x a	-8 x a	4		
2 x b x b	-3 x b	1		
3 x a x a	a x 1	-2		
3 x b x b	5 x b	-2		
3 x b x b	5 x b	-2		
3 x a x a	-a	-4		
2 x a x a	-2 x a	-12		

Elaborado por:	Elízabeth Montoya y Juan David Montoya. 1999
Bibliografía:	La Construcción matemática, Z. P. Dienes, E. W. Golding. Editorial Vicens-Vives, Barcelona, España, 1970.

EL TRIÁNGULO DE PASCAL

Materiales:	Un triángulo de Pascal en cubos, lápices de colores, lápiz y papel.
No. de páginas:	5

Blaise Pascal nació en Francia en 1623. Fue un niño prodigio, fascinado por las matemáticas. Cuando Pascal tenía 19 años, inventó la primera máquina calculadora que realmente funcionó. Esto era algo que otro matemático llamado Fibonacci había intentado hacer antes, pero no le funcionó.

Uno de los temas que le interesaban a Pascal, era la probabilidad de que un evento ocurriera. Su interés fue impulsado por un apostador, el cual le pidió a Pascal que lo ayudara para adivinar mejor acerca de cuáles resultados tenían la mayor probabilidad de ocurrir cuando se lanzaban dos dados. Al realizar sus investigaciones, Pascal produjo un arreglo triangular de números que ahora lleva su nombre. El arreglo era conocido por los chinos 300 años antes que Pascal, pero fue él quien lo desarrolló completamente.

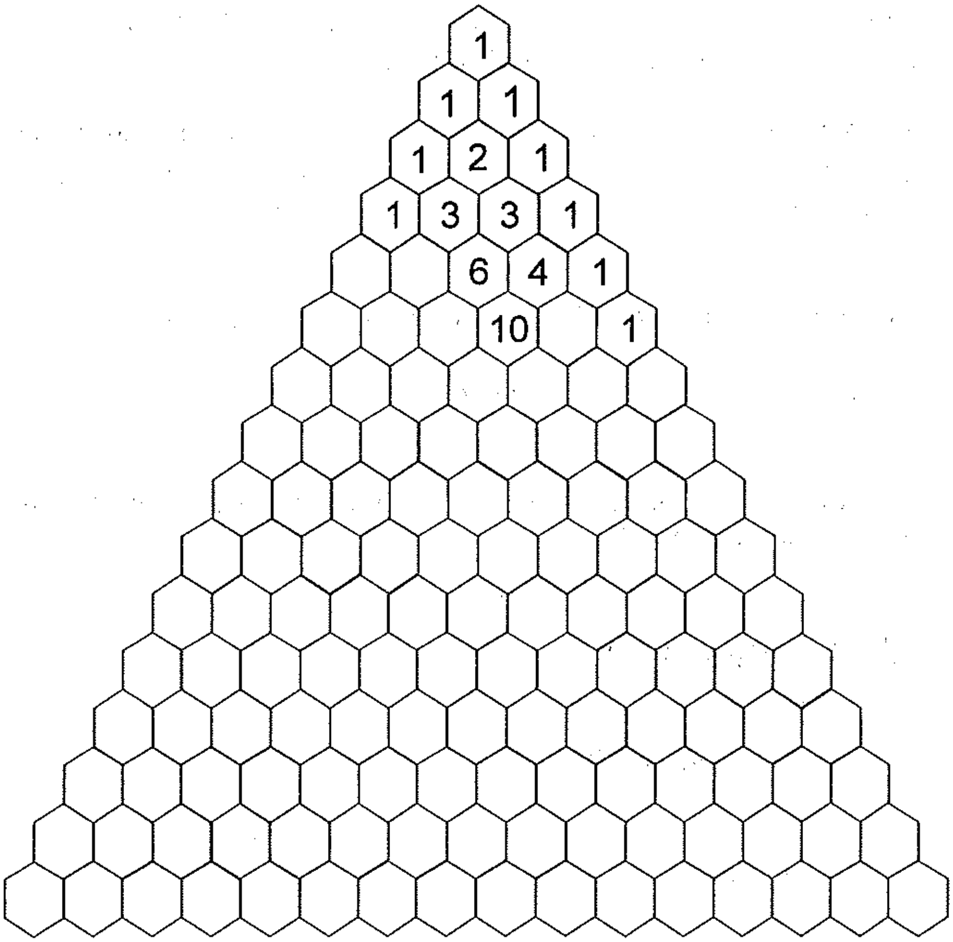
El triángulo de Pascal es un arreglo triangular de filas. Cada fila empieza y termina con un "1". La primera fila contiene sólo el número 1. En la segunda fila se tienen dos elementos, que de acuerdo con lo anterior serán dos unos. A partir de la tercera fila cada número, exceptuando los extremos de la fila, es la suma de los números escritos justamente encima de él.

El triángulo de Pascal es usado para mostrar probabilidad y también para hallar combinaciones.

ACTIVIDAD I:

- En la figura que hay a continuación ¿puedes encontrar alguna relación entre los números que están allí colocados? ¿Cuál es?

Con la relación que encontraste llena los demás hexágonos que se encuentran en la figura.



2. Ahora que ya tienes llena la figura escoge dos colores y colorea de un color los números impares y de otro color los números pares. ¿Qué observas?

¿Qué crees que pasaría si coloreamos de un color los números múltiplos de tres?

¿Y los números múltiplos de 5?

ACTIVIDAD II: LA PIZZA Y EL TRIÁNGULO DE PASCAL

La manera en que pensamos varía de una persona a otra. Muchos problemas se pueden resolver de distinta manera. Veamos dos formas diferentes de resolver el mismo problema:

1. **PROBLEMA:** Un lugar de pizzas ofrece pepperoni, champiñones, jamón y queso como ingredientes para una pizza regular. ¿Cuántas pizzas diferentes crees que se pueden hacer?

___

✓ Si vamos a comernos la pizza con todos los ingredientes,

¿Cuántas combinaciones hay?

___

✓ Si vamos a comernos la pizza con sólo 3 ingredientes, ¿Cuántas combinaciones hay?

___

✓ ¿Y con 2 ingredientes?

___

✓ ¿Y con 1 ingrediente?

___

✓ ¿Y sin ningún ingrediente?

___

De lo anterior puedes decir ¿cuántas pizzas diferentes pueden hacerse?

Lo que acabaste de hacer se llama "combinatoria".

2. Ahora analicemos el problema de otro modo:

En el problema planteado en el punto anterior: ¿Cuántos ingredientes ofrece el lugar de pizzas?

___

¿Es cierto que cada uno de los ingredientes puede estar o no en la pizza?

___

Entonces, ¿cuántas posibilidades tiene cada ingrediente?

____

¿Qué ocurre si multiplicamos las posibilidades de cada uno de los ingredientes?

____

¿Tiene alguna relación el número que acabaste de hallar con el que encontraste en el punto anterior?

____

Lo que acabaste de hacer se llama "probabilidad".

Las soluciones anteriores tienen algo interesante: las combinaciones que encontraste en el punto 1 son términos de una fila en el triángulo de Pascal. Si las filas se enumeran desde 0, a cual fila corresponden?

____

La suma de las combinaciones equivale a 24, lo que probamos en el segundo punto de esta actividad. ¿Será que la suma de los números de cada fila en el triángulo de Pascal cumple alguna ley de formación?______________________________

Para que averigües esto vuelve al dibujo de la actividad I y suma los números de cada fila.

- Con todo lo anterior ¿cuál crees que serían las combinaciones si en vez de 4 ingredientes utilizo 6?

____

ACTIVIDAD III:

Coge la tercera diagonal del triángulo de Pascal, mira los números que corresponden a esta diagonal: 1, 3, 6, ... ¿Se te hacen familiares esos números? ¿Cuál es su ley de formación? ¿Puedes encontrar alguna forma para hallar la suma de los dos primeros números de esa diagonal usando el triángulo de Pascal?

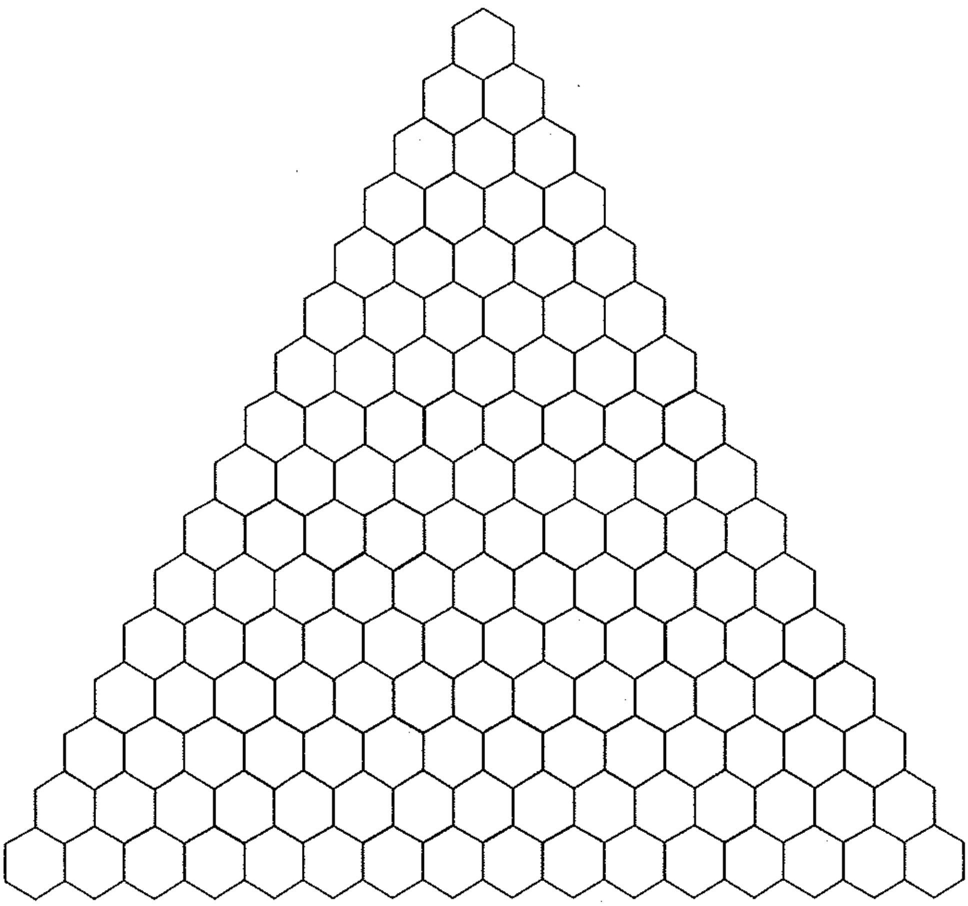
¿Y los seis primeros? ¿Y los 10 primeros? ______________

____

Con lo que has realizado en este taller has visto algunas de las propiedades del triángulo de Pascal, pero no las únicas. Si te interesa el tema es mucho lo que puedes aprender de este triángulo que a simple vista uno podría creer que no sirve para muchas cosas.

Elaborado por:	Ana Beatriz Acevedo, Carlos J. Echavarría. Mayo de 2000
Bibliografía:	El diablo de los números, Hans Magnus Enzensberger, Siruela, 1997. El universo de los números, Historia y evolución de las matemáticas, Lancelot Hogben, Ediciones Destino, Barcelona. Más allá de los números. Meditaciones de un matemático. Metatemas 31. Libros para pensar la ciencia. John Allen Paulos, Barcelona, 1993

EL TRIÁNGULO DE PASCAL



Gráficas e Imágenes para Mover el Pensamiento

DIEGO LEÓN CORREA ARANGO

Licenciado en Matemática y Física. Universidad de Antioquia,
Docente de Cátedra de la Universidad de Antioquia
Educación Matemática. ELIME. CEID-ADIDA

MEDELLÍN
2010

GRÁFICAS E IMÁGENES PARA MOVER EL PENSAMIENTO

" Una imagen vale más que mil palabras"
Confucio.

RESUMEN

En la realización de ejercicios y en la resolución de problemas, en la mayoría de las ocasiones, parece ser que tan sólo existiera un método de solución, que generalmente resulta siendo de procedimientos largos y de difícil comprensión, incluso podemos observarlo en muchos de los textos de matemáticas tradicionales.

Si observan con atención, muchos de los problemas que resolvemos por métodos complejos y de difícil comprensión, se pueden resolver con extraordinaria facilidad, tan solo con realizar una gráfica, esquema o ilustración, que nos permite visualizar la situación.

1. INTRODUCCIÓN

Constantemente omitimos y recibimos información, ésta información puede registrarse de múltiples formas; un cuadro, una imagen, una representación gráfica, entre muchas otras.

Su propósito generalmente es el de comunicar conceptos o servir como instrumento de pensamiento, como un medio para capturar pensamientos e ideas aún sin estructurarse y así trabajar con ellos para descubrir significados[1].

Las imágenes pueden ser también una manifestación del arte, que permiten deleite, disfrute y en ocasiones un goce especial, que permite transportarnos y soñar.

Las imágenes, como elementos portadores de información, no sólo estimulan el pensamiento para recrear la mente, también sirven como base en la solución de problemas, en general como un canal para comunicar y recibir ideas, bien lo expresaba Joyce Wycogg en su texto: "trucos de la mente creativa".

[1] Se puede consultar más en el texto: "Aprender con todo el cerebro" de Linda VerLee Williams pag. 104.

Las imágenes, inicialmente se presentan con la intención de sensibilizarnos desde la observación, sin desconocer su importancia práctica, aunque el simple hecho de estimular nuestros sentidos ya es importante y práctico e incluso es posible que con sólo ese hecho ya se haya resuelto algún problema.

En conclusión se pretende con este trabajo resolver problemas con la utilización de gráficos.

Sólo observaremos algunas imágenes con algunas observaciones mínimas sobre ellas.

2. CUADROS Y GRÁFICAS EN LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Las imágenes y las gráficas no sólo sirven para recrear nuestros ojos y nuestra mente, también pueden ser de gran ayuda en la ilustración de un mensaje o convertirse en un potente auxiliar para la solución de problemas y situaciones problematizadoras representándolos con ayuda de puntos, líneas, círculos, cuadros y otra gran variedad de gráficos y figuras. Observemos algunos ejemplos, comparando diferentes formas en las estrategias de solución:

Figura 1

La figura 1 nos puede informar que hay hombres trabajando cerca de la vía.

En algunas ocasiones una simple gráfica representa la demostración de un teorema, eso puede verse en el siguiente ejemplo (ver figuras 2 y 3) del teorema demostrado a traves de dos ilustraciones atribuidas al matemático hindú Bháskara (hacia 1150 d.C.). Según él, no es necesaria explicación alguna y se limitó a escribir : "¡Mira!" bajo la figura[2].

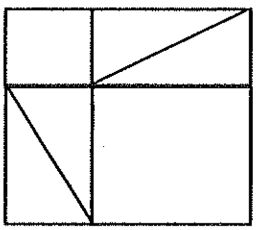


Figura 2

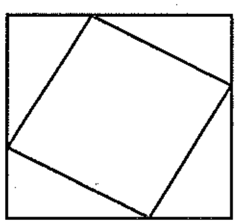
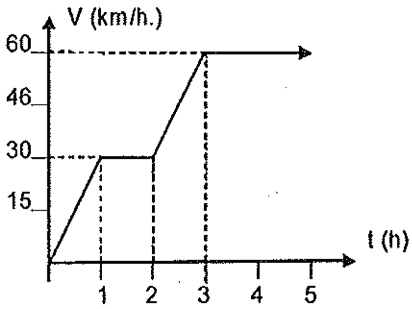


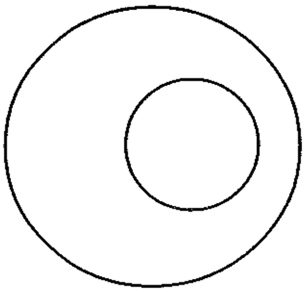
Figura 3

[2] Se puede observar en Bolt Brian 101 Proyectos matemáticos (1991 pág. 83).

También se utilizan gráficas para representar el movimiento de un cuerpo. En el siguiente ejemplo se representa la trayectoria de un auto a través de la relación V vs. t .

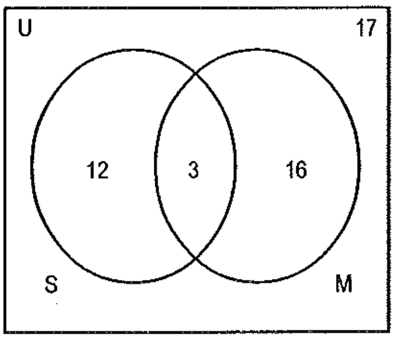


Según el gráfico el auto parte del reposo, viajando durante una hora a una velocidad de 50km/h, deteniéndose durante una hora para reanudar el movimiento con una velocidad de 10 km/h. durante una hora más y detenerse luego.



Utilizando diagramas de Ven Euler, se puede representar el conjunto de todas las aves (representado por el círculo grande) y el conjunto de todos los canarios (representado por el círculo pequeño). Con el círculo pequeño en el interior del círculo grande se indica que todos los canarios son aves.

El diagrama de Ven Euler puede encontrarse de la siguiente forma y con la siguiente distribución numérica:

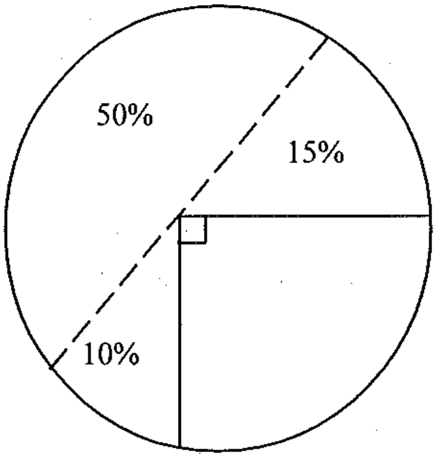


El gráfico nos puede dar información sobre muchos Aspectos. Veamos uno de tantos:

En un grupo de 48 estudiantes (12+3+16+17) se encontró que: Para las asignaturas de sistemas y matemáticas:

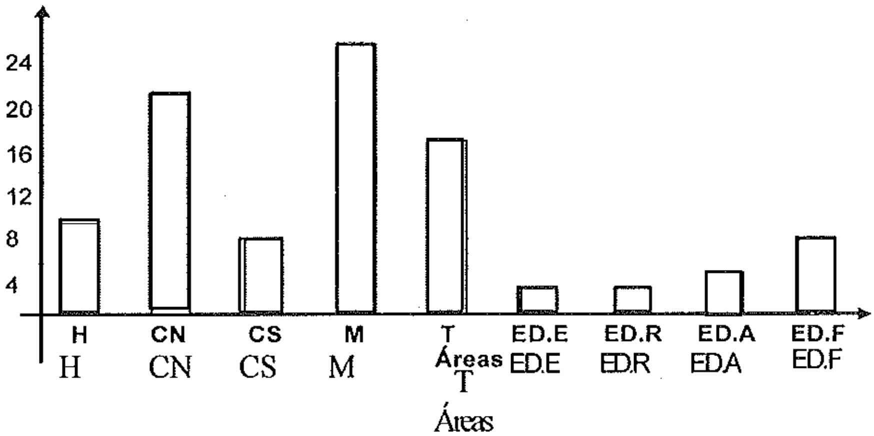
3 estudiantes perdieron sistemas y matemáticas.
12 perdieron solamente sistemas,
16 perdieron solamente Matemáticas y
17 no perdieron ninguna de estas asignaturas.

Observemos el siguiente diagrama circular, con unos datos porcentuales distribuidos en él así:



El pequeño cuadro dibujado en uno de los ángulos (en el cual no aparece un número porcentual establecido) nos indica que la medida de dicho ángulo es de 90 grados. Debemos tener en cuenta que al círculo completo se le asigna una medida en grados equivalente a 360 grados, lo cual nos indica que una medida de 90 grados representa la cuarta parte, por lo cual este ángulo representa similarmente la cuarta parte del 100%, 10% o sea, el 25%. Esta gráfica nos estaría dando información, por ejemplo, sobre cierta población de habitantes en la cual se cumple que 50% son mujeres jóvenes o adultas, el 25% son hombres jóvenes o adultos, el 15% son niñas y el 10% son niños. Si en dicho pueblo el número de habitantes es de 1´200.000 si sabe, además, que las personas de edad avanzada se cuentan como adultos, se puede concluir entonces que:

El número de mujeres del pueblo son 600.000 (correspondiente al 50% que es la mitad) El 25% que son hombres (esto es la cuarta parte) estarían conformados por 300.000 habitantes. Observemos ahora que: el 10% de 100 corresponde a la décima parte, por lo tanto, como la décima parte de 1´200.000 es 120.000, esta cantidad corresponde a la cantidad de niños de la población. El resto que equivale a 180.000 habitantes (es la cantidad que falta para obtener el total de habitantes que son 1´200.000) corresponde al 15% que sería la cantidad de niñas de la población.



Utilizando **diagramas de barras** puede representarse un pequeño dato estadístico de los estudiantes que perdieron diferentes áreas, veamos teniendo en cuenta las siguientes convenciones en el gráfico anterior:

H:	Humanidades.	**CN:**	Ciencias naturales.
CS:	Ciencias sociales.	**M:**	Matemáticas.
T:	Tecnología.	**ED.E:**	Educación ética.
ED.R:	Educación religiosa.	**ED.A:**	Educación artística.
ED.F:	Educación física.		

Se puede deducir que el área de :

Educación ética la perdieron 4 estudiantes al igual que Educación religiosa.

Educación artística la perdieron 6 estudiantes.

Ciencias sociales la perdieron 8 estudiantes al igual que Educación física.

Humanidades la perdieron 10 estudiantes.

Tecnología la perdieron 16 estudiantes.

Ciencias naturales la perdieron 20 estudiantes.

Matemáticas la perdieron 24 estudiantes.

Una gran mayoría de los problemas que incluyen números fraccionarios se pueden resolver fácilmente con la ayuda de una ilustración gráfica.

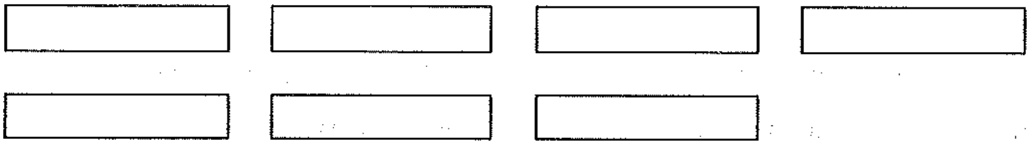
Aunque los antiguos egipcios conocían los números fraccionarios, se limitaban a los inversos de los enteros naturales no nulos. En este sentido una fracción egipcia es un número de la forma $\frac{1}{n}$, donde n es un número entero. En una tabla de arcilla se encontró el siguiente problema: ¿Cómo repartir equitativamente siete panes entre diez hombres?

Se esperaría que la respuesta fuera $\frac{7}{10}$, sin embargo la respuesta propuesta por el egipcio es "la mitad de un pan más un quinto de un pan"[3]. Numéricamente se tiene que:

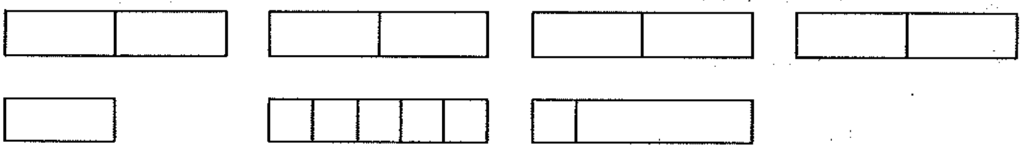
[3] Revista: Mundo Científico. "El universo de los números" 1981. pag. 101 y 102.

$$\frac{7}{10}=\frac{1}{2}+\frac{1}{5}$$

Representando los panes gráficamente de la siguiente forma:



Las particiones serían:



A cada hombre le corresponde medio pan más un quinto de pan, así:

Observemos que muchas de las representaciones de objetos que se realizan en matemáticas no corresponden a la realidad (los panes generalmente no tienen forma poliédrica de caras rectangulares), sin embargo, dichas representaciones ayudan a visualizar mejor la solución.

En la elaboración de un gráfico se pone de manifiesto las potencialidades de nuestro hemisferio derecho, en caso de tenerlas muy "pobres", su práctica no nos permitiría mejorarlas, puesto que ese hemisferio "piensa en imágenes" y se ocupa de aspectos espaciales y visuales.

Lograr desarrollar la inteligencia espacial facilita la solución de problemas de una forma ágil, mejorando, además, la capacidad de análisis.

En las matemáticas existen muchos problemas que tradicionalmente se resuelven con una regla de tres, ecuaciones o con otros métodos más complejos, cuando en realidad una gráfica sería de mucha ayuda en la solución.

En lo que sigue de este trabajo pretendo presentar algunos ejemplos (en su mayoría de fraccionarios) que se pueden resolver con mayor facilidad utilizando una gráfica.

Presentaré inicialmente algunos de los métodos utilizados tradicionalmente. Veamos:

Ejemplo 1

Si vendo un libro en $28.800 ganándole el 20%. Calcular el precio original del libro.

Solución 1(utilizando ecuaciones) X: Precio original del libro.

$\frac{20X}{100} = \underline{0.2X}$: 20% del precio original del libro.

X + 0.2X : Precio de venta.

Por lo tanto la ecuación planteada sería:

X + 0.2X = $28.800. Realizando la suma de términos semejantes tenemos que:

1.2X = $28.800. De lo cual se deduce que:

$X = \frac{\$28.800}{1.2}$ Esta ecuación es equivalente a escribir: $X = \frac{\$288000}{12}$

Realizando la operación se obtiene que: X = $24.000

Solución 2 (regla de tres)

$\$28.800 \longrightarrow 120$

$X \longrightarrow 100\%$

Corresponde a una regla de tres simple y directa. Simple por tratarse solo de dos magnitudes($ y %) y Directa porque al aumentar una magnitud, la otra también aumenta, o al disminuir una la otra también disminuye. Por ser directa se cumple que:

$X = \frac{\$28.800 \times 100\%}{120\%}$ Simplificando términos semejantes se obtiene que X = $24000.

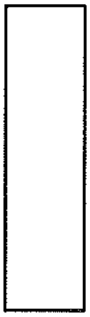
Recordemos que por proporcionalidad se obtendría que:

$\frac{\$28.800}{X} = \frac{120\%}{100\%}$ Por ser directa y se prosigue como en el caso anterior, así que: $X = \dfrac{\$28.800 \times 100\%}{120\%}$

Si las dos magnitudes son inversas (esto es, que al aumentar una magnitud, la otra disminuye o al disminuir una magnitud la otra aumenta) se invierte uno de los dos pares de miembros.

Solución 3 (utilizando la ayuda de una gráfica).

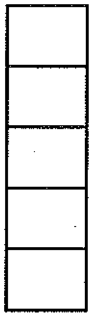
Representamos el precio original por medio de una gráfica así:



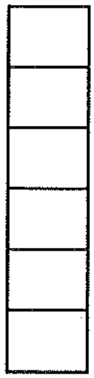
Si esta gráfica corresponde al 100%, entonces contiene 5 partes de un 20%.

La gráfica que representa este hecho; sería la que se presenta a la derecha.

Cada cuadro pequeño representa 20%.



Si este libro lo vendo ganando el 20%, la nueva gráfica quedaría no con 5 partes de 20% sino con 6, observemos:



En este último caso, las seis casillas representan \$28.800, siendo cada casilla un 20%. Por lo tanto, se tiene que:

El precio que habría en cada casilla sería de $\dfrac{\$28.800}{6} = \$4.800$. Como el precio original contiene 5 partes de 20%,

luego el precio original sería de \$4.800x5 = \$24.000

Ejemplo 2

Un gavilán dice a una manada de palomas que pasa volando: "Ahí van mis cien palomas". Una de ellas se detiene y le dice: " No somos cien, pero nosotras más otro tanto, más la mitad, más la cuarta parte y usted sumamos cien". Calcular el número total de palomas que habían.

Solución 1 (utilizando ecuaciones)

X: Cantidad de palomas que habían. X : Otro tanto $\frac{X}{2}$:La mitad.

$\frac{X}{4}$: La cuarta parte. 1: Corresponde al gavilán.

Por lo tanto la ecuación planteada sería:

$X + X + \frac{X}{2} + \frac{X}{4} + 1 = 100$ Reuniendo términos semejantes, se obtiene que:

$X + X + \frac{X}{2} + \frac{X}{4} = 100 - 1$. Equivalente a obtener:

$2X + \frac{X}{2} + \frac{X}{4} = 99$ Llevando las expresiones a un mismo denominador se tiene:

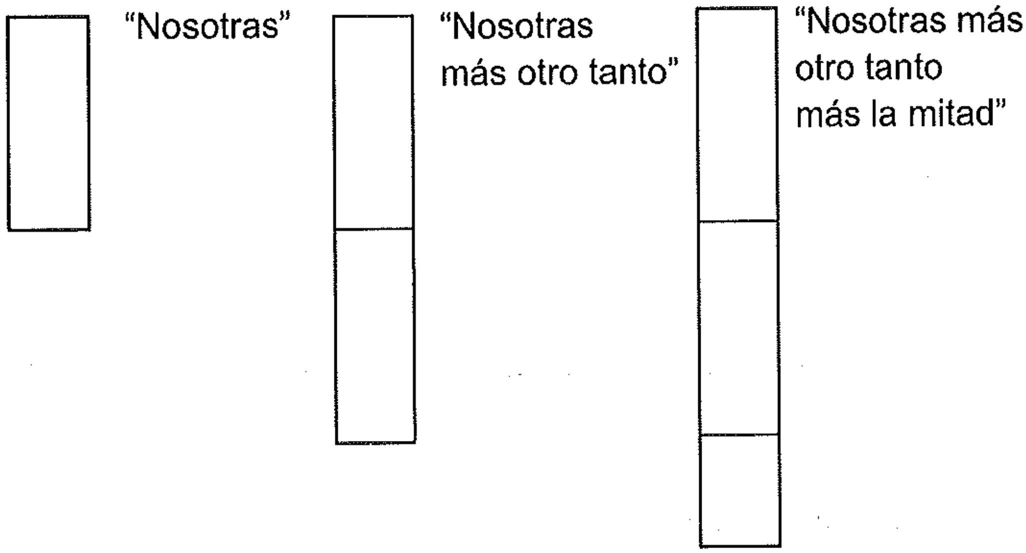
$\frac{8X}{4} + \frac{2X}{4} + \frac{X}{4} = 99$. Realizando operaciones básicas se obtiene:

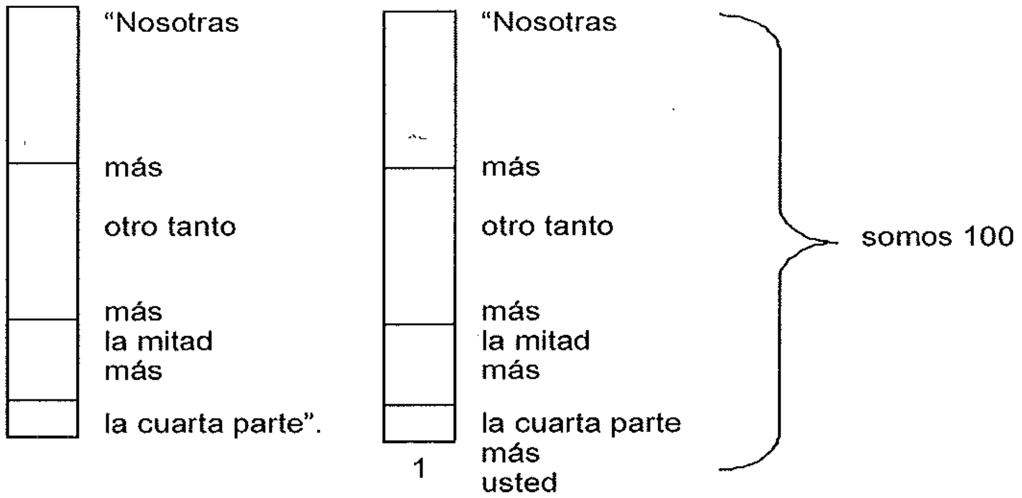
$\frac{11X}{4} = 99$. Lo cual equivale a escribir que: $11X = 4 \times 99$.

Luego: $X = \frac{4 \times 99}{11}$ Simplificando se obtiene finalmente que X = 36
Que corresponde al número de palomas.

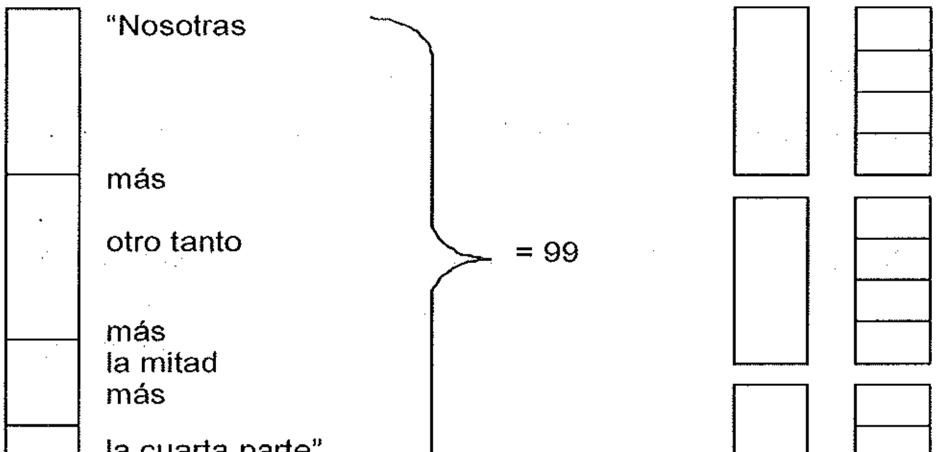
<u>Solución 2</u> (utilizando la ayuda de un gráfico)

Representemos con un gráfico el diálogo de la paloma con el gavilán:





Puede deducirse que:



Por lo tanto cada cuarta parte de las palomas ("Nosotras") equivale a $\frac{99}{11} = 9$

Luego la cantidad de palomas eran 9 x 4 =36 palomas.

TALLER NO 1

Realice una gráfica en la cual se represente cada uno de los siguientes grupos de conjuntos:

1. Animales, cuadrúpedos
2. Animales, cuadrúpedos, conejos.
3. Animales, cuadrúpedos, conejos, gallinas.
4. Madres, abuelas, mujeres.
5. Padres, hijos, madres.
6. Colombianos, antioqueños, bogotanos.
7. Rectángulos, polígonos, cuadriláteros.
8. Estudiantes, cantantes, mujeres
9. Niños, hombres, niñas.
10. Tíos, payasos, personas.
11. Aves de corral, gallinas, caballos.
12. Letras, consonantes, vocales.
13. Figuras geométricas de 6 lados, polígonos, hexágonos.
14. Perros, murciélagos, cuadrúpedos, mamíferos.
15. Médicos, hombres, ancianos, personas fumadoras.
16. Legumbres, frutas, hortalizas.
17. Números, dígitos, fraccionarios, Números primos.
18. Músicos, poetas, pintores, hombres rubios.
19. Soldados, Generales, políticos,
20. Abuelas, niñas, mujeres, hijas.

TALLER Nº 2

Para las siguientes situaciones o problemas, trate de realizarlos por diferentes métodos (incluyendo un método gráfico) y compárelos.

1. En una hilera de 4 casas, los Correa viven al lado de los Gómez, pero no al lado de los Arango. Si los Arango no viven al lado de los Ocampo.¿Quiénes son los vecinos inmediatos de los Ocampo?.

2. Olga es mayor que Dora y menor que Isabel, quien tiene la misma edad de Paula. ¿Quién es la menor?.

3. Se rompe una cadena en dos partes, una de ellas queda con 24 argollas y la otra con los $\frac{3}{5}$ del total original. ¿Cuántas argollas tenía la cadena?

4. Un hombre cultiva $\frac{1}{4}$ de tierra, echa en potrero $\frac{2}{5}$ del resto, la mitad de las que quedan las urbaniza y vende las 25 hectáreas restantes. Calcular:

   a. Número de hectáreas que cultiva.
   b. La cantidad de hectáreas que echa en potrero.
   c. Cuántas hectáreas urbaniza.

5. El peso de un ladrillo equivale a 6kg. más un tercio de su peso, ¿Cuál es el peso total de tres ladrillos?.

6. Se realizó una investigación sobre diferentes tipos de leche y se encontró que algunas clases se venden más que otras, así:
   La leche pasteurizada se vende más que la leche entera.
   La venta de leche natural es mayor que la de leche condensada, pero menor que la de leche entera.
   La leche semidescremada se vende más que la natural, pero menos que la leche entera.
   La leche descremada se vende más que la leche condensada, pero menos que la natural.
   ¿Cuál tipo de leche se vende más y cuáles siguen en mayor venta en orden decreciente?.
7. José es más rápido que Tomás. Pedro es más rápido que Samuel, pero a diferencia de José es más lento que Tomás. Por otra parte, se sabe que José es más lento que Miguel y Samuel más rápido que Jacobo. ¿Quién es el más rápido?.

8. Diana tiene cierta cantidad de dinero. Invierte la sexta parte en alimentación, 2/5 del resto en estudio, la tercera parte de lo que queda en servicios, de lo restante finalmente regala a su hijo la quinta parte. Si aún tiene \$6.000. ¿Cuánto tenía al principio?.

9. Andrés, Bernardo y Carlos viajan en moto. Cada uno de ellos conduce la moto de cada uno de sus amigos y lleva el casco de otro distinto al de la moto. El que lleva el casco de Carlos conduce la moto de Bernardo. Hallar la distribución de los cascos y de las motos para cada uno.

10. De un grupo de 52 estudiantes, 12 ganaron matemáticas y español, 25 ganaron matemáticas, 30 perdieron español. Calcular:

    a. ¿Cuántos ganaron sólo matemáticas?.
    b. ¿Cuántos perdieron matemáticas y español?.
    c. ¿Cuántos perdieron sólo matemáticas?.

11. En una piñata se reparten cierta cantidad de bombas. Los 3/10 son rojas, los 2/7 del resto son amarillas, la quinta parte del nuevo resto son azules, los 3/4 de las que sobran son blancas, la tercera parte del nuevo resto son color naranja. Si la mitad de las que me han sobrado son color lila y si pinchan 5 bombas, calcular:

    a. El número de bombas de cada color.
    b. El porcentaje de cada una de las cantidades de bombas existentes de cada color.

12. ¿Cuál es el número cuyos 2/5 equivalen a 50?.

13. Un padre tiene 24 años más que su hijo. Si dentro de 8 años la edad del padre será el doble que la del hijo, hallar las edades actuales.

14. Las edades de dos hermanos están en relación de 2 a 5. Si el mayor tiene 25 años, hallar la edad del menor.

15. Entre Isabel, Viviana y Olga pagan \$6.000 por una boleta con la cual se rifan \$12´000.000. Isabel aporta \$1.000, Viviana \$2.000 y Olga \$3.000. Si tuvieron mucha suerte ganando la rifa y repartieron el dinero proporcionalmente según lo aportado, ¿cuánto dinero recibe cada una?.

BIBLIOGRAFÍA

- Casas, Esperanza. Inteligencia visual y espacial. Bogotá. 2000.
- Doran Jody L. Y Hernández Eugenio. ED. Ad dison N Wesley Las matemáticas en la vida cotidiana. Madrid 1998.
- Fernández Cano Antonio y otros, Prensa y Educación Matemática. Madrid 1996.
- .... Mosaicos de Penrose y escotillas cifradas. Barcelona. 1990.
- .... Los acertijos de Sam Loyd. Madrid. 1992.
- .... Nuevos acertijos de Sam Loyd. Madrid. 1996.
- Devlin, Keith. El lenguaje de las matemáticas. Bogotá. 2003.
- De Guzmán, Miguel. Para pensar mejor. Barcelona. 1991.
- Lawlor, Robert. Geometría Sagrada. Madrid. 1996.
- Gómez Joan. De la enseñanza al aprendizaje de las matemáticas. ED. Paidos. Barcelona 2002.
- Peterson, Ivars y Nancy. Matelocuras. México. 1999.
- Enciclopedia. Megactividades. México. 2001.
- Stevens, Peter S. Patrones y pautas en la naturaleza. Barcelona. 1987.
- Bransford, John D. Y Stein, Barry S. Solución ideal de problemas. Barcelona. 1986.
- Gelb, Michael J. Inteligencia genial. Bogotá. 1999.
- Quatro Children's Books Ltda. El gran libro del tangram. Barcelona. 2000.

- Marchand, Pierre. Secretos del tangram. Italia. 1998.
- Del Río Sánchez, José. Lugares geométricos. Cónicas. Madrid. 1996.
- Allen, Robert. Problemas lógicos y visuales. Barcelona. 2000.
- Von Oech, Roger. Sé creativo. México. 1996.
- Wycoff, Joyce. Trucos de la mente creativa. Barcelona. 1996.
- Talanquer, Vicente. Fractus, fracta, fractal. Fractales, de laberintos y espejos. México. 1996.
- Braun, Eliezer. Caos, fractales y cosas raras. México. 1996.
- Mandelbrot, Benoit. La geometría fractal de la naturaleza. Barcelona. 1997.
- VerLee Williams, Linda. Aprender con todo el cerebro. Barcelona. 1986.
- Falleta, Nicholas. Paradojas y juegos. Barcelona. 2000.
- Raudsepp, Eugene. Juegos creativos. México. 1989.
- Edwards, Betty. Aprender a dibujar con el lado izquierdo del cerebro. Barcelona. 1994.
- Bruño, G.M. Nociones Elementales de Geometría aplicadas al dibujo lineal.
- Editorial Bedout, Medellín Colombia, 1962.

Interpretación Geométrica de algunos Modelos Aritméticos: Visión Teórica

JORGE CARDEÑO ESPINOSA

Licenciado en Matemáticas - Física. Universidad de Antioquia.
Magister en Didáctica de las Matemáticas. Instituto Pedagógico Latinoamericano y Caribeño IPLAC. La Habana-Cuba.
Especialista en Informática y Telemática. FUA. Bogotá
Director línea de Investigación:
Educación Matemática. ELIME. CEID-ADIDA

MEDELLÍN
2010

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE ALGUNOS MODELOS ARITMÉTICOS:
Visión Teórica

JORGE CARDEÑO ESPINOSA
Director Línea de Investigación: "Educación Matemática". CEID-ADIDA
Licenciado en Matemáticas-Física. U. de A.
Magíster en Didáctica de las Matemáticas. IPLAC. La Habana-Cuba
Especialista en Informática y Telemática. FUA. Bogotá

RESUMEN

El presente escrito intenta profundizar en el conocimiento histórico de la Geometría y la Aritmética, sin dejar de establecer su importante relación con el Álgebra y la Trigonometría y Geometría Analítica, buscando establecer una relación directa entre las Matemáticas y la realidad, para que tanto docentes como estudiantes encuentren valor y significado a su enseñanza, pues un conocimiento sin fundamentación no debería ser abordado en el aula de clase, sino que se debe despertar su interés y valor histórico, así como el esfuerzo de la humanidad a través del tiempo en su desarrollo y aplicación.

Con el título: "Interpretación Geométrica de Algunos Modelos Aritméticos IGAMA" se quiere señalar la necesidad de vincular las asignaturas preliminares a la Trigonometría y Geometría Analítica, como las señaladas anteriormente y sin las cuales se dificulta la comprensión de las Matemáticas escolares. Por ello se destaca inicialmente su valor y conocimiento histórico.

1 INTRODUCCIÓN E HISTORIA DE LA ARITMÉTICA

Se supone, comúnmente, que la Aritmética es la rama más sencilla de las Matemáticas. Nada más lejos de la realidad. El tema es difícil de plantear, aunque se admite que la práctica de la aritmética elemental es fácil. Lo mismo puede decirse de la mayoría de las ciencias: no es necesario comprender la teoría electromagnética para instalar una lámpara, ni estudiar física para reparar una bomba. Podemos contar con nuestros dedos, y no damos importancia a las dificultades que implica este acto.

Las reglas fundamentales y las operaciones de aritmética son extraordinariamente difíciles de definir. Los conceptos de cálculo y de número se han impuesto a la capacidad de los pensadores más sutiles, los problemas de la teoría de números, que puede ser expresada de tal modo que un niño pueda comprender su sentido, se han opuesto durante siglos a cualquier intento de resolución. Es extraño que sepamos tan poco sobre las propiedades de los números. Son obra nuestra, pero nos desconciertan. Solo podemos penetrar algunas de sus intrincaciones. Habiendo definido sus atributos y prescrito su comportamiento, tenemos mucha prisa por percibir sus implicaciones de nuestras fórmulas.

De la teoría de números, ERIC TEMPLE BELL, dice: "es el último gran continente salvaje de las matemáticas". En esta teoría, como en África, siempre hay algo nuevo. Desde hace 2.500 años, aficionados, al igual que profesionales, la han explorado; sin embargo, aún hay muchas razones para esperar que los descubrimientos futuros con o sin la ayuda de máquinas, "superen con mucho" los del pasado.

Fueron sin duda los griegos los primeros que se interesaron por las propiedades de los números como tales, es decir, a indagar acerca de sus propiedades y naturaleza intrínseca. Antes de los griegos los números fueron utilizados, casi exclusivamente, con fines prácticos como contar y medir, o si acaso en especulaciones numerológicas a las que el mismo Pitágoras prestó mucha atención. En efecto, aunque Pitágoras y sus discípulos estudiaron muchas de las propiedades de los números, su manera de pensar era más mística que racional, de manera que los pitagóricos les atribuían a los números toda suerte de poderes. Fue solo con la publicación de los ELEMENTOS de EUCLIDES, hacia el año 300 antes de nuestra era, que la numerología dio paso a una ciencia rigurosa. Euclides fue el primero en presentar los hechos matemáticos junto con demostraciones válidas para éstos. Tres de los trece libros de los ELEMENTOS, están dedicados a la teoría de números.

Los griegos no dejaron problema en geometría que los modernos no hayan resuelto. Frente a algunas pequeñeces, como los números perfectos y los números "amigos". La búsqueda de los números perfectos es uno de los más antiguos problemas de la teoría de números. Un número perfecto es aquel cuyos divisores, excluido el número mismo, suman igual al número. El número perfecto más pequeño es 6 dado que 6 = 1 + 2 +3.

Los griegos sabían que, además de 6, los números 28, 28.496 y 8.128 también son perfectos. Gracias a los computadores se conocen más de

30 números perfectos, el mayor de ellos con más de 130.000 cifras. Todos los que se conocen son números pares y nadie sabe si existen o no números perfectos impares. Nadie sabe, tampoco, si hay una infinidad de números perfectos.

Similares a los números perfectos son los números amigos. Dos números enteros se dice que son amigos si la suma de los divisores del primero (excluido el mismo número) es igual al segundo y viceversa. La pareja más pequeña de números amigos, descubierta por los pitagóricos, es 220 y 284. En efecto, los divisores de 220, son 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55 y 110 cuya suma es 284, mientras que la suma de los divisores de 284 (excluido 284), es decir, 1, 2, 4, 71 y 142 es 220. La siguiente pareja de números amigos, 1.184 y 1.210, fue descubierta, a sus 16 años, por el italiano Nicolo Paganini, en 1866.

Aunque se conocen en la actualidad varios miles de parejas de números amigos, no se sabe si hay un número infinito de ellos.

Los números 1, 7, 31, 32 y otros son llamados números felices. Algún matemático descubrió que éstos y otros números se pueden identificar con la identidad, es decir, que de alguna manera son como el 1, y resolvió por ello, llamarlos números felices. Se puede verificar que si se toman las cifras de cada uno de estos números, se elevan todas ellas al cuadrado, se suman los resultados para obtener un nuevo número, y todo este proceso se repite con este nuevo número una suficiente cantidad de veces, entonces finalmente, se llega al número 1.

Pitágoras sostenía que en los números enteros como 1, 2, 3, otros, está la esencia de las cosas. Quizá por ello, él y sus seguidores buscaron propiedades curiosas de los números y trataron de relacionar formas con números, dando origen a los números triangulares, cuadrados y pentagonales. He aquí, uno de los intentos históricos de vincular el conocimiento aritmético con el geométrico[1].

Los números "triangulares" 1, 3, 6, 10, 15, otros, poseen una variedad de propiedades curiosas, algunas de las cuales se pueden deducir de sus

[1] Los Pitagóricos antiguos tienen el crédito del origen de los números figurados. Estos números, considerados como el número de puntos en ciertas configuraciones geométricas, representan un enlace entre la Geometría y la Aritmética". Eves Howard. Estudio de las Geometrías, 1999. p. 40.

configuraciones triangulares. Así, por ejemplo, los números triangulares pueden encontrarse sencillamente, sumando todos los enteros comenzando del 1, hasta cualquier otro entero. En efecto, el tercer número triangular, es decir 6, es igual a 1 + 2 + 3 mientras que para encontrar el décimo basta encontrar el valor de 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 o sea 55.

Cualquiera de los números triangulares se puede encontrar de esta manera, pero resulta muy dispendiosa si se quiere encontrar, por ejemplo, el millonésimo de ellos, pues significa llevar a cabo una adición de un millón de sumandos. ¿Hay alguna manera abreviada de hacerlo? En una escuela de Brunswick, Alemania en 1787 el profesor Buttner asignó a sus estudiantes la tarea de encontrar la suma de los números 1, 2, 3,..., 100. Entre los estudiantes, el menor era un pequeño de 9 años, llamado Karl Friedrich Gauss, quien, apenas Buttner terminó de enunciar el problema, entregó su pizarrón con la respuesta, mientras sus compañeros apenas comenzaban a resolverlo.

La respuesta de GAUSS fue la única correcta.

¿Qué truco utilizó para encontrarlo en forma tan veloz?

Para ilustrar el proceso, supóngase que se deben sumar los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 10 y nótese que si se coloca dos veces la suma pedida, una debajo de otra, la segunda de ellas en orden inverso, los números ordenados verticalmente suman siempre lo mismo 11:

$$
\begin{array}{rl}
S = & 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 \\
\underline{S =} & \underline{10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1} \\
2S = & 11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11
\end{array}
$$

Es decir, como dos veces la suma pedida es igual a 10 x 11, entonces una sola vez será igual a:

$$S = \frac{10 \times 11}{2} = 55$$

Es posible que la adición propuesta por Buttner hubiera sido calculada por Gauss usando este método, y así obtuvo que la suma de los primeros cien números enteros es igual a:

$$S = \frac{100(1+100)}{2} = 5.050$$

Este número es el centésimo de los números triangulares y con este sencillo procedimiento se pueden encontrar todos los demás. En general el enésimo número triangular es:

$$\frac{n\,(1+n)}{2}$$

Los números triangulares aparecen en varias situaciones cuando se trata de contar la cantidad de saludos que ocurren entre personas que se encuentran en el mismo recinto: esa cantidad siempre es un número triangular. En efecto, en un recinto en el que se han reunido seis personas, el número de saludos que ocurren es: 5 + 4 + 3 + 2 + 1, o sea, un número triangular.

Los números triangulares (3, 6, 10, 15,...) son enteros del tipo N = 1 + 2 + 3 +... + n

Los números cuadrados (4, 9, 16, 25,...) son enteros del tipo N = 1 + 3 + 5 + 7 +... + (2n-1)

Los números pentagonales (5, 12, 22,...) son enteros del tipo N = 1 + 4 + 7 +... + (3n-2)

Los números hexagonales (6, 15, 28,...) son enteros del tipo N = 1 + 5 + 9 +... + (4n-3)

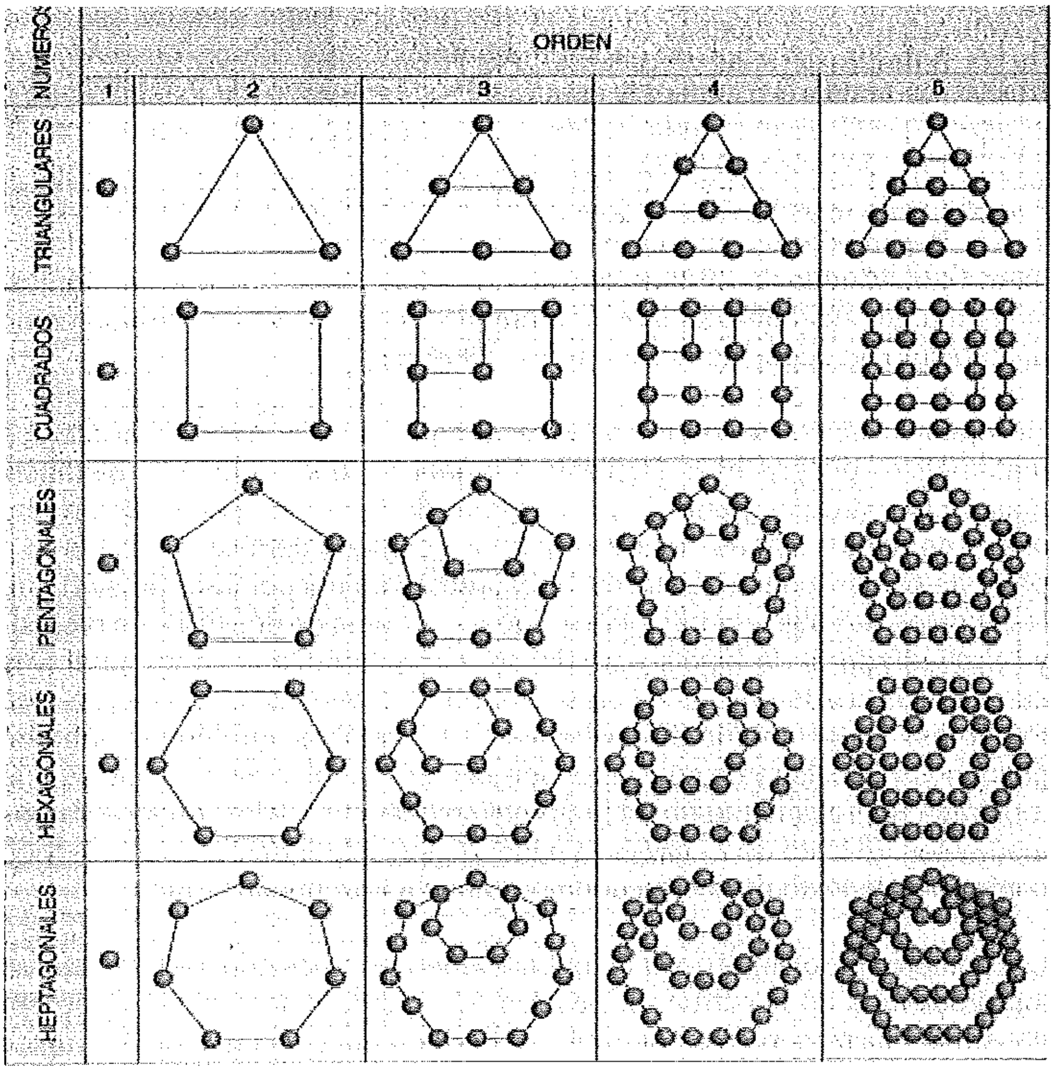
Y así sucesivamente.

Según Fermat, todo número entero puede expresarse mediante la suma de n números n-gonales como máximo. Gauss demostró esta conjetura para los números triangulares y cuadrados, Cauchy consiguió dar una demostración general.

Tomado de: personal.redestb.es/javfuetub/Aritmintro.htm

Se observa la relación directa y estrecha existente entre la Aritmética y la Geometría, como asignaturas indisolubles en que se podría denominar sus fundamentos básicos. Aritmética, literalmente significa, arte de contar. La palabra deriva del griego arithmetike, que combina dos palabras: arithmos, que significa 'número', y techne, que se refiere a un arte o habilidad.

Los números usados para contar son los naturales o enteros positivos. Se obtienen al añadir uno al número anterior en una serie sin fin. Las distintas civilizaciones han desarrollado a lo largo de la historia diversos tipos de sistemas numéricos. Uno de los más comunes es el usado, Se le denomina sistema en base 10 o decimal. Interés científico en el cual se centra más adelante la propuesta metodológica.



2 INTRODUCCIÓN E HISTORIA DE LA GEOMETRÍA

La Geometría (del griego geo, 'tierra'; metrein, 'medir'), rama de las matemáticas que se ocupa de las propiedades del espacio. En su forma más elemental, la geometría se preocupa de problemas métricos como el cálculo del área y diámetro de figuras planas y de la superficie y volumen de cuerpos sólidos. Otros campos de la geometría son la geometría analítica, geometría descriptiva, topología, geometría de espacios con cuatro o más dimensiones, geometría fractal, y geometría no euclídea.

El origen del término geometría es una descripción precisa del trabajo de los primeros geómetras, que se interesaban en problemas como la medida del tamaño de los campos o el trazado de ángulos rectos para las esquinas de los edificios. Este tipo de geometría empírica, que floreció en el Antiguo Egipto, Sumeria y Babilonia fue refinado y sistematizado por los griegos. En el siglo VI a.C. el matemático Pitágoras sembró la piedra angular de la geometría científica al demostrar que las diversas leyes arbitrarias e inconexas de la geometría empírica se pueden deducir como conclusiones lógicas de un número limitado de axiomas, o postulados. Estos postulados fueron considerados por Pitágoras y sus discípulos como verdades evidentes; sin embargo, en el pensamiento matemático moderno se consideran como un conjunto de supuestos útiles pero arbitrarios.

Un ejemplo típico de los postulados desarrollados y aceptados por los matemáticos griegos es la siguiente afirmación: "una recta es la distancia más corta entre dos puntos". Un conjunto de teoremas sobre las propiedades de puntos, líneas, ángulos y planos se puede deducir lógicamente a partir de estos axiomas. Entre estos teoremas se encuentran: "la suma de los ángulos de cualquier triángulo es igual a la suma de dos ángulos rectos", y "el cuadrado de la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados" (conocido como teorema de Pitágoras). La geometría demostrativa de los griegos, que se ocupaba de polígonos y círculos y de sus correspondientes figuras tridimensionales, fue mostrada rigurosamente por el matemático griego Euclides, en su libro Los elementos. El texto de Euclides, a pesar de sus imperfecciones, ha servido como libro de texto básico de geometría hasta casi nuestros días.

Los primeros problemas geométricos se deben a que los griegos introdujeron los problemas de construcción, en los que cierta línea o figura debe ser construida utilizando solo una regla de borde recto y un compás. Ejemplos sencillos son la construcción de una recta dos veces más larga que una recta dada, o de una recta que divide un ángulo dado en dos ángulos iguales. Tres famosos problemas de construcción que datan de la época griega se resistieron al esfuerzo de muchas generaciones de matemáticos que intentaron resolverlos: la duplicación del cubo (construir un cubo de volumen doble al de un determinado cubo), la cuadratura del círculo (construir un cuadrado con área igual a un círculo determinado) y la trisección del ángulo (dividir un ángulo dado en tres partes iguales.). Ninguna de estas construcciones es posible con la regla y el compás, y la imposibilidad de la cuadratura del círculo no fue finalmente demostrada hasta 1882.

Los griegos, y en particular Apolonio de Perga, estudiaron la familia de curvas conocidas como cónicas y descubrieron muchas de sus propiedades fundamentales. Las cónicas son importantes en muchos campos de las ciencias físicas; por ejemplo, las órbitas de los planetas alrededor del Sol son fundamentalmente cónicas.

Arquímedes, uno de los grandes científicos griegos, hizo un considerable número de aportaciones a la geometría. Inventó formas de medir el área de ciertas figuras curvas así como la superficie y el volumen de sólidos limitados por superficies curvas, como paraboloides y cilindros. También preparó un método para calcular una aproximación del valor de pi (p), la proporción entre el diámetro y la circunferencia de un círculo y estableció que este número estaba entre

$$3\frac{10}{70} \text{ y } 3\frac{10}{71}.$$

Los modernos avances de la Geometría fueron planteados por Carl Friedrich Gauss. Este matemático alemán contribuyó al estudio de diversas ramas de las matemáticas, incluidas la teoría de la probabilidad y la geometría. En su tesis doctoral demostró que cada ecuación algebraica tiene al menos una raíz o solución. Este teorema se sigue denominando teorema fundamental del álgebra. Gauss aplicó también sus trabajos matemáticos a la electricidad y el magnetismo. Una unidad de inducción magnética recibe su nombre.

La geometría sufrió un cambio radical de dirección en el siglo XIX. Los matemáticos Carl Friedrich Gauss, Nikolái Lobachevski, y János Bolyai, trabajando por separado, desarrollaron sistemas coherentes de geometría no euclídea. Estos sistemas aparecieron a partir de los trabajos sobre el llamado "postulado paralelo" de Euclides, al proponer alternativas que generan modelos extraños y no intuitivos de espacio, aunque, eso sí, coherentes.

Casi al mismo tiempo, el matemático británico, Arthur Cayley desarrolló la geometría para espacios con más de tres dimensiones. Imaginemos que una línea es un espacio unidimensional. Si cada uno de los puntos de la línea se sustituye por una línea perpendicular a ella, se crea un plano, o espacio bidimensional. De la misma manera, si cada punto del plano se sustituye por una línea perpendicular a él, se genera un espacio tridimensional. Aún más, si cada punto del espacio tridimensional se sustituye por una línea perpendicular, tendremos un espacio tetradimensional. Aunque éste es, físicamente imposible, e inimaginable, es conceptualmente sólido. El uso de conceptos con más de tres dimensiones tiene un importante número de aplicaciones en las ciencias físicas, en particular en el desarrollo de teorías de la relatividad.

También se han utilizado métodos analíticos para estudiar las figuras geométricas regulares en cuatro o más dimensiones y compararlas con figuras similares en tres o menos dimensiones. Esta geometría se conoce como geometría estructural. Un ejemplo sencillo de este enfoque de la geometría es la definición de la figura geométrica más sencilla que se puede dibujar en espacios con cero, una, dos, tres, cuatro o más dimensiones. En los cuatro primeros casos, las figuras son los bien conocidos punto, línea, triángulo y tetraedro respectivamente. En el espacio de cuatro dimensiones, se puede demostrar que la figura más sencilla está compuesta por cinco puntos como vértices, diez segmentos como aristas, diez triángulos como caras y cinco tetraedros. El tetraedro, analizado de la misma manera, está compuesto por cuatro vértices, seis segmentos y cuatro triángulos.

Otro concepto, el de dimensiones fraccionarias, apareció en el siglo XIX. En la década del 70 el concepto se desarrolló como la geometría fractal.

Por lo tanto, este proyecto apunta al estudio y reactivación de la Geometría plana y del espacio. La Geometría plana, es la rama de la geometría elemental que estudia las propiedades de superficies y figuras planas, como el triángulo o el círculo. Esta parte de la geometría también se conoce como geometría euclídea, en honor al matemático griego Euclides, el primero en estudiarla en el siglo IV a. C. Su extenso tratado, "Elementos de geometría" se mantuvo como texto autorizado de geometría hasta la aparición de las llamadas geometrías no euclídeas, en el siglo XIX.

La Geometría del espacio, es la rama de la geometría que se ocupa de las propiedades y medidas de figuras geométricas en el espacio tridimensional. Entre estas figuras, también llamadas sólidos, se encuentran el cono, el cilindro, la pirámide, la esfera y el prisma. La geometría del espacio amplía y refuerza las proposiciones de la geometría plana, y es la base fundamental de la trigonometría esférica, la geometría analítica del espacio, la geometría descriptiva y otras ramas de las matemáticas. Se usa ampliamente en matemáticas, en ingeniería y en ciencias naturales.

Respecto al desarrollo histórico de la Geometría se puede reflexionar sobre algunos acontecimientos más relevantes, dada la densidad de información existente: el más antiguo testimonio escrito acerca de las matemáticas procede de Babilonia y data del siglo XIX (a. n. e.). Se trata de unas tabletas de greda que pueden depositarse en la mano de un adulto con inscripciones efectuadas con un instrumento puntiagudo, cuando aún la greda estaba fresca. En algunos de ellas figuran tablas de multiplicar, el cálculo de la diagonal de un cuadrado, el cálculo del área de un trapecio, otros. Suficiente evidencia para establecer que en Babilonia se tenía el interés por las relaciones que existen entre los distintos elementos de ciertas figuras geométricas.

Hay que dar un salto de 1.200 años y llegar al siglo VI (a. n. e.), para volver a encontrar otra evidencia escrita con una nueva actitud, frente a los conocimientos matemáticos: (según Herodoto, es Tales), nacido en Mileto hacia el año 600 (a. n. e.) y mercader griego, quien al decidir dedicar el resto de sus días a estudiar y difundir aquello que aprendió en sus viajes por regiones mediterráneas y africanas a lo largo del río Nilo, introduce en Grecia la tradición egipcia y babilónica de especular con números, de hallar relaciones entre elementos constitutivos de figuras geométricas o de cuerpos sólidos, pero además, de demostrar esas relaciones.

Así, por ejemplo, conoce por la tradición babilónica y egipcia que si en una cuerda cualquiera se enlazan trece nudos igualmente espaciados, y luego se hacen coincidir el primer nudo con el último para formar un triángulo, tal que en cada vértice esté un nudo, y que en uno de sus lados haya cinco nudos y en otro cuatro, entonces sucede que el tercer lado tiene tres nudos y dos de los tres lados del triángulo forman una escuadra. En otras palabras, que cualquier triángulo cuyos lados midan 3, 4 y 5 unidades, es un triángulo rectángulo.

Tales no se conformó con saber el hecho, útil en la construcción de pirámides y otros objetos, ni con poder hacer la construcción en la práctica, sino que se interrogó sobre cómo probar que siempre que se recorran correctamente los pasos de esta construcción, tendrá el resultado enunciado, esto sin importar quién efectúe el proceso, ni cuál sea el tamaño de la cuerda empleada, ni cuál sea la distancia entre nudo y nudo.

Con esta actitud, Tales instaura en las Matemáticas, una noción y una necesidad que aún son vigentes: la de suministrar demostraciones rigurosas de los resultados matemáticos.

No debe sorprender que una necesidad práctica haya ocasionado la invención de esta ciencia o de las otras, puesto que todo lo que está sometido a la generación procede de lo imperfecto a lo perfecto; hay, pues, progreso natural de la sensación al razonamiento, de éste, a la inteligencia pura.

Del mismo modo que el conocimiento exacto de los números comenzó con los fenicios, como consecuencia del tráfico y de las transacciones a las que se dedicaban, la geometría ha sido inventada por los egipcios por la razón dada.

Después de Tales es mencionado Mamercos, hermano del poeta Stesichore, por haberse entusiasmado con la Geometría, e Hippias de Elis cuenta que en ella logró una reputación.

Después de ellos, Pitágoras, fundador de la escuela que lleva su nombre, la más influyente en determinar la naturaleza y contenido de la matemática griega, es un personaje cuya vida está rodeada de misterios. Había nacido en la isla de Samos hacia el año 569 (a. n. e.) Fue discípulo de Tales de Mileto quien le aconsejó que viajase por Egipto.

Al parecer Pitágoras siguió la recomendación e hizo numerosos viajes a Egipto y a la India, donde adquirió conocimientos de Matemáticas y asimiló el espíritu místico de estos pueblos.

En el año 529, fundó en Crotón, colonia griega del sur de Italia, una comunidad en la que comenzó a disertar sobre sus doctrinas místicas y matemáticas. Desde el punto de vista místico, el grupo se inspiró en la religión griega y consideraba necesario purificar el alma de la contaminación de lo físico y redimirla de la prisión del cuerpo, para lo que mantenían la soltería y celebraban purgas ceremoniales.

Observaban muchos tabúes, verdaderamente sorprendente, como los de no llevar vestidos de lana ni comer carne o judías, excepto con ocasión de sacrificios religiosos. Tampoco tocaban un gallo blanco, ni podían utilizar un hierro para remover el fuego. Creían en la reencarnación del alma. Xenófanes, el fundador de la filosofía eleática, cuenta que un día Pitágoras pasó junto a un grupo que apaleaba a un perro y les gritó: "Deteneos, no le peguéis más, es el alma de un amigo; lo reconocí al oír sus lamentos".

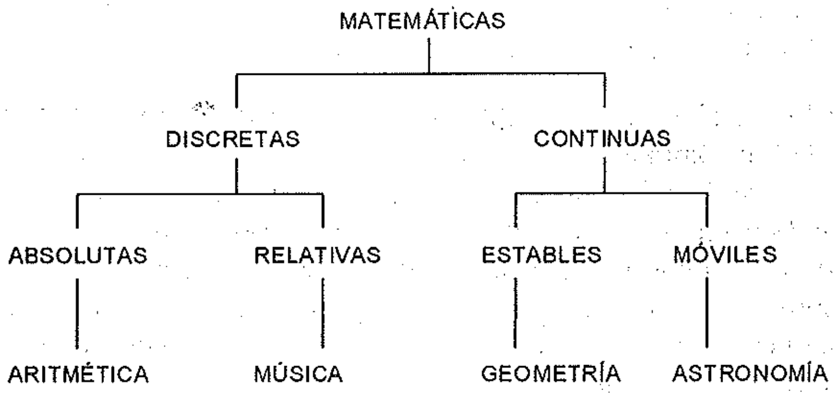
A escuchar las disertaciones de Pitágoras acudía una muchedumbre de entusiastas auditores de todas las clases. Entre los asistentes había gentes de las clases altas e incluso mujeres, pues Pitágoras consideraba que las mujeres tenían un cierto valor. Entre las que más atención mostraban se hallaba Theano, la joven y hermosa hija de su anfitrión, Milo, con la que se casó. Theano escribió una biografía de Pitágoras que, desgraciadamente, se ha perdido.

La escuela pitagórica se dedicaba, principalmente, al estudio de la filosofía, la ciencia y las Matemáticas. Solamente podían ser miembros los hombres y tenían como símbolo distintivo de la hermandad la Estrella Pentagonal.

Como precursores de los problemas que algunos conocimientos científicos habían de crear a la Humanidad, muchos siglos después, los pitagóricos requerían el secreto de sus nuevos adeptos y su adscripción por vida. El carácter esotérico del grupo y sus prácticas secretas y místicas suscitaron la suspicacia y el antagonismo de las gentes de Crotón que terminaron expulsándolos y quemando sus edificios. Pitágoras huyó a Metaponto, en el sur de Italia, y según una leyenda fue asesinado hacia el año 500 (a. n. e.) A su muerte los componentes de la hermandad se dispersaron por otros centros griegos en donde continuaron impartiendo sus enseñanzas.

Su influencia en las Matemáticas y la filosofía fue muy importante. Para los pitagóricos los números no suponían meros atributos comunes a todos los conjuntos formados por esa cantidad de objetos. A Pitágoras se debe el descubrimiento de los números Irracionales, transformó el estudio de la Geometría e hizo de ella un enseñamiento liberal, pues se remontó a los principios superiores e investigó los teoremas en forma abstracta y mediante la inteligencia pura.

También se deben a él las figuras del cosmos (los poliedros regulares.). A los pitagóricos se debe el término MATEMÁTICAS y su división en dos ramas dobles, que estuvo en el origen del famoso Cuadrivio de la Edad Media, según el esquema siguiente:



Aritmética, Música, Geometría y Astronomía formaron las cuatro disciplinas del cuadrivio medieval.

Después de Pitágoras, Anaxágoras de Clazomeno se ocuparon de diversas cuestiones geométricas, al igual que Enopide de Quios, un poco más joven que Anaxágoras; Platón, en sus Rivales, los menciona como matemáticos de reputación.

Después se hicieron célebres en geometría: Hipócrates de Quios, el inventor de la cuadratura de la Lúnula, y Teodoro de Cirene. Hipócrates fue el primero que compuso Elementos.

Después de ellos vivió Platón, que hizo que las Matemáticas en general, y la Geometría en particular, tuvieran un desarrollo inmenso, gracias al celo que mostró por ellas, y del que testimonian, suficientemente sus escritos, todos llenos de discursos matemáticos y que, en cada instante, despiertan el entusiasmo por estas ciencias en aquellos que se dedican a la filosofía.

Hacia la misma época vivieron Leodamas de Thasos, Arquitas de Taranto y Theeto de Atenas, que aumentaron el número de teoremas e hicieron de ellos un conjunto más científico; Neoclide (más joven que Leodamas) y su discípulo León, quienes ensancharon, singularmente, los conocimientos anteriores, de modo que León pudo componer Elementos muy superiores por el número y la importancia de las demostraciones; fue él quien inventó las distinciones de cuándo el problema buscado es posible y cuándo es imposible.

Eudosio de Cnido, un poco más joven que León y discípulo de los amigos de Platón, fue el primero que aumentó los teoremas llamados GENERALES; añadió tres nuevas analogías a las tres antiguas, e hizo progresar las cuestiones relativas a la sección, cuestiones suscitadas por Platón y para las cuales hizo uso de los análisis.

Amyclas de Heraclea, discípulo de Platón, Menecmo, alumno de Eudosio y de Platón, Dinostrato, hermano de Menecmo, perfeccionaron el conjunto de la geometría. Theudios de Magnesia se forjó una reputación singular en las Matemáticas, así como en las otras ramas de la filosofía; redactó excelentes Elementos e hizo más generales diversas definiciones. Ateneo de Cyrque vivió en la misma época y fue célebre como matemático, en particular como geómetra. Todos estos sabios se reunían en la Academia y hacían sus investigaciones en común.

Hermotimo de Colofón prosiguió los descubrimientos de Eudosio y de Theeto, halló diversas proposiciones de los Elementos y compuso una parte de los lugares. Filipo de Medma, discípulo de Platón, quien le dirigió hacia las Matemáticas, investiga según las indicaciones de su maestro, pero se propuso también todas las preguntas que creyó útiles para la filosofía de Platón. Los que han escrito las historias llevan hasta este Filipo el desarrollo de la Geometría.

Euclides, el autor de los elementos, no es mucho más joven; ordenó diversos trabajos de Eudosio, mejoró los de Theeto y también dio demostraciones irrefutables para aquello que sus predecesores no habían probado con suficiente rigor.

Euclides, por otra parte, era platónico de opinión, y bien familiar con la filosofía del Maestro; también se propuso, como objetivo final del conjunto de sus Elementos, la construcción de las figuras llamadas platónicas (los cinco poliedros regulares.).

Existen de él otras numerosas obras matemáticas, escritas con una singular exactitud y llenas de ciencia teórica. Tales son su ÓPTICA, su CATRÓPTICA, sus ELEMENTOS de MÚSICA y, además, su libro SOBRE LAS DIVISIONES.

Pero se admiran, especialmente, sus ELEMENTOS de GEOMETRÍA, por el orden que reina en ellos, la elección de los teoremas y los problemas tomados como elementos (pues no ha incluido, en modo alguno, todos los que podía dar, sino solamente aquellos que son susceptibles de jugar el papel de elementos), y también la variedad de los razonamientos, seguidos según todos los modos y que producen convicción, bien partiendo de las causas, bien remontando los hechos, pero siempre irrefutables, exactos y del carácter más científico. Añadid todos los procedimientos de la dialéctica: el método de la división en el reconocimiento de las especies, el de la definición, en las razones en esencia, el apodíctico, en los pasos desde los principios a lo buscado, el analítico en aquellos, inversos, desde lo buscado a los principios.

El mismo tratado nos muestra, exactamente diferenciadas, las diversas especies de recíprocos, unas veces más simples, otras más compuestas, en tanto que la reciprocidad puede tener lugar, ya sea de la totalidad a la totalidad, ya sea de la totalidad a la parte.

Euclides ha dado también los procedimientos que emplean la inteligencia clarividente, y gracias a los cuales es posible ejercitar a los debutantes en el estudio de la Geometría, los Elementos son una guía segura y completa para la contemplación científica de los objetos de la Geometría.

En los Elementos de la Geometría, publicación en trece volúmenes del siglo III (a. n. e.), Euclides expone, a través del método deductivo y de manera sistemática, los conocimientos que los griegos tenían sobre aritmética y geometría.

En esta compilación enciclopédica del conocimiento geométrico hasta entonces acumulado. Euclides trata sobre líneas, figuras planas, longitudes y áreas, círculos, proporciones, figuras semejantes, geometría de algunos sólidos y volúmenes. En otras palabras, presenta una sistematización de cerca de veinte siglos de trabajo escrito, cuya importancia no debe pasar desapercibida.

Euclides, en su afán por presentar de una manera rigurosa y formal las matemáticas griegas, no se da cuenta de que no es posible definir todos los elementos que en una teoría matemática aparecen, y recurre al uso de conceptos que pertenecen al lenguaje común de su cultura y su momento para definirlos, generando con este proceder, dos problemas, mezclar términos del lenguaje común con términos del lenguaje formal y recurrir a la experiencia cotidiana como medio para dotar de significado a un sistema formalizado, y así desde el significado mismo, impregnar de verdad los postulados y toda la definición a partir de ellos.

POSTULADOS DE LA GEOMETRÍA EUCLIDIANA

Según los postulados de la geometría euclidiana:

- Es posible trazar una línea recta desde un punto cualquiera a otro punto cualquiera.
- Es posible prolongar por continuidad en línea recta una recta ilimitada.
- Para cada centro y radio, es posible describir su círculo.
- Todos los ángulos rectos son iguales entre sí.
- Si una recta incidente sobre otras dos rectas hace ángulos internos y de

la misma parte menores que dos rectas, prolongadas estas dos rectas indefinidamente coincidirán por la parte en que estén los ángulos menores que dos rectas.

En los primeros tres postulados se asegura que dados algunos elementos, puntos, por ejemplo, se pueden construir otros elementos, rectas, por ejemplo, pero ningún postulado asegura que esos objetos construidos sean únicos. Por ejemplo, el primer postulado dice que se puede trazar una recta desde un punto cualquiera hasta otro punto cualquiera, pero no dice que esa es la única recta que se puede trazar por esos objetos, es una necesidad en algunas demostraciones hechas por Euclides, pero él nunca la asume de manera explícita.

El cuarto postulado no formula la existencia de ángulos rectos, solo dice que en caso de haber uno o más ángulos rectos, ellos serían iguales. La existencia de estos ángulos se prueba mediante un teorema.

El quinto postulado conocido como el de las paralelas a pesar de que en él no se hace referencia a paralelas, es el más famoso de éstos, pues de un lado garantiza que dos rectas que se cortan tienen un punto en común. Incluso desde su formulación, que se le reconoce a Euclides, entre los griegos hubo quienes no vieron con buenos ojos este postulado, pues adolecía de evidencia, ya que involucra una acción que se puede extender en el tiempo, pues se requiere prolongar indefinidamente dos rectas. De otro lado, la forma de este postulado, diferente a la de los otros cuatro en cuanto utiliza una frase condicional, "... si un hecho sucede entonces otro hecho debe suceder..." insinúa que más bien era un teorema y que se podía demostrar a partir de los otros cuatro postulados.

3 LA MATEMÁTICA COMO CÁLCULO

Uno de los resultados y finalidades de la Matemática es el cálculo. Es decir, la Matemática busca formas razonadas de procedimientos seguros mediante los que podamos contar, medir, y obtener los resultados de ciertas series de operaciones que nos permitan predecir algunos acontecimientos que puedan ocurrir en la naturaleza.

Al aludir a formas razonadas nos estamos refiriendo a la reflexión, al pensamiento, a la lógica; al aludir a procedimientos seguros nos estamos refiriendo al cálculo.

El cálculo es el procedimiento que nos dice como debemos aplicar unas reglas, construidas a partir de operaciones sencillas sobre unos datos conocidos, para obtener el resultado buscado, transformarlos y hacerles corresponder otros.

En un cálculo los datos no siempre son numéricos, como suele creerse, pueden ser de otro tipo, por ejemplo, geométricos (puntos, rectas, figuras, áreas, ángulos...), letras o palabras, oraciones o proposiciones lingüísticas o lógicas. Estos datos corresponden a magnitudes u otros conceptos, a cuya definición dedica la Matemática gran esfuerzo.

Las reglas y operaciones deben ser conocidas y sencillas, en el sentido de que cualquier persona con un pequeño entrenamiento pueda asimilarlas. También puede considerarse la tarea de definir esas operaciones, y estudiar sus propiedades, como una de las actividades a las que se ha dedicado y dedica la Matemática.

La historia del cálculo es tan vieja como la propia Matemática. Como todo el mundo sabe la palabra cálculo significa piedrecilla y con ella se alude al procedimiento matemático más antiguo que se conoce: contar. También se usan piedrecillas (en los conjuntos de piedrecillas ya está la idea de número) en procedimientos más complejos, como la suma y la resta. El ábaco chino[2], que todavía se usa en algunas colectividades, es un superviviente, que tal vez viene desde épocas prehistóricas, de los primitivos usos de los "cálculos". Así, el ábaco es el primer instrumento utilizado en el largo camino de la computación.

4 EL CÁLCULO ARITMÉTICO

Aunque las construcciones geométricas pueden ser consideradas como un cálculo, de todas formas ha sido el cálculo aritmético el que ha merecido principal atención desde que se estableció un sistema de representación numérica mediante el cual la resolución de las operaciones aritméticas podía hacerse de forma sencilla (obsérvese la dificultad de hacer las operaciones aritméticas con la representación numérica establecida por los romanos). A partir del Liber abaci de Leonardo de Pisa (Fibonacci), datado en 1202, se difunde la representación decimal de los números,

[2] El quipu andino es un instrumento con ciertas características análogas al ábaco.

utilizando para ello las cifras o los guarismos hindúes (arábigos), entre los que se contiene el cero. Las aplicaciones mercantiles y comerciales se ven ampliamente beneficiadas por esta "nueva tecnología".

A partir de ahí se desarrollan formas de aplicar las cuatro reglas[3] mediante procedimientos que son auténticos programas. También aparecen reglas para conocer la raíz cuadrada, aunque en ésta época era todavía poco utilizada. Pues estas, van a ser las reglas básicas mediante las que se construyan los cálculos o algoritmos aritméticos. Cada procedimiento fija el orden en que debemos emplear las reglas para la obtención de los cálculos y los resultados deseados.

Durante los siglos XIV al XVII, el cálculo aritmético (como hemos visto) comienza a extenderse, hasta alcanzar un gran desarrollo. Sobre todo en el último de los siglos mencionados se construyen procedimientos para simplificar los cálculos y para realizarlos mediante máquinas. Por una parte tenemos el descubrimiento de los *logaritmos*[4], que redujeron considera-blemente la fatiga de los cálculos al reducir el producto a suma, la división a diferencia, y la raíz cuadrada a división por dos, y facilitaron los cálculos apoyándose en la búsqueda en tablas (operación que se puede considerar, también, como un cálculo), o se materializaron en un instrumento físico usado hasta épocas recientes como fue la regla de cálculo. Por otra parte, se inventaron las máquinas *aritméticas*[5] que usaban ruedas y engranajes como elementos constructivos, y que, perfeccionadas, se han conservado hasta bien entrado el siglo XX.

5 EL CÁLCULO GEOMÉTRICO

Veamos también, para ilustrar la idea de cálculo, algunos ejemplos geométricos, y cuales fueron los primeros instrumentos utilizados para ayudar a efectuarlos: la regla y el compás. Construir un triángulo *equilátero*[6] (la trinidad), construir un hexágono regular, trazar una perpendicular por un

[3] La suma, resta, multiplicación y división, son las operaciones aritméticas básicas con las que se construirán los algoritmos numéricos, análogas a cómo son básicas las que se pueden hacer con la regla y el compás para construir los algoritmos geométricos.

[4] Nepper, Mirafici logarithmorum canonis descriptio, 1614.

[5] Por Pascal (1623-1662) en 1640 y por Leibniz (1646-1716) posteriormente.

[6] La primera proposición del Libro I de los Elementos de Euclides dice: Construir un triangulo equilátero sobre una recta finita dada.

punto dado a una recta dada, hallar la bisectriz de un ángulo, hallar el lado de un cuadrado que tenga una superficie doble de un cuadrado dado,... y una infinidad de otros más, son problemas, llamados elementales, que desde la geometría clásica se vienen planteando y resolviendo mediante el empleo de procedimientos que se basan en el solo uso de la regla y del compás, y de los que Euclides en sus famosos Seis Libros, da cumplido repertorio.

También se usaron la regla y el compás para abordar algunos cálculos aritméticos. Un ejemplo curioso es la forma de calcular, por procedimientos geométricos, la raíz cuadrada de la serie de los números naturales $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}, \ldots$

Pero también se plantearon otros problemas que se resistieron a que su resolución se pudiera obtener aplicando cálculos con la regla y el compás. Algunos eran simples generalizaciones de otros ya resueltos, como hallar la trisectriz (no hay solución al problema de la trisección del ángulo), hallar la arista de un cubo que tenga volumen doble de un cubo dado (no hay solución al problema de la duplicación del cubo),... y el problema estrella durante muchos siglos fue: hallar el lado de un cuadrado que tenga la misma área que un circulo dado (no hay solución al problema de la cuadratura del círculo).

Decir en estos términos que un problema no tiene solución, solo quiere decir que no existe un algoritmo, es decir un procedimiento, mediante el cual podamos encontrar la solución, aplicando un número finito de veces las operaciones que se pueden realizar con la regla y el compás. La demostración de la inexistencia de estos algoritmos para los problemas de la trisección del ángulo, la duplicación del cubo y la cuadratura del círculo solo se logró en la segunda mitad del siglo XIX.

La trigonometría, empujada por las aplicaciones astronómicas y náuticas requiere cálculos que se desarrollan de una forma analógica, (modernamente se ha llamado nomografía a cálculos ejecutados mediante la representación gráfica de curvas, y levas) construyendo astrolabios, ballestillas, esferas armilares, cartas náuticas y globos terráqueos mediante los que se representa la realidad donde medir es otra forma que calcular (o de aprovechar cálculos hechos con anterioridad).

Durante los siglos XVI y XVII se inventan gran número de instrumentos matemáticos[7], para abordar los mismos y otros problemas con otras reglas básicas, pensando que tal vez la insolubilidad dependiera de las reglas utilizadas.

6 PENSAMIENTO ESPACIAL Y SISTEMAS GEOMÉTRICOS

Se entiende por pensamiento geométrico la capacidad del hombre de explorar racionalmente el espacio físico en que vive. Es decir, la forma particular como cada individuo se relaciona con el contexto y los objetos y formas donde habita.

El pensamiento espacial o geométrico es el conjunto de procesos cognitivos mediante los cuales se construye y se manipulan las representaciones mentales de los objetos del espacio, las relaciones entre ellos, sus transformaciones, y sus traducciones a representaciones materiales.

Los sistemas geométricos como herramientas de exploración y representación del espacio. Estos sistemas se construyen a través de la exploración activa y la modelación del espacio (Geometría Activa). La construcción se entiende como un proceso cognitivo de interacciones que avanza desde el espacio intuitivo a un espacio conceptual y abstracto relacionado con la capacidad de representar internamente el espacio, reflexionando y razonando sobre propiedades geométricas abstractas.

En los Lineamientos Curriculares de Matemáticas se propone el desarrollo del pensamiento geométrico a través del modelo de Van Hiele, donde se describen las formas intuitivas iniciales hasta las formas deductivas finales y propone cinco niveles de desarrollo del pensamiento geométrico, a saber:

Visualización: se razona acerca de clases de figuras reconocidas visualmente como de la misma forma.

Análisis: se razona allí acerca de los componentes de las figuras, de sus propiedades básicas en el cual se infiere sobre las clases de figuras y se piensa en términos de conjuntos de propiedades.

7 Se puede citar a manera de ejemplo dos libros españoles del siglo XVII: García de Céspedes Libros de instrumentos nuevos de geometría Madrid, 1606; José Zaragoza Fábrica y uso de varios instrumentos matemáticos Madrid, 1674.

Orden y Clasificación: se razona sobre las propiedades de las figuras que pertenecen a una determinada clase.

Deductivo: en el cual se entiende el sentido de los axiomas, definiciones y teoremas, pero aún no se hacen razonamientos totalmente formales.

Rigor: en el cual el razonamiento se hace rigurosamente deductivo.

"Otro aspecto importante del pensamiento espacial es la exploración activa del espacio tridimensional en la realidad externa y en la imaginación, y la representación de objetos sólidos ubicados en el espacio"[8] .

En la actualidad, gran parte de la Geometría Escolar se ha ocupado del movimiento de las figuras geométricas desde una posición a otra, y de movimientos que cambian el tamaño o la forma. El estudio de las transformaciones de figuras ha ido progresivamente en nuestro contexto primando sobre la presentación formal de la Geometría, basada en teoremas y demostraciones y en método deductivo.

Queda claro que el objetivo último de este tratamiento es el estudio de los sistemas de transformaciones, empezando por los desplazamientos (rotaciones y traslaciones) porque éstos pueden efectuarse con materiales concretos o del medio, acompañados por las reflexiones que solo pueden efectuarse mentalmente.

7 PENSAMIENTO NUMÉRICO Y SISTEMAS NUMÉRICOS

Se habla del pensamiento numérico como un concepto más general que sentido numérico, el cual incluye no solo éste, sino el sentido operacional, las habilidades y destrezas numéricas, las comparaciones, las estimaciones, las órdenes de magnitud, entre otras.

Sentido numérico es "una intuición sobre los números que surge de todos los diversos significados del número"[9].

Se dice también que "el pensamiento numérico se refiere a la comprensión general que tiene una persona sobre los números y las

[8] Ministerio de Educación Nacional. Lineamientos Curriculares de Matemáticas. Bogotá, julio de 1998, p. 59.

[9] Estándares Curriculares y de Evaluación para la Educación Matemática NCTM, 1989, Pág. 38.

operaciones junto con la habilidad y la inclinación a usar esta comprensión en formas flexibles para hacer juicios matemáticos y para desarrollar estrategias útiles al manejar números y operaciones"[10]. (Se crea la expectativa de que los números son útiles y que las Matemáticas poseen una cierta regularidad.).

Es fundamental la manera como los estudiantes escogen, desarrollan y usan métodos de cálculo, incluyendo cálculo escrito, mental, por medio de calculadoras y a través de la estimación. La invención de un algoritmo y su aplicación hace énfasis en aspectos del pensamiento numérico tales como la descomposición y la recomposición, y la comprensión de propiedades numéricas.

Se plantea también que "otro indicador valioso del pensamiento numérico es la utilización de las operaciones y de los números en la formulación y resolución de problemas y la comprensión de la relación entre el contexto del problema y el cálculo necesario, lo que da pistas para determinar si la solución debe ser exacta o aproximada y también si los resultados a la luz de los datos del problema son o no razonables (MEN, Lineamientos Curriculares, 1998, Pág. 44.).

8 PENSAMIENTO MÉTRICO Y SISTEMAS DE MEDIDA

En los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (Ministerio de Educación Nacional) se da un tratamiento genético delimitando las diferentes etapas en las cuales se construyen conceptos adecuados de medición, especialmente frente al problema de falta de dominio de las sutilezas de la noción de replicar una unidad. Se diferencia entre los sistemas geométricos que se inician con modelos cualitativos del espacio, y sistema métrico que pretenden llegar a cuantificar numéricamente las dimensiones o magnitudes que surgen en la construcción de los modelos geométricos.

La construcción de la magnitud.

Se subdivide el proceso de construcción de la magnitud en varias etapas, la primera de las cuales consiste en crear y abstraer en el fenómeno u objeto la magnitud concreta o cantidad susceptible de medición (largo, ancho, espesor, otro.). En la segunda etapa se sabe que existe algo que

[10] Mcintosh, A. Proposed Framework for Examining Basic Number Sense. FIM Publishing Association, White Rock, British Columbia, Canada, 1992. Noviembre de 1992.

es más o menos que otra cosa y se plantea la pregunta más qué o menos qué. Todo esto constituye un proceso relacional activo.

El desarrollo del proceso de conservación

Se discute el proceso piagetiano de conservación o invarianza bajo transformación de ciertos atributos susceptibles de ser medidos.

La estimación de las magnitudes

Se afirma que los aspectos de captar lo continuo con lo discreto están íntimamente ligados con los conceptos de medida y conteo. Sin embargo, el proceso de medir, aunque trata de magnitudes continuas, siempre se circunscribe a hacer estimativos discretos. Se aboga por desarrollar la estimación aproximada para avanzar en procesos de medición.

La apreciación del rango de las magnitudes y la selección de unidades

Se afirma que antes de seleccionar una unidad o patrón de medida es necesario hacer un estimativo perceptual del rango en que se halla una magnitud concreta. Es obvio que esto es un producto natural de cualquier enfoque activo del aprendizaje del tema de la medición.

Se enfatiza, finalmente en la importancia de saber manejar las conversiones de unidades y las operaciones en contextos diversos en donde el sujeto domine el trasfondo social y tenga interés en obtener resultados correctos.

9 TENDENCIAS ACTUALES

Respecto a la multiplicidad de aspectos que debería abordar hoy la geometría escolar y que son relevantes por sus implicaciones didácticas se enfatizaba en el documento inicial del ICMI"[11] Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century" (1995) en:

La geometría como ciencia del espacio: la geometría desde sus orígenes como herramienta para describir y medir figuras ha crecido en sus teorías

---

[11] Hodgson, Bernard R. Redactor: La Comisión internacional en la instrucción matemática ICMI. Boletín No. 50, Département de mathématiques et de statistique, Université Laval, Québec. Canadá, junio de 2001.

y métodos con los cuales se pueden construir y estudiar modelos tanto del mundo físico, como de otros fenómenos del mundo real. Acordes con los diferentes puntos de vista bien sea el de la geometría euclidiana, afín, descriptiva, el de la topología o de las geometrías no euclidianas o combinatorias. Es importante comenta, trabajar tanto con la geometría que enfatiza en las propiedades estáticas de los objetos como la que enfatiza en las propiedades dinámicas.

- La geometría como un método para construir representaciones visuales de conceptos y procedimientos de otras áreas en matemáticas y en otras ciencias. (Gráficas y diagramas de diversas clases)
- La geometría como punto de encuentro de la matemática como teoría y la matemática como un modelo de investigación.
- La geometría como un camino de desarrollo de pensamiento y comprensión y en niveles superiores como una teoría formal.
- La geometría como punto de encuentro de la matemática, es teoría y la matemática, como fuente de modelos.
- La geometría como teoría formal, como una forma de entender y razonar a niveles superiores.
- La geometría como un ejemplo paradigmático de razonamiento deductivo.
- La geometría como una herramienta tanto en las aplicaciones tradicionales como en las innovadoras, como por ejemplo gráficas de computador, procesamiento y manipulación de imágenes.
- La geometría como una herramienta manipuladora, intuitiva, deductiva, analítica. Como herramienta en las aplicaciones tradicionales y en las innovadoras (gráficos computarizados, procesamiento de imágenes, patrones de reconocimiento, robótica e investigación de operaciones.).

Interpretación Geométrica de algunos Modelos Aritméticos: Visión Práctica y Tecnológica

JORGE CARDEÑO ESPINOSA
Licenciado en Matemáticas - Física. Universidad de Antioquia.
Magister en Didáctica de las Matemáticas. Instituto Pedagógico Latinoamericano y Caribeño IPLAC. La Habana-Cuba.
Especialista en Informática y Telemática. FUA. Bogotá
Director línea de Investigación:
Educación Matemática. ELIME. CEID-ADIDA

GILMA ÁLVAREZ LÓPEZ
Licenciada en Matemáticas-Física. U. de A.

MEDELLÍN
2010

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE ALGUNOS MODELOS ARITMÉTICOS:
Visión Práctica y Tecnológica

JORGE CARDEÑO ESPINOSA
Director Línea de Investigación: "Educación Matemática".
CEID-ADIDA
Licenciado en Matemáticas-Física. U. de A.
Magíster en Didáctica de las Matemáticas. IPLAC. La Habana-Cuba
Especialista en Informática y Telemáticas. FUA. Bogotá

GILMA ÁLVAREZ LÓPEZ
Licenciada en Matemáticas-Física. U. de A.

RESUMEN

El propósito general de este trabajo de grado es aportar el aprendizaje de la Geometría y la Aritmética, en el grado décimo de la Educación Media Técnica de la Institución Educativa Centro Formativo de Antioquia y a través del área de Matemáticas mediante el diseño de un aplicativo multimedia que propone una estrategia metodológica que integra la geometría y la aritmética, para el desarrollo paralelo e integral de algunos conceptos de estas asignaturas.

Se propone, profundizar en la medida de lo posible, en la vinculación existente entre la Geometría y la Aritmética, en lo que genéricamente se ha denominado en el presente trabajo: Interpretación Geométrica de Algunos Modelos Aritméticos IGAMA.

Aquí se muestra que, mediante la implementación de esta estrategia metodológica es posible favorecer la integración curricular de la Geometría, Álgebra y Aritmética al resolver problemas de aplicación, al plantear conceptos, al buscar la relación entre los conceptos y al mirar la utilidad pragmática y potencial de la propuesta, de tal manera que las estudiantes mejoren la comprensión de las Matemáticas, de manera inteligente y creativa.

No se trata de suplir todas las deficiencias que se presentan en el proceso docente educativo en la Educación Básica (hasta noveno grado) en relación con la enseñanza de estas asignaturas, por el contrario, se intentará aportar desde la informática y el diseño de un aplicativo multimedia, la profundización

de los conceptos preliminares que se han olvidado o desconocido, debido a la heterogeneidad de la población estudiantil[12].

1 PROPUESTA METODOLÓGICA

IGAMA es un aplicativo multimedia, cuya sigla traduce: Interpretación Geométrica de Algunos Modelos Aritméticos, buscando abordar de manera interactiva algunos conceptos geométricos, aritméticos y algebraicos necesarios para la comprensión de la Trigonometría y la Geometría Analítica de los grados décimos de la institución educativa Centro Formativo de Antioquia CEFA.

Se precisa entonces que no es un aplicativo multimedia para el estudio riguroso de la Geometría Euclidiana, ni tampoco de la Aritmética y el Álgebra en sí, sino que se pretende enseñar conceptos básicos buscando vincular la enseñanza de estas importantes asignaturas de las Matemáticas, ofreciendo un tratamiento no tradicional de los contenidos a abordar en la educación media inicial.

Como lo señala Cosme Matías Burgos del Instituto Superior Pedagógico "Enrique José Varona", (La Habana, Cuba. 2003) "La Geometría es la expresión más elaborada del pensamiento lógico en el lenguaje de las Matemáticas". Esta afirmación traduce que quien accede al lenguaje geométrico le resultará familiar el lenguaje de las otras asignaturas de las Matemáticas, pues precisamente el origen de esta ciencia se desarrolla producto de la necesidad histórica del hombre de contar y medir. Comprender el lenguaje de la Geometría, sus propiedades, conceptos y demostraciones, implica pensar de manera racional y lógica el mundo o la realidad.

IGAMA busca de manera breve conocer un poco acerca de la historia de la Geometría y la Aritmética. Resalta por ejemplo uno de los personajes matemáticos que aportó profundamente al desarrollo de la Geometría Analítica René Descartes el cual fue un filósofo y matemático francés que nació en La Haya, cerca de Tours, el 31 de marzo de 1596. Falleció en Estocolmo, Suecia, el 11 de febrero de 1650.

"Descartes usó su nombre latinizado: Renatus Cartesius. Hay que considerar que el latín era el lenguaje erudito y esta costumbre era muy común. Esta es la causa de que su sistema filosófico se llame "cartesiano" y que el sistema más corriente sobre el que se trazan las curvas que representan ecuaciones, sistema que Descartes inventó, es el de las "coordenadas cartesianas". Sin embargo, Descartes escribió en francés más que en latín, señal de la decadencia de esta lengua universal entre los eruditos en Europa.

[12] La I.E. CEFA solo ofrece el nivel educativo de Media Técnica para mujeres, en consecuencia atiende a la población estudiantil de los grados décimos y undécimos y ofrece diversas modalidades, conforme a la Ley General de Educación de 1994.

Descartes contribuyó principalmente a la ciencia con sus matemáticas. Se interesó especialmente en esta materia cuando estuvo en el ejército, ya que la inactividad de que gozó le dio mucho tiempo para pensar. Su gran descubrimiento lo hizo en la cama, según se cuenta, al observar el vuelo de una mosca. Se le ocurrió que la posición de la mosca podía darse en cada momento de su vuelo al localizar los tres planos perpendiculares que se cortan en el punto que ésta ocupa en el espacio. Es una superficie bidimensional, como puede ser una hoja de papel, cada punto se podía localizar por las dos rectas que se cortaban perpendicularmente en dicho punto"[13].

Esta idea no es totalmente original, pues todos los puntos del globo terráqueo se pueden localizar por medio de una longitud y una latitud, que son en una superficie esférica, análogas a lo que representan las coordenadas cartesianas en una superficie plana.

La gran virtud del concepto de Descartes fue el de combinar álgebra y geometría para el enriquecimiento de ambas, pudiendo de esta manera resolver problemas con más facilidad de las Matemáticas, que si sé tratasen por separado. Esta combinación abrió camino al cálculo que Isaac Newton desarrolló, que consiste esencialmente en la aplicación del álgebra a fenómenos de variación lenta (como el movimiento acelerado) que pudieron así representarse geométricamente por distintos tipos de curvas.

Representar dichas curvas requiere de un conocimiento previo del plano y de la utilización de definiciones, axiomas, postulados, teoremas, conceptos e inclusive el manejo de instrumentos[14].

Igualmente conviene abordar el concepto de línea, recta, segmento, ángulos y clases de ángulos, los cuales facilitan o son conocimientos previos de la Trigonometría y la Geometría Analítica y en particular de las Funciones Trigonométricas, dado que estas se pueden definir en la circunferencia unitaria. Un estudiante que logre por ejemplo diferenciar un ángulo de medida positiva o negativa, comprende los signos de las funciones trigonométricas según su cuadrante e igualmente equivalencias importantes como sen (-) = - sen ( ), cos (-) = cos y tan (-) = tan , entre otros.

Es inevitable también la relación de la Trigonometría y la Geometría Analítica con el concepto de triángulo, en especial, para el caso de la educación media el triángulo rectángulo, el cual sirve de cimiento para la construcción de muchos conceptos básicos como pendiente, punto medio, distancia entre dos puntos,

[13] Tomado de Educared. http://www.educared.edu.pe/docentes/articulo/846/biografia-de-rene-descartes/. Septiembre 28 de septiembre de 2008.

[14] Cardeño E., Jorge. Lecciones de Matemáticas Número Tres. Interpretación Geométrica de Algunos Modelos Aritméticos. CEID-ADIDA, 2003. Pág. 21-39.

teorema de Pitágoras, razones trigonométricas, problemas de aplicación, baricentro, circuncentro, ortocentro, entre otros.

Esta comprensión de la Trigonometría y la Geometría Analítica se puede profundizar aún más, con la ayuda de un graficador como por ejemplo Graphmatica, con el cual se puede establecer un nexo fuerte entre la Geometría y el Álgebra, para expresar esta idea se puede decir que difícilmente un estudiante puede observar y comprender en una clase tradicional, lo que acontece por ejemplo con la variación de los denominadores de la ecuación, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ lo que sucede si $a=b=0$, si $a>b$, si $a<b$, si $a=b$. Inclusive en un programa como Geogebra se puede observar el "deslizamiento" de las variables, es decir su crecimiento o decrecimiento, para el caso en discusión.

Igualmente si el contenido específico a tratar en la clase son las gráficas de las funciones trigonométricas, la enseñanza tradicional y la intensidad definida para el área de Matemáticas dificulta el análisis de conceptos tales como la amplitud, el período, el desfasamiento y para el caso de las funciones seno y coseno su analogía por ejemplo con las ecuaciones físicas de sonido en el caso particular del movimiento de tipo ondulatorio ($y = A\,\text{sen}\,(ax+\alpha)$ ó $y = A\cos(ax+\alpha)$). Si se dispone de un programa de computación se puede ampliar el horizonte de comprensión, logrando obtener resultados más favorables en la enseñanza e inquietando a los estudiantes por el cómo es posible asociar las Matemáticas con la realidad y los fenómenos físicos que acontecen en ella.

Conviene de igual manera gracias a la informática y la internet vincular la enseñanza de las Matemáticas con el arte, pues precisamente en esta área del conocimiento se logra conjugar de manera bella y armoniosa la Geometría, la Aritmética, el Álgebra y hasta el cálculo.

Finalmente, como las Matemáticas requieren de ejercitación y praxis, es una necesidad fomentar hábitos de estudio y trabajo extracurricular, formando en la disciplina, el carácter, la conciencia para el estudio independiente y autónomo, la responsabilidad y otras características de tipo formativo y desde la actitud, que influyen de manera decisiva en la aptitud o dicho de otra forma en las competencias de tipo intelectivo en los estudiantes.

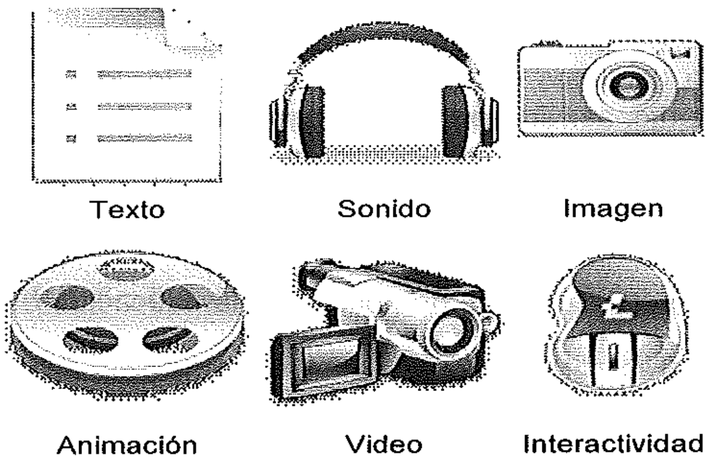
2 INFORMACIÓN SOBRE EL TIPO DE APLICATIVO

IGAMA es un recurso didáctico multimedia, que como su nombre lo indica funciona de manera interactiva, mediante aprendizaje dirigido y auto-aprendizaje por parte del estudiante, integrando diferentes formas de contenido, en la perspectiva de ejecutar una aproximación al acto de aprender por parte de los seres humanos, los cuales nos hacemos conscientes de nuestra realidad a través de diferentes sentidos. En este sentido, el recurso didáctico multimedia pretende ajustarse a esa forma creativa de aprender y comprender el mundo y todo aquello que existe. Este aplicativo multimedia no es lineal, lo cual facilita el manejo de variantes en la comprensión, además de diversos niveles de complejidad, lo que facilita el desarrollo desigual en el aprendizaje, lo cual es mucho más complejo en la enseñanza de tipo verbalista o magistral, no se quiere decir que esta no tenga vigencia y por el contrario también es necesaria para el aprendizaje, pero es importante su conjugación con otros tipos de enseñanza como la matemática computacional , multimedial o hipermedial por ejemplo.

Su aplicación no es solo en el campo educativo, sino en todas las demás disciplinas del conocimiento, dado que la tendencia en el aprendizaje es buscar conjugar texto, sonido, animación, imágenes y video, en lo que genéricamente se ha denominado Multimedia y su impacto es bastante perceptible en la cantidad de nuevos dispositivos electrónicos que hacen parte del hogar, sitio de trabajo, empresa, centros comerciales, transportes masivos y otros.

Para mayor claridad, Multimedia es un término que se aplica a cualquier objeto que usa simultáneamente diferentes formas de contenido informativo como texto, sonido, imágenes, animación y video para informar o entretener al usuario.

Multimedia combinación de formas de contenido:



Tomado de: http://es.wikipedia.org/wiki/Multimedia

Este concepto es tan antiguo como la comunicación humana, ya que al expresarnos en una charla normal hablamos (sonido), escribimos (texto), observamos a nuestro interlocutor (video) y accionamos con gestos y movimientos de las manos (animación). Con el auge de las aplicaciones multimedia para computador este vocablo entró a formar parte del lenguaje habitual.

Cuando un programa de computador, un documento o una presentación combina adecuadamente los medios, se mejora notablemente la atención, la comprensión y el aprendizaje, ya que se acercará algo más a la manera habitual en que los seres humanos nos comunicamos, empleamos varios sentidos para comprender un mismo objeto o concepto.

2.1 UTILIDAD DIDÁCTICA DEL APLICATIVO

integradas, donde los contenidos permitan establecer relaciones análogas entre diferentes asignaturas, como es el caso de la Geometría, la Aritmética, el Álgebra, la Trigonometría y la Geometría Analítica, particularmente para el grado décimo.

En el presente trabajo, se busca el desarrollo de un currículo integral o interdisciplinario, o sea aquel relativo a varias disciplinas científicas o culturales. (Aritmética y Geometría).

De este modo, en Colombia y en particular en la Ley General de Educación el currículo se entiende como todo proceso escolar que conduce al mejoramiento de la calidad de la educación. De manera que los proyectos, las unidades de aprendizaje integrado, los programas, los planes de estudio, actividades y otros, constituyen el currículo escolar.

En la actualidad, el currículo ya no es el simple diseño de un programa de asignatura, es la organización misma del conocimiento para comunicarlo y compartirlo con los estudiantes, es el vehículo que permite llevar a la práctica los fines y propósitos de la educación[15].

Por lo anterior, el aplicativo multimedia IGAMA permite el estudio de algunos de estos contenidos, buscando afianzar las nociones básicas de la Geometría, la Aritmética y el Álgebra y así crear la posibilidad de una mejor

[15] Ministerio de Educación Nacional MEN. Artículo 5 de la Ley General de Educación: Fines de la Educación Colombiana. 1994.

comprensión de la Trigonometría y la Geometría Analítica de grado décimo. Este medio permitirá mejorar el aprendizaje de los estudiantes que llegan por primera vez a la institución educativa Centro Formativo de Antioquia CEFA, por cuanto es un espacio heterogéneo, que si bien es cierto genera bastantes dificultades por la procedencia estudiantil de diferentes instituciones educativas, también lo es que plantea desafíos al grupo de intelectuales docentes que hacen parte de este espacio escolar.

El atender estudiantes con distintos niveles de aprendizaje y distintos contenidos de aprendizaje, nos permite verificar de manera científica que no es posible estandarizar la educación y mucho menos en aspectos de tipo metodológico relacionados con el proceso docente educativo.

Este instrumento sirve entonces para tratar conceptos de grados anteriores, pero no con la intención de quedarse allí, sino que por el contrario es la rampla para ingresar a los dominios de la Trigonometría y la Geometría Analítica.

Se puede concluir que la utilidad del aplicativo multimedia IGAMA, reside en ser una estrategia informática que facilita el aprendizaje de los conceptos de las ciencias, las disciplinas o asignaturas, ya que gracias a la integración de diferentes lenguajes, de alguna manera recrea el aprendizaje de los sujetos. Dicho de otra manera, su pretensión es simular la forma como el sujeto aprende y se apropia de la realidad social y cultural, a través de sus sentidos.

2.2 DESCRIPCIÓN DEL APLICATIVO

"El factor más importante que influye en el aprendizaje es lo que el alumno ya sabe. Averígüese eso y enséñese en consecuencia"

AUSUBEL

El aplicativo multimedia para el desarrollo de la interpretación geométrica de algunos modelos aritméticos **IGAMA** está diseñado en Visual Basic 6.0, y lo conforman seis módulos, además de la Ayuda y Salir a saber:

- ❑ Historia
- ❑ Herramientas
- ❑ Líneas y Ángulos

- Triángulos
- Creamat
- Retos

IGAMA, es un aplicativo multimedia que se presenta mediante interfaces en las cuales están articulados archivos de texto corto, videos relacionados con los ejes temáticos y gráficas donde se visualiza la integración principalmente de la Geometría y la Aritmética, de una manera creativa e innovadora, por cuanto su forma de presentación difiere de cualquier escrito en Matemáticas en la actualidad. No se hacen nuevos aportes en el contenido matemático pero si intenta un redescubrimiento del saber.

El primer módulo denominado **Historia**, se dividió en dos contenidos:

- Historia de la Geometría.
- Historia de la Aritmética.

y sus actividades son:

- Actividad.
- Desafío.
- Video.

El primer contenido de esta temática se presenta utilizando un breve texto sobre Historia de la Geometría, acompañado de animaciones e imagen de personaje relevante (Renato Descartes) e igualmente un video sobre el lenguaje de las Matemáticas y su incidencia en la realidad y en la cultura de los sujetos denominado: "La historia contada".

Se diseñaron varias interfaces, la primera y segunda muestra textos de historia de la Geometría y la Aritmética con imágenes, la tercera una actividad de aprendizaje buscando afianzar la conceptualización y la comprensión de los textos anteriores, la cuarta es un desafío que busca el desarrollo de la comprensión lectora, pero que también invita a un conocimiento más profundo de la vida y obra de René Descartes y sus aportes científicos al desarrollo de la Geometría Analítica.

Este módulo busca fundamentalmente en sus actividades de aprendizaje y de evaluación dos aspectos:

- Comprensión de lectura.
- Completación de oraciones.

Con lo anterior se busca fortalecer el conocimiento de la Historia de la Geometría y de la Aritmética, lo cual de manera lamentable no se enseña en muchos establecimientos públicos, por la tendencia generalizada de no abordar la Geometría o sí se accede se hace de manera reduccionista. Esta selección busca desarrollar la capacidad de interpretación de texto por parte de los estudiantes, buscando mejorar su lectura comprensiva.

El segundo módulo del recurso didáctico multimedia, denominado **Herramientas**, se concibe como el conjunto de definiciones necesarias en la Geometría y Aritmética, para poder adentrarse en IGAMA y lograr dar respuesta a sus actividades de aprendizaje, su evaluación y además lograr obtener el rigor y profundidad posible en los conceptos preliminares de la Trigonometría y Geometría Analítica. Para poderlo desarrollar se dividió en los siguientes contenidos:

- Diccionario.
- Símbolos
- Alfabeto Griego
- Kit de medición
- Cruci-mat

Los cuales buscan esencialmente fortalecer las bases conceptuales de la Geometría, es decir, la comprensión del lenguaje geométrico, para abordar con propiedad o por lo menos con mayor conocimiento la Trigonometría y Geometría Analítica.

Las actividades de aprendizaje implican lectura comprensiva de conceptos presentados de manera breve, para que luego el estudiante sea capaz de resolver el cruci-mat e inclusive le implique volver a revisar la teoría.

Las definiciones o conceptos van acompañados de sus respectivas imágenes buscando potenciar el mayor número de sentidos, y que el aprendizaje sea más lúdico, para luego intentar, que sean los estudiantes los que resuelvan las actividades propuestas tanto en este módulo como en el de "Retos", dedicado específicamente a la evaluación, pues se trata de lograr la profundidad en el conocimiento matemático, sobre todo para aquellos que demuestren mayor necesidad de conocimiento y mejores desempeños en sus competencias intelectivas.

Se presenta para cada definición un pequeño texto, acompañado de gráficas o imágenes, al momento de dar clic en cada definición.

El crucigrama, pretende el fortalecimiento o refuerzo en las definiciones, para verificar el grado de adquisición de los conocimientos básicos de la Geometría y la Aritmética.

El tercer módulo es **Líneas y Ángulos** y se señalan los siguientes ejes temáticos:

- ❑ Segmento de recta.
- ❑ Puntos colineales.
- ❑ Puntos coplanares.
- ❑ Ángulos.
- ❑ Medida de Ángulos.
- ❑ Clases de Ángulos.

De manera interactiva se hace una integración de la teoría y las actividades de aprendizaje, se trata de que el estudiante conforme avanza en las definiciones, logre mediante la conjugación de imágenes, texto y animación, la recreación del conocimiento matemático para el caso del presente módulo.

Observar los diferentes tipos de ángulos, la medida que se le asigna, si es positiva o negativa las diferentes clases, además de percibir su rotación, elemento que se logra con mayor dificultad en la enseñanza de tipo tradicional. Dichos conceptos son fundamentales para el desarrollo posterior de la Trigonometría y la Geometría Analítica, por ejemplo el concepto de razón trigonométrica y el cálculo del ángulo de inclinación o dirección para el caso de la pendiente de una línea recta, entendida como

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

es decir el desplazamiento dirigido vertical sobre el desplazamiento dirigido horizontal.

El cuarto módulo del aplicativo multimedia se llama **Triángulos** y propone las siguientes temáticas para su respectivo estudio:

- Distancia entre dos puntos.
- Pitágoras.
- Trigonometría básica.
- Actividades.

En este nivel de estudio se busca establecer una vinculación entre la Geometría y Aritmética, buscando que los estudiantes aprecien la relación directa que existe entre los conceptos de ambas asignaturas de las Matemáticas, se trata entonces, de realizar varias interfaces donde se muestre el desarrollo de operaciones básicas aplicadas al cálculo de la distancia entre dos puntos, al igual que se proponga el conocimiento o reconstrucción del concepto de plano cartesiano, observando así su respectiva representación geométrica.

En estas actividades de aprendizaje se desarrolla: texto, imagen y animación y se plantea una actividad, donde el estudiante dados dos puntos de plano, los une mediante un segmento de línea recta, identifica las coordenadas de los respectivos puntos, realiza operaciones básicas de sustracción, potenciación y radicación.

Igualmente se profundiza sobre uno de los principales triángulos en la Trigonometría, cual es el rectángulo, dado que sobre este se definen las razones trigonométricas y se resuelven posteriormente problemas de aplicación o como se denomina la resolución de triángulos (hallar la medida de los lados de un triángulo y de sus ángulos interiores), donde los estudiantes tienen la oportunidad de aplicar los conceptos preliminares más importantes de esta asignatura: ángulo de elevación, ángulo de depresión, razones trigonométricas, cálculo de las funciones trigonométricas de ángulos notables y otros.

El quinto módulo, se denomina **Creamat** y aborda los siguientes contenidos:

- Galería
- Video
- Graphmatica
- Arte y Matemáticas

Lo primero a aclarar con este módulo es intentar establecer la relación entre Matemática y vida, es decir, el nexo que existe entre ésta y la realidad, mostrando como el hombre a lo largo de su historia aplica este conocimiento no solo a la solución de sus problemas, sino que son aplicables al arte, la ciencia, la tecnología y otras disciplinas. De alguna manera, se responde a la pregunta de nuestros estudiantes: "¿y para qué sirve esto?".

El primer contenido de esta temática se presenta utilizando gif o imágenes, en el ámbito de la recreación y la visualización, presentando las Matemáticas como una creación de la mente humana y su utilidad como elemento de recreación y admiración. Además de apreciar construcciones de tipo geométrico.

El segundo contenido es un video: "El Universo Mecánico", el cual vincula de manera directa las Matemáticas con la realidad y sobre todo con la historia, pues los conocimientos que el hombre logra desarrollar en la ciencia tienen una procedencia histórica y dialéctica, precisamente allí es donde reside la importancia de la enseñanza de un concepto determinado de las Matemáticas, en indagar su origen y el proceso de construcción que se realizó para elaborarlo. Mediante el video se logra motivar el espíritu científico y para el caso concreto, temáticas tan relevantes como el concepto de derivada, pendiente de una recta y otros.

Respecto al tercer contenido, Graphmatica, es un software de gran utilidad para la enseñanza de los conceptos básicos de la Trigonometría y Geometría Analítica de décimo grado, por cuanto es un graficador que permite desplegar y profundizar en muchos conceptos o tópicos de estas asignaturas, logrando el rigor, la imaginación y el desarrollo de la creatividad que se dificulta con una pizarra. No permite el "deslizamiento" de las variables, pero si una gran utilidad del plano cartesiano y la enseñanza inclusive de conceptos como incentro, circuncentro y baricentro, que como es natural, deben ser diseñados por el docente antes de iniciar la clase, dado que en este caso el aprendizaje debe ser dirigido inicialmente, para observar posteriormente sus resultados.

El cuarto contenido de éste módulo hace alusión al Arte y las Matemáticas, el cual vincula el uso de la Internet en las clases de Matemáticas, pero con el propósito de que los estudiantes puedan observar y profundizar la aplicación de éstas en otros campos del saber como el Arte, la Geometría a través de fractales, las ilusiones ópticas y otras. Las páginas propuestas en este caso son: Ilusiones ópticas, geometría fractal y universo y matemáticas.

Finalmente el sexto módulo es **Retos**, el cual busca el desarrollo de la práctica o auto-examen, en otras palabras, la aplicación de lo aprendido durante el desarrollo del aplicativo, buscando cimentar los conceptos básicos de la Geometría y la Aritmética, pero en directa relación con las bases de la Trigonometría y la Geometría Analítica, donde los ejercicios y problemas presentan niveles de dificultad, que implican razonamiento por parte de quien intenta resolverlos. No se trata de señalar simplemente la respuesta, para acertar es necesario pensar, o dicho en otras palabras la solución de los problemas implican desarrollo de competencias.

Y por último el botón **Ayuda,** el cual contiene un mínimo de orientaciones para el usuario, en este caso los estudiantes, cuando necesiten aclarar algún aspecto relacionado con la navegación desde el aplicativo y Salir, el cual es necesario dado que el aplicativo multimedia IGAMA, permite el desarrollo paulatino de un sistema de clases, con una clara intencionalidad pedagógica, es decir, no está pensado para una sola clase o semana, de allí que resultó bastante ambicioso su diseño.

2.3 SIGNIFICANCIA PRÁCTICA DEL APLICATIVO

Reside en el desarrollo de módulos o unidades didácticas que buscan la Interpretación Geométrica de Algunos Modelos Aritméticos, con la intencionalidad de servir de base en la comprensión de conceptos básicos de la Trigonometría y la Geometría Analítica, en otras palabras se trata de propiciar la enseñanza de algunos conceptos previos que debido a la heterogeneidad de la población estudiantil de CEFA, no son abordados en las diferentes instituciones educativas, por cuanto ésta solo atiende a la población estudiantil femenina de Medellín, correspondiente a la media técnica (10 y 11 grados).

Dinámicas de enseñanza y aprendizaje en el aula a partir de la estructuración del plan de estudios de Matemáticas, lo cual requiere de la actualización del personal docente.

De otro lado, implica revisar la planeación del currículo, que es conocida también con el término de diseño curricular. A propósito Gimeno Sacristán define el diseño curricular como "el esquema proyectivo y prospectivo más adecuado para optimizar la enseñanza... está constituido por una serie de elementos entre los que se destaca el contenido"[16].

Este diseño implicó pensar en los contenidos esenciales, métodos, medios de enseñanza-aprendizaje y de los aspectos organizativos de la disciplina, que en este caso son las Matemáticas.

La fortaleza principal del aplicativo multimedia IGAMA está en favorecer la comprensión de la Trigonometría y la Geometría Analítica, a partir de conceptos previos de la Geometría y la Aritmética.

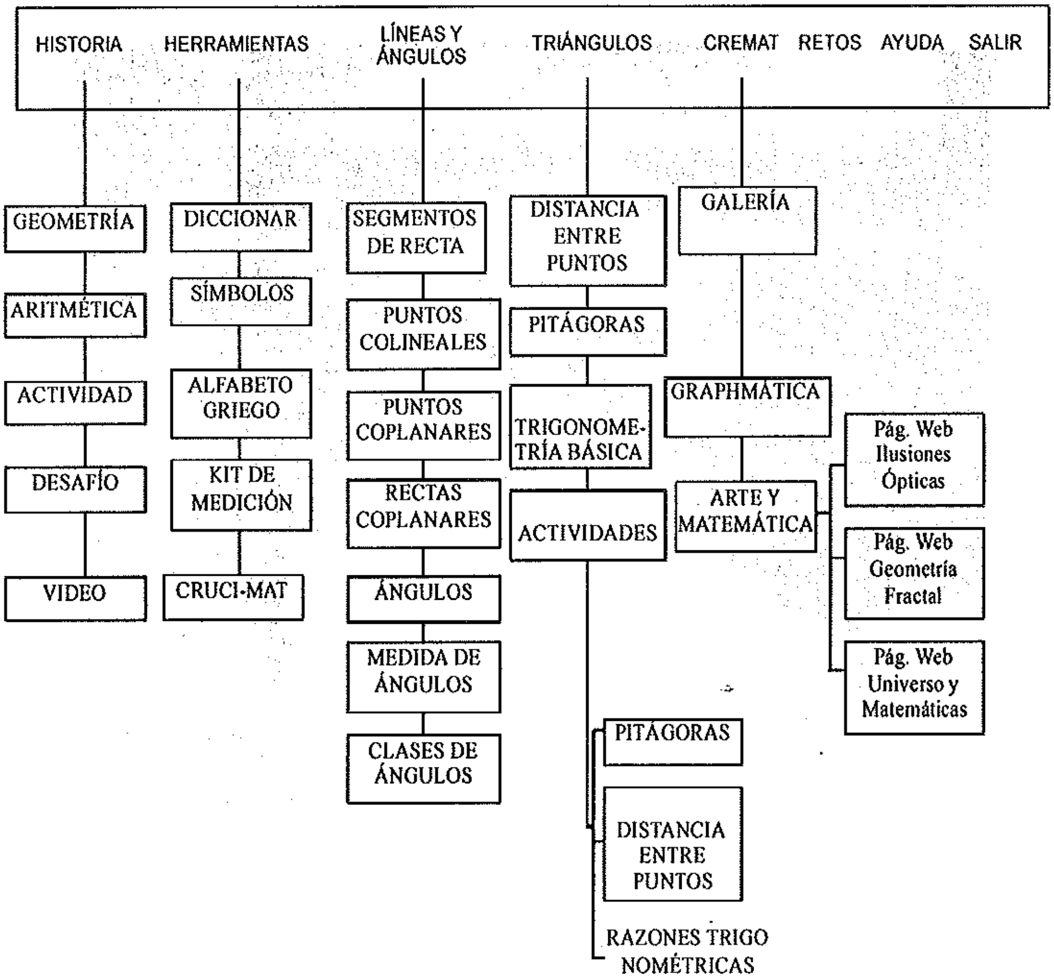
De igual forma el aplicativo en mención, favorece por ejemplo aptitudes tales como la capacidad para:

- Argumentar
- Concluir - Explicar
- Analizar - Sintetizar
- Deducir - Inducir
- Generalizar - Especificar
- Globalizar - Particularizar
- Descomponer - Recomponer
- Ir del todo a las partes y de las partes al todo

De manera implícita invita y desafía la mente de los estudiantes, a indagar acerca de los orígenes de las Matemáticas y su relación con la realidad, con el mundo, el universo y hasta con las Artes y su historia.

[16] Gimeno Sacristán, José. Teoría de la Enseñanza y Desarrollo del Currículo. Ediciones Anaya, Madrid, 1981.

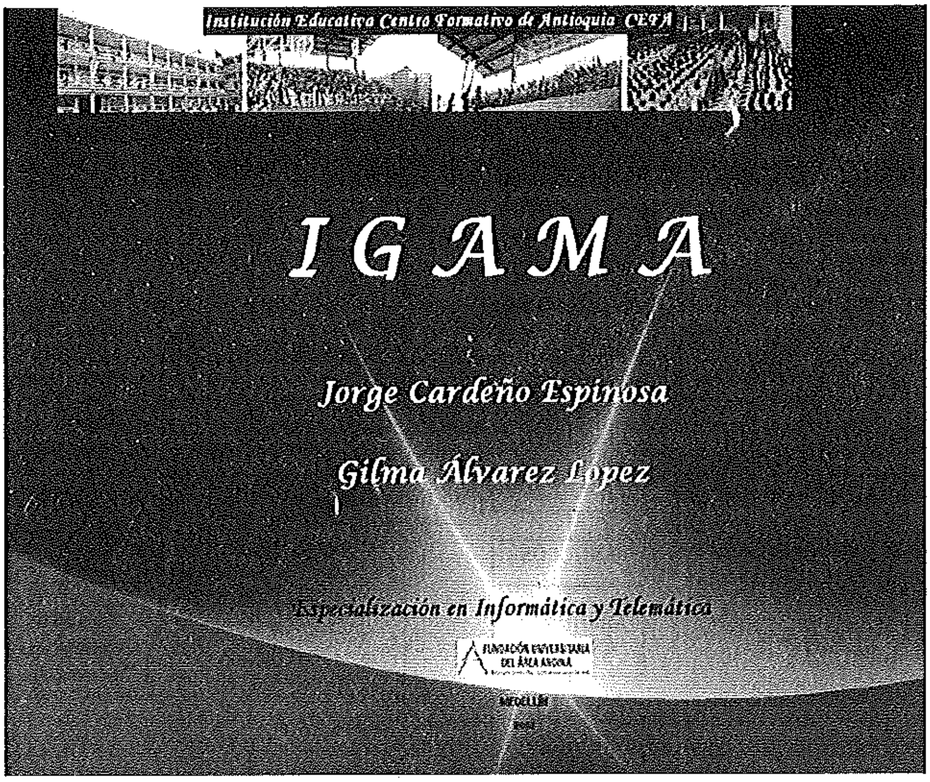
MENÚ PRINCIPAL DEL APLICATIVO IGAMA



3 APLICATIVO IGAMA: MANUAL DEL USUARIO

El uso del aplicativo IGAMA se realiza a través de menús horizontales y verticales. La navegación resulta fácil por simular una página web con la que el usuario está familiarizado. A continuación se muestra la navegación por las diferentes opciones del aplicativo.

Pantalla de Inicio: es la pantalla de Bienvenida. Sólo tienes que esperar unos segundos y automáticamente aparecerá la pantalla con el menú principal.

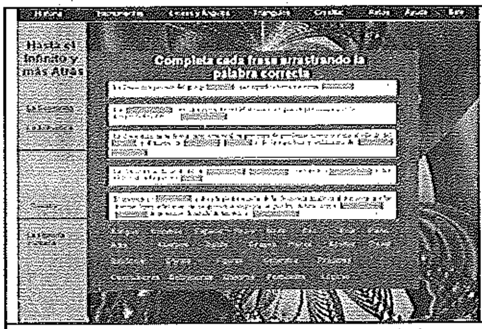


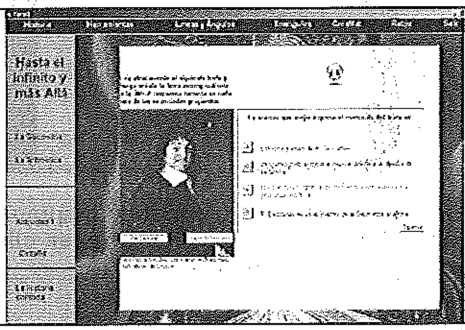
Barra Horizontal: Menú Principal

Contiene las seis opciones por las que puedes navegar y trabajar un tema distinto de la Geometría.; también tiene la opción ayuda que indica al usuario final como interactuar en el aplicativo y la opción salir, para suspender en el momento deseado. Las opciones se activan haciendo clic con el Botón derecho del Mouse. Esta barra de menú se encuentra en todas las pantallas.

A continuación se describen las pantallas correspondientes al Menú Principal:

Opción Historia del Menú principal: contiene una Barra Vertical con cinco opciones, ubicada al lado izquierdo. Cada opción corresponde al desarrollo de un tema o una actividad. Sólo debes hacer clic en la opción que necesites.

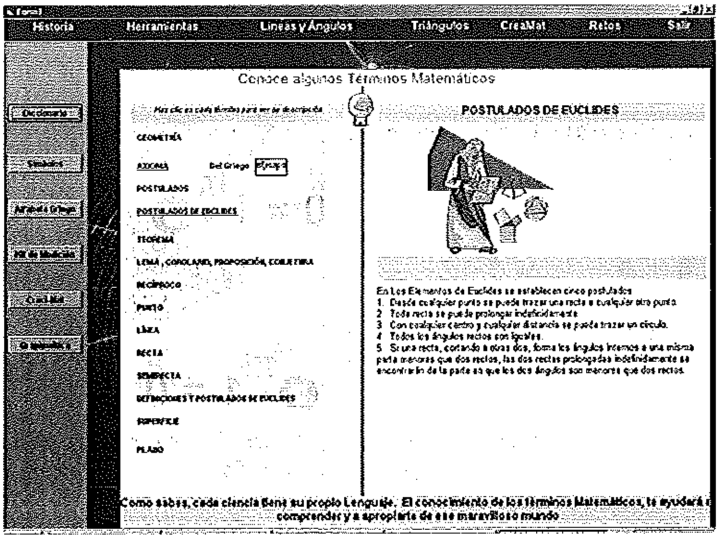


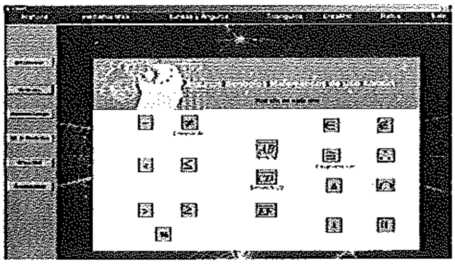
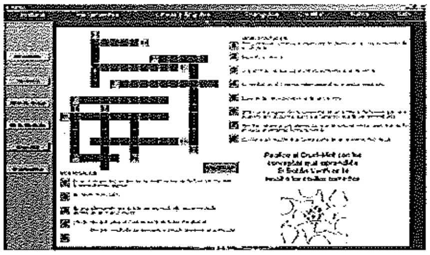


Actividad: es un ejercicio de comprensión lectora. Se realiza arrastrando las palabras con el mouse al lugar que les corresponde	**Desafío:** es un ejercicio de selección múltiple. Se realiza haciendo clic con el mouse en la opción elegida.

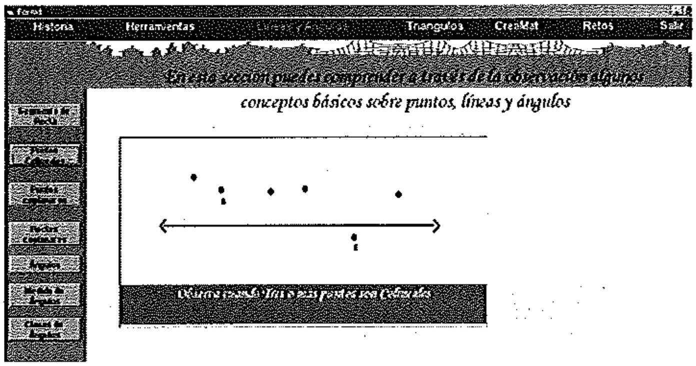
La opción "La Historia Contada" muestra un video acerca de la Geometría a través de la Historia.

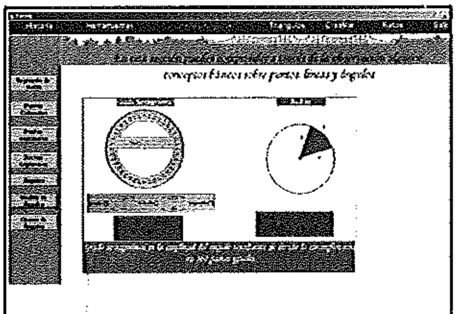
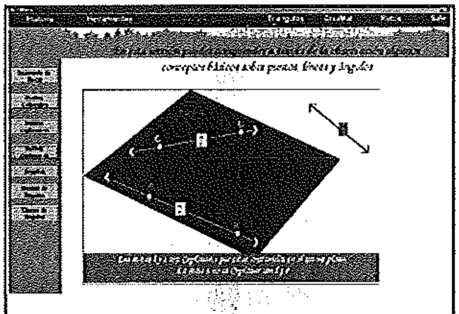
Opción Herramientas del Menú principal: contiene un menú vertical de 6 opciones. Cada una contiene una Herramienta útil en el aprendizaje de conceptos matemáticos. Para activar alguno de estos botones, sólo debes hacer clic.



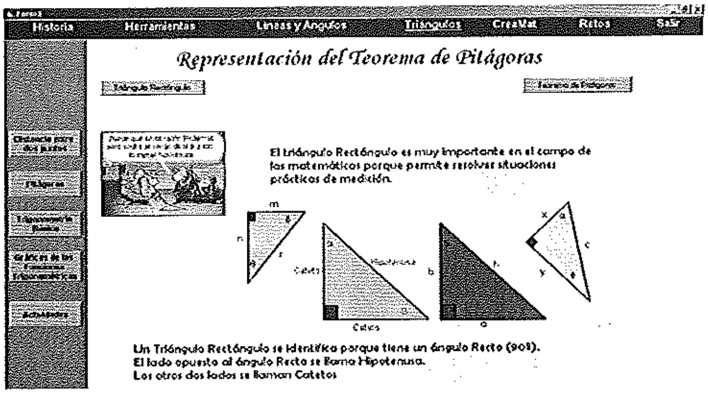
	
Botón Símbolos: muestra algunos símbolos matemáticos. Al hacer clic aparece su descripción	Botón Cruci-Mat: corresponde a una actividad para llenar los términos que aparecen descritos. Utiliza el teclado

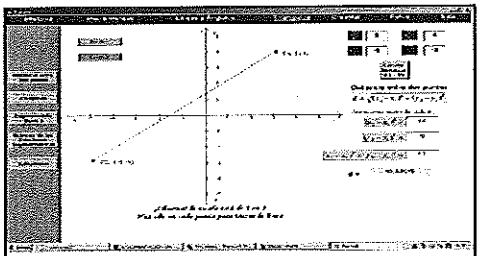
Opción Líneas y Ángulos del Menú principal: contiene un menú vertical de siete opciones. Esta opción desarrolla los conceptos sobre puntos, líneas y ángulos, a través de la observación de figuras animadas.



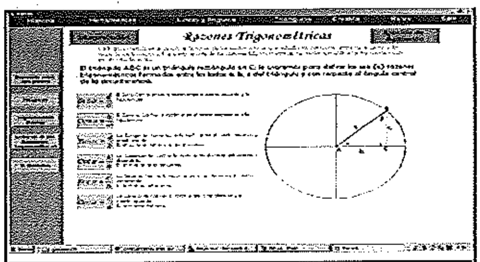
	
Medida de ángulos: al hacer clic en los títulos, aparece la descripción de la forma de medición de ángulos	Rectas Copla nares: Muestra en la parte inferior la definición de rectas coplanares.

Opción Triángulos del Menú principal: contiene un menú vertical de 5 opciones:



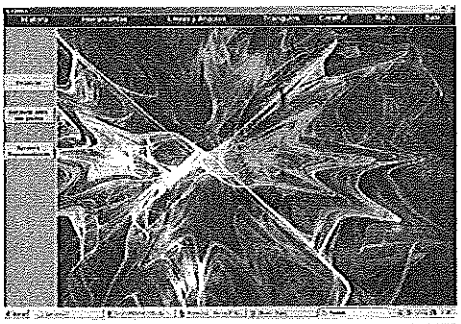


Opción Distancia entre dos puntos: Muestra la forma de calcular la distancia entre dos puntos. Sólo debes seguir los pasos: elegir la escala, señalar los puntos y hacer clic en Calcular distancia.

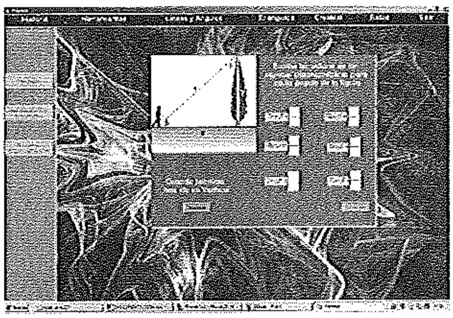


Opción Trigonometría básica: Al hacer clic en cada relación aparece la descripción.

La opción Actividades te lleva a esta pantalla, en la cual encuentras tres Botones. Al hacer clic en cada uno puedes resolver las actividades y verificar tus conocimientos.

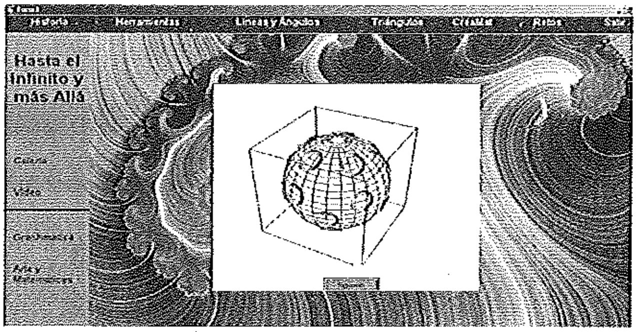


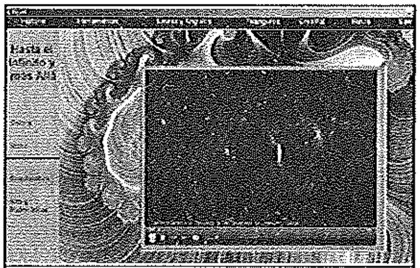
Menú de Actividades



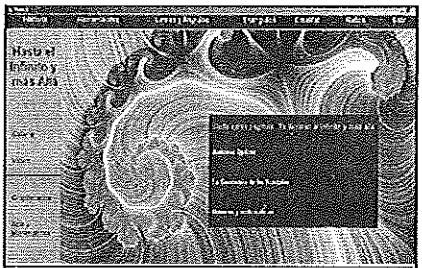
Actividad Razones Trigonométricas

Opción Crea-Mat del Menú principal: Contiene un menú vertical de cuatro opciones. En esta pantalla descubrirás la Belleza de las Matemáticas de manera lúdica.





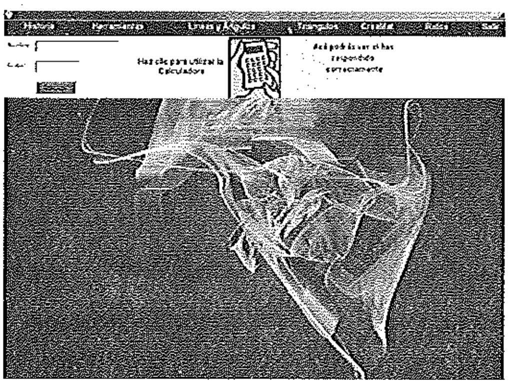
Opción video: puedes ver un video acerca de las Matemáticas

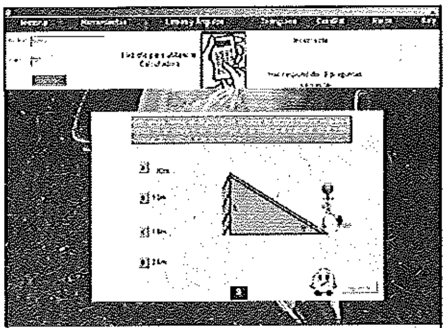


Opción Arte y matemáticas: al hacer clic en esta opción te aparece una ventana con tres enlaces a páginas de interés. Si tienes Internet no dejes de utilizar estas opciones.

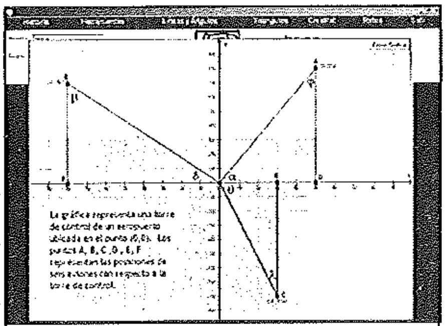
Opción Retos del Menú principal: contiene una evaluación de 15 preguntas de selección múltiple. Puedes estar segura que si los respondes correctamente habrás comprendido las Bases de la Geometría.

Para iniciar la prueba, debes llenar los datos: Nombre y Grupo y luego hacer clic en el Botón Iniciar.

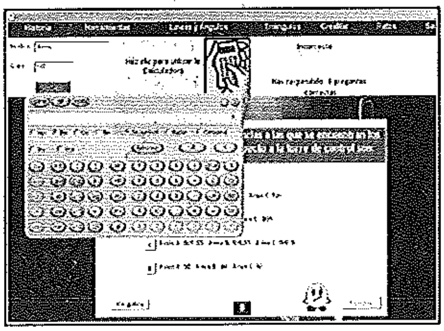




Ejemplo de una pregunta: información gráfica y 4 opciones de respuesta

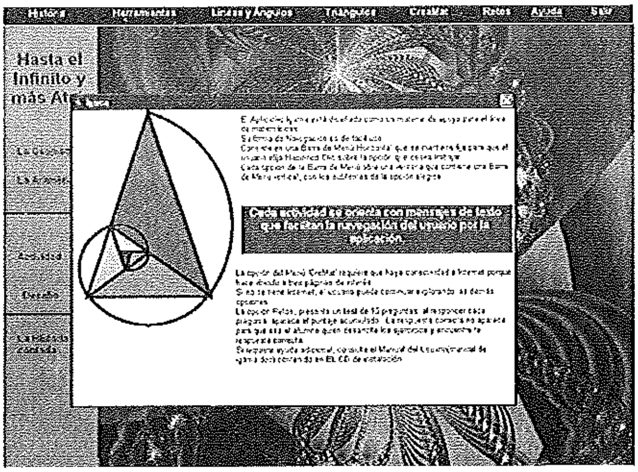


Las preguntas de la 8 a la 15 se responden con base en este gráfico. Está disponible cada vez que lo necesites. Se activa del Botón amarillo

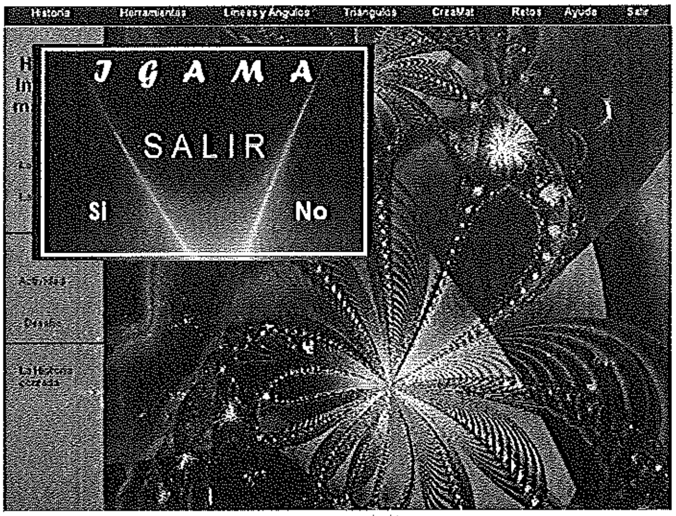


En la parte superior aparece si respondiste correcto y el número de respuestas acertadas. Recuerda que puedes utilizar la calculadora, haciendo clic en: "Haz clic para utilizar la calculadora".

Opción ayuda del menú principal: contiene una explicación de la forma como se interactúa en el aplicativo, con el fin de que el usuario final pueda utilizarla en el momento que sea necesario por las dudas de manejo que se le presenten en cualquier tema o parte que esté trabajando



Opción Salir del Menú principal: Al hacer clic en la opción Salir, aparece la ventana con las dos opciones: Si o No.



Trigonometría Hiperbólica

CARLOS ENRIQUE PINO G.

Licenciado en Matemáticas
Universidad de Medellín
Institución Educativa Normal Superior de Medellín

MEDELLÍN
2010

"Un gran descubrimiento resuelve un gran problema, pero en la solución de cualquier problema hay una pizca de descubrimiento.

Tu problema puede ser modesto, pero si es un reto para tu curiosidad y hace que entren en juego tus facultades de inventiva, y si lo resuelves con tus propios medios, experimentarás la tensión y gozarás el triunfo del descubrimiento."

George Polya

"El arte de enseñar es el arte de ayudar a descubrir."

Mak Van Doren.

PRÓLOGO

La analogía es, en términos muy generales, la correlación entre los términos de dos o varios sistemas u órdenes, es decir, la existencia de una relación entre cada uno de los términos de un sistema y cada uno de los términos de otro.

Se ha hablado también de analogía como semejanza de un cosa con otra, de la similitud de unos caracteres o funciones con otros. En este último caso la analogía consiste en la atribución de los mismos predicados a diversos objetos, pero esta atribución no debe ser entendida como una determinación unívoca de estos objetos, sino como la expresión de una correspondencia, semejanza o correlación establecida entre ellos. La palabra analogía, se usa en un sentido de inducción muy rigurosa, como la "semejanza de relaciones" y otra se aplica a razonamientos fundados en cualquier tipo de semejanza. Pero aunque ciertas semejanzas pueden proporcionar algún grado de probabilidad, no es posible llegar a conclusiones inductivamente aceptables en muchos casos. Por lo tanto, aunque puede usarse el razonamiento por analogía, hay que hacerlo solamente cuando se dan ciertas condiciones; junto a semejanzas, hay que investigar diferencias y ver la relación entre ambas dentro de un conocimiento tolerablemente amplio de la materia. Solo cuando la semejanza es muy grande y la diferencia muy pequeña, sostiene John Stuart Mill, puede aproximarse el razonamiento por analogía a una inducción válida.

En un sentido no muy distinto del de John Stuart Mill, Ernst Mach consideró la analogía como una relación entre sistemas de conceptos homólogos que puedan dar lugar a diferencias o concordancias cuya relativa fuerza pueda establecerse y medirse.

La trigonometría hiperbólica que se desarrolla en este trabajo se ha construido a partir de la analogía que se establece entre la trigonometría circular y ésta.

Las relaciones algebraicas en ambas trigonometrías son las mismas. Definidas las funciones seno hiperbólico y coseno hiperbólico se pueden definir las restantes funciones hiperbólicas en términos de estas dos funciones. Se llaman funciones hiperbólicas porque se pueden describir como las proyecciones, según el eje X y el eje Y , de los puntos sobre una hipérbola rectangular o equilátera de ecuación X^2 .. $Y^2 = 1$ y se expresan como combinaciones de las funciones exponenciales del tipo

$y = \frac{e^{\alpha}}{2}$ y $y = \frac{e^{-\alpha}}{2}$.

Igualmente, se pueden determinar cuáles funciones hiperbólicas son funciones pares y cuáles impares; al graficar las funciones hiperbólicas se constata que no son periódicas y permiten cada una de ellas definir sus respectivos *dominio y recorrido* posibilitando su estudio exhaustivo.

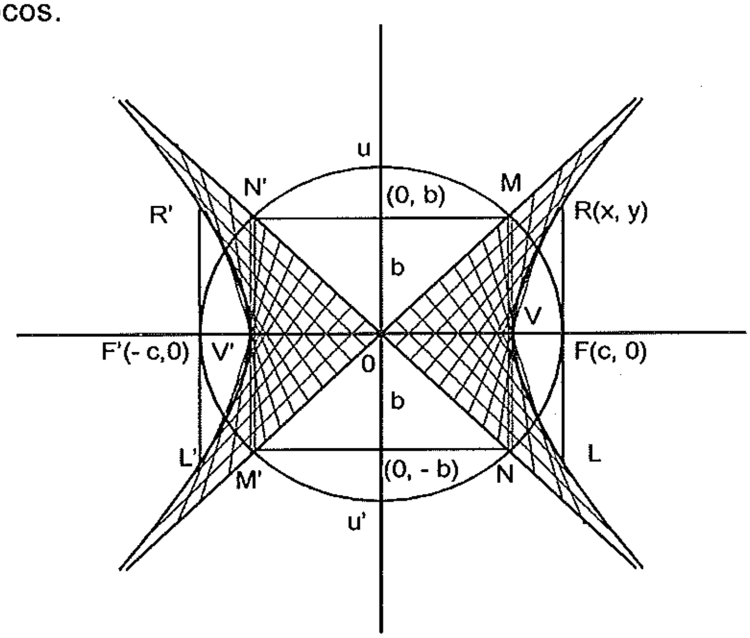
Se deducen las identidades hiperbólicas fundamentales y las identidades de semejanza; las fórmulas de adición de ángulos; las fórmulas de ángulos dobles, ángulos triples y ángulos mitad; las fórmulas de multiplicación y transformación. Finalmente, se hace el estudio de las funciones hiperbólicas inversas, sus gráficas y el cómo expresarlas en términos de la función logarítmica. Se plantean ejercicios de aplicación de las diversas temáticas abordadas. Las recomendaciones y comentarios sobre este trabajo son recibidas con entusiasmo para mejorarlo y contribuir así al estudio de estas funciones hiperbólicas y sus aplicaciones.

Cordialmente:

Carlos Enrique Pino G.

1. LA HIPÉRBOLA

Es el lugar geométrico de los puntos *P* de un plano cuya diferencia de las distancias a dos puntos fijos es constante e igual a 2a, los puntos fijos se llaman focos.



0: Centro Excentricidad: $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$

V,V': Vértices F(c; 0), F0(-c, 0): Focos

$\overline{MM'}$; $\overline{NN'}$: Asíntotas Distancia del centro al foco: $\sqrt{a^2 + b^2}$

$\overline{VV'}$: Eje transversal =2a Diferencia de las distancias de un punto sobre la hipérbola a los focos: 2a

$\overline{uu'}$: Eje conjugado =2b $\overline{LR'}$; $\overline{L'}$;$\overline{R'}$: Lados rectos

Ecuación de la hipérbola con centro en el origen:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (1)$$

Pendientes de la asíntotas: $\pm\frac{a}{b}$.

Ecuación de la hipérbola si el eje mayor coincide con el eje Y :

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \qquad (2)$$

Pendientes de la asíntotas: $\pm\frac{b}{a}$

Ecuación de la hipérbola, con centro (h; k) y eje transversal paralelo al eje X:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \qquad (3)$$

Pendientes de la asíntotas: $\pm\frac{b}{a}$

Ecuación de la hipérbola, con centro en (h; k) y eje transversal paralelo al eje Y:

$$\frac{(y-h)^2}{a^2} - \frac{(x-k)^2}{b^2} = 1 \qquad (4)$$

Pendientes de la asíntotas: $\pm\frac{b}{a}$

Forma general de la ecuación de una hipérbola cuando los ejes son paralelos a los ejes coordenados:

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \qquad AC < 0 \qquad (5)$$

Para una hipérbola equilátera o rectangular: a = b = 1; $e = \sqrt{2}$

Las asíntotas son perpendiculares.

(1) Demuestre que la distancia del centro al foco de una hipérbola cuyo eje transversal coincide con el eje X es $\sqrt{a^2 + b^2}$

(2) Demuestre que la ecuación de la hipérbola con centro en el origen y cuyo eje transversal coincide con el eje Y es:

$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$; $V_1(-a, 0)$; $V_2(a, 0)$ $F_1(-c,0)$; $F_2(c,0)$:

(3) Encuentre las ecuaciones de las asíntotas de la hipérbola

$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$; Cuales son sus pendientes?

$\frac{Y^2}{a^2} \quad \frac{X^2}{b^2}$; $V_1(0;..a)$; V2(0; a) F1(0;..c); F2(0; c):

(4) Calcular las coordenadas (h; k) del centro de la hipérbola

$9x^2 - 16y^2 - 36x + 96y - 252 = 0$; las coordenadas de los vértices y de los focos. a = 4; b = 3; c = 5; (h; k) = (2; 3).

(5) Encuentre las coordenadas de los vértices y los focos en cada hipérbola:

a) $\frac{(x-6)^2}{36} - \frac{(y-8)^2}{64} = 1.$; b) $y^2 - x^2 - 2y + 4x - 4 = 0.$

c) $x^2 - 4yx^2 - 2x + 16y - 19 = 0.$; d) $4x^2 - y^2 + 32x - 10y + 35 = 0.$

e) $y^2 - 9x2 - 6y - 18x - 9 = 0.$

- Encuentre una ecuación de cada hipérbola descrita:

a) Centro (5; 0); un vértice (9; 0); excentricidad $\frac{5}{4}$.

b) Vértices (4; 0) y (4; 8); asíntotas con pendientes 1 y -1.

c) Focos (-.4;-.3) y (-.4; 7); un vértice (- 4; 5).

d) Vértices (-2; 0) y focos (-3; 0).

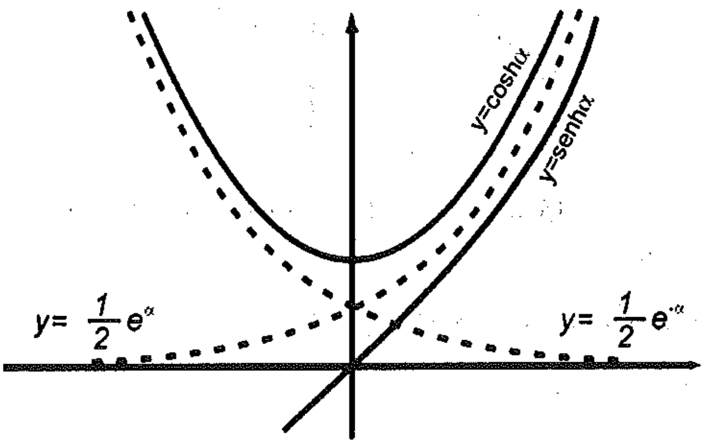
2. Funciones hiperbólicas

Se llaman Funciones hiperbólicas porque se pueden describir como las proyecciones, según el eje X y el eje Y , de los puntos sobre una hipérbola.

Sus propiedades algebraicas son análogas a las de las funciones trigonométricas.

En muchas aplicaciones del análisis matemático se encuentran combinaciones de las funciones exponenciales del tipo: $y = \frac{e^{a}}{2}$, $y = \frac{e^{-a}}{2}$; tales combinaciones se consideran como nuevas funciones y se designan:

$$\cosh a = \frac{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{2} \ ; \ \operatorname{senh} a = \frac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{2}$$



La expresión $x^2 - y^2 = 1$ es la ecuación de la hipérbola rectangularo equilátera, para la cual las asíntotas son perpendiculares y la longitud desde el centro de la hipérbola a su vértice es igual a la longitud media de su eje menor (a = b = 1).

$$x = \cosh \alpha \quad ; \quad y = \operatorname{senh} \alpha;$$

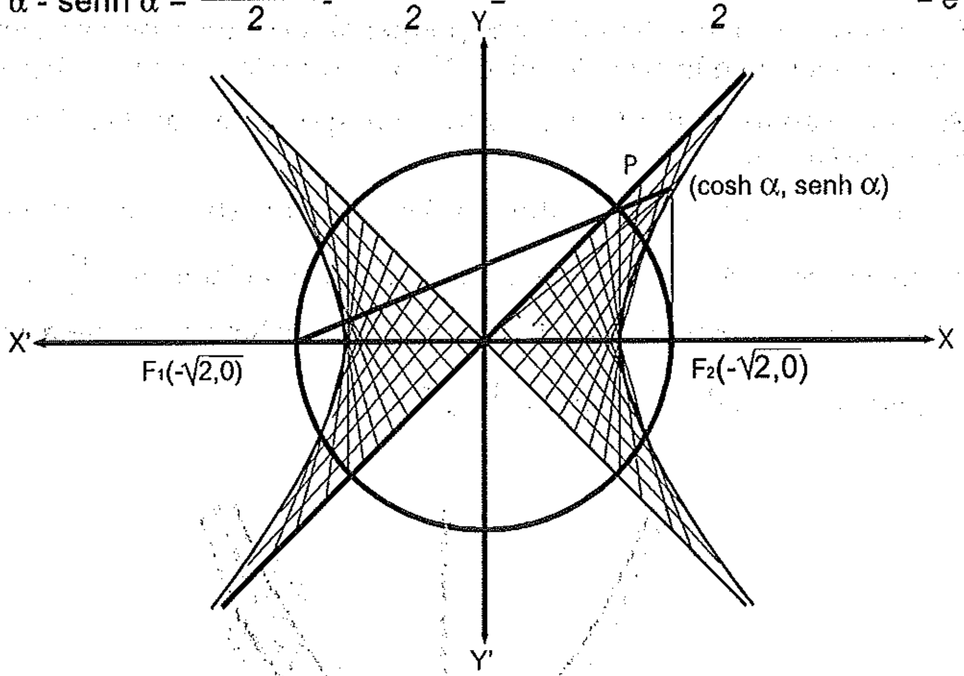
son las ecuaciones paramétricas de la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$.

De las definiciones de senhα y coshα, se deduce que:

$\cosh\alpha + \operatorname{senh}\alpha = e\alpha$ y $\cosh\alpha - \operatorname{senh}\alpha = e^{-\alpha}$

$$\cosh \alpha + \operatorname{senh} \alpha = \frac{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{2} + \frac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{2} = \frac{e^{\alpha} + e^{-\alpha} + e^{\alpha} + e^{-\alpha} - e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{2} = e^{\alpha}$$

$$\cosh \alpha - \operatorname{senh} \alpha = \frac{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{2} - \frac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{2} = \frac{e^{\alpha} + e^{-\alpha} + e^{\alpha} - e^{-\alpha} - e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{2} = e^{-\alpha}$$



$\{(x; y) : x^2 - y^2 = 1\}$ Multiplicando miembro a miembro ambas igualdades:

$(\cosh \alpha + \operatorname{senh} \alpha)(\cosh \alpha - \operatorname{senh}\alpha) = e\alpha \cdot e^{-\alpha}$

$\cosh^2 \alpha - \operatorname{senh}^2 \alpha = e\alpha\text{-}.\alpha = e^0 = 1$:

De las definiciones de senh α y cosh α igualmente se puede deducir que senh 0 = 0 y cosh 0 = 1.

Con las funciones senh α y cosh α se pueden definir las funciones hiperbólicas restantes:

$$\tanh \alpha = \frac{\operatorname{senh} \alpha}{\cosh \alpha} = \frac{e - e^{-\alpha}}{e + e^{\alpha}} \quad ; \quad \coth \alpha = \frac{\cosh \alpha}{\operatorname{senh} \alpha} = \frac{e + e^{-\alpha}}{e - e^{-\alpha}}$$

$$\operatorname{cosech} \alpha = \frac{1}{\operatorname{senh} \alpha} = \frac{2}{e - e^{-\alpha}} \; ; \quad \operatorname{sech} \alpha = \frac{1}{\cosh \alpha} = \frac{2}{e + e^{-\alpha}}$$

3. Funciones hiperbólicas pares e impares

Una función y = f(x) es par si al sustituir x por -x, se cumple que f(x) = f(-x).

Una función y = f(x) es impar si al sustituir x por -x, se cumple que f(-x) =

-f(x). Probemos de acuerdo a estas definiciones cuáles funciones hiperbólicas son pares y cuáles impares:

$$\operatorname{senh}(\alpha) = \frac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{2}; \; \operatorname{senh}(-\alpha) = \frac{e^{-\alpha} - e^{-(-\alpha)}}{2} = \frac{e^{-\alpha} - e^{\alpha}\,2}{2} = \frac{-e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{2}$$

$$= \frac{(e^{\alpha} - e^{-\alpha})}{2} = -\operatorname{senh} \alpha$$

La función senh α es impar.

$$\cosh(\alpha) = \frac{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{2}; \; \cosh(-\alpha) = \frac{e^{-\alpha} + e^{-(-\alpha)}}{2} = \frac{e^{-\alpha} + e^{\alpha}}{2} = \frac{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{2} = \cosh \alpha$$

La función cosh α es par.

$$\tanh(\alpha) = \frac{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}; \; \tanh(-a) = \frac{e^{-\alpha} - e^{-(-\alpha)}}{e^{-\alpha} + e^{-(-\alpha)}} = \frac{e^{-\alpha} - e^{\alpha}}{e^{-\alpha} + e^{\alpha}} = \frac{-e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{-e^{\alpha} + e^{-\alpha}} = -\tanh \alpha:$$

La función tanh α es impar.

Ejercicios. Pruebe que

(1) La función cosech α es impar.

(2) La función sech α es par.

(3) La función coth α es impar.

(4) Resuelva cosech α = 2 para α.

Solución.

$$\cosh \alpha = 2 \Leftrightarrow \frac{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{2} = 2 \Leftrightarrow e^{\alpha} + e^{-\alpha} = 4$$

Luego $\quad e^{\alpha} + \frac{1}{e^{\alpha}} = 4 \Leftrightarrow e^{-\alpha} + 1 = 4e^{\alpha} \Leftrightarrow e^{\alpha} - 4e^{\alpha} + 1 = 0$

De donde $\quad (e^{\alpha})^2 - 4e^{\alpha} + 1 = 0 \Leftrightarrow e^{\alpha} = \quad (4 \pm \sqrt{12}) \Leftrightarrow$

$$\ln e^{\alpha} = \ln(2 + \sqrt{3}) \Leftrightarrow \alpha = \ln(2 + \sqrt{3})$$

(5) Resuelva senh $\alpha = 3$ para α.

(6) Resuelva tanh $\alpha = \frac{1}{2}$ para α.

(7) Resuelva cosech $\alpha = \frac{1}{3}$ para α.

(8) Resuelva coth $\alpha = 2$ para α.

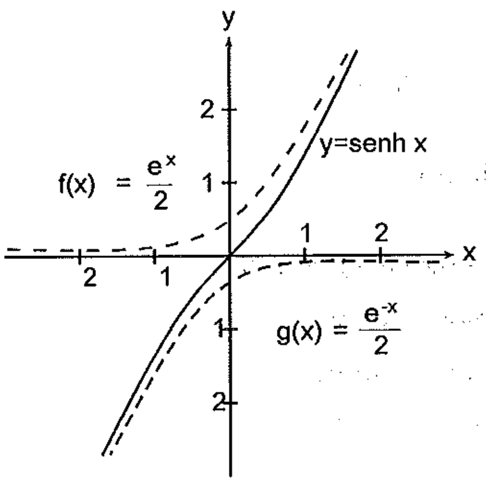
(4) Resuelva sech $\alpha = \frac{1}{3}$ para α.

4. Gráficas de las funciones hiperbólicas

4.1 La aplicación y = senh x es un homeomorfísmo estrictamente creciente de R en R.

$$y = \text{senh } x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}$$

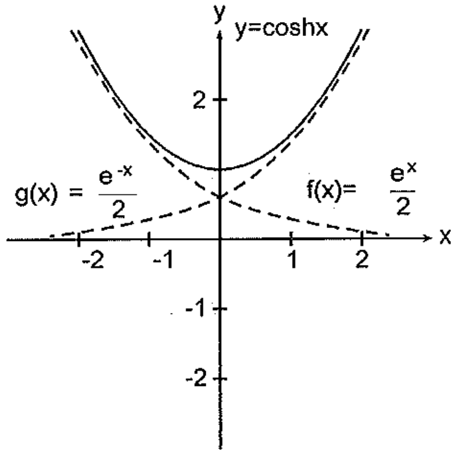
Dominio de la función: $(-\infty, \infty)$. ; Recorrido de la función: $(-\infty, \infty)$.



4.2 La aplicación contínua y = cosh x no es monótona en R. Su restricción a R+ es estrictamente creciente; dicha restricción es un homeomorfísmo de R+ sobre [1;∞).

$$y = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

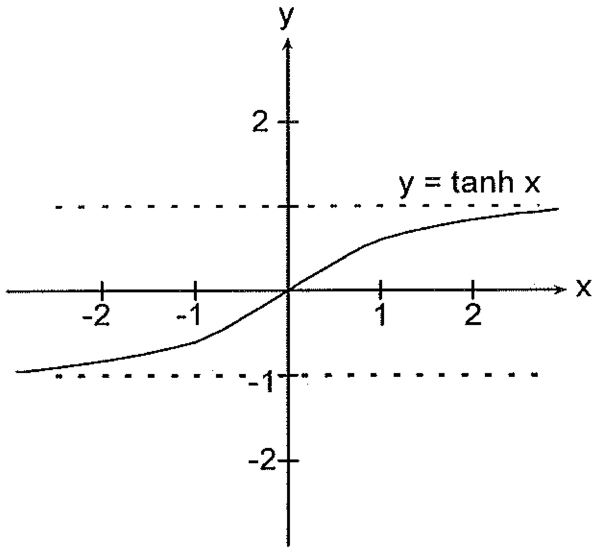
Dominio de la función: (-∞,∞). ; Recorrido de la función: [1,∞).



4.3 La aplicación contínua y = tanh x es estrictamente creciente sobre R; por tanto es un homeomorfísmo de R sobre (..1; 1).

$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

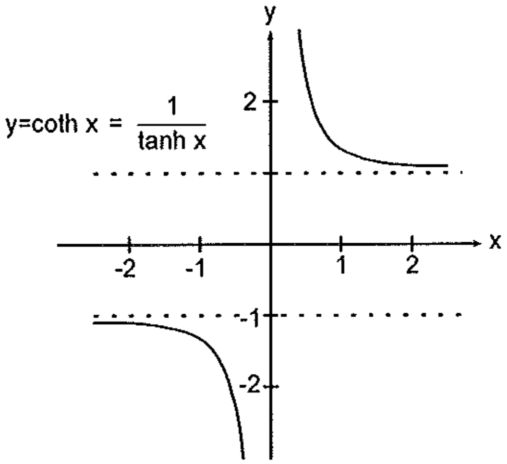
Dominio de la función: (-∞,∞). ; Recorrido de la función: (-1, 1).



4.4 La función contínua y = coth x es estrictamente decreciente en los intervalos $(-\infty, 0)$ y $(0, \infty)$, donde se define. La restricción a R^*_- es un homeomorfísmo de R^*_- en o sobre $(-1, \infty\text{-}1)$ y su restricción a R^*_+ es también un homeomorfísmo de R^*_+ sobre $(1, \infty)$.

Dominio de la función: $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. ; Recorrido de la función: $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.

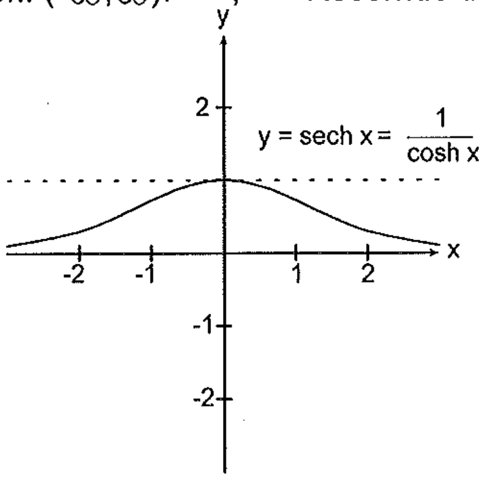
$$y = \coth x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$



4.5 La aplicación contínua y = sech x no es monótona en R. Su restricción a R+ es estrictamente decreciente; dicha restricción es una aplicación de R+ sobre (0,1]

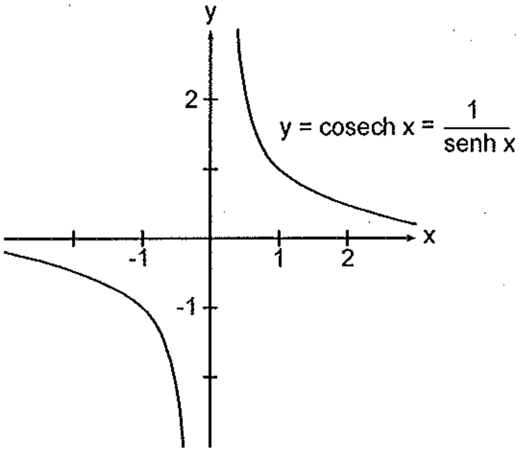
$$y = \text{sech } x = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$$

Dominio de la función: $(-\infty, \infty)$. ; Recorrido de la función: (0, 1].



4.6 La aplicación contínua y = cosech x es estrictamente decreciente en los intervalos $(-\infty, 0) \cup (0,\infty)$, donde se define; su recorrido es $(-\infty, 0) \cup (0,\infty)$

$$y = \text{cosech } x = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$$



5. Identidades hiperbólicas fundamentales

Son ecuaciones que se verifican para cualquier valor o valores de la variable o variables que contienen, siempre que para estos valores estén definidos ambos miembros.

A partir de $x^2 - y^2 = 1$, siendo $x = \cosh \alpha$ y $y = \text{senh } \alpha$, se deduce que

$$\boxed{\cosh^2 \alpha - \text{senh}^2 \alpha = 1} \qquad (6)$$

Dividiendo ambos miembros de (6) entre $\cosh^2 \alpha$:

$$\frac{\cosh^2 \alpha}{\cosh^2 \alpha} - \frac{\text{senh}^2 \alpha}{\cosh^2 \alpha} = \frac{1}{\cosh^2 \alpha}$$

$$\boxed{1 - \tanh^2 \alpha = \text{senh}^2 \alpha} \qquad (7)$$

Dividiendo ambos miembros de (6) entre senh² ":

$$\frac{\cosh^2 \alpha}{\text{senh}^2 \alpha} - \frac{\text{senh}^2 \alpha}{\text{senh}^2 \alpha} = \frac{1}{\text{senh}^2 \alpha}$$

$$\boxed{\coth^2 \alpha - 1 = \text{cosech}^2 \alpha} \qquad (8)$$

Ejercicios.

(A) Pruebe que

(1) $\cosh^2 \alpha - \operatorname{senh}^2 \alpha = 1$.

(2) $1 - \tanh^2\alpha = \operatorname{sech}^2 \alpha$.

(3) $\coth^2 \alpha - 1 = \operatorname{cosech}^2 \alpha$

(4) $\cosh \alpha + \operatorname{senh} \alpha = e^{\alpha}$.

(5) $\cosh \alpha - \operatorname{senh} \alpha = e^{-\alpha}$.

(B) Demuestre las siguientes identidades:

(1) $\dfrac{\tanh \theta}{1 - \tanh^2 \theta} = \operatorname{senh}^2 \theta$

(2) $\dfrac{\cosh^2 \theta - \operatorname{senh}^2 \theta}{\cosh \theta + \operatorname{senh} \theta} = \cosh \theta - \operatorname{senh} \theta$

(3) $\dfrac{\cosh \theta - \operatorname{senh} \theta}{\cosh \theta + \operatorname{senh} \theta} - \dfrac{\cosh \theta + \operatorname{senh} \theta}{\cosh \theta - \operatorname{senh} \theta} = - 4 \cosh \theta \ \operatorname{senh} \theta$

(4) $\cosh^2 \theta - \operatorname{senh}^2 \theta = \operatorname{sech}^2 \theta + \tanh^2 \theta$

(5) $\tanh^2 \theta + \operatorname{sech}^2 \theta = \coth^2\theta - \operatorname{cosech}^2\theta$

(6) $\cosh^2\theta - \operatorname{senh}^2 \theta = \coth^2\theta - \operatorname{cosech}^2\theta$

(7) $\dfrac{1 + \tanh \theta}{1 - \tanh \theta} - \dfrac{1 -}{1 - \tanh \theta} = \dfrac{\tanh \theta}{1 - \tanh \theta}$

(8) $1 \cosh \theta - 1 + 1 \cosh \theta - 1 = 2 \coth\theta \ \operatorname{cosech} \theta$

(9) $\operatorname{senh}^2 \theta \ (\coth^2 \theta - 1) = 1$

(10) $\dfrac{\cosh^2\theta - \operatorname{senh}^2\theta}{\operatorname{sech}^2\theta + \tanh^2 \theta} + \dfrac{\coth^2 \theta - \operatorname{cosech}^2 \theta}{\cosh^2 \theta - \operatorname{senh}^2 \theta} = 2$

6. Fórmulas de adición de ángulos

6.1 Demuestre que $\cosh(\beta + \theta) = \cosh \beta \cosh \theta + \operatorname{senh} \beta \operatorname{senh} \theta$

Demostración

En $\cosh \alpha = \dfrac{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{2}$, se hace $\alpha = \beta + \theta$, por lo tanto:

$$\cosh(\beta + \theta) = \frac{e^{(\beta,\theta)} + e^{-(\beta-\theta)}}{2} = \frac{e^{\beta}\cdot e^{\theta} + e^{-\beta}\cdot e^{-\theta}}{2}$$

$e^{\beta} = \cosh\beta + \text{senh}\,\beta$; $e^{-\beta} = \cosh\beta - \text{senh}\,\beta$

$e^{\theta} = \cosh\theta + \text{senh}\,\theta$; $e^{-\beta} = \cosh\theta - \text{senh}\,\theta$,

sustituyendo estas equivalencias en $\cosh(\beta + \theta)$: $\cosh(\beta + \theta) =$

$$\frac{(\cosh\beta + \text{senh}\,\beta)(\cosh\theta + \text{senh}\,\theta) + (\cosh\beta - \text{senh}\,\beta)(\cosh\theta -.\ \text{senh}\,\theta)}{2}$$

Efectuando los productos indicados y reduciendo términos semejantes:

$$\cosh(\beta + \theta) = \frac{2\cosh\beta\cosh\theta + 2\,\text{senh}\,\beta\,\text{senh}\,\theta}{2}$$

$$= \frac{2(\cosh\beta\cosh\theta + 2\,\text{senh}\,\beta\,\text{senh}\,\theta)}{2}$$

de donde $\boxed{\cosh(\beta + \theta) = \cosh\beta\cosh\theta + \text{senh}\,\beta\,\text{senh}\,\theta)}$ (9)

6.2 Demuestre que $\cosh(\beta - \theta) = \cosh\beta\cosh\theta - \text{senh}\,\beta\,\text{senh}\,\theta$.

Demostración

En $\cosh(\beta + \theta) = \cosh\beta\cosh\theta + \text{senh}\,\beta\,\text{senh}\,\theta$, se hace $\theta = -\theta$,

entonces: $\cosh[\beta + (-\theta)] = \cosh\beta\cosh(-) + \text{senh}\,\beta\,\text{senh}(-\theta)$:

Como $\cosh(-\theta) = \cosh\theta$ y $\text{senh}(-\theta) = -\text{senh}\,\theta$;

se tiene: $\cosh(\beta - \theta) = \cosh\beta\cosh\theta + \text{senh}\,\beta(-\text{senh}\,\theta)$

luego $\boxed{\cosh(\beta - \theta) = \cosh\beta\cosh\theta - \text{senh}\,\beta\,\text{senh}\,\theta}$ (10)

6.3 Demuestre que $\text{senh}(\beta + \theta) = \text{senh}\,\beta\cosh\theta + \text{senh}\,\theta\cosh\beta$.

Demostración

En senh " $= \dfrac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{2}$, se hace a = b +q ;

Luego $\text{senh}(\beta + \theta) = \dfrac{e^{\beta+\theta} - e^{-(\beta+\theta)}}{2} = \dfrac{e^{\beta}\cdot e^{\theta} - e^{-\beta}\cdot e^{-\theta}}{2}$

$e^{\beta} = \cosh\beta + \operatorname{senh}\beta$; $\qquad e^{-\beta} = \cosh\beta - \operatorname{senh}\beta$;

$e^{\theta} = \cosh\theta + \operatorname{senh}\theta$; $\qquad e^{-\theta} = \cosh\theta - \operatorname{senh}\theta$,

sustituyendo estas equivalencias en $\operatorname{senh}(\beta + \theta)$: $\operatorname{senh}(\beta + \theta) =$

$$\frac{(\cosh\beta + \operatorname{senh}\beta)(\cosh\theta + \operatorname{senh}\theta) - (\cosh\beta - \operatorname{senh}\beta)(\cosh\theta - \operatorname{senh}\theta)}{2}$$

Efectuando los productos indicados y reduciendo términos semejantes

$$\frac{2\operatorname{senh}\beta\cosh\theta + 2\operatorname{senh}\theta\cosh\beta}{2}\ ;\ \frac{2(\operatorname{senh}\beta\cosh\theta + 2\operatorname{senh}\theta\cosh\beta)}{2}$$

$$\boxed{\operatorname{senh}(\beta + \theta) = \operatorname{senh}\beta\cosh\theta + \operatorname{senh}\theta\cosh\beta} \qquad (11)$$

6.4 Demuestre que $\operatorname{senh}(\beta -) = \operatorname{senh}\beta\cosh - \operatorname{senh}\ \cosh\beta$.

Demostración

En $\quad \operatorname{senh}(\beta + \theta) = \operatorname{senh}\beta\cosh\theta + \operatorname{senh}\theta\cosh\beta$ se hace $\theta = -\theta$,

entonces $\quad \operatorname{senh}[\beta + (-\theta)] = \operatorname{senh}\beta\cosh(-\theta) + \operatorname{senh}(-\theta)\cosh\beta$:

Como $\quad \cosh(-\theta) = \cosh\theta$ y $\operatorname{senh}(\theta -) = -\operatorname{senh}\theta$;

se tiene: $\quad \operatorname{senh}(\beta - \theta) = \operatorname{senh}\beta\cosh\theta + (-\operatorname{senh}\theta)\cosh\beta$:

$$\boxed{\operatorname{senh}(\beta + \theta) = \operatorname{senh}\beta\cosh\theta + \operatorname{senh}\theta\cosh\beta} \qquad (12)$$

6.5 Demuestre que $\tanh(\beta + \theta) = \dfrac{\tanh\beta + \tanh\theta}{1 + \tanh\beta\tanh\theta}$.

Demostración: $\tanh(\beta + \theta) = \dfrac{\operatorname{senh}(\beta + \theta)}{\cosh(\beta + \theta)} = \dfrac{\operatorname{senh}\beta\cosh\theta + \operatorname{senh}\theta\cosh\beta}{\cosh\beta\cosh\theta + \operatorname{senh}\beta\operatorname{senh}\theta}$

Dividiendo el numerador y el denominador entre $\cosh\beta\cosh\theta$

$$\tanh(\beta + \theta) = \frac{\dfrac{\operatorname{senh}\beta\cosh}{\cosh\beta\cosh} + \dfrac{\theta\ \operatorname{senh}\theta\cosh\beta}{\theta\ \cosh\beta\cosh\theta}}{\dfrac{\cosh\beta\cosh}{\cosh\beta\cosh} + \dfrac{\theta\ \operatorname{senh}\beta\operatorname{senh}\theta}{\theta\ \cosh\beta\cosh\theta}}:$$

$$\boxed{\tanh(\beta + \theta) = \frac{\tanh\beta + \tanh\theta}{1 + \tanh\beta\tanh\theta}} \qquad (13)$$

6.6 Demuestre que $\tanh(\beta - \theta) = \dfrac{\tanh\beta - \tanh\theta}{1 - \tanh\beta\tanh\theta}$.

Demostración: $\tanh(\beta - \theta) = \dfrac{\operatorname{senh}(\beta - \theta)}{\cosh(\beta - \theta)} = \dfrac{\operatorname{senh}\beta\cosh\theta - \operatorname{senh}\theta\cosh\beta}{\cosh\beta\cosh\theta - \operatorname{senh}\beta\operatorname{senh}\theta}$

Dividiendo el numerador y el denominador entre cosh cosh :

$$\tanh(\beta + \theta) = \frac{\dfrac{\operatorname{senh}\beta\cosh\theta}{\cosh\beta\cosh\theta} - \dfrac{\operatorname{senh}\theta\cosh\beta}{\cosh\beta\cosh\theta}}{\dfrac{\cosh\beta\cosh\theta}{\cosh\beta\cosh\theta} - \dfrac{\operatorname{senh}\beta\operatorname{senh}\theta}{\cosh\beta\cosh\theta}} \qquad (14)$$

$$\boxed{\tanh(\beta - \theta) = \frac{\tanh\beta - \tanh\theta}{1 - \tanh\beta\tanh\theta}}$$

Ejercicios.

(1) Demuestre que $\operatorname{senh}(\alpha + \beta) = \dfrac{e^{\alpha+\beta} - e^{-(\alpha+\beta)}}{2}$.

(2) Demuestre que $\operatorname{senh}(\alpha - \beta) = \dfrac{e^{\alpha-\beta} - e^{-(\alpha-\beta)}}{2}$.

(3) Demuestre que $\cosh(\alpha + \beta) = \dfrac{e^{\alpha+\beta} - e^{-(\alpha+\beta)}}{2}$.

(4) Demuestre que $\cosh(\alpha - \beta) = \dfrac{e^{\alpha+\beta} - e^{-(\alpha+\beta)}}{2}$.

(5) Demuestre que $\tanh(\alpha + \beta) = \dfrac{e^{\alpha+\beta} - e^{-(\alpha+\beta)}}{e^{\alpha+\beta} + e^{-(\alpha+\beta)}}$.

(6) Demuestre que $\tanh(\alpha - \beta) = \dfrac{e^{\alpha-\beta} - e^{-(\alpha-\beta)}}{e^{\alpha-\beta} + e^{-(\alpha-\beta)}}$.

(7) Demuestre que $\coth(\alpha + \beta) = \dfrac{\coth\alpha + \coth\beta}{1 + \coth\alpha\coth\beta}$.

(8) Demuestre que $\coth(\alpha - \beta) = \dfrac{\coth\alpha - \coth\beta}{1 - \coth\alpha\coth\beta}$.

(9) Demuestre que $\coth(\alpha + \beta) = \dfrac{e^{\alpha+\beta} + e^{-(\alpha+\beta)}}{e^{\alpha+\beta} - e^{-(\alpha+\beta)}}$.

(10) Demuestre que $\coth(\alpha + \beta) = \dfrac{e^{\alpha-\beta} + e^{-(\alpha-\beta)}}{e^{\alpha-\beta} - e^{-(\alpha-\beta)}}$.

7. Fórmulas de ángulos dobles

7.1 Demuestre que $\operatorname{senh} 2\alpha = 2 \operatorname{senh} \alpha \cosh \alpha$.

Demostración

En $\operatorname{senh}(\alpha + \beta) = \operatorname{senh} \alpha \cosh \beta + \operatorname{senh} \beta \cosh \alpha$, se hace $\beta = \alpha$

entonces: $\operatorname{senh}(\alpha + \alpha) = \operatorname{senh} \alpha \cosh \alpha + \operatorname{sen} \alpha \cosh \alpha$

$$\boxed{\operatorname{senh} 2\alpha = 2 \operatorname{senh} \alpha \cosh \alpha} \qquad (15)$$

7.2 Demuestre que $\cosh 2\alpha = \cosh^2 \alpha + \operatorname{senh}^2 \alpha$.

Demostración

En $\cosh(\alpha + \beta) = \cosh \alpha \cosh \beta + \operatorname{senh} \alpha \operatorname{senh} \beta$, se hace $\beta = \alpha$, entonces:
$\cosh(\alpha + \alpha) = \cosh \alpha \cosh \alpha + \operatorname{senh} \alpha \operatorname{senh} \alpha$

$$\boxed{\cosh 2\alpha = \cosh^2\alpha + \operatorname{senh}^2\alpha} \qquad (16)$$

Se sabe que $\cosh^2 \alpha - \operatorname{senh}^2 \alpha = 1$ y que

$\cosh^2 \alpha = 1 + \operatorname{senh}^2 \alpha$; $\operatorname{senh}^2 \alpha = \cosh^2 \alpha - 1$;

sustituyendo $\cosh^2 \alpha$ por $1 + \operatorname{senh}^2 \alpha$ en

$$\cosh 2\alpha = 1 + \operatorname{senh}^2 \alpha + \operatorname{senh}^2 \alpha$$

$$\boxed{\cosh 2\alpha = 1 + 2 \operatorname{senh}^2\alpha} \qquad (17)$$

Sustituyendo en (16) $\operatorname{senh}^2 \alpha$ por $\cosh^2 \alpha - 1$,

se tiene $\cosh 2\alpha = \cosh 2\alpha + \cosh 2\alpha - 1$

$$\boxed{\cosh 2\alpha = 2 \cosh^2 \alpha - 1} \qquad (18)$$

7.3 Demuestre que $\tanh 2\,\alpha = \dfrac{2 \tanh \alpha}{1 + \tanh 2\,\alpha}$.

Demostración

En $\tanh(\alpha + \beta) = \dfrac{\tanh \alpha + \tanh \beta}{1 + \tanh \alpha \tanh \beta}$, se hace $\beta = \alpha$,

entonces: $\tanh(\alpha + \alpha) = \dfrac{\tanh \alpha + \tanh \alpha}{1 + \tanh \alpha \tanh \alpha}$

$$\boxed{\tanh 2 = \frac{2 \tanh \alpha}{1 + \tanh^2 \alpha}} \qquad (19)$$

Ejercicios.

(1) Demuestre que $\operatorname{senh} 2\alpha = \dfrac{e^{2\alpha} - e^{-2\alpha}}{2}$.

(2) Demuestre que $\cosh 2\alpha = \dfrac{e^{2\alpha} + e^{-2\alpha}}{2}$.

(3) Demuestre que $\tanh 2\alpha = \dfrac{e^{2\alpha} - e^{-2\alpha}}{e^{2\alpha} + e^{-2\alpha}}$.

(4) Demuestre que $\coth 2\alpha = \dfrac{2 \coth \alpha}{1 + \coth^2 \alpha}$.

(5) Demuestre que $\coth 2\alpha = \dfrac{e^{2\alpha} + e^{-2\alpha}}{e^{2\alpha} - e^{-2\alpha}}$.

8. Fórmulas de ángulos mitad

8.1 Demostrar que $\operatorname{senh} \dfrac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{\cosh - 1}{2}}$.

Demostración

En $\cosh 2\alpha = 1+2 \operatorname{senh}^2 \alpha$,

se hace $2\alpha = \theta$

de donde $\alpha = \dfrac{\theta}{2}$ y se reemplazan estas equivalencias en la fómula de

$\cosh 2\alpha$: $\cosh = 1 + 2 \operatorname{senh}^2 \dfrac{\theta}{2}$; $\dfrac{\cosh - 1}{2} = \operatorname{senh}^2 \dfrac{\theta}{2}$

$$\boxed{\operatorname{senh}\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{\cosh\theta - 1}{2}}} \qquad (20)$$

8.2 Demuestre que $\cosh\dfrac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{\cosh\theta + 1}{2}}$

Demostración

En $\cosh 2\alpha = 2\cosh^2\alpha - 1$, se hace $2\alpha =$,

de donde $\alpha = \dfrac{\theta}{2}$ y se reemplazan estas equivalencias en la fórmula de

$\cosh 2\alpha$: $\cosh\theta = 2\cosh^2\dfrac{\theta}{2}$; $\cosh\theta + 1 = 2\cosh^2\dfrac{\theta}{2}$

$$\frac{\cosh + 1}{2} = \operatorname{senh}^2\frac{\theta}{2} \quad ; \quad \boxed{\operatorname{senh}\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{\cosh\theta + 1}{2}}} \qquad (21)$$

8.3 Demuestre que $\tanh\dfrac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{\cosh\theta - 1}{\cosh\theta + 1}}$.

Demostración

Se define $\tanh\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{\operatorname{senh}\frac{\theta}{2}}{\operatorname{senh}\frac{\theta}{2}} = \dfrac{\pm\sqrt{\frac{\cosh\theta - 1}{2}}}{\sqrt{\frac{\cosh\theta + 1}{2}}}$; $\tanh\dfrac{\theta}{2} = \pm\dfrac{\sqrt{\frac{\cosh\theta - 1}{2}}}{\sqrt{\frac{\cosh\theta + 1}{2}}}$

$$\boxed{\tanh\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{\cosh\theta - 1}{\cosh\theta + 1}}} \qquad (22)$$

Ejercicios.

(1) Demuestre que $\operatorname{senh}\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{e^{\frac{\theta}{2}} - e^{-\frac{\theta}{2}}}{2}$.

(2) Demuestre que $\cosh\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{e^{\frac{\theta}{2}} + e^{-\frac{\theta}{2}}}{2}$.

(3) Demuestre que $\tanh\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{e^{\frac{\theta}{2}} - e^{-\frac{\theta}{2}}}{e^{\frac{\theta}{2}} + e^{-\frac{\theta}{2}}}$.

(4) Demuestre que $\coth \dfrac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{\cosh\theta + 1}{\cosh\theta - 1}}$.

(5) Demuestre que $\coth \dfrac{\theta}{2} = \dfrac{e^{\frac{\theta}{2}} + e^{-\frac{\theta}{2}}}{e^{\frac{\theta}{2}} - e^{-\frac{\theta}{2}}}$.

9. Fórmulas de ángulos triples

9.1 Demuestre que senh $3\alpha = 4$ senh$^3\,\alpha + 3$ senhα.

<u>**Demostración**</u>

En senh$(\beta + \theta)$ = senh β cosh θ + senh θ cosh β,

se hace $\beta = 2\alpha, \theta = \alpha$ y se reemplazan estas equivalencias en lafórmula del senh$(\beta + \theta)$: senh$(2\alpha + \alpha)$ = senh 2α cosh α + senh α cosh 2α:

Sustituyendo senh 2α por 2 senhα coshα y cosh 2α por 1 + 2 senh2α; se tiene: senh 3α = (2 senhα coshα) coshα + senhα(1 + 2 senh$^2\alpha$)

senh 3α = 2 senhα cosh$^2\alpha$ + senhα + 2 senh3α;

sustituyendocosh$^2\alpha$ por 1 + senh2α:

senh 3α = 2 senhα(1 + senh2α) + senhα + 2 senh$^3\alpha$

senh 3α = 2 senhα + 2 senh3α + senhα + 2 senh$^3\alpha$

$$\boxed{\text{senh } 3\alpha = 4 \text{ senh}^3\,\alpha + 3 \text{ senh } \alpha} \qquad (23)$$

9.2 Demuestre que cosh $3\alpha = 4$ cosh3α - 3 coshα.

<u>**Demostración**</u>

En cosh$(\beta + \theta)$ = coshβ cosh θ + senhβ senh θ, se hace $\beta = 2\alpha$, $\theta = \alpha$ y se reemplazan estas equivalencias en la fórmula del cosh$(\beta + \theta)$:

cosh$(2\alpha + \alpha)$ = cosh 2α coshα + senh 2α senhα:

Sustituyendo cosh 2α por 2 cosh2α - 1, senh 2α por 2 senhα coshα, se tiene: cosh 3α = (2 cosh$^2\alpha$ - 1) coshα + (2 senhα coshα) senhα

$$\cosh 3\alpha = 2\cosh^3\alpha - \cosh\alpha + 2\,\text{senh}^2\alpha\cosh\alpha;$$

sustituyendo $\text{senh}^2\alpha$ por $\cosh^2\alpha - 1$:

$$\cosh 3\alpha = 2\cosh^3\alpha - \cosh\alpha + 2(\cosh^2\alpha - 1)\cosh\alpha$$

$$\cosh 3\alpha = 2\cosh^3\alpha - \cosh\alpha + 2\cos^3\alpha - 2\cosh\alpha$$

$$\boxed{\text{senh}\,3\alpha = 4\,\text{senh}^3\alpha - 3\,\text{senh}\,\alpha} \qquad (24)$$

Ejercicios.

(1) Demuestre que $\text{senh}\,3\alpha = \frac{e^{3\alpha} - e^{-3\alpha}}{}$.

(2) Demuestre que $\cosh 3\alpha = \frac{e^{3\alpha} + e^{-3\alpha}}{2}$

10. Fórmulas de multiplicación y transformación

10.1 A partir de las fómulas $\text{senh}(\beta + \theta)$, $\text{senh}(\beta - \theta)$ deduzca

(a) $\text{senh}\,\beta\cosh\theta$. ; (b) $\text{senh}\,\theta\cosh\beta$.

$$\boxed{\text{senh}(\beta + \theta) = \text{senh}\,\beta\cosh\theta + \text{senh}\,\theta\cosh\beta} \qquad (25)$$

$$\boxed{\text{senh}(\beta - \theta) = \text{senh}\,\beta\cosh\theta - \text{senh}\,\theta\cosh\beta} \qquad (26)$$

- Sumando miembro a miembro (25) y (26):

$$\text{senh}(\beta + \theta) + \text{senh}(\beta - \theta) = 2\,\text{senh}\,\beta\cosh\theta$$

$$\frac{1}{2}[\text{senh}(\beta + \theta) + \text{senh}(\beta - \theta)] = \text{senh}\,\beta\cosh\theta$$

$$\boxed{\frac{1}{2}\,\text{senh}(\beta + \theta) + \frac{1}{2}\,\text{senh}(\beta - \theta) = \text{senh}\,\beta\cosh\theta} \qquad (27)$$

- Restando miembro a miembro (25) y (26):

$$\text{senh}(\beta + \theta) - \text{senh}(\beta - \theta) = 2\,\text{senh}\,\theta\cosh\beta$$

$$\frac{1}{2}[\text{senh}(\beta + \theta) - \text{senh}(\beta - \theta)] = \text{senh}\,\theta\cosh\beta$$

$$\boxed{\frac{1}{2}\,\text{senh}(\beta + \theta) - \frac{1}{2}\,\text{senh}(\beta - \theta) = \text{senh}\,\beta\cosh\theta} \qquad (28)$$

10.2 A partir de las fómulas $\cosh(\beta + \theta)$, $\cosh(\beta - \theta)$ deduzca fórmulas para:

(a) $\cosh\beta\cosh\theta$. ; (b) $\text{senh}\,\beta\,\text{senh}\,\theta$.

$$\boxed{\cosh(\beta + \theta) = \cosh\beta\cosh\theta + \text{senh}\,\beta\,\text{senh}\,\theta} \qquad (29)$$

$$\boxed{\cosh(\beta - \theta) = \cosh\beta \cosh\theta - \operatorname{senh}\beta \operatorname{senh}\theta} \qquad (30)$$

- Sumando miembro a miembro (29) y (30):

$\cosh(\beta + \theta) + \cosh(\beta - \theta) = 2 \cosh\beta \cosh\theta$

$\frac{1}{2}[\cosh(\beta + \theta) + \cosh(\beta - \theta)] = \cosh\beta \cosh\theta$

$$\boxed{\frac{1}{2}\cosh(\beta + \theta) + \frac{1}{2}\cosh(\beta - \theta) = \cosh\beta \cosh\theta} \qquad (31)$$

- Restando miembro a miembro (29) y (30):

$\cosh(\beta + \theta) .. \cosh(\beta - \theta) = 2 \operatorname{senh}\beta \operatorname{senh} q$

$\frac{1}{2}[\cosh(\beta + \theta) - \cosh(\beta - \theta)] = \operatorname{senh}\beta \operatorname{senh}\theta$

$$\boxed{\frac{1}{2}\cosh(\beta + \theta) - \frac{1}{2}\cosh(\beta - \theta) = \cosh\beta \cosh\theta} \qquad (32)$$

10.3 A partir de las fómulas $\operatorname{senh}(\beta + \theta)$, $\operatorname{senh}(\beta - \theta)$;

haciendo $\beta + \theta = A$ y $\beta - \theta = B$, demuestre que

(a) $\frac{1}{2}\operatorname{senh}A + \frac{1}{2}\operatorname{senh}B = \operatorname{senh}\left(\frac{A+B}{2}\right)\cosh\left(\frac{A-B}{2}\right)$.

(b) $\frac{1}{2}\operatorname{senh}A - \frac{1}{2}\operatorname{senh}B = \operatorname{senh}\left(\frac{A-B}{2}\right)\cosh\left(\frac{A+B}{2}\right)$.

Demostración

$$\boxed{\operatorname{senh}(\beta + \theta) = \operatorname{senh}\beta \cosh\theta + \operatorname{senh}\theta \cosh\beta} \qquad (33)$$

$$\boxed{\operatorname{senh}(\beta - \theta) = \operatorname{senh}\beta \cosh\theta - \operatorname{senh}\theta \cosh\beta} \qquad (34)$$

Se hace $\boxed{\beta + \theta = A}$ (35)

$\boxed{\beta - \theta = B}$ (36)

Sumando (35) y (36) se tiene $2\beta = A + B \quad \therefore \beta = \left(\frac{A+B}{2}\right)$

$\boxed{\text{Restando (35) y (36) se tiene } 2\theta = A - B} \quad \therefore \theta = \left(\frac{A-B}{2}\right)$ 37)

Sustituyendo en (33) y (34): $\beta + \theta$ por A, $\beta - \theta$ por B,

$$\beta \text{ por } \left(\frac{A+B}{2}\right) \quad \text{y} \quad \theta \text{ por } \left(\frac{A+B}{2}\right)$$

$$\boxed{\text{senh A} = \text{senh}\left(\frac{A+B}{2}\right)\cosh\left(\frac{A-B}{2}\right) + \text{senh}\left(\frac{A-B}{2}\right)\cdot\cosh\left(\frac{A+B}{2}\right)} \quad 38)$$

Sumando (37) y (38) se tiene:

$$\text{senhA} + \text{senhB} = 2\,\text{senh}\left(\frac{A+B}{2}\right)\cosh\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$\frac{1}{2}[\text{senhA} + \text{senhB}] = \text{senh}\left(\frac{A+B}{2}\right)\cosh\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$\boxed{\frac{1}{2}\,\text{senh A} + \frac{1}{2}\,\text{senh B}\,\left(\frac{A+B}{2}\right)\cosh\left(\frac{A-B}{2}\right)} \qquad (39)$$

Restando (37) y (38) se tiene: $\text{senhA} - \text{senhB} = 2\,\text{senh}\left(\frac{A-B}{2}\right)\cosh\left(\frac{A+B}{2}\right)$

$$\frac{1}{2}[\text{senhA} .. \text{senhB}] = \text{senh}\left(\frac{A-B}{2}\right)\cosh\left(\frac{A+B}{2}\right)$$

$$\boxed{\frac{1}{2}\,\text{senh A} + \frac{1}{2}\,\text{senh B}\,\left(\frac{A-B}{2}\right)\cosh\left(\frac{A+B}{2}\right)} \qquad (40)$$

10.4 A partir de las fórmulas:
$\cosh(\beta - \theta)$, $\cosh(\beta - \theta)$; haciendo $\beta - \theta = A$ y $\beta - \theta = B$, demuestre que:

(a) $\frac{1}{2}\cosh A + \frac{1}{2}\cosh B = \cosh\left(\frac{A+B}{2}\right)\cosh\left(\frac{A-B}{2}\right)$.

(b) $\frac{1}{2}\cosh A - \frac{1}{2}\cosh B = \cosh\left(\frac{A+B}{2}\right)\cosh\left(\frac{A-B}{2}\right)$.

Demostración

$$\boxed{\cosh(\beta + \theta) = \cosh\beta\cosh\theta + \text{senh}\,\beta\,\text{senh}\,\theta} \qquad (41)$$

$$\boxed{\cosh(\beta - \theta) = \cosh\beta\cosh\theta\ ..\ \text{senh}\,\beta\,\text{senh}\,\theta} \qquad (42)$$

Se hace $\boxed{\beta + \theta = A}$ (43)

$\boxed{\beta - \theta = B}$ (44)

Sumando (43) y (44) se tiene $2\beta = A + B$ Luego $\beta = \frac{A+B}{2}$

Restando (43) y (44) se tiene $2\,\theta = A - B$ Luego $\theta = \frac{A-B}{2}$

Sustituyendo en (41) y en (42) $\beta + \theta$ por A, $\beta + \theta$ por B,

β por $\frac{A+B}{2}$, θ por $\frac{A-B}{2}$

$$\cosh A = \cosh\left(\frac{A+B}{2}\right)\cosh\left(\frac{A-B}{2}\right) + \operatorname{senh}\left(\frac{A+B}{2}\right)\operatorname{senh}\left(\frac{A-B}{2}\right) \quad (45)$$

$$\cosh B = \cosh\left(\frac{A+B}{2}\right)\cosh\left(\frac{A-B}{2}\right) - \operatorname{senh}\left(\frac{A+B}{2}\right)\operatorname{senh}\left(\frac{A-B}{2}\right) \quad (46)$$

Sumando (45) y (46): $\cosh A + \cosh B = 2\cosh\left(\frac{A+B}{2}\right)\cosh\left(\frac{A-B}{2}\right)$

$$\frac{1}{2}[\cosh A + \cosh B] = \cosh\left(\frac{A+B}{2}\right)\cosh\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$\boxed{\frac{1}{2}\cosh A + \frac{1}{2}\cosh B\left(\frac{A+B}{2}\right)\cosh\left(\frac{A-B}{2}\right)} \quad (47)$$

Restando (45) y (46): $\cosh A - \cosh B = 2\operatorname{senh}\left(\frac{A+B}{2}\right)\operatorname{senh}\left(\frac{A-B}{2}\right)$

$$\frac{1}{2}[\cosh A - \cosh B] = \operatorname{senh}\left(\frac{A+B}{2}\right)\operatorname{senh}\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$\boxed{\frac{1}{2}\cosh A - \frac{1}{2}\cosh B\left(\frac{A+B}{2}\right)\cosh\left(\frac{A-B}{2}\right)} \quad (48)$$

11. Funciones hiperbólicas inversas

11.1 Definición y estudio de la función inversa de la función seno hiperbólico.

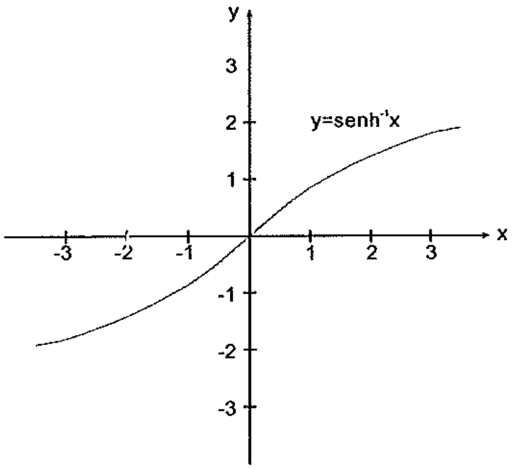
La aplicación $y = \operatorname{senh} x$ es un homeomorfísmo estrictamente creciente de R en R, la aplicación inversa tiene las mismas propiedades.

Definición. La aplicación inversa de y = senh x se llama **argumento seno hiperbólico** de x; se escribe arg senh x o senh^{-1} x.

El dominio de la función es el intervalo $(-\infty,\infty) = R$, y el recorrido es el intervalo $(-\infty,\infty) = R$.

$$y = \text{arg senh } x = \text{senh}^{-1} x \Leftrightarrow x = \text{senh } y$$

<u>**Gráfica:**</u> La gráfica se deduce a partir de la gráfica de y = senh x por simetría con respecto a la bisectriz y = x.



Se puede expresar y = arg senh x con la ayuda de la función logarítmica. En efecto y = arg senh x $\Rightarrow$ senh y = x y cosh2 y = 1+senh2 y; es decir:

$\cosh^2 y = 1+x^2$ o $\cosh y = \sqrt{1+x^2}$. Por consiguiente

$e^y = \cosh y + \text{senh } y = \sqrt{1+x^2}+x$; de donde:

$\ln e^y = \ln(\sqrt{1+x^2}+x) \Rightarrow y = \ln(\sqrt{1+x^2}+x)$; $\qquad$ $\text{arg senh } x = \ln(\sqrt{1+x^2}+x)$

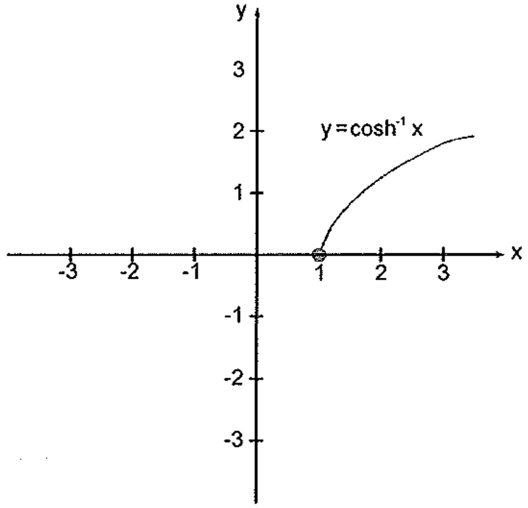
11.2 Definición y estudio de la función inversa de la función coseno hiperbólico.

La aplicación contínua y = cosh x no es monótona en R. Su restricción a R+ es estrictamente creciente; dicha restricción es un homeomorfísmo de R+ sobre $[1,\infty)$.

Definición. La aplicación inversa de la restricción a R+ se llama argumento coseno hiperbólico de x, se escribe arg cosh x = $\cosh^{-1}$x.
El dominio de la función es el intervalo $[1,\infty)$, y el recorrido es el intervalo $[0,\infty)$.

y = arg cosh x = $\cosh^{-1}$ x $\Leftrightarrow$ x = cosh y

Gráfica: La gráfica de y = arg cosh x, se deduce a partir de la gráfica de y = cosh x por simetría con respecto a la bisectriz y = x.



Se puede expresar y = arg cosh x con la ayuda de la función logarítmica:

y = arg cosh x $\Rightarrow$ cosh y = x y $\cosh^2 y - 1 = \operatorname{senh}^2 y$; es decir: $\sqrt{x^2 - 1}$ = senh y;

e^y = cosh y + senh y = x + $\sqrt{x^2 - 1}$. ; ln ey = ln(x + $\sqrt{x^2 - 1}$)

o sea y = ln(x + $\sqrt{x^2 - 1}$) ; arg cosh x = ln(x + $\sqrt{x^2 - 1}$)

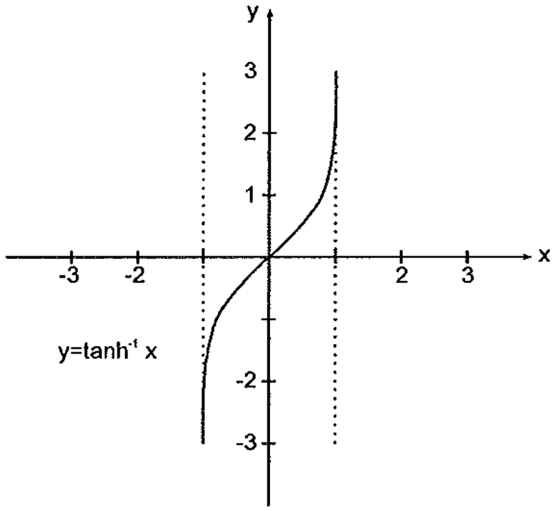
11.3 Definición y estudio de la función inversa de la función y = tanh x.
La aplicación y = tanh x es estrictamente creciente sobre R; por tanto es un homeomorfismo de R sobre (-1; 1).

Definición. La aplicación inversa de y = tanh x se llama **argumento tangente hiperbólico** de x ; se escribe y = arg tanh x = $\tanh^{-1}$ x
El dominio de la función es el intervalo (-1, 1) y el recorrido es el intervalo $(-\infty,\infty)$ = R.

$x = \tanh y \Leftrightarrow y = \arg\tanh x$

La aplicación y = arg tanh x es un homeomorfismo estrictamente creciente de (-1,1) sobre R.

<u>Gráfica</u> Su gráfica se deduce a partir de la gráfica de y = tanh x por simetría con respecto a la bisectriz y = x.



Se puede expresar y = arg tanh x por medio de la función logarítmo. En efecto, $y = \arg\tanh x \Rightarrow x = \tanh y = \dfrac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} = \dfrac{e^y - \dfrac{1}{e^y}}{e^y + \dfrac{1}{e^y}} = \dfrac{e^{2y} - 1}{e^{2y} + 1}$

$x(e^{2y} + 1) = e^{2y} - 1 \quad ; \quad x \cdot e^{2y} + x = e^{2y} - 1 \quad ; \quad x \cdot e^{2y} - e^{2y} = -1 - x$

$e^{2y}(x - 1) = -(1 + x) \quad ; \quad e^{2y} = \dfrac{1 + x}{-(x - 1)} = \dfrac{1 + x}{1 - x} \quad ; \quad \ln e^{2y} = \ln\left(\dfrac{1 + x}{1 - x}\right)$

$2^y = \ln\left(\dfrac{1 + x}{1 - x}\right) \quad ; \quad y = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1 + x}{1 - x}\right) \quad ; \arg\tanh x = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1 + x}{1 - x}\right)$

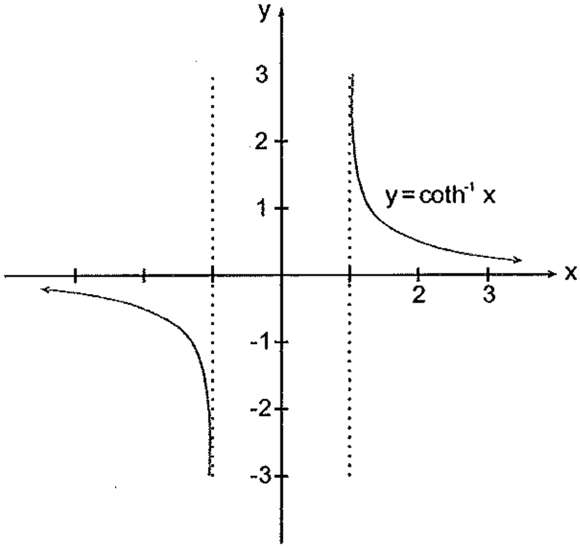
11.4 Definición y estudio de la función inversa de la función y = coth x.

La función y = coth x es estrictamente decreciente en los intervalos $(-\infty, 0)$ y $(0,\infty)$, donde se define. La restricción a R*_ es un homeomorfismo de R*_ sobre $(-\infty,-1)$ y su restricción a R*+ es también un homeomorfismo de R*+ sobre $(1,\infty)$.

Definición. La aplicación inversa de y = coth x se llama **argumento cotangente hiperbólico** de x, se escribe: y = arg coth x = $\coth^{-1}$ x.

La función y = arg coth x es un homeomorfismo de $(-\infty, -1) \cup (1;1)$ sobre R*.

Gráfica La gráfica de y = arg coth x se obtiene a partir de la gráfica de y = coth x por simetría con respecto a la bisectriz y = x.



La función y = arg coth x se puede expresar por medio de la función logaritmo. En efecto,

$$x = \coth y = \frac{e^{y} + e^{-y}}{e^{y} - e^{-y}} = \frac{e^{y} + \frac{1}{e^{y}}}{e^{y} - \frac{1}{e^{y}}} = \frac{e^{2y} + 1}{e^{2y} - 1} \quad ; \quad x(e^{2y} - 1) = e^{2y} + 1$$

$$x \cdot e^{2y} - x = e^{2y} + 1 \quad ; \quad x \cdot e^{2y} - e^{2y} = 1 + x \quad ; \quad e^{2y}(x - 1) = 1 + x$$

$$e^{2y} = \frac{1 + x}{1 - x)} \quad ; \quad \ln e^{2y} = \ln\left(\frac{1 + x}{x - 1}\right) \quad 2y = \ln\left(\frac{1 + x}{x - 1}\right)$$

$$y = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1 + x}{x - 1}\right) \quad ; \quad \text{arg coth } x = \ln\left(\frac{1 + x}{x - 1}\right).$$

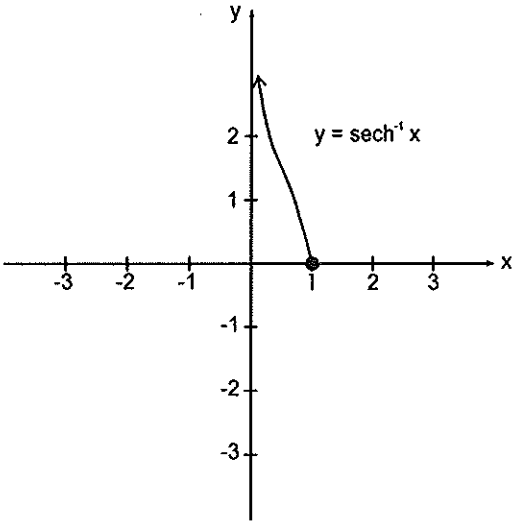
11.5 Definición y estudio de la función inversa de la funcióny = sech x.

La aplicación contínua y = sech x no es monótona en R su restricción a R^{+} es estrictamente decreciente; dicha restricción es una aplicación de R^{+} sobre (0, 1].

Definición. La aplicación inversa de la restricción a R+ se llama **argumento secante hiperbólico** de x, se escribe: arg sech x = $sech^{-1}$ x.

El dominio de la función es el intervalo (1; 0] y el recorrido es el intervalo $[0, \infty)$.

Gráfica



Se puede expresar y = arg sech x con la ayuda de la función logarítmo.

En efecto,x = sech y = $\dfrac{2}{e^y + e^{-y}} = \dfrac{2}{e^y + \dfrac{1}{e^y}} = \dfrac{2e^y}{e^{2y} + 1}$; $x(e^{2y} + 1) = 2e^y$

$x \cdot e^{2y} - 2e^y + x = 0$;

$$ey= \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4x \cdot x}}{2x} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4x^2}}{2x} = \frac{2(1 \pm \sqrt{1 - x^2}}{2x} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - x^2}}{x}$$

$$\ln e^y = \ln\left(\frac{1 \pm \sqrt{1 - x^2}}{x}\right) \quad ; \quad y = \ln\left(\frac{1 \pm \sqrt{1 - x^2}}{x}\right) ;$$

$$\text{arg sech } x = \ln\left(\frac{1 \pm \sqrt{1 - x^2}}{x}\right).$$

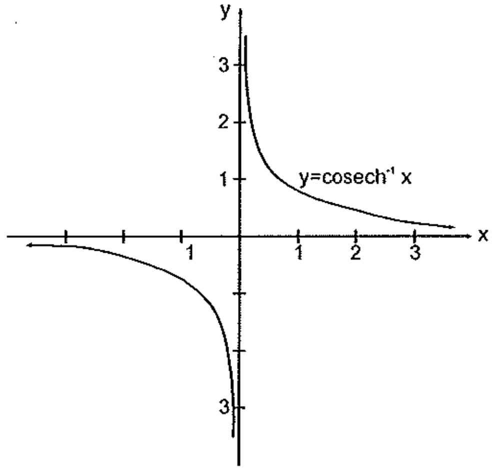
11.6 Definición y estudio de la función inversa de la función y = cosech x

La función contínua y = cosech x es estrictamente decreciente en los intervalos $(-\infty, 0)$ y $(0, \infty)$, donde se define. Su restricción a R*_ es un homeomorfísmo de R*_ sobre $(-\infty, 0)$ y la restricción a R*+ también es un homeomorfísmo de R*+ sobre $(0, \infty)$.

Definición. La aplicación inversa de y = cosech x se llama **argumento cosecante hiperbólico** de x, se escribe: y = arg cosech x.

La función y = arg cosech x es un homeomorfismo de $(-\infty, 0)$ [$(0,\infty)$ sobre R^*.

Gráfica



La gráfica de y = arg cosech x se obtiene a partir de la gráfica de y = cosech x por simetría con respecto a la bisectriz y = x. (ver página siguiente)

El dominio de la función es $(-\infty, 0) \cup (0;1)$ y el recorrido es $(-\infty, 0)$ [$(0,\infty)$.
Se puede expresar y = arg cosech x por medio de la función logarítmo.

En efecto, $x = \text{cosech}\, y = \dfrac{2}{e^y - e^{-y}} = \dfrac{2}{e^y - \dfrac{1}{2e^y}} = \dfrac{2e^y}{e^{2y} - 1}$; $x(e^{2y} - 1) = 2e^y$

$x \cdot e^{2y} - 2e^y - x = 0$; $e^y = \dfrac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4x(-x)}}{2x} = \dfrac{2 \pm \sqrt{4 + 4x^2}}{2x} =$

$\dfrac{1 \pm \sqrt{1 - x^2}}{x}$; $\ln e^y = \ln\left(\dfrac{1+\sqrt{1+x^2}}{|x|}\right)$; $y = \ln\left(\dfrac{1+\sqrt{1+x^2}}{|x|}\right)$

Ejercicios.

Resuelva para x

(1) $2\,\text{senh}^2 x - \text{senh}\, x .. 3 = 0$.

(2) $3 \cosh^2 x - 3 + 2 \operatorname{senh} x - \frac{39}{4} = 0.$

(3) $(1 - \tanh x)(1 + \tanh x) = \frac{4}{13}$

Ejercicios.

(A) Calcular el valor indicado. Si el valor no es un número racional, dar la respuesta con tres decimales correctos.

(1) $\operatorname{senh} 2$

(2) $\tanh(-2)$

(3) $\operatorname{cosech} (\ln 2)$

(4) $\operatorname{senh}^{-1} 0$

(5) $\operatorname{sech}^{-1} \frac{2}{3}$

(6) $\operatorname{cosech}^{-1} 2$

(7) $\coth^{-1} 3$

(B) Usar el valor de la función hiperbólica dada para hallar el de las demás.

(1) $\operatorname{senh} x = \frac{2}{3}$

(2) $\tanh x = \frac{1}{2}$

(C) Resuelva para x

(1) $\operatorname{cosech} x = \frac{2}{3}$

(2) $\coth x = \frac{\sqrt{13}}{3}$

(D) Resuelva y discuta los siguientes sistemas.

(1) $\left\{\begin{array}{l} \arg \operatorname{senh} x = 2 \arg \operatorname{senh} y \\ 3 \ln x = 2 \ln y \end{array}\right\}$

(2) $\left\{\begin{array}{l} \cosh x + \cosh y = a \\ \operatorname{senh} x + \operatorname{senh} y = b \end{array}\right\}$

Matemática Recreativa

FANNY ESPERANZA GUEVARA MENA

Especialista en Didáctica de la Ciencia, Matemáticas y Física.
Universidad Pontificia Bolivariana
Educación Matemática. ELIME. CEID-ADIDA

MEDELLÍN
2010

MATEMÁTICA RECREATIVA

PRESENTACIÓN

MATEMÁTICA RECREATIVA, es una innovación que quiere mostrar una alternativa pedagógica en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas, con una visión divertida, de juego, de desarrollo de pensamiento y creatividad, lo cual se obtiene a través de juegos, observación y manipulación de diferentes materiales concretos que permiten comprender, interpretar, inferir, razonar, analizar, deducir, crear, comprobar, relacionar, diferenciar, comparar, afianzar y construir conocimientos matemáticos, para aplicarlos en situaciones problemas y juegos lógicos. Através de ello el estudiante se da cuenta de la importancia, la necesidad y la incidencia de las Matemáticas en otras áreas, en la vivencia, en el desarrollo intelectual, en el aporte a la ciencia, en la tecnología y en la investigación. Esta es la mejor motivación para entrar en el espectacular mundo de las Matemáticas.

OBJETIVOS GENERALES.

1. Construir las competencias del pensamiento lógico matemático, a través de la lúdica, con materiales concretos.
2. Potenciar el razonamiento lógico a través de situaciones problemas y juegos, para aplicarlo a todas las áreas del conocimiento.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

1. Hacer de las Matemáticas un espacio agradable, divertido y significativo.
2. Desarrollar el pensamiento lógico matemático en los estudiantes.
3. Construir los conceptos matemáticos a partir del juego, la construcción y la aplicación de estructuras matemáticas, utilizando el material concreto.
4. Plantear y solucionar problemas a partir de los materiales concretos, involucrando los estándares básicos del área y los niveles de complejidad.
5. Fomentar la creatividad y la investigación.

JUSTIFICACIÓN

Una de las causas del bajo desempeño generalizado de los estudiantes en el desarrollo de los procesos de enseñanza aprendizaje de las Matemáticas, obedece a que en la metodología aplicada en la enseñanza del área se desarrollan únicamente ejercicios; más no situaciones problemas, se transcribe y no se construye, se memoriza y no se conceptualiza. Ello muestra que no hay desarrollo de pensamiento ni tampoco incidencia en otras áreas del conocimiento, esto puede llevar a pensar que el uso de los recursos en los procesos educativos es ineficiente.

Los materiales didácticos son recursos para la enseñanza que traducen y crean situaciones activas de aprendizaje, facilitan el descubrimiento de nociones matemáticas, favorecen el paso de lo concreto a lo abstracto, de lo manipulativo a lo simbólico.

Algunos materiales son:

ÁBACO, REGLETAS, BLOQUES LÓGICOS, TANGRAM, TORTA FRACCIONADA, METRO FRACCIONADO, MULTICUBOS, CUBOS DE SOMA, GEOPLANO, TORRES DE HANOI, RECIPIENTES DE MEDIDA, POLIEDROS, DOMINÓ, DADOS, PALILLOS, PENTOMINO, ORIGAMI, ÁLGEBRA GEOMÉTRICA, SUDOKU.

La utilización de materiales estructurados además del carácter motivante que por si mismo tiene, también favorece el desarrollo de capacidades que se han de potenciar en los niños, tales como la observación, la imaginación, la reflexión... Los materiales didácticos, por otra parte, cumplen una función de apoyo al presentar situaciones estructuradas mediante las cuales los niños pueden descubrir fácilmente ciertas relaciones matemáticas que favorecen la creación de estructuras lógicas.

Los juegos y materiales didácticos como el tangram, el geoplano, los pentominós, cubos de soma, permiten realizar actividades manuales con las figuras, actividades de construir experiencias geométricas que facilitan el reconocimiento de formas y de figuras, experiencias métricas que posibilitan la organización a través de la manipulación y de la observación de este material, que favorece el afianciamiento de conceptos, datos y permite introducir nuevos conceptos.

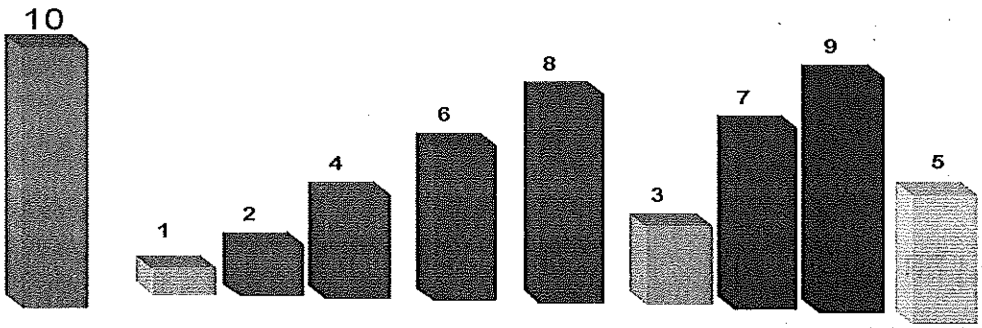
Los juegos matemáticos son una clase de matemáticas con un fuerte contenido divertido, ameno, motivador. Los juegos de ingenio, los juegos lógicos, los pasatiempos, los acertijos... hacen más fácil y atractivo el estudio de las matemáticas y, sobre todo, rompen el miedo y la aversión que los estudiantes tienen a esta materia. Además los juegos matemáticos tienen un gran valor como recurso didáctico: ayudan a desarrollar hábitos y actitudes positivas frente al trabajo escolar, capacitan a los estudiantes para enfrentarse a las situaciones no previstas.

Los juegos y las matemáticas tienen muchos rasgos en común en lo que se refiere a su finalidad formativa: favorece que los estudiantes aprendan a dar los primeros pasos en el desarrollo de técnicas intelectuales, estimulan el pensamiento deductivo y creativo, potencian el razonamiento lógico, desarrollan estrategias de pensamiento.

El juego con los materiales didácticos, es un medio que posibilita la conceptualización del saber matemático, va ligado con los pensamientos y estándares curriculares. "Aprender matemáticas a través del juego" ha diseñado la propuesta, ubicando los materiales en cada uno de los pensamientos y desarrollando los talleres y actividades que permiten hacer matemáticas...

En esta oportunidad se presentan los estándares y competencias trabajados a partir de las regletas, con enteros, fraccionarios y decimales con sus relaciones, propiedades y operaciones

REGLETAS



Existen diferentes tipos de juegos de regletas. En su composición encontramos el mismo tipo de regletas en diferentes tamaños y colores a través de las cuales se puede construir y afianzar diferentes conceptos matemáticos que abarcan desde el grado preescolar hasta los grados superiores.

Como ayuda a la comprensión por el educando de estas estructuras dinámicas de la matemática. Georges Cuisenaire Hottelet educador Belga, utilizó regletas de forma prismática que representan los diez primeros números y cuya longitud es de 1 a 10 cm., cada una de ellas de diferente color, una base en madera de (40 cm. x 20 cm.) , un rectángulo (50 unidades) y un cuadrado (100 unidades) para practicar con centenas.

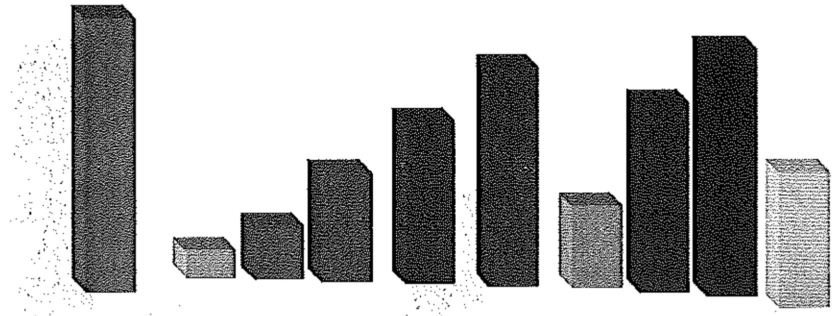
El aprendizaje a través de la observación y manipulación de objetos concretos crea motivación e interés en el estudiante, a la vez que se logran altos niveles de comprensión de los conceptos.

OBJETIVOS

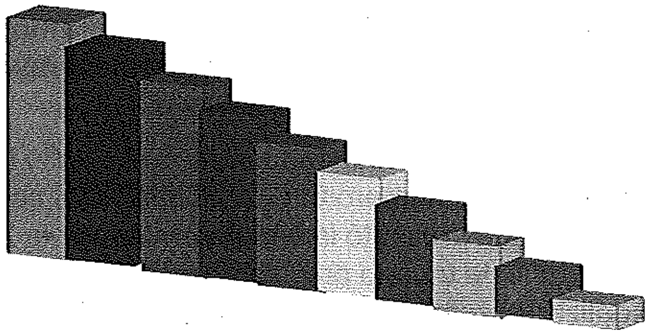
1. Asociar la longitud con el color en escala de grises.
2. Establecer equivalencias.
3. Formar la serie de numeración de 1 a 10.
4. Comprobar la relación de inclusión de la serie numérica.
5. Trabajar manipulativamente las relaciones "mayor que", "menor que" de los números basándose en la comparación de longitudes.
6. Realizar diferentes seriaciones.
7. Introducir la composición y descomposición de números.
8. Iniciar las operaciones suma y resta de forma manipulativa.
9. Comprobar empíricamente las propiedades conmutativa y asociativa de la suma.
10. Iniciarlos en los conceptos doble y mitad.
11. Realizar repartos.

TALLER

1. **EXPLORACIÓN:** En este espacio, el estudiante conoce el material, su forma, tamaño, características, la cantidad de regletas, su tamaño y empieza a manipular, a formar figuras, a relacionarlas y a aplicar su creatividad en la construcción de cuerpos geométricos que requieren de estructuras más complejas.

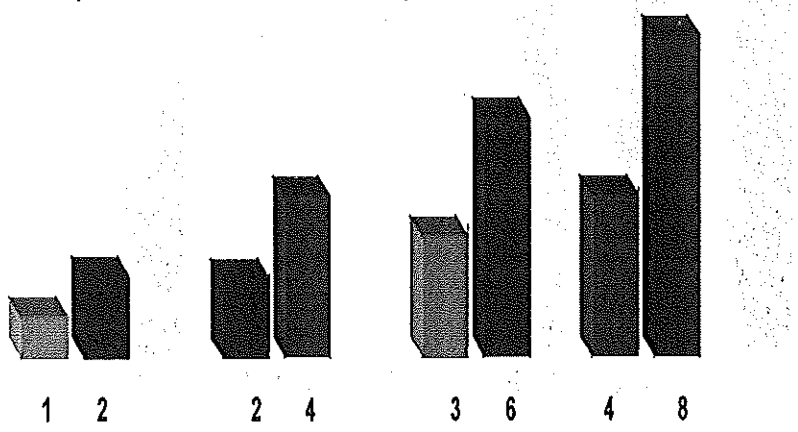


2. CLASIFICACIÓN: Mediante el ordenamiento en forma ascendente y descendente, pedimos al estudiante que clasifique las regletas y determine la cantidad por cada valor, teniendo en cuenta que la más pequeña representa la unidad y la más grande representa 10 unidades.

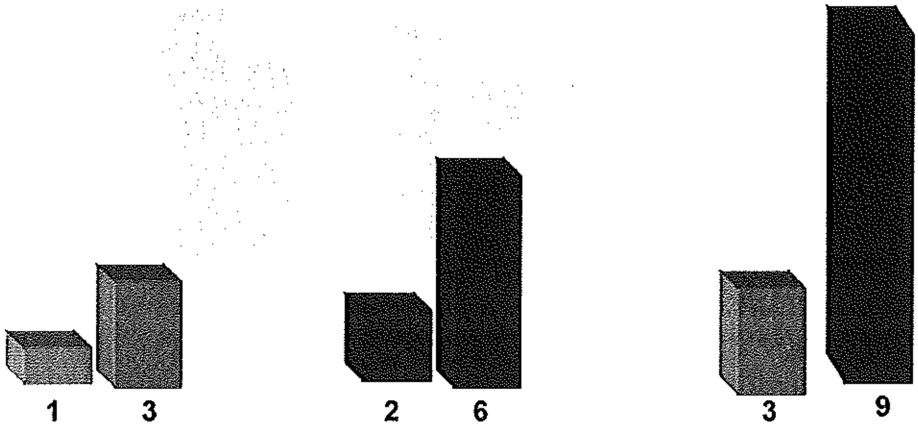


3. DOBLE, TRIPLE, MITAD... Explicando los conceptos de doble, triple y mitad, pedimos al estudiante que busque todas las parejas que representen el doble, todas las parejas de regletas que representen el triple; en este momento muchos estudiantes van a concluir que el doble y la mitad es lo mismo, expresado en forma contraria, el doble de 2 es 4 y la mitad de 4 es 2. Dejamos a consideración del estudiante para que encuentre otras posibilidades con este tipo de relaciones con las regletas.

DOBLE



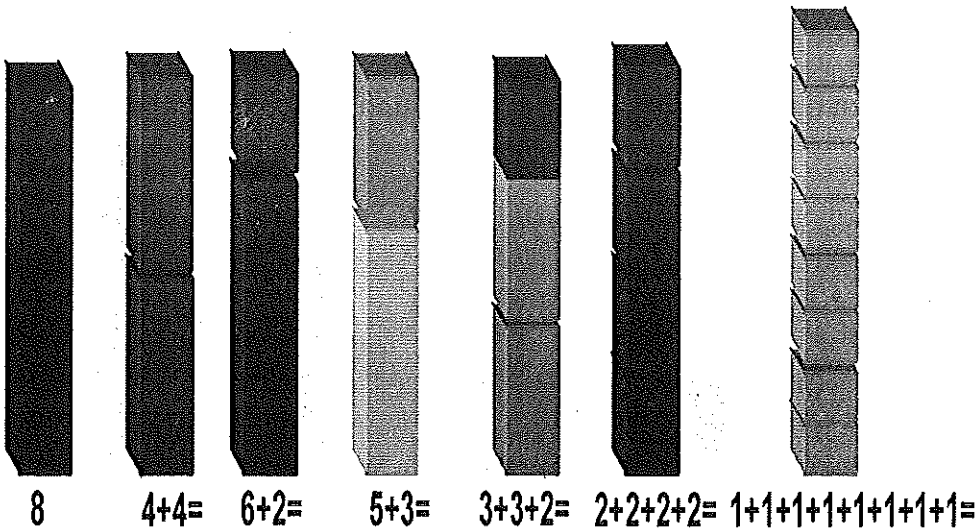
TRIPLE



4. **RELACIÓN DE EQUIVALENCIA:** La trabajamos mediante la descomposición de números, así.¿ de cuantas maneras puedo escribir el número 5?. o cualquier número entre el 0 y el 10.

   En una práctica con el grado segundo, cuando se pidió todas las formas posibles para escribir el número 6, una niña no solo colocó las regletas como sumas, sino que presentó la regleta 8 y la regleta 2 y lo explicó con la operación resta, este trabajo precisamente permite que el niño, aparte de conceptualizar el tema, descubra otras habilidades y destrezas en torno al trabajo matemático.

Ejemplo, escribir todas las formas posibles el número 8



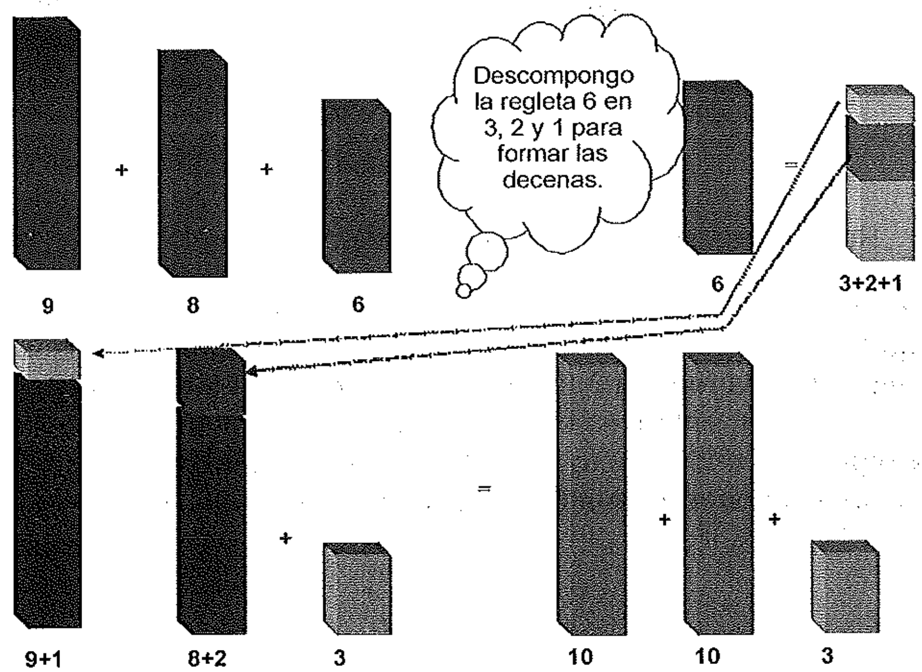
5. **COMPLEMENTO:** Es un proceso que nos sirve de base para las operaciones en el momento de completar decenas, para que el estudiante agilice el cálculo mental y facilite el trabajo.

Ejemplo, ¿Cuánto le falta a 4 para llegar a 10?, o cualquier otra cantidad menor que 10; como también de una cantidad de regletas formar parejas de tal manera que cada pareja sume 10.

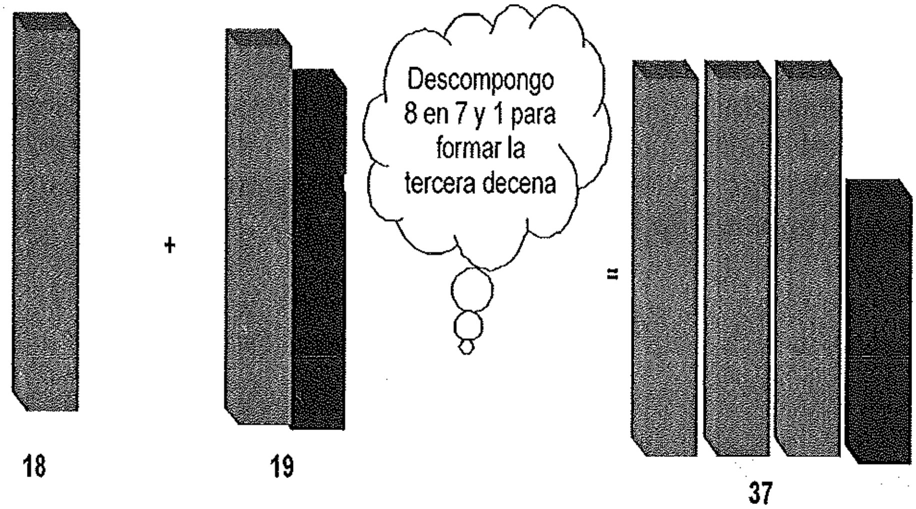
6. **SUMA:** Tomamos como base nuestra escala decimal, es decir, la regleta que representa 10 unidades como también la relación de equivalencia, la conversión propuesta en el ábaco y la relación de orden y el complemento; pues éste es un juego dirigido y cada una de las actividades tiene una secuencia y un objetivo que cumplir.

6.1.- Sumamos primero cantidades pequeñas; ejemplo 9 más 8, colocamos la regleta que representa 9 unidades, escribimos la cantidad 8 utilizando la regleta 7 y la regleta 1, luego, a la regleta 9 le adicionamos la regleta 1 para formar la decena, la cual la unimos con la regleta 7 de modo que la suma es 17.

Ejemplo: sumar 9 + 8 +6

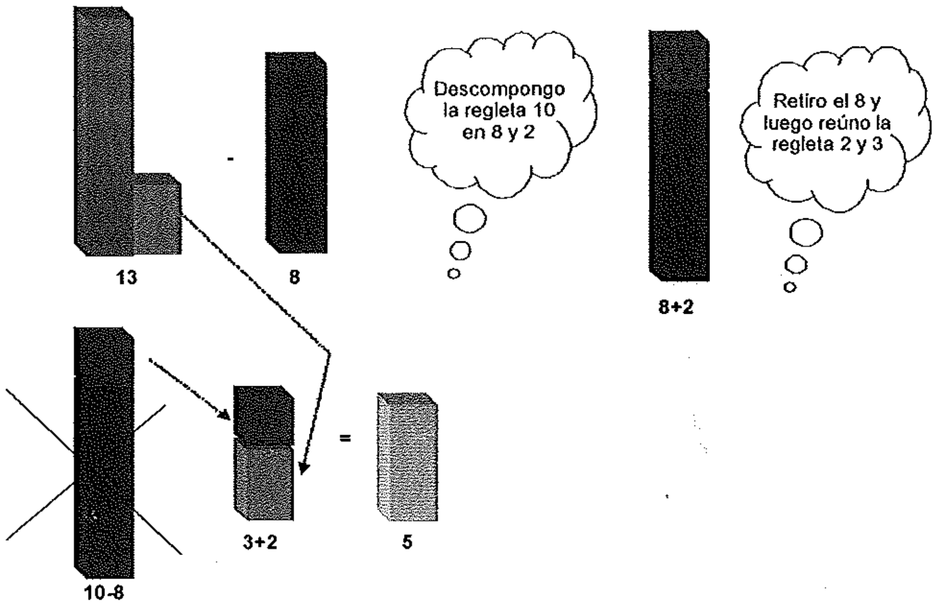


6.2.- Ejemplo 2 sumar 16 mas 19, al escribir las 2 cantidades, nos damos cuenta que tenemos 2 regletas de una decena cada una, las cuales las dejamos listas para la respuesta y trabajamos con las unidades 6 mas 9, y luego procedemos a completar otra decena, a 6 para llegar a 10 le hace falta 4 unidades, por lo tanto, descomponemos el 9 en una regleta de 4 y una regleta de 5 unidades. La de 4 unidades la sumo con la de 6 unidades y obtengo otra decena que reunida con las 2 iniciales, son 3 decenas, adjunto a estas la regleta 5 y obtengo la suma 35.

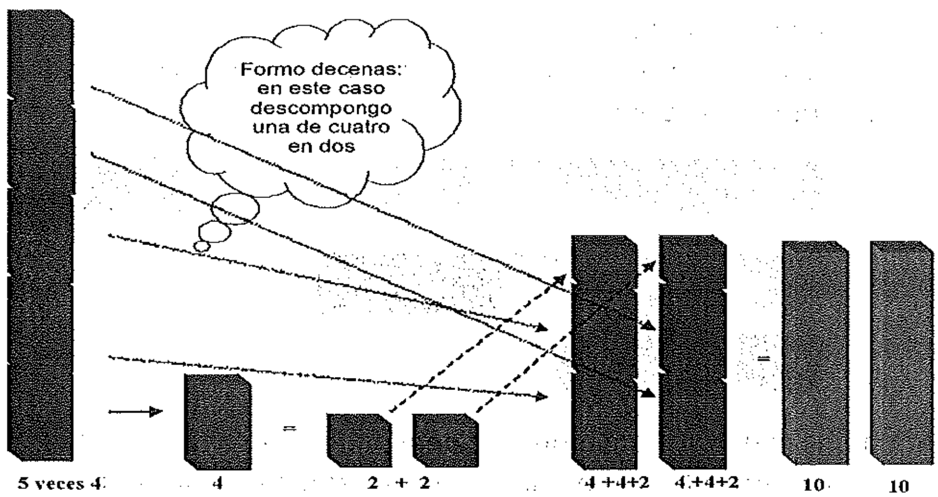


6.3 Realizamos sumas con más sumandos, Ejemplo 4+5+9+18+27.

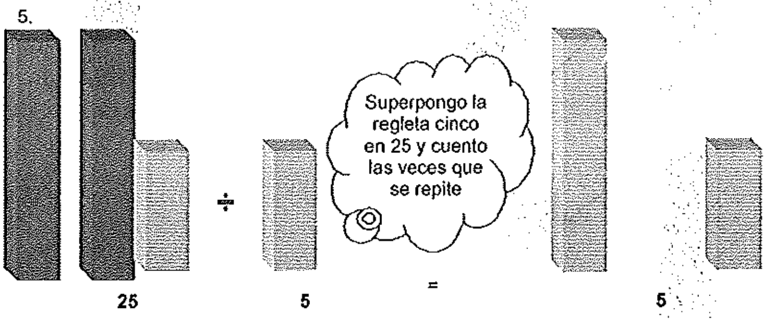
7. RESTA: Para restar utilizo el proceso de conversión, la decena y la equivalencia, por ejemplo restar 13 menos 8, escribimos el 13 con la regleta 10 y la regleta 3, como necesito 8 por que es la cantidad que voy a extraer, entonces descompongo la regleta 10 en la regleta 8 y la regleta 2, ahora retiro la regleta 8, reúno las regletas 2 y 3 y las reemplazo por la regleta 5 y obtengo la respuesta 13 - 8 = 5



8. **MULTIPLICACION** Utilizamos la conversión, la decena y el orden. Con las regleta trabajamos la multiplicación como suma abreviada, iniciando con cantidades pequeñas, por ejemplo, multiplicar 4 por 5, eso quiere decir que la regleta 4 se repite 5 veces, (aprovechamos para trabajar la propiedad conmutativa, este proceso es mucho más rápido porque ya se realizó un trabajó similar con el ábaco); luego procedemos a formar decenas por medio de la conversión, 2 regletas de 4 suman 8 y para llegar a 10 unidades faltan 2, así que descompongo una regleta de 4 en 2 regleta de 2 unidades, para obtener las decenas, terminando el proceso, se han formado 2 decenas por lo tanto 4 por 5 es igual a 20.

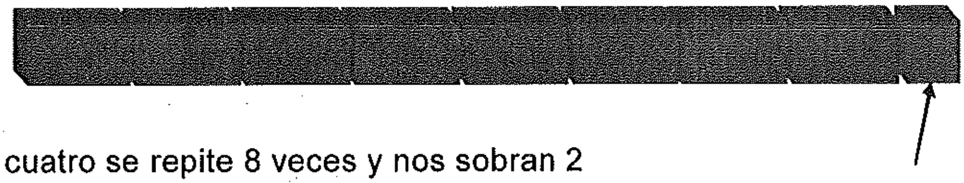


9. **DIVISIÓN:** Utilizamos la conversión y empiezamos con cantidades pequeñas, el proceso de división se facilita con este material ya que simplemente contamos las veces que cabe una regleta pequeña en otra de mayor tamaño y ese número de veces, es el cociente. Ejemplo dividir 25 entre 5.



Ejemplo 2: 34 ÷ 4 = ?

Construyo el 34 con la regleta 4:



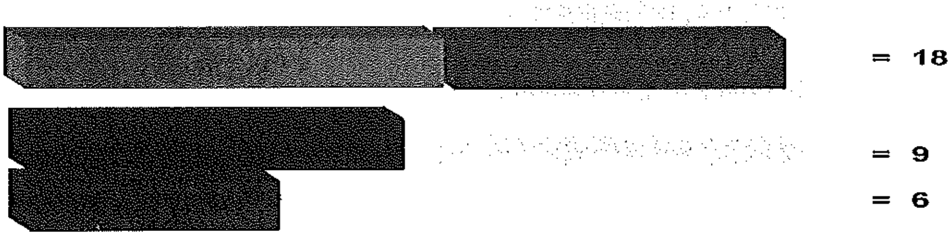
El cuatro se repite 8 veces y nos sobran 2

10. **MÁXIMO COMÚN DIVISOR:** aprovechando la construcción, la relación y la conversión formamos trenes con determinadas cantidades para determinar el M.C.D; superponiendo las regletas, por ejemplo: hallar el M.C.D de 24, 16 y 8,

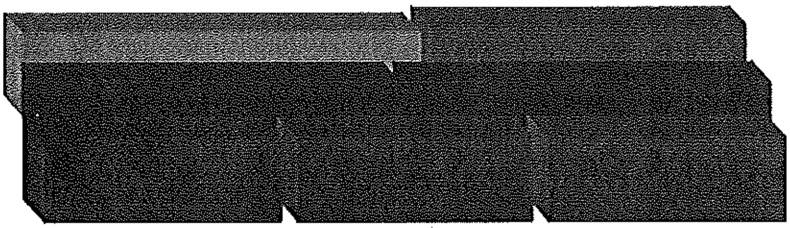
Probamos construir estas mismas cantidades con otras regletas, iniciando con la más grande hasta que coincidan exactamente en las 3:

11. MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO: abordamos el mismo procedimiento del M.C.D, y establecemos la relación.

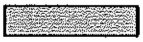
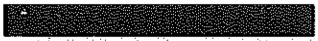
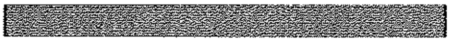
Ejemplo, calcular m.c.m de 18,12 y 9



Tomamos una cantidad mayor o igual a la mayor de las tres de tal manera que las contenga a todas. Pruebamos con las cifras menores de tal manera que quepan exactamente en la cantidad seleccionada:

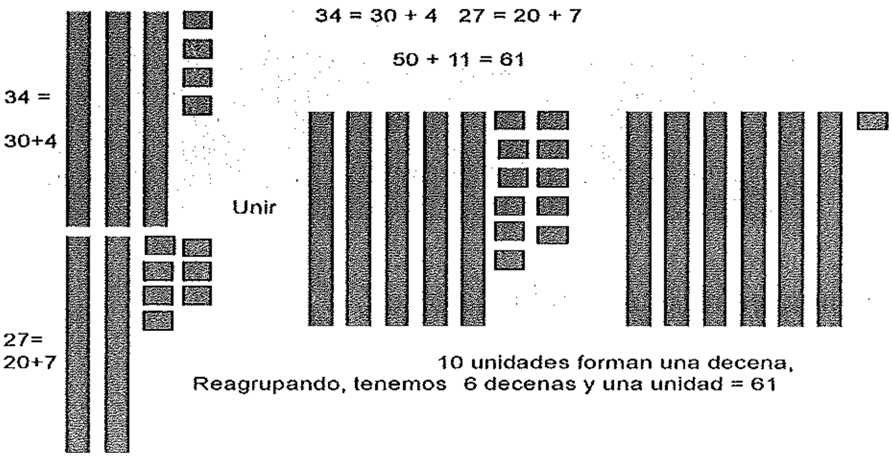


Tomamos las regletas, en forma plana

REGLETAS	VALOR ENTERO
	1
	2
	3
	4
	5
	6
	7
	8
	9
	10

Trabajando sólo con regletas blancas y naranjas se puede incidir sobre la estructura del sistema de numeración decimal (la blanca es la unidad, la naranja es la decena) y aplicar a las relaciones aditivo.

NÚMEROS FRACCIONARIOS, DECIMALES Y PORCENTAJE CON REGLETAS



REGLETAS	FRACCIÓN	DECIMAL	%
	1/10	0.1	10
	2/10 =1/5	0.2	20
	3/10	0.3	30
	4/10 = 2/5	0.4	40
	5/10	0.5	50
	6/10 = 3/5	0.6	60
	7/10	0.7	70
	8/10 = 4/5	0.8	80
	9/10	0.9	90
	10/10 = 1	1	100/100

El desenvolvimiento y comprensión de los números fraccionarios, decimales y porcentaje, encierran un buen número de dificultades para los estudiantes e inclusive para los docentes, ocasionadas por ciertos obstáculos que ponen a prueba la imaginación y el poder de captación en quienes los afrontan. Estas grandes dificultades llevan a errores de representación y desarrollo operativo, debido a una concepción errada y defectuosa ocasionada por el trabajo incompleto de la imaginación.

Para el tema de los Fraccionarios es conveniente resaltar la siguiente historieta: "La profesora le pregunta al niño. ¿Que es mayor, un medio (1/2) o un cuarto (1/4)? El niño le responde. Profesora, un cuarto (1/4) es mayor que (1/2), la profesora le responde que está equivocado, el niño le refuta y le dice que el tiene la razón, puesto que un cuarto de vaca (1/4) es mayor que medio (1/2) pollo."

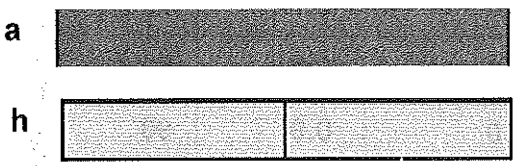
Ejemplos similares. Se pueden sacar a flote para que el estudiante se forme una idea clara del concepto de fraccionario.

Con lo anterior, es posible que el alumno empiece a captar la idea imprescindible de tener como base del estudio de los números fraccionarios una unidad REFERENCIAL.

De esta manera ya se puede interpretar a una fracción como la medida exacta de una cantidad, la cual está formada por un denominador que indica las partes en que se divide la unidad y el numerador que indica las partes que se toman o se seleccionan de la unidad.

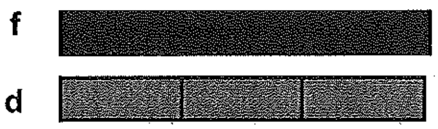
Simbólicamente los números fraccionarios se representan así: a/b donde a y b pertenecen a los números naturales y b es mayor que 0. Si se toma como unidad referencial una de las regletas de Cuisinare, en este caso la de color **a**:

¿Que fracción representa la **h**?, ¿Qué porcentaje?, ¿Cómo se escribiría decimales?

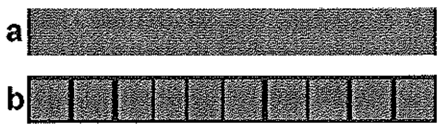


Del gráfico se concluye que la regleta **h** representa la fracción un medio (1/2) puesto que la unidad se ha dividido en dos (2) partes, y se toma una de ellas; el 50% en porcentaje y 0.5 en decimal.

Luego se invita al niño a comparar ¿Qué fracción, ¿Qué decimal y Qué porcentaje, representa la regleta **d** clara tomando como unidad la regleta **f**?.

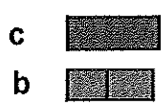


Luego se realizan una gran cantidad de ejercicios similares. Tomando la regleta **a**, se pide identificar las fracciones, decimales y porcentaje, utilizando las regletas **b**.



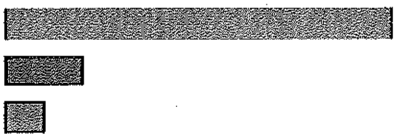
Comparando la regleta **b** con la regleta **a**, se observa que caben exactamente diez (10) regletas **b**, esta indica que cada fracción es un décimo (1/10).

En la regleta **c**, caben exactamente dos (2) regletas **b**, luego la fracción que representa la regleta **c** es dos décimos de la regleta **a**.



Si se analiza correctamente el gráfico, se deduce que la fracción que representa la regleta **c** con respecto a la **a** es un quinto (1/5), pero con respecto a la anterior gráfica, la fracción es dos décimos (2/10); en este caso se dice que las fracciones son equivalentes.

i
b
c



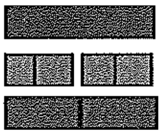
Para las fracciones equivalentes y en este caso se escribe: 2/10 = 1/5. Al tomar estas parejas de fracciones equivalentes notamos que el producto del numerador de la primera fracción, multiplicado por el denominador de la segunda fracción, es igual al producto del denominador de la primera multiplicado por el denominador de la segunda: 2 x 5 = 10 x 1

Luego se confirma que en general las fracciones a/b y c/d son equivalentes si: a x b = c x d

d
b

Siguiendo con el trabajo de encontrar la fracción de cada regleta, la regleta **d** clara representa la fracción tres décimos (3/10), puesto que equivale a la suma de tres regletas **b** que representan cada una a un décimo

i
b
c



La regleta **i** representa la fracción cuatro décimos (4/10) y dos quintos (2/5) con respecto a la regleta **c**, se obtiene aquí nuevamente un ejemplo de fracciones equivalentes.

a

Por último la regleta **a** representa la fracción diez décimos (10/10), y a su vez representa la unidad fundamental, luego diez décimos (10/10) y uno son fracciones equivalentes.

SUMA DE FRACCIONARIOS:

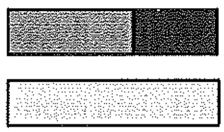
Tomando la fracción que representa cada una de las regletas, se puede operar de la siguiente manera:

Ejemplo 1. Al unir la regleta **e** clara cuya fracción es de tres décimos (3/10) y la regleta **b** cuya fracción es un décimo (1/10), en forma de tren (una enseguida de la otra), el resultado será cuatro décimos o la regleta **i**.

e
b
i

Ejemplo 2. Uniendo la regleta **c** equivalente a un quinto (1/5) y la regleta **e** cuya fracción es de tres décimos (3/10), el resultado es el equivalente a la regleta **h** que corresponde a la fracción un medio (1/2) de la regleta **a**.

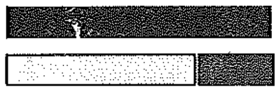
e
c
h



RESTA DE FRACCIONARIOS:

También se pueden utilizar estas regletas, para la resta de fraccionarios.

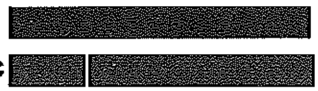
Ejemplo 1. Tomando la regleta **g** de fracción siete décimos (7/10) y restándole la longitud de la regleta **h** de fracción un medio (1/2), se tiene que la regleta que hace falta para completar la longitud de la regleta **g** es el equivalente a la longitud de la regleta **c**.



g

h c

Ejemplo 2. Representar gráficamente la operación: 8/10 - 1/5. Esta operación se representa de la siguiente manera: Como la regleta **j** vale ocho décimos (8/10) y le restamos la longitud de la **c** que es un quinto (1/5), el resultado será la regleta **e** que representa la fracción 6/10 ´o 3/5.



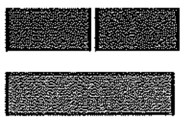
j

c e

MULTIPLICACIÓN DE FRACCIONARIOS.

Para realizar multiplicaciones con las regletas se procede de la manera como se ilustra en los ejemplos siguientes:

Ejemplo 1. Tomar una regleta, en este caso la regleta **c** de fracción igual a 1/5, multiplicar esta fracción por 2, es equivalente a ubicar en forma de tren dos regletas **c**, el resultado es igual al equivalente de la fracción correspondiente a la regleta **i**, siempre y cuando la fracción de la regleta tomada se multiplique por un número natural diferente de cero.



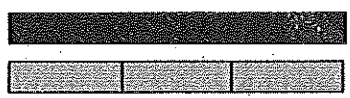
c

i

DIVISIÓN DE FRACCIONARIOS.

Para la división se procede a tomar una regleta de mayor tamaño y dividirla entre varias regletas según la fracción estimada y con una división exacta.

Ejemplo 1. Sabiendo que la regleta **f** representa la fracción nueve décimos (9/10), y la **d** clara representa la fracción tres décimos (3/10), se puede resolver la operación (9/10)/(3/10), de la siguiente manera:



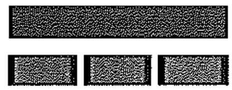
f

d

Observando la figura, se puede analizar que la regleta **f**, queda dividida exactamente en tres (3) regletas **d**. Luego (9/10)/(3/10) = 3

Este tipo de trabajo de fraccionarios se puede realizar tomando como unidad cualquier regleta, pues tomando la regleta **f** se trabaja con novenos y con numeradores divisores de 9, con la regleta **j** con octavos y sus divisores en los numeradores, y así sucesivamente.

Si tomamos la regleta **e** como unidad, cada regleta **b** representa a un sexto (1/6).

e
b


La regleta j representa la fracción de ocho sextos (8/6), una fracción como esta se llama fracción impropia y en general a todas aquellas que son mayores o iguales que la unidad.

Podemos utilizar procedimientos para operaciones con decimales y porcentaje, tomando como unidad cualquiera de las regletas

SIMPLIFICACIÓN DE FRACCIONARIOS

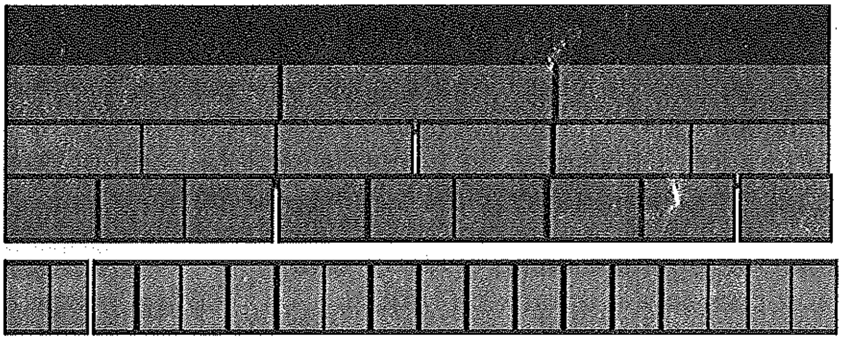
A manera de ejemplo se puede tomar la fracción 4/18, para el numerador formamos un tren monocolor con cuatro regletas **b**; para el denominador formaremos un tren con una regleta (si es menor que nueve) o más de dos (si es mayor que diez), en este último caso se tomará la regleta **a** como decena y otra que represente los números menores de diez (j).

b
a

j

Se busca formar ahora trenes monocolores cuya longitud sea la del denominador, para el ejemplo se tiene:

- Un tren monocolor con dos regletas **f**
- Un tren monocolor con tres regletas **e**
- Un tren monocolor con seis regletas **d**
- Un tren monocolor con nueve regletas **c**
- Un tren monocolor con dieciocho regletas **b**



Con las regletas **b** se pueden formar:

Un grupo de cuatro regletas **b**

b 

Dos grupos de dos regletas **b**.

b  **b** 

Cuatro grupos de una regleta de color madera

b 

Se mira ahora que coincida el número de regletas del tren, formado por el denominador con el número de grupos formado por las regletas **b,** las que representan el denominador. En este caso el número es dos (2).

gráficamente:

b 

f 

Que representa la fracción de 2/9(4/2) / (18/2) = (2/9)

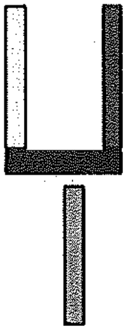
TALLER

1. Exploración: Conocimiento del material
2. Equivalencia: escribir las fracciones equivalentes con regletas de 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/6
3. Decimales: establecer las relaciones anteriores en términos de decimal
4. Escribir de diferentes formas la unidad, en decimales iguales y diferentes
5. Expresar relaciones en porcentaje
6. Escribir de diferentes formas la unidad, en porcentajes iguales y diferentes
7. Sumar fracciones homogéneas
8. Sumar porcentajes
9. sumar decimales
10. Expresar relaciones de orden
11. Escribir relaciones, mayor que y menor que.
12. Suma de fracciones heterogéneas. Ejemplo: 1/4+1/2
13. Resta: expresar restas de fracciones homogéneas y heterogéneas
14. Resta de decimales
15. Multiplicación de fracciones: como sumas sucesivas
    - Ejemplo: 2 veces ½
    - La mitad de un medio
16. Divisiones de fracciones
    - ¿Cuántas veces está 1/8 en1/2
    - ¿Cuántas veces está 1/6 en 1/3
17. Multiplicaciones y divisiones con decimales y porcentaje

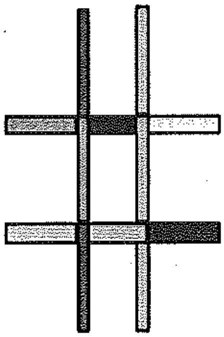
COMPLETAR LA TABLA;

FRACCIÓN	DECIMAL	PORCENTAJE
1/2		
	0,25	
		20%
	0,1	
1/4		
		12,5%

RECREA, PIENSA Y APRENDE



Con 4 palillos, se forma una pala. El juego consiste en mover 2 palillos de tal manera que la pala quede formada y la basura por fuera de la pala, lógicamente, la



De esta figura formada con 12 palillos, se cambian de lugar 3 palillos de tal manera que formen 3 cuadrados iguales, sin que sobren palillos.

"LA EDUCACIÓN ES LO QUE UNO RECUERDA DESPUÉS DE QUE HA OLVIDADO TODO LO QUE APRENDIÓ EN LA ESCUELA"

ALBERT EINSTEIN

ALBERT EINSTEIN

Ninguna investigación humana puede ser denominada ciencia si no pasa a través de pruebas matemáticas.

Leonardo Da Vinci

Las matemáticas y el maravilloso mundo de los seres vivos

Las Matemáticas: Qué y Para Qué.

Antonio Vélez

Magister en Matemáticas.
Universidad ILLINOIS (Estados Unidos)
Universidad EAFIT

MEDELLÍN
2010

LAS MATEMÁTICAS: QUÉ Y PARA QUÉ

ANTONIO VÉLEZ
Universidad EAFIT

"La conclusión fácil es que sabemos muy poco,
pero lo asombroso es que sepamos tanto;
y más sorprendente aún,
que tan poco conocimiento nos dé tanto poder.

La matemática pura es aquella ciencia en la cual
no se sabe de qué se está hablando,
ni si lo que uno está diciendo es verdad".

Bertrand Russell

Las matemáticas son un lenguaje diseñado ad hoc para representar ciertas facetas del mundo. Se destaca su carácter universal, por eso se habla de igual modo en Medellín o en China, sin localismos ni dialectos, con lo que se logra una fácil comunicación entre todos los hombres del mundo. Es sensato pensar que el primer intento del hombre por hacer matemáticas se presentó en el momento en que debió contar sus bienes y hacer canjes, para lo cual construyó o inventó los números naturales y la aritmética. Luego necesitó medir la tierra, y para ello elaboró la geometría y la trigonometría. Más tarde tuvo que representar operaciones más complejas e inventó el álgebra. Los problemas crecieron en complejidad y el hombre tuvo que enfrentar conceptos como el de velocidad y aceleración; entonces inventó el cálculo diferencial, mientras que el cálculo de áreas y volúmenes irregulares lo llevó a descubrir el cálculo integral.

Y así, movido por la necesidad de representar más y más objetos y leyes del mundo, cada vez más de mayor complejidad, el hombre siguió haciendo descubrimientos matemáticos, invenciones para algunos, hasta sobrepasar sus necesidades inmediatas. En ese momento las matemáticas se independizaron de su papel primitivo, tomaron vuelo y comenzaron a explorar un mundo imaginario, virtual, una realidad que solo existe en el mundo de las ideas, y que ya es muy conocido en el mundo real. En las matemáticas modernas se trabaja sin las motivaciones prácticas que les dieron nacimiento, per se, por amor a la ciencia, para perder provechosamente el tiempo, por el placer de pensar y crear; o por el mero placer estético. El matemático Húngaro Paul Erdös (definía a un matemático como una máquina que convierte café en teoremas) defiende el gran valor estético de las matemáticas, aunque más de uno pregunte en qué reside tal belleza. Así responde el genial matemático: "Es como preguntar por qué la novena sinfonía de Beethoven es bella. Si usted no ve por qué nadie se lo puede decir. Yo sé que los números son bellos. Si no lo son, nada lo es".

No obstante las humildes pretensiones iniciales, tales propósitos fueron rebasados muy pronto y las matemáticas se convirtieron en un impresionante edificio cultural, sin duda la mayor realización de la inteligencia humana, con múltiples funciones, superando por mucho los tímidos propósitos de los pioneros. Hoy podemos decir que las matemáticas nos permiten analizar el mundo de una manera inesperada, por lo profunda, por lo trascendental, por la fidelidad, por lo esencial.

Miradas de cierta manera, las matemáticas son una herramienta formal, especie de prótesis mental que nos permite pensar el mundo, tomando esta palabra en un sentido muy amplio: explicarlo, descifrarlo y entenderlo, explorarlo, descubrirlo, medirlo y calcularlo, clasificarlo y discutirlo, representarlo de forma comprimida, describirlo, extrapolarlo, interpolarlo, predecirlo, comprobarlo y tomar decisiones, manipularlo, cambiarlo, burlarlo, construirlo, y hasta destruirlo, si el hombre no alcanza a civilizarse a tiempo, si no lo desbordan sus impulsos primarios.

El estudio de las matemáticas tiene dos finalidades principales: una formativa, que afecta solo al sujeto, y una práctica, que consiste en servir de herramienta formal del pensamiento y que afecta el patrimonio cultural.

La formación matemática produce modificaciones permanentes en el cerebro, de tal suerte que el sujeto termina aumentando el rendimiento en el estudio y compresión de una amplia variedad de disciplinas intelectuales. Las matemáticas se convierten en un instrumento interno del pensamiento, por medio del cual el individuo puede seguir con facilidad secuencias largas y complejas de razonamiento, a la vez que potencian la capacidad del cálculo y análisis, aumenta el rigor lógico en el manejo de los argumentos, lo mismo que la claridad, seguridad, precisión y orden de pensar, hablar y escribir. Así mismo las matemáticas habilitan al sujeto para manejar de forma versátil sus ideas, amén de aumentar la capacidad de deducción o inferencia, gracias al manejo de la lógica simbólica. Puede agregarse que la formación matemática también incrementa la creatividad, fruto de la búsqueda de soluciones a problemas de índole variada. En suma, las matemáticas potencian el pensamiento.

La experiencia acumulada hasta hoy prueba que con el ejercicio matemático el cerebro se enriquece y aumenta su eficiencia. En particular, se desarrolla una mayor seguridad en la realización de las operaciones de transformación y simplificación, tan comunes en la práctica matemática, y en la ejecución de algoritmos y cálculos. En general, el estudio serio y continuado de las matemáticas proporciona al sujeto un desarrollo mental que se traduce al final en una mayor capacidad de estudio de temas complejos y en un mayor rendimiento en la solución de problemas, dos factores que lo capacitan para acceder a una gran variedad de disciplinas del conocimiento humano, cada vez penetrando a profundidades mayores.

Si hablamos de las funciones prácticas de las matemáticas, quizá la más importante sea la representación del mundo; es decir, la conversación de la realidad física en un conjunto de entes abstractos que, supuestamente, representan los objetos de la realidad. Este proceso de representación, que por sus características podríamos llamar comprimida (reducir el mundo a su mínima expresión), ha mostrado poseer una potencia asombrosa. Se comienza por cambiar los entes del mundo por entes abstractos; sus leyes, por leyes matemáticas. En este punto el investigador cierra los ojos, se despreocupa por un momento de la realidad y confía en que la ejecución de las operaciones matemáticas lo lleve a soluciones que se corresponden con fidelidad a las del mundo.

Por ejemplo, una vez que un problema ha sido reducido a una ecuación matemática, se confía en que las soluciones de esta se correspondan con las del problema real. Y la verdad es que esta fe ha sido recompensada. Más de una vez en la historia de la ciencia, una solución matemática ha llevado al hombre al descubrimiento de entes y propiedades del mundo, ignoradas hasta ese momento. En otras palabras, las matemáticas han ayudado a develar facetas ocultas del mundo, a describir propiedades y entes hasta ese momento desconocidos.

Cuando se detectaron por primera vez las ondas de radio, ya las ecuaciones del electromagnetismo de Maxwell las había predicho, y nos había informado, sin conocerlas, la velocidad de propagación y la posibilidad de modularlas y transmitir información codificada en ellas, propiedades que hoy son la base del gigantesco imperio de las telecomunicaciones. En 1928, Paul Dirac descubrió en el papel la existencia de la antimateria, cuatro años más tarde, Carl Anderson observó el positrón en el laboratorio. Y el transistor, esa miniatura encantada, sin la cual sería impensable el enorme avance de la tecnología moderna, se descubrió primero en la realidad virtual de las matemáticas, en el escritorio, que en la realidad del mundo físico. E igual cosa ocurrió con el láser, esa maravilla moderna, con incontables aplicaciones a la tecnología y a la medicina. El álgebra de Boole y las máquinas de Turing, artefactos teóricos, permitieron concebir la idea de los computadores modernos; en otras palabras, estos utilísimos aparatos, en última instancia, son hijos naturales de las matemáticas teóricas.

El formalismo matemático se ha convertido en un truco mágico de un poder que nos aturde. Por medio de él, los hombres han podido convertir de manera prodigiosa la compleja realidad física del universo en un puñado de símbolos y reglas terrenales. Información comprimida hasta lograr una altísima densidad, pero relativamente fácil de manejar. Albert Einstein se maravillaba de que esto fuese posible: decía que lo más incomprensible del universo era que fuese comprensible. Y compresible en símbolos matemáticos, podemos agregar.

Es importante reconocer que las teorías construidas por los científicos son representaciones comprimidas de la realidad, codificada esta de alguna manera, casi siempre en forma de relaciones matemáticas, y quizás sea la compresión su característica más útil. Metafóricamente hablando, pueden pensarse las teorías como mapas o maquetas, con las cuales representamos a "escala reducida" ciertas parcelas del mundo real. El biólogo inglés Peter Medawar decía que lo que hacemos es inventar en el papel un mundo posible, o un fragmento posible de mundo.

La comprensión o cambio de escala es crucial, pues hace manejable el modelo. Tanto la teoría de Newton como la relativista de Einstein reducen la realidad gravitatoria a un puñado de ecuaciones que cabe, con todos sus desarrollos, en un libro mediano. Y la mecánica cuántica reduce la realidad del microcosmos aun conjunto de ecuaciones que lo explican, sin que eso signifique que lo entendamos, y al mismo tiempo permiten manejarlo y hacer predicciones con una certeza que lo deja a uno estupefacto. Lo asombroso es que en esos universos de bolsillo podemos hacer predicciones acertadas que atañen a todo el universo real. En cierta forma, domesticamos el universo y lo ponemos al servicio del hombre. Recuérdese que mediante cálculos newtonianos fuimos a la luna y regresamos sin un rasguño: de lo observado sobre la tierra extrapolamos e indujimos lo que podía ocurrir en la superficie lunar y que, en consecuencia, la locomoción más cómoda era la de saltos al estilo de los canguros. Increíble acto de audacia: una extrapolación de aquí a la luna.

El formalismo matemático nos ha permitido viajar por el túnel del tiempo hacia el pasado. Movernos con suma comodidad de hoy hacia ayer. Somos capaces, por ejemplo, de reconstruir con precisión de segundos -de las dos clases- la posición pasada de planetas y estrellas. Del eclipse total de sol que oscureció la batalla entre lidios y medos, y cuya fecha Heródoto olvidó precisar, hoy sabemos, con absoluta seguridad, que ocurrió el 28 de mayo del 585 antes de Cristo, ¡por la tarde! Observando las perturbaciones en la órbita de Urano, los astrónomos sospecharon la existencia de otro planeta, el octavo, que luego se llamaría Neptuno. La Verrier calculó su órbita, y un tiempo después fue observando por primera vez, a la hora precisa y en el sitio exacto predicho por los cálculos matemáticos. "Un descubrimiento hecho con los ojos de la imaginación, en regiones donde la misma vista era incapaz de penetrar", escribía un astrónomo. De las matemáticas aplicadas a la astronomía, entonces, podemos decir lo mismo que los contemporáneos del gran astrónomo Johann Kepler decían de él: "Nada puede ocurrir en los cielos sin un consentimiento".

Si medimos la radiación de fondo del espacio, es débil eco del pasado remoto, podemos inferir la edad del universo. Y podemos, también, retroceder hasta sus albores, esto es, hasta el nacimiento del tiempo, hace catorce mil millones de años, ese día único, sin ayer, y describir con minuciosidad los trascendentales acontecimientos ocurridos en la primera mañana: las primeras fracciones del primer segundo después de la gran explosión o big bang que dio origen al universo; esto es, escribir una nueva historia de la creación del mundo, un nuevo génesis.

Einstein, a partir de un puro cálculo formal llegó a la inofensiva fórmula $E=mc^2$, ecuación que convertía la materia en una escandalosa cantidad de energía, insospechable a partir de simples observaciones de la naturaleza, pero deducible a partir de los axiomas y leyes de la teoría. Energía que brota mágicamente de las ecuaciones, pero que luego se convertiría en una horrorosa realidad en Hiroshima y Nagasaki. Y de fórmulas puras, Einstein, el mago, dedujo contraintuitivas propiedades del mundo físico: dependencia inesperada de la masa con la velocidad, curvaturas imposibles de imaginar en el espacio-tiempo, marcha del tiempo dependiente del estado de movimiento del sistema, relatividad de la simultaneidad.

La maquinaria de alta tecnología de las matemáticas nos permite crear atajos en las rutas del tiempo. En unos pocos minutos podemos seguir, si ese es nuestro capricho, la historia evolutiva de cada estrella desde su nacimiento como nube de gas cósmico que se colapsa bajo el peso de la gravitación, pasando luego por sus momentos de gloria y esplendor como gigante roja y azul, hasta llegar a su modesto destino final de enana blanca, de pequeña estrella de neutrones o de agujero negro (cadáveres de estrellas), miles de millones de años más tarde. Podemos planear un número incontable de experimentos y predecir desde el escritorio. Cuando se lanzó la bomba atómica sobre Hiroshima, ya los desdichados habitantes de esa ciudad habían sido condenados a muerte en el escritorio, pues el poder devastador del artefacto se conocía por anticipado. Esta capacidad de predecir, para algunos pensadores, es la que, en esencia, nos hacen superiores al resto del mundo animal.

Por medio del recurso matemático ha quedado el hombre capacitado para visitar las profundidades infernales de los núcleos estelares, y describir lo que ocurre en esos mundos impenetrables, de presiones desmesuradas que desgarran las entrañas de los núcleos atómicos, lugares en los que la temperatura es de pesadilla y la intensidad de la gravedad es de tal magnitud que nuestro familiar espacio-tiempo se arruga y desfigura en formas inconcebibles, no experimentadas ni experimentales por inteligencia alguna. Mundos fantásticos, ésos, totalmente ajenos a nuestra terrícola intuición.

O, si lo deseamos, podemos adentrarnos en las misteriosas regiones de los invisibles agujeros negros (descubiertos también sobre el papel), aquellas regiones singulares del universo desde las cuales no hay retorno posible, en las que los relojes detienen su marcha y, en consecuencia, el tiempo se estaciona, eterniza, y en donde la gravedad alcanza valores de locura. Los únicos pozos sin fondo del universo. Podemos, también, infiltrarnos a través de las estrechísimas grietas de la estructura atómica, por allí por donde ya no hay tránsito libre para microscopios electrónicos y de efecto túnel. Por allí, justamente, por donde la intuición y la imaginación humanas tampoco tienen cabida y en donde una importante cantidad de sucesos ocurren en fracciones inimaginables de tiempo, el fino instrumento matemático penetra con holgura y explica con exactitud y corrección el aleatorio y extraño mundo submicroscópico de partículas y antipartículas.

Podemos manipular los simbolos y crear con ellos nuevos mundos absurdos e imaginarios. Podemos concebir atrevidamente universos abstractos de cuatro o más dimensiones, hasta de un número infinito, si así se desea. Todo es posible dentro del libre formalismo matemático. Se puede jugar a la vez con lo infinitesimal o con lo infinito. Y jugando con el infinito, un hombre, George Cantor, demostró por primera vez que el sólido principio filosófico de que el todo siempre es mayor que la parte ¡era falso! Allí se presentaba una mental alimentada por nuestro sentido común. Años más tarde, Kurt Gödel demostró, en un teorema inmortal, que existían proposiciones en el campo de la aritmética, y también en otros sistemas formales, que no eran deducibles de los axiomas básicos (*indecidibles*, se las llamó). En particular, Gödel probó que existían proposiciones aritméticas no demostrables como verdaderas dentro del sistema, ni como falsas, en abierta contradicción con el principio del tercio excluido de la lógica clásica. Una verdad totalmente velada al pensamiento, contraria al más lúcido de los sentidos comunes. Solo revelable a la razón por medio de un poderoso instrumental simbólico. Se había superado la barrera del pensamiento puro.

Señalemos un hecho notable: el cerebro también lleva a cabo una representación comprimida de la realidad exterior, esta vez mediante redes neuronales. Cuando entendemos un fenómeno del mundo, es porque lo hemos representado, de forma coherente, lógica y compacta, en el litro y medio de masa encefálica. En el cerebro, como en los modelos teóricos, podemos hacer predicciones y anticiparnos a los hechos, antes de comprometerlos con la realidad. Podemos ensayar sin riesgos ni costos, y luego tomar las decisiones apropiadas. Es posible retroceder al pasado, mediante el recuerdo, y proyectar el futuro con base en todas nuestras experiencias. Podemos al mismo tiempo estar aquí y allá, como los dioses, provechosa ubicuidad mental que evita peligros y economiza esfuerzos.

Es difícil encontrar un rincón de la ciencia, teórica o aplicada, que esté libre del lenguaje matemático. Este es básico en todos los campos de la física, la química y la ingeniería, en la astronomía, en la teoría de probabilidades y la estadística, en la teoría de juegos, en la cibernética, en la macro y microeconomía, en las finanzas. En el cálculo actuarial y los seguros, en la teoría de decisiones y la investigación de operaciones, en la lingüística, en la política, en la magia...

Cabe notar que la aparición de los computadores digitales ha permitido un nuevo y eficiente tipo de representación del mundo y sus fenómenos. En esencia, se trata de representar algo por medio de una secuencia de ceros y unos, a la que se llama representación binaria. Pues bien, por medio de programas de simulación en computador es posible implementar los modelos matemáticos de la física y calcular con ellos. Así mismo, es posible imitar innumerable variedad de sistemas, tan complejos como el programa y la capacidad del equipo lo permitan. Los modelos de simulación en computador son especialmente útiles allí donde la complejidad de la realidad rebosa el alcance entre otras cosas, simular el sistema climático mundial, la red eléctrica de Estados Unidos, el interior de un agujero negro, una fila de espera, la trayectoria de una nave espacial, el tránsito de vehículos por una autopista, una neuronal o un choque de galaxias. Así mismo, podemos imitar algunos aspectos de la inteligencia humana: demostrar un teorema matemático, componer música o jugar ajedrez al nivel de los grandes maestros.

Pensamiento Lógico:
Desarrollo del Pensamiento Racional

RAÚL ANTONIO GÓMEZ MARÍN

Licenciado en Matemática y Física. Universidad de Antioquia,
Docente de Cátedra de la Universidad de Antioquia

MEDELLÍN
2010

PENSAMIENTO LÓGICO:

DESARROLLO DEL PENSAMIENTO RACIONAL

POR: RAÚL ANTONIO GÓMEZ MARÍN

MODELO PEDAGÓGICO

1. Introducción

¿Qué cosa puede ser un modelo pedagógico que nos permita desarrollar y pensar la relación enseñanza aprendizaje del conocimiento científico, de modo tal que se le otorgue un lugar privilegiado a la idea de la complejidad?

Este es un asunto difícil de abordar. No obstante, por ahora, podemos aseverar de entrada que en un tal modelo no podríamos por ningún motivo no buscar estrategias para vincular las variables atinentes al aprendizaje y la enseñanza, en tanto que uno y otra son partes distinguibles pero inseparables del proceso pedagógico.

Por otro lado, podríamos decir que un modelo inspirado en la complejidad debe decidir cómo incorporar aquellos postulados de los diferentes paradigmas concurrentes en la explicación de la relación enseñanza-aprendizaje que, desde una perspectiva global, se consideren poco discutibles.

El modelo pedagógico que a continuación me permito poner en consideración intenta articular algunos postulados pedagógicos que, a mi juicio son aceptables y que de un cierto modo pueden ser validados no sólo por nuestra propia experiencia docente, sino, aún más, por muchas de nuestras experiencias en tanto que aprendices.

Fiel pues a un cierto sentido de aquello que se entiende por complejidad, intento ligar y poner en comunicación algunos postulados pedagógicos provenientes de diversas concepciones sobre lo pedagógico que, aunque desde sus perspectivas epistemológicas particulares se pueden oponer, creo nos posibilitan instaurar una cierta articulación efectiva y mensurable entre los procesos diseñados para la enseñanza y los procesos diseñados para orientar el aprendizaje. Lo que quiere decir que desde la enseñanza se pueden y deben poner en un campo de visibilidad algunas variables que el modelo discierne en el ámbito del aprender y que se suponen son independientes del tipo de aprendiz, con el propósito de superar las limitaciones de aquellos modelos que simplifican los procesos complejos implícitos en el aprender reflexivo y racional. Pasemos entonces a poner en perspectiva los postulados que animan el presente modelo.

El primer postulado sienta uno de sus apoyos en aquella concepción que asevera que el conocimiento es algo que se construye. Es decir, se trata del postulado que pone en perspectiva la siguiente idea de partida: nada se descubre, todo se construye. Como sabemos, se trata del punto de partida de las concepciones constructivistas. En nuestro modelo no queremos ignorar dicha idea, pero tampoco reducir el aprender únicamente a la cuestión de la construcción del conocimiento, ni mucho menos absolutizar la noción de construcción del conocimiento.

El segundo postulado se apoya en aquella concepción que afirma que el conocimiento se adquiere. Es decir, de acuerdo con esta perspectiva sobre el aprender, el conocimiento es <u>algo</u>, y ese algo se adquiere, adviene, y sólo adviene si éste se inscribe en el dominio de significados del sujeto, o sea si es significativo para el aprendiz. Por ende, en nuestro modelo podemos recibir dicho postulado y partir de la idea de que el aprender también es una entidad funcional que tiene como argumento al contexto o matriz de significados del aprendiz. Esto es, según este postulado, el aprender depende de aquellos significados a partir de los cuales el aprendiz construye y valida sus propias experiencias significativas. En otras palabras, alguien aprende algo sólo si eso que es objeto de su aprender le es significativo en función de su matriz de significados, la cual depende de su contexto cultural y de su experiencia semántica; o también decimos que alguien aprende algo si ese algo encuentra algo en su matriz de significados que sea su posible interpretación, interpretación que depende en sumo grado del dominio de relaciones y objetos del contexto cultural de referencia y que, de algún modo, ese algo esté incluido como trazo simbólico en la biografía de las experiencias de aprendizaje del aprendiz. Igualmente, no podemos reducir el aprender únicamente a la cuestión de la significación, ni mucho menos absolutizar la noción de significación, pues lo que postulamos es la existencia de una relación compleja entre construcción y significación.

El tercer postulado se apoya en una hipótesis conductivista. En este modelo también se considera que el conocimiento se produce y que por lo tanto ingresa al ámbito de lo que es producción. En consecuencia se tiene en cuenta que en el proceso de producción del conocimiento se requiere de un cierto orden de repetición, redundancia y control de los procesos.

El aspecto que queremos retener aquí respecto del aprender reside en que avalamos la idea de que existen ciertas fases del aprender en las cuales se debe diseñar estrategias pedagógicas que ayuden tanto a estabilizar ciertos conceptos claves, como a producir ciertos automatismos mentales que se consideran indispensables para ulteriores fases dinámicas del aprendizaje. Por ende, se debe pensar y diseñar algunas estrategias pedagógicas que permitan controlar el éxito de este tipo de fases, obviamente, previa determinación de la naturaleza de los procesos y de las metas cognitivas a alcanzar en dicha fase o tarea particular de aprendizaje y, ciertamente de acuerdo con las metas cognitivas propuestas desde la enseñanza por venir.

El cuarto postulado pone en juego algunas hipótesis originales del modelo y, obviamente, trae consigo las experiencias de aprendizaje de quien propone el presente modelo. Así pues, el presente modelo pedagógico parte de la idea general de que en el aprendizaje es necesario poner en consideración la dimensión subjetiva del aprendiz. Es decir, no es posible pensar la complejidad de los procesos del aprendizaje sin tener en cuenta los procesos de construcción de sí mismo y las estrategias que median en la producción de las categorías de realidad que mueven al sujeto, ni mucho menos ignorar los agentes que median en dichos procesos de construcción de la realidad.

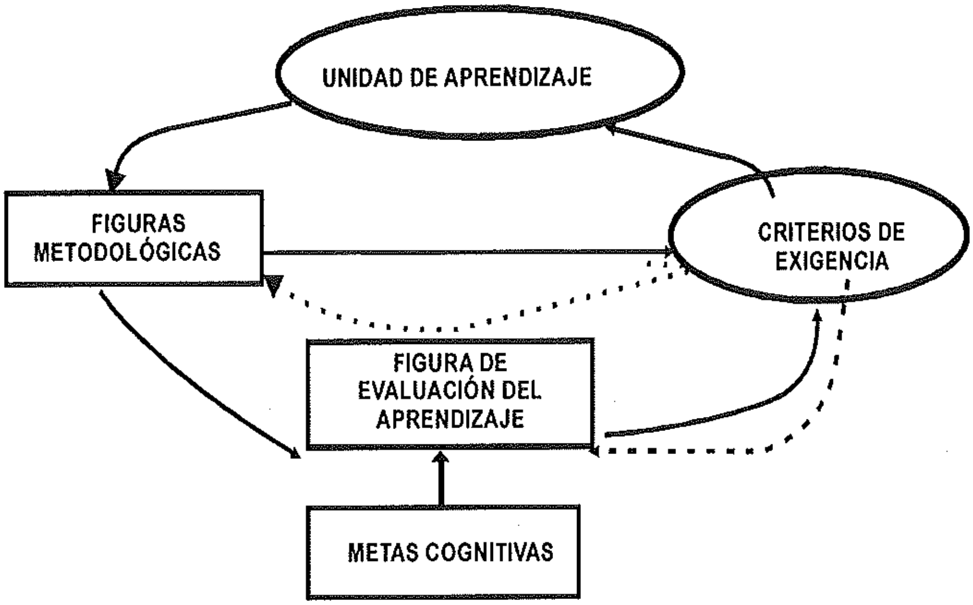
El aspecto que queremos retener aquí del aprender reside en que en un modelo pedagógico que no ignore la complejidad de los procesos del aprendizaje hay que avalar la idea de que existen ciertas fases del aprender en las que inevitablemente el sujeto entra en cuestión. Para sistematizar esta idea diremos que en el aprender es necesario poner en consideración la ecología mental del aprendiz. Por lo tanto, se debe pensar y diseñar estrategias pedagógicas y/o tareas de aprendizaje que puedan contribuir; por un lado, a eliminar factores propios de la idiosincrasia subjetiva y cultural del aprendiz que obstaculizan el aprendizaje de un determinado concepto científico o principio abstracto, y por otro lado, a resignificar y contextualizar el conocimiento en la dimensiones subjetiva y cultural de los aprendices, máxime si esto se considera indispensable para ulteriores fases del aprendizaje. Por ende, se deben generar algunas estrategias que contribuyan tanto al éxito y al auto- reconocimiento subjetivo como a la contextualización, valoración y retorno sobre el entorno del sujeto del aprendizaje. Es decir, según este postulado el aprendiz deviene en sujeto del aprendizaje.

El aprendizaje, según este último postulado, depende considerablemente del contexto socio-cultural del sujeto, sobre todo se considera que el aprender está condicionado por las mediaciones socio-culturales que han determinado las experiencias exitosas y los fracasos de aprendizaje subjetivo y cultural del aprendiz.

De allí que se diga, en el marco de este modelo, que el aprender no sólo tiene algunas fases de construcción, producción, que dependen de la matriz de significados del aprendiz, sino que está fuertemente condicionado por la subjetividad y por la experiencia o biografía cognitiva del sujeto del aprendizaje. En consecuencia, se postula igualmente que el aprender depende mucho de las experiencia y modos de enseñar de aquel o aquello que se coloca, en cada una de las fases, en el lugar del enseñar. Esto es, en el aprender se pone en juego la relación aprendibilidad-enseñabilidad. A esto último hay que agregar que, por su dimensión subjetiva, el aprendiz atraviesa con mayor o menor velocidad e intensidad (determinados por variables ligadas al contexto cultural y subjetivo: edad, el deseo, modelos culturales de aprendizaje y construcción de la realidad, etc) procesos que en buena medida son indiscernibles y que, inevitablemente pasan o conducen al aprendiz por bloqueos, saltos o aceleraciones del proceso de aprendizaje, o también por etapas(fases de desarrollo) encajadas cuyos momentos más visibles sólo los podemos señalar desde ese exterior, de un determinado proceso, que llamamos la evaluación.

2. DEL MODELO Y SUS COMPONENTES

El siguiente diagrama ilustra los componentes estructurales del modelo y las relaciones sistémicas existentes entre ellas.



Como lo muestra el diagrama, los componentes estructurales que el modelo distingue son: la unidad de aprendizaje, las figuras metodológicas, las figuras de evaluación del aprendizaje y los criterios de exigencia.

La unidad de aprendizaje es el núcleo a partir del cual se construyen las relaciones sistémicas. La unidad de aprendizaje no corresponde a la noción clásica de unidad de programa. Se trata más bien de un sub-sistema de un campo de formación científica; de allí que se deba determinar qué contenidos(principios, conceptos, nociones, teorías, técnicas) y qué perspectivas epistemológicas se deben proponer en una determinada unidad de aprendizaje, y esto no sólo en términos del programa particular, sino en términos de las competencias esperadas en la fase curricular donde se inscribe el sub_sistema de formación científica.

La idea básica es entonces que una vez definida la unidad de aprendizaje, el modelo nos debe conducir a pensar los siguientes aspectos fundamentales:

- Establecer relaciones sistémicas entre los componentes estructurales del modelo
- Generar un alto grado de correlación pedagógica entre los contenidos propuestos para una determinada unidad de aprendizaje, las figuras

metodológicas que se consideren más adecuadas para el logro de los propósitos de aprendizaje y de las metas curriculares buscados en la unidad, las figuras de evaluación más adecuadas para el logro de las metas cognitivas propuestas en la unidad de aprendizaje y los criterios de exigencia establecidos en las figuras de evaluación, criterios que deben orientar el trabajo en una determinada tarea de aprendizaje.

- Construir relaciones recursivas entre los componentes estructurales del modelo

Para construir o diseñar dichas relaciones y correlaciones, el modelo se fundamenta o introduce a título de categorías de trabajo las siguientes nociones: contextos, adecuación, aprender y aprender a aprender. Estas cuatro categorías nos permiten introducir una distinción, al interior de cada componente estructural, entre figuras pedagógicas y operador pedagógico.

Para determinar las figuras y los operadores pedagógicos, el modelo propone que el profesor o diseñador del programa se oriente por las siguientes preguntas:

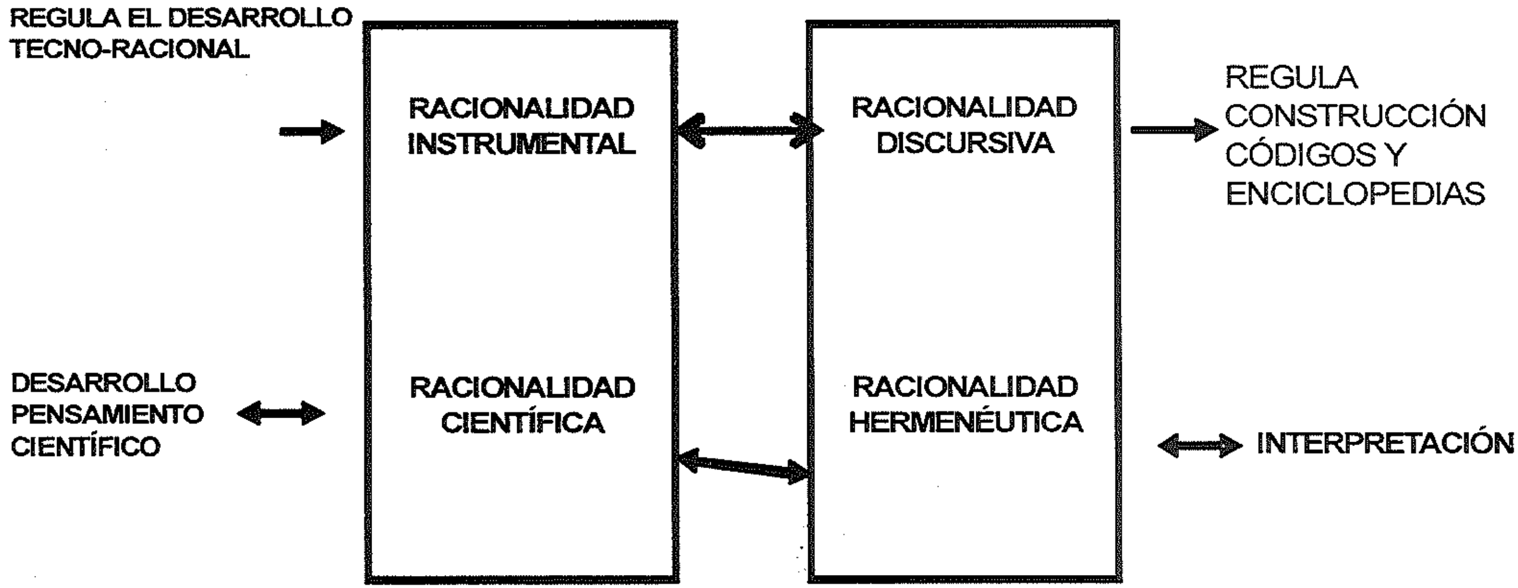
1. ¿Qué contenidos son más adecuados para los propósitos cognitivos y curriculares estipulados para una determinada unidad de aprendizaje?
2. ¿Qué operadores pedagógicos (o metodológicos) son más adecuados a los propósitos de aprendizaje y auto- aprendizaje previstos en una determinada unidad de aprendizaje?
3. ¿Qué operadores de evaluación son más adecuados para orientar el aprendizaje y la contextualización de un determinado conocimiento y/ o técnica?
4. ¿Qué criterios de exigencia básicos son adecuados y necesarios para un determinado operador de evaluación?. Los operadores de evaluación deben ser funciones del aprender, del aprender a aprender y del contextualizar.

1. RACIONALIDAD DISCURSIVA

En el ámbito científico-matemático es fundamental el desarrollo de la racionalidad discursiva del aprendiz.

LAS CUATRO RACIONALIDADES

El diagrama que se presenta a continuación esquematiza cuatro racionalidades que, a nuestro juicio, interactúan en el proceso de formación científica de un aprendiz.



Dicha racionalidad se constituye y desarrolla por la mediación de "juegos de lenguaje".

Son fundamentales:

- Los "juegos de lenguaje" específicamente artificiales o juegos de lenguaje lógico-matemático.
- La apropiación del **significado**, en la lengua natural, de los términos científicos, o códigos de la ciencia, que intervienen en una determinada tarea de aprendizaje.

Los Juegos de lenguajes artificiales deben ser parte esencial de toda **tarea de aprendizaje:**

- Constituyen una **lengua** dentro de la lengua natural del aprendiz.
- Sin ella la "memoria semántica" se anula, y los procesos de aprendizaje no se desarrollan.

De modo similar, Los Juegos de lenguajes con los **significados** de los términos científico-matemáticos deben ser parte esencial de **toda tarea de aprendizaje.**

- Los códigos científicos requieren de procesos de redundancia y análisis en la lengua natural del aprendiz, puesto que las palabras y conceptos son las vías necesarias de ingreso al conocimiento racional, y por ende a los procesos de apropiación y comprensión lógico-racional de las teorías científicas y lógico-matemáticas.
- Es decir, Para que el aprendizaje sea posible y significativo se requiere de la comprensión y, para ello es necesario que el aprendiz "ponga en acto" procesos lingüísticos que le faciliten la construcción
- Por ello se deben relacionar y articular los significados de los términos científicos con sus expresiones metamatemáticas, mediante "juegos de lenguaje" diseñados en tareas de aprendizaje apropiadas.
- En suma, la ciencia debe enseñarse y aprenderse creando vínculos entre el lenguaje natural y los "juegos de lenguaje" que la ciencia elabora como verdaderos metalenguajes sobre la realidad

2. RACIONALIDAD INSTRUMENTAL

El desarrollo de la racionalidad instrumental es sumamente importante en los procesos formación científica.

La racionalidad **instrumental** se constituye y desarrolla directamente por la mediación de tareas de aprendizaje de naturaleza tecnica, programadas con ese fin. Por ejemplo:

- Manipulación y repetición de algoritmos.
- Diseño de experimentos
- Representación y verificación en gráficas.
- Tareas de aprestamiento mecánico.
- Repetición y redundancia mediante .
- Uso de modelos heurísticos.
- Elaboración de artefactos y/o mentefactos.
- El estudio frecuente de modelos lógico- matemáticos en los cuales se modifica alguna de las condiciones o variables.
- Ejercicios de repetición y/o redundancia de los códigos y/o términos del lenguaje científico que sean básicos para la apropiación de los principios, leyes y definiciones de la ciencia en cuestión.

3. RACIONALIDAD CIENTÍFICA:

La racionalidad CIENTÍFICA es, de suyo, la entidad fundamental en el proceso de formación científica, pero depende del desarrollo de las otras tres racionalidades.

La racionalidad científica se constituye y desarrolla mediante la apropiación de estrategias cognitivas fundadas en el principio de razón suficiente: salvo los postulados fundamentales, todo debe tener una razón o fundamento racional determinado por una teoría o principio de razón.

Para formar y desarrollar la racionalidad científica es menester entonces generar estrategias o figuras pedagógicas que orienten el análisis, la comprensión y la construcción de los conceptos, nociones y principios científicos; puestos todos ellos en el marco de una determinada teoría. Es decir, la enseñanza se debe orientar hacia la apropiación del método de la teoría, la comprensión y análisis de los principios, las hipótesis subyacentes, los axiomas, y los postulados que determinan a una determinada teoría hipotético- deductiva, pues tal es la naturaleza de las teorías científicas y matemáticas.

Algunas de las estrategias pedagógicas se pueden consolidar mediante el diseño de actividades y tareas de aprendizaje que integren procesos lógico-racionales tales como:

- Desarrollo de tareas o actividades de identificación teórica y de justificación teórica de hipótesis, de principios y leyes de una determinada teoría.

- Estudio frecuente de modelos lógico- matemáticos elementales en los cuales se sintetizan aspectos importantes de una teoría hipotético-deductiva y que sean básicos para que el aprendiz se auto-apropie de algunos de los principios, leyes y definiciones de la ciencia en cuestión.

- Deducción y/o refutación de hipótesis. ***AGRADECIMIENTOS***

A las Juntas Directivas de ADIDA, tanto saliente como entrante por el empeño real en apoyar la investigación educativa y la producción intelectual de los maestros del Departamento de Antioquia, representado en su respaldo permanente al trabajo pedagógico e investigativo del Centro de Estudios e Investigaciones Docentes CEID, el cual se constituye en un espacio pedagógico e investigativo al servicio del magisterio y la comunidad antioqueña.

*También al Equipo Línea de Investigación Matemática Educativa y Escolar ELIME, por su trabajo sistemático, constancia y permanencia en el tiempo, durante más de 15 años de existencia en ADIDA, luchando de manera permanente por la calidad de la educación de nuestro departamento.****AGRADECIMIENTOS***

A las Juntas Directivas de ADIDA, tanto saliente como entrante por el empeño real en apoyar la investigación educativa y la producción intelectual de los maestros del Departamento de Antioquia, representado en su respaldo permanente al trabajo pedagógico e investigativo del Centro de Estudios e Investigaciones Docentes CEID, el cual se constituye en un espacio pedagógico e investigativo al servicio del magisterio y la comunidad antioqueña.

*También al Equipo Línea de Investigación Matemática Educativa y Escolar ELIME, por su trabajo sistemático, constancia y permanencia en el tiempo, durante más de 15 años de existencia en ADIDA, luchando de manera permanente por la calidad de la educación de nuestro departamento.*Verificación racional y metódica de principios y leyes (demostración lógico-matemática y/o contrastación experimental)

- Verificaciones y/o refutaciones de enunciados teóricos en un contexto determinado.
- Traslación de hipótesis y enunciados teóricos a otros dominios mejor conocidos y experimentados.
- Análisis de las condiciones teóricas y racionales que debe satisfacer un determinado resultado o fenómeno científico.
- Análisis de las condiciones teóricas y racionales que debe satisfacer un determinado contexto para que se pueda aplicar un cierto resultado científico o una técnica dada.
- Representación, en el lenguaje de la teoría, de enunciados, fenómenos y/o propiedades científicas de un fenómeno.
- Representación y análisis (mediado por diagramáticos, gráficas y/o programas computacionales) de expresiones, variables y paramétros de un determinado contexto fenomenológico.

RACIONALIDAD HERMENÉUTICA

La racionalidad HERMENÉUTICA es fundamental en los procesos de interpretación y contextualización del conocimiento. Dicha racionalidad se constituye y desarrolla mediante la introducción de estrategias pedagógicas que orienten el desarrollo de la capacidad de leer y contextualizar el conocimiento, es decir, interpretar dicho conocimiento en contextos predeterminados. Por ejemplo:

- Diseño de tareas de aprendizaje donde se interpreten las condiciones de validez y las limitaciones de los conceptos, términos y principios de un modelo o de una determinada teoría.
- Diseño de metodologías si tanto para el análisis del contexto (variables específicas, condiciones y limitaciones estructurales, efectos de entornos y efectos de coyuntura) como para la adecuación de un método o de una técnica.
- Diseño y estudio de estrategias para la interpretaciónn y/o adecuación de Hipótesis de una teoría o técnica al contexto dado.

Las siete operaciones básicas y sus propiedades, desde el uso de: "La Triada Operativa"

MERCEDES DEL T. ARRUBLA CARMONA.

Licenciada en Matemática - Física. Universidad de Antioquia,
Especialista en Dificultades del Aprendizaje Escolar. UCC.
Educación Matemática. ELIME. CEID-ADIDA

JARDÍN, ANTIOQUIA.
2010

"LA TRIADA OPERATIVA"

UN JUEGO DE PRÁCTICA PARA LA IMPLEMENTACIÓN DEL DESARROLLO DE PENSAMIENTOS MATEMÁTICOS, BÁSICAMENTE EL NUMÉRICO.

ABSTRACT - RESUMEN:

Esta estrategia de intervención pedagógica da cuenta de un juego, la triada operativa, como experiencia significativa, enmarcada en el proyecto de investigación **"Centros productores de interés,"** el cual tiene como objetivo, trascender del temor al amor por el aprendizaje de las Matemáticas.

La propuesta de la triada operativa parte de la hipótesis de que, en la generalidad, en los procesos de enseñanza se ha ido transmitiendo a través del tiempo, un aprendizaje mecánico, árido y además nocivo, tanto de algoritmos de las operaciones básicas como de la relación entre éstas y sus respectivas propiedades. Igualmente conscientes de que es necesario adoptar una metodología más efectiva que facilite el proceso de abstracción de dicha relación, y dado que no es común encontrar una **forma lúdica** de re-crear, es decir de divertirse y a la vez rehacer el proceso educativo que conlleva a la adquisición de dichas temáticas, se plantea a los educadores llevar al aula este juego de práctica.

Al **jugar** "*la triada operativa*", el alumno revisa y refuerza de una manera amena, bastante divertida, tres de las operaciones fundamentales: suma, resta, multiplicación, y al resolver las **actividades de reflexión,** afianza además de éstas tres, la división, con posibiluidad para ampliar la aplicación a la potenciación, radicación, logaritmación y las propiedades de dichas operaciones, aportando al desarrollo de competencias matemáticas, ya que intencionalmente permite realizar acciones como observar, analizar, abstraer... entre otras.

Al evaluar la aplicación de la experiencia se comprobó la hipótesis planteada y se evidenció el mejoramiento del proceso de enseñanza en cuanto a la temática en cuestión.

AUTORA
MERCEDES DEL T. ARRUBLA CARMONA.
Licenciada en Educación Matemática Física.
Especialista en Dificultades del Aprendizaje Escolar.
Docente de la Institución Educativa de Desarrollo Rural Miguel Valencia
Jardín – Antioquia.

INTRODUCCIÓN

"El juego es el modelo y la imagen de la vida natural, interna, misteriosa, en los hombres y en las cosas. El juego es el origen de los mayores bienes"
PLATÓN

La experiencia que se presenta, hace parte de uno de los tantos motivos que permiten ilustrar la situación problema, que apunta a dar respuesta a la pregunta: ¿Qué hacer para eliminar el miedo tradicional al aprendizaje de las Matemáticas y las ciencias básicas?, intervenida pedagógicamente a través de los **"Centros productores de interés"** conformados por un **Aula Taller Experimental de Matemáticas y dos Estaciones Meteorológicas,** que se encuentran en el marco del proyecto de investigación: ***"DE LA MATEMATEFOBIA A LA MATEMATEFILIA"*** el cual conlleva a la consecución del logro fundamental de éste, pasar del miedo al amor por el aprendizaje de las Matemáticas, mediante el lema: Aprender observando, pensando, haciendo, experimentando y **jugando.**

Proyecto que se viene ejecutando desde 1999 en la I.E Miguel Valencia, ubicada en la vereda Verdún del municipio de Jardín, y que ha permitido que ésta propuesta se comparta en encuentros de mesas regionales de matemáticas tales como el del 2002, que se realizó mediante muestras interactivas y talleres con 14 municipios del suroeste (Andes, Tarso, Támesis, Concordia, Jericó...), algunos de los cuales la han aplicado en el aula, a través de sus instituciones educativas. Además ésta propuesta ha sido seleccionada por el Premio Compartir, como experiencia significativa a nivel nacional, socializada en el "Primer Encuentro de Grandes Maestros" Medellín, febrero 24 de 2005.

Este juego de práctica es una adaptación de "La tripleta" distribuida por editorial Colina, el cual se ha ido modificando, actualizando, recontextualizando, enriqueciendo, continuamente en función de éste proyecto, a partir de los aportes y sugerencias de alumnos y docentes que la aplican, tanto en Jardín como en otros municipios entre ellos, Girardota, Yolombó y Rionegro.

La intencionalidad de dicho juego además de contribuir al desarrollo del pensamiento donde el alumno observa, sabe ver, atiende, se concentra, analiza, abstrae, establece relaciones, argumenta, pone a prueba sus memorias visual y auditiva además su agilidad mental lo que conlleva a los estudiantes a reforzar de una forma lúdica los conceptos y algoritmos de las operaciones básicas permitiendoles, movilizar procesos y temáticas como las expresadas en el siguiente cuadro:

- Aprovechamiento del concepto de número.
- Conteo.
- Concepto y algorítmos de las operaciones básicas.
- Uso de los números en el cálculo mental.
- Mostración de diferentes estrategias y maneras de obtener el mismo resultado.
- Comparaciones entre números mediante las relaciones de igualdad y desigualdad

- Conceptos de números pares, impares, Cuadrado, múltiplo y divisor.
- Jerarquía de las operaciones y manejo de operaciones contrarias: Suma, resta, multiplicación, división, potenciación, radicación y logaritmación.
- Propiedades que cumplen las operaciones básicas.
- Valor posicional.

ESTRUCTURACIÓN DEL JUEGO:

"Por el juego comienza el pensamiento propiamente humano.
En el juego contemplamos, proyectamos, construimos.
Esta fuente puede parecer en su origen muy poco abundante y muy pobre,
pero es, sin embargo, por el juego que rezuma por doquiera la humanidad
y es por el juego que la humanidad se desarrolla".

Chateau

La organización de "LA TRIADA OPERATIVA", se lleva a cabo en dos guías, una para el maestro y otra para el alumno; diseñadas mediante un momento preliminar (0) de ***vital importancia*** para el afianzamiento del aprendizaje de la tabla de multiplicar y seis momentos más a saber:

1: Construcción del material concreto y familiarización con él.
2: Organización de las reglas de juego.
3: Aplicación: Se procede a la realización del juego.
4: Registro en las tablas.
5: Análisis de resultados, mediante actividades complementarias de reflexión.
6: Socialización, para el desarrollo de la estrategia.

Tanto **los momentos** propuestos como **el mismo juego de práctica** se deben contextualizar según el grado, conocimientos previos y alcanzables de los estudiantes, además de los ambientes de aprendizaje proporcionados.

Las posibilidades de realización de **"la guía del estudiante"**, con el debido acompañamiento, favorecen la intervención pedagógica y le permiten a éste, movilizar, integradamente, algunos de los *estándares* de los diferentes pensamientos, así:

PENSAMIENTO NUMÉRICO:

Establece relaciones formando e interpretando estructuras numéricas, buscando regularidades, e identificando mediante la realización simultánea de las operaciones, las propiedades clausurativa, conmutativa, modulativa,... y descubre sus relaciones.

PENSAMIENTO GEOMÉTRICO:

Puede utilizar instrumentos geométricos para la construcción del juego y según la pertinencia, caracterizar el círculo, la circunferencia y el cuadrado poniendo en evidencia sus elementos, (el maestro debe aprovechar la construcción de las fichas en diversas posibilidades y de acuerdo a su creatividad).

PENSAMIENTO MÉTRICO:

La toma de medidas en la construcción y la percepción del entorno.

PENSAMIENTO VARIACIONAL:

La búsqueda de regularidades y patrones, la solución de ecuaciones.

PENSAMIENTO ESTOCÁSTICO:

A medida de ejemplo, utilizando la información adquirida en las soluciones y el número de estudiantes que las obtuvieron para presentar la información en diagramas.

Dadas las posibilidades y relevancia del pensamiento numérico que brinda el juego, se especifican a continuación los estándares más pertinentes, con más énfasis en los ciclos de 1° a 7° y de una manera más generalizada en los demás, según necesidades de los grupos.

ESTÁNDARES RELACIONADOS CON LOS SISTEMAS NUMÉRICOS Y EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO NUMÉRICO, EN LA TRIADA [1]:

1° A 3°	4° A 5°	6° A 7°	8° A 9°	10° A 11°
2. Describir, comparar y cuantificar situaciones con diversas representaciones de los números, en diferentes contextos. 3. Usar los números para describir situaciones de medida con respecto a un punto de referencia (altura, profundidad con respecto al nivel del mar, pérdidas, ganancias, temperatura etc.) 6. Reconocer el efecto que tienen las operaciones básicas (suma, resta, multiplicación y división) sobre los números 8. Usar diferentes estrategias de cálculo (especialmente cálculo mental y de estimación, para resolver problemas en situaciones aditivas y multiplicativas.)	4. Resolver y Formular problemas cuya estrategia de solución requiera de las relaciones y las propiedades de los números naturales y sus operaciones. 9. Usar diversas estrategias de cálculo y de estimación para resolver problemas en situaciones aditivas y Multiplicativas. 10. Identificar, en el contexto de una situación, la necesidad de un cálculo exacto o aproximado y lo razonable de los resultados obtenidos.	3. Generalizar propiedades y relaciones de los números naturales (ser par, impar, múltiplo de, divisible por, conmutativa etc..) 5. Justificar operaciones aritméticas, utilizando las relaciones y propiedades de las operaciones. 6. Formular y resolver problemas aplicando conceptos de la teoría de números (números primos, múltiplos) en contextos reales y matemáticos. 11. Justificar la elección de métodos e instrumentos de cálculo en la resolución de problemas.	A partir de casos particulares, llegar a conclusiones generales a través de la inducción, verificando las conjeturas propuestas las cuales expresa en un lenguaje algebraico.	Practicar todo lo que sabe sobre los números reales, para comparar, identificar y diferenciar propiedades, relaciones y operaciones de los números enteros, racionales e irracionales; argumentando sus respuestas

GUÍA PARA EL DOCENTE

"Si el maestro conoce la ruta, puede ayudar a que los estudiantes encuentren la suya."

anónimo

DESCRIPCIÓN:

Desde la experiencia exitosa que se ha tenido con niños de los grados desde 3° hasta 9°, al aplicar ésta estrategia significativa, pero que sin embargo se puede contextualizar y realizar desde grado de 2° hasta 11°, y en cualquier ambiente de aprendizaje: Aula regular, aula taller, patios, canchas, aula múltiple, laboratorio, siempre partiendo de la premisa de que **el juego orientado como centro del aprendizaje es fundamental en la deducción y/o aplicación de los conceptos**, teniendo presente el lema de nuestro proyecto "El aprender observando, pensando, experimentando, haciendo y jugando", genera alegría, disfrute por el trabajo, aprecio por el conocimiento adquirido, eleva la autoestima y motiva a los estudiantes a la investigación-comprobación, siendo más fácil el llegar a la modelación, generalización y simbolización de conceptos, logrando con todo ello una relación amorosa y motivante entre el trio alumno-maestro-área.[2]

Antes de iniciar el proceso de este juego es conveniente realizar la construcción de manera colectiva de la tabla de doble entrada para la multiplicación y adicionalmente efectuar lecturas de los productos resultantes en el ábaco,[1] la cual permite ampliar la movilización de múltiples conceptos que complementan la triada y revisar la naturaleza de las operaciones básicas.

"LA TRIADA OPERATIVA"

Es pues un juego de práctica, cuyo objeto esencial es el afianzamiento de una de las aplicaciones de las estructuras multiplicativa y aditiva, tanto en forma mental como escrita, en el cual se utiliza material concreto de fácil construcción; (50 fichas redondas y 49 fichas cuadradas, construidas en cartulina, cartón, madera u otro material similar, impresas con marcador,

[1] Véase al respecto a MESA Betancur , Orlando- "Criterios y estrategias para la enseñanza de la Matemática".

bolígrafo, tiza...), además de reforzar también la naturaleza de dichas operaciones, se tiene la posibilidad de ampliar a la división, potenciación y radicación. En dicho afianzamiento, se pueden encontrar resultados con valores negativos, lo que nos permite introducir o reforzar **el concepto de número entero**, profundizando en él, según el grado de escolaridad; igualmente se pueden plantear ejercicios de completación de tablas (momento 3 guía del estudiante) predeterminando algunas jugadas.

MOMENTO **PRELIMINAR (O):**

JUGUEMOS CON LA TABLA DE DOBLE ENTRADA PARA MULTIPLICAR.

. Materiales:

- Cartón, cartulina o papel para la elaboración de la tabla (tamaño deseado a elección del maestro). Debe ser en forma de cuadrado.
- Colores, regla y tijeras (si la recortan).
- El maestro puede elaborar la suya en un material adecuado borrable (tablero portátil en hule, cuadriculado con corrector).

LA TABLA DE DOBLE ENTRADA PARA MULTIPLICAR.

"Uno debe recuperar la capacidad de asombro a un niño, pero con la capacidad de indagación que puede aportar la experiencia"
Eduardo Galeano

Llenarla en forma colectiva:

Los alumnos deben llenar la siguiente tabla, multiplicando cada número de la columna (contadores) por los números de la fila (factores), colocando sus resultados en las respectivas intersecciones: [3]

X	1	2	**3**	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1												
2												
3												
4			12									
5												
6												
7												
8												
9												
10												
11												
12												

Explorar de una manera lúdica, todas las posibilidades de aplicaciones numéricas con relaciones y operaciones brindadas por la tabla. Una vez que esta se ha llenado se pueden plantear las siguientes:

ACTIVIDADES COMPLEMENTARIAS DE REFLEXIÓN E INTERVENCIÓN PEDAGÓGICA.

- Encontrar todos los productos que den el mismo resultado. Analizar propiedad que cumple.
- Trazar la diagonal desde el por (X), hasta el enésimo cuadrado, donde n es el número máximo de la columna o fila. (descubrir los cuadrados en la diagonal)

- Trazar demarcando con color los cuadrados correspondientes al producto de un número por si mismo, hallarles el área
- Calcular la diferencia entre números consecutivos tocados por la diagonal, ¿qué serie de números aparece?
- Si a cada cuadrado le sumamos un impar en orden. ¿Que obtenemos? (Reversibilidad de la actividad anterior).
- Analizar la dificultad: Al pasar de contar por unidades a contar grupos.
- Realizar las diferentes lecturas: Resultados de esquemas multiplicativos.
- Comparar sumas horizontales y verticales. (conteo de 1 en 1, 2 en 2, 3 en 3...)
- Discutir clausuratividad, conmutatividad, existencia de elemento neutro: modulativa: analizando la serie que no es alterada, en fila y columna)
- Resolver problemas simples de ecuaciones como: Si la suma de dos números es 15 y su producto es 56, ¿cuáles son los números?
- Todas las posibilidades de series, combinaciones y operaciones que se le ocurran a usted como docente y a sus alumnos.

En este momento preliminar, el juego se relaciona con los estándares que llevan a la movilización de conceptos tales como:

- Multiplicación y propiedades de la multiplicación.
- La potenciación (significado aritmético y geométrico).
- Sumatorias.
- Áreas de figuras planas. (Cuadrado, rectángulo, círculo)
- Regularidades entre los elementos de la diagonal y demás series.
- Aplicación del concepto de factorización
- Resolución de ecuaciones.

EL MAESTRO SELECCIONA DE LA GUÍA LOS MOMENTOS QUE JUZGUE PERTINENTES PARA SU GRADO Y ADEMÁS LOS CONTEXTUALIZA.

MOMENTO 1: Construcción del material.

De acuerdo al grado se realiza con los mismos alumnos, o con los padres si se posibilita. Los más pequeños lo hacen con moldes, mediante el calco, los más grandes, distribuyen el material, toman medidas y utilizan regla y compás, para construirlos hallar centro y radio del círculo, para el cuadrado se mide el lado y se construye con escuadra y/o compás. Si no usan moldes se les dan las medidas y utilizan instrumentos geométricos. El maestro orientará pues la elaboración de 50 fichas redondas enumeradas del 1 al 50, ó del 1 al 10 al 15 ...según el grado y 49 fichas cuadradas: 6 Fichas con el número 1, 6 con el 2, 6 con el 3 y 6 con el 4, 5 Fichas con el número 5, 5 con el 6, 5 con el 7, 5 con el 8 y 5 con el 9.

MOMENTO 2: ORGANIZACIÓN DE LAS REGLAS DEL JUEGO

Descripción de las reglas del juego (Ver guía del alumno) y analizar modificaciones que se le quieran y puedan hacer a las mismas, en común acuerdo con el grupo o cada maestro según su contexto lo puede hacer; es decir adaptar el juego según nivel de exigencia en los alumnos y las aplicaciones que vaya realizando, el material se presta para ello.

MOMENTO 3: Aplicación

Con los números que cada jugador va obteniendo, afianza los algoritmos de las operaciones básicas: Suma, resta, multiplicación, división, potenciación, radicación y logaritmación, llenando las tablas propuestas en la guía del estudiante... (Momentos 3 - 4. Cada jugador llena la tabla No.1 y el colectivo del equipo elabora todas las tablas restantes, con los datos del jugador ganador.

La tabla número dos de la diferencia entre número de jugadas en los grados de primero a cuarto no debe hacerse predeterminada sino con los números obtenidos en las jugadas donde el minuendo es mayor que el sustraendo, para evitar números negativos, a no ser que el maestro lo juzgue pertinente y aproveche para introducir o afianzar el concepto de número entero (deudas...)

Se procede a la realización del juego y se tienen en cuenta las observaciones siguientes:

OBSERVACIONES:

- Quien realice la operación más rápidamente, será el ganador de la ficha seleccionada. Cuando haya realizado varias jugadas y comprendido el juego, se puede colocar límite de tiempo por ejemplo cada turno debe durar tres minutos como mínimo.
- En caso de que el valor impreso en la ficha redonda no pueda obtenerse de ninguna manera, se deja aparte y se escoge otra. – El juego se puede complementar con otras operaciones, división, potenciación... y otros conjuntos numéricos como los Enteros (Z) y los Fraccionarios (F).

MOMENTO 4: Análisis de resultados

Con los datos obtenidos en cada jugada registrados en las diferentes tablas momento 3 y 4 dadas o elaboradas por el alumno. Quienes deben además hallar los totales, efectuar las comparaciones indicadas, se procede a realizar **las actividades complementarias de reflexión e intervención pedagógica,** con el debido acompañamiento del maestro orientador del juego, se efectúan todos los análisis del caso.

MOMENTO 5: Socialización:

En sesión plenaria se discuten los resultados y se obtienen conclusiones de todos los momentos, enfatizando tanto los procesos como las temáticas que se movilizaron al interior del juego, aprovechando las diferentes situaciones para revisar conceptos, ejemplo hacer alusión a las posiciones relativas de las rectas, cuando explica la forma de las jugadas en horizontal, vertical, diagonal y en L y enfatizar en los conceptos de las actividades complementarias, como propiedades de las operaciones.

Observación: La guía para el estudiante, nos permite interpretar la descripción de la actividad y realizar las modificaciones que consideremos lógicas y pertinentes dentro de nuestros contextos educativos; la selección de las etapas y actividades a aplicar dependerán de las necesidades diagnósticas de los alumnos y los cambios, ampliaciones o reducciones, serán resultado de práctica educativa.

GUÍA PARA EL ESTUDIANTE.

"La Matemática no hace al mundo, pero si lo explica"

Anónimo.

LEMA DEL PROYECTO:

"APRENDER OBSERVANDO, PENSANDO, HACIENDO, EXPERIMENTANDO Y JUGANDO"

Juego de práctica: *"LA TRIADA OPERATIVA".*

Número de jugadores: 1 a 4 (Se sugiere de 2 a 4 para que permita realizar las variaciones y complementaciones del juego)

PROPOSITOS:

* Afianzar una de las aplicaciones de las estructuras multiplicativa y aditiva en forma mental y los algoritmos de las tres operaciones básicas (Multiplicación, suma y resta), complementandolas con las demás operaciones (divición, potenciación, radicación y logaritmación).
* Obtener el resultado que está impreso en cada ficha redonda, por medio de *operaciones matemáticas combinando multiplicación con suma y resta.*
* *Con los resultados obtenidos practicar las diferentes temáticas en las actividades complementarias.*

<u>**MOMENTO PRELIMINAR 0**</u>: Con la orientación de tu profesor construye y juega con la tabla de doble entrada para la Multiplicación.

<u>**MOMENTO 1:**</u>

Construcción del material necesario: En cartón, cartulina o similares, tamaño según posibilidades.

- **49 fichas cuadradas:** Como indique el profesor, o asumiendo una longitud aproximada de 5 cm de lado, o un tamaño que se considere cómodo, las fichas se rotulan así:

6 Fichas con el número 1, 6 con el 2, 6 con el 3 y 6 con el 4.

5 Fichas con el número 5, 5 con el 6, 5 con el 7, 5 con el 8 y 5 con el 9

- **50 fichas redondas:** Marcadas con los números del 1 al 50, con un diámetro de 5 cm ó un tamaño proporcional al de las fichas cuadradas.
- Elaborar en forma individual las tablas de registro propuesta en los momentos 3 y 4

<u>MOMENTO 2:</u>

Reglas iniciales del juego ¿Como se juega?

Cada equipo coloca las fichas cuadradas (número hacia arriba), al azar, en siete filas y siete columnas de modo que formen un tablero (cuadrado). Las fichas redondas se organizan en cualquier orden y con el número hacia abajo. Por turnos, cada jugador escoge una de éstas la cual tiene impreso un valor determinado (del 1 al 50): Resultado para la ejecución del juego.

Para obtener ese valor, los jugadores deben observar el tablero y realizar ***dos operaciones matemáticas*** utilizando para ello, tres fichas cuadradas en forma consecutiva (<u>**horizontal, vertical o diagonal**</u>), <u>Debe efectuarse siempre, una multiplicación como primera operación y una suma o resta como segunda</u>.

En una 2ª ronda se puede modificar el juego, aceptando triadas en L y combinando operaciones sin condicionamientos.

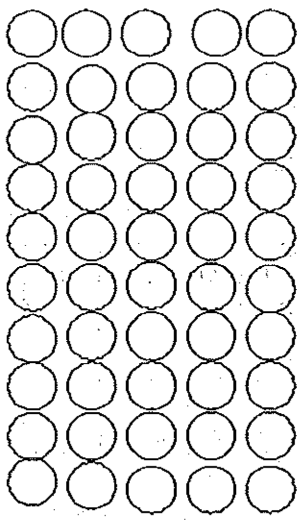
El estudiante que nombra y <u>argumenta</u> la jugada es el ganador de ese resultado, el cual consigna en la tabla elaborada para tal efecto (momento 3 y 4) y se queda con esa ficha, hasta que se realicen las aplicaciones.

Si se encuentran más de dos triadas en el tiempo que se colocó como límite, son válidas para los que las hallen y también se las anotan en las tablas No. 1 para registro de jugadas.

EJEMPLO:

$37 = (9 \times 4) + 1$ ↓
$= (8 \times 4) + 5$ ←
$= (8 \times 5) - 3$ ←
$= (7 \times 5) + 2$ ↖
$= (5 \times 9) - 8$ →
$= (7 \times 4) + 9$ L

8	3	3	5	8	2	7
3	7	1	3	2	9	4
6	4	9	2	6	4	3
5	4	8	2	7	1	9
5	1	6	7	5	3	8
4	5	9	8	1	7	6



50 fichas redondas, con números hacia abajo

NOTA:

- El ganador será el que acumule el mayor número de fichas, o la mayor suma.
- La distribución de las fichas cuadradas del tablero debe variar en cada ciclo de jugadas.
- Después de haber realizado el juego con las reglas propuestas en la guía, cada equipo, debe experimentar resolviendo en forma práctica las modificaciones y cuestionamientos que le surjan.

MOMENTOS 3 Y 4 : **APLICACIONES DEL JUEGO :**

REGISTREMOS NUESTRAS JUGADAS.

Con los números que cada jugador obtuvo, en jugadas tabla No. 1, afianzan los algoritmos de las operaciones básicas: Suma, resta, multiplicación, división, potenciación, radicación y logaritmación, llenando las tablas 2, 3, 4, 5, 6 y 7 se refuerzan las 4 operaciones restantes.

Cada jugador elabora su tabla y la llena, con sus jugadas ganadas, como las encontró, según instrucciones del juego.

Para registrar las jugadas ganadas en forma individual, debes tener en cuenta, tanto el valor, como la operación que te permitió hallarlo

REGISTRA TUS JUGADAS GANADAS. Ejemplo:

JUGADA No	1ª	2ª
VALOR FICHA GANADA	18	27
OPERACIONES PARA ENCONTRARLA	3 x 5 + 3	7 x 5 - 8

Registra tus jugadas ganadasJugador Nº___ Nombre _________________

JUGADA No.	1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	7ª	8ª	9ª	10ª	Suma total en fichas ganadas
VALOR FICHA GANADA											
OPERACIONES PARA ENCONTRARLA											

Tabla No.1

- Compara los totales en número de fichas ganadas entre los jugadores. Encierra en un círculo el signo correspondiente:

  1º jugador: total _____ < = > 2º jugador: total _____

  3º jugador: total _____ < = > 4º jugador: total _____

- Se comparan los ganadores obteniendose un solo ganador final:

Ganador entre 1º y 2º con total: ___ < = > Ganador entre 3º y 4º con total: ___

El jugador ganador fue: ____________________________

Selecciona la tabla No 1, del jugador que ganó, y teniendo en cuenta que en todas las tablas siguientes, los símbolos 1ª, 2ª, 3ª..., como en la tabla 1. Lo debes leer respectivamente: primera, segunda, tercera, jugada y así sucesivamente...Procede a llenar colectivamente las tablas por parejas de operaciones.

LA SUMA Y LA RESTA

SUMAS	SUMA ENTRE # DE JUGADAS	OPERACIÓN	RESULTADOS
	1ª + 2ª		
	2ª + 1ª		
	3ª + 0 (Cero)		
	4ª + 1ª + 6ª		
	(4ª + 1ª) + 6ª		
	4ª + (1ª + 6ª)		
	7ª + 7ª		
	8ª + (- 8ª)		
	9ª + 1(unidad)		
	12(10ª + 5ª).		
	12(10ª) +12 (5ª).		
	SUMA TOTAL RESULTADOS		

Tabla No. 2

RESTAS	SUMA ENTRE # DE JUGADAS	OPERACIÓN	RESULTADOS
	1ª - 2ª		
	2ª - 1ª		
	3ª - 0 (Cero)		
	4ª - 1ª - 6ª		
	(4ª - 1ª) - 6ª		
	4ª - (1ª - 6ª)		
	7ª - 7ª		
	8ª - (- 8ª)		
	9ª - 1(unidad)		
	12(10ª - 5ª).		
	12(10ª) -12 (5ª).		
	SUMA TOTAL RESULTADOS		

Tabla No. 3

MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN

MULTIPLICACIÓN	PRODUCTOS ENTRE # DE JUGADAS	OPERACIÓN	RESULTADOS
	$1^a \times 2^a$		
	$2^a \times 1^a$		
	$6^a \times 6^a$		
	$10^a \times 4^a$		
	$1^a \times 0$		
	$3^a \times 1$(unidad)		
	$3^a \times 6^a \times 5^a$		
	$(3^a \times 6^a) \times 5^a$		
	$3^a \times (6^a \times 5^a)$		
	$5 \times (1^a + 2^a)$		
	SUMA TOTAL RESULTADOS		

Tabla No. 4

DIVISIÓN	COCIENTES ENTRE # DE JUGADAS	OPERACIÓN	RESULTADOS
	$1^a \div 2^a$		
	$2^a \div 1^a$		
	$6^a \div 6^a$		
	$2^a \div 4^a$		
	$1^a \div 0$		
	$0 \div 1^a$		
	$(7^a \div 6^a) \div 5^a$		
	$7^a \div (6^a \div 5^a)$		
	$8^a \div 1$(Unidad)		
	1(UNO) $\div 8^a$		
	SUMA TOTAL RESULTADOS		

Tabla No. 5

NOTA: Tablas como estas ayudarán a que tanto el maestro, como el estudiante exploren y propongan nuevas alternativas de aplicación de la propuesta didáctica, que se ha venido implementando.

Maestros, estudiantes, el reto es complementar las tablas 6 y 7 con los ejercicios faltantes y formular las actividades complementarias de reflexión e intervención pedagógicas correspondientes.

POTENCIACIÓN, RADICACIÓN, LOGARITMACIÓN:

POTENCIACIÓN	POTENCIAS ENTRE # DE JUGADAS	OPERACIÓN	RESULTADOS
	$(1^a)^2$		
	$((3^a)^2)^3$		
	$(6^a)^2 \times (6^a)^4$		
	$\frac{(4^a)^5}{(4^a)^5}$		
	$(5^a)^0$		
	SUMA TOTAL RESULTADOS		

Tabla No. 6

RADICACIÓN LOGARITMACIÓN	RAICES Y LOGARITMOS ENTRE # DE JUGADAS	OPERACIÓN	RESULTADOS
	$\sqrt[3]{(1^a)^3}$		
	$\sqrt{(6^a)^2}$		
	$\log_{1^a} 1^a$		
	SUMA TOTAL RESULTADOS		

Tabla No. 7

OBSERVACIONES:

La intención de llenar las tablas 2 al 6 en forma conjunta, es la observación del efecto de cada operación al comparar los resultados en forma simultánea de las operaciones contrarias para que el alumno visualice las propiedades conjuntamente y analice cuales se cumplen y cuales no, en cada operación.

Puede encontrarse una variante en el juego con la comparación de los diferentes totales de los valores obtenidos en las fichas ganadas.

Enriquecer la aplicación de la experiencia variando los niveles de complejidad, con los valores seleccionados para el juego, mediante el conjunto numérico pertinente, para los fines que nos convocan

ACTIVIDADES COMPLEMENTARIAS DE REFLEXIÓN E INTERVENCIÓN PEDAGÓGICA:

Con base en las tablas del 2 al 7, elaboradas con las jugadas ganadas, ubicándote en las tablas 2 y 3, completa:

- ¿Qué opinas de los resultados que obtuviste al sumar 1ª jugada con 2ª y luego 2ª con 1ª? ______________________________
- El ejercicio que acabas de realizar conduce a una propiedad que se nombra ______________________________

  Y se enuncia: ______________________________
  ____
- Ahora, ¿qué ocurre al comparar los resultados de restar 1ª jugada con 2ª y luego 2ª con 1ª? ______________________________
- Según tu observación la propiedad que identificaste, la cumple, entonces la suma: Si___, No___.

  La cumple la resta Si___, No___ Por que? ______________________________
- ¿Qué pasó cuando agregaste 0 (cero) a una jugada? ____________________

  Y ¿cuando restaste 0 (cero) a la misma jugada? ____________________
- Recuerda el nombre de la propiedad que hace alusión a estos resultados: ______________________________
- Enuncia dicha propiedad: ______________________________
  ____

Por Mercedes Arrubla C.

- Se cumple la propiedad enunciada para la suma. Si____, No____
- Se cumple la propiedad enunciada para la resta. Si____, No____
- ¿Qué ocurre cuando sumas el valor de una jugada con su valor opuesto? ____________
- Nombra la propiedad que hace referencia a la suma anterior ____________

  Describe dicha propiedad: ____________
- Y que pasó, cuando restaste, esa jugada con su opuesto? ____________
- Se cumple la propiedad enunciada para la suma. Si____, No____
- Se cumple la propiedad enunciada para la resta. Si____, No____
- Cuando le sumaste una unidad a la jugada 9 ª, el resultado que obtuviste con relación al número ganado ¿queda en cual posición? ____________
- Y donde se ubica el número que resulta de restar la unidad al valor de una jugada: ____________
- ¿Todas las jugadas a que conjunto numérico pertenecen? ____________

  Y el resultado de sumar la 5ª y 10ª ¿pertenecen también al mismo conjunto? ____________
- ¿Cómo se nombra la propiedad que se deduce del anterior análisis para ese conjunto numérico? ____________
- ¿Cuántas veces queda contenida, una jugada en el resultado, cuando sumas una jugada con ella misma?, como la 7ª con 7ª: ____________
- ¿Qué ocurre si restamos la 7ª con 7ª? ____________
- ¿Qué observas cuando expresas la suma de tres de las jugadas, de tres maneras diferentes: ____________
- ¿Que nombre recibe la propiedad que se cumple, al realizar las sumas de ésta manera?: ____________

Por Mercedes Arrubla C.

Analiza, la observación anterior para la resta y concluye lo que sucede: ____

¿Se cumple dicha propiedad para la resta? Si_______ No_____

- ¿Cuando multiplicaste un número, en este caso el 12, por la suma de las jugadas (10ª, 5ª) y luego distribuiste ese número 12, para cada sumando, qué observaste en los dos resultados? _____________ Como crees que se nombra la propiedad que resulta de ese análisis? __________________ Describe, dicha propiedad ______________________________________
- Analiza las dos últimas operaciones con la resta (tabla 2), qué pasa con sus resultados?____
- ¿Cumple entonces la resta la propiedad descrita anteriormente?

  Si___, No___

Ubícate en las tablas 4 y 5:

- ¿Qué opinas de los resultados que obtuviste al multiplicar, 1ª jugada por 2ª y luego 2ª por 1ª? ____

  El ejercicio que acabas de realizar conduce a una propiedad que se nombra ____

  Y se enuncia: ____
- Ahora, ¿qué ocurre al comparar los resultados de dividir 1ª jugada entre 2ª y luego 2ª entre 1ª? ____

  ____
- Según tu observación la propiedad que identificaste, ¿la cumple, entonces la multiplicación?

  Si___, No___ ¿Por qué ? " Analiza, la observación anterior para la resta y concluye lo que sucede: ___________________________
- La cumple la división? Si___, No___ ¿Por qué?___________________
- Cuando multiplicas una jugada por ella misma, como la 6ª x 6ª, que números obtienes? ____
- ¿Qué ocurre si dividimos la 6ª con 6ª? ___________________________

  ____

Por Mercedes Arrubla C.

§ ¿Qué observas cuando expresas la multiplicación de tres de las jugadas, de tres maneras diferentes?:

§ ¿Que nombre recibe la propiedad que se cumple, al realizar las multiplicaciones de ésta manera?:

§ Analiza, la observación anterior para la división y concluye lo que sucede:

§ Se cumple la propiedad para la división? Si_______ No_____

◊ ¿Si a los múltiplos de dos que hallaste les sumamos 1 ¿que obtienes?.

◊ Si a los múltiplos de dos que hallaste les restamos 1 ¿que obtienes?.____________________

➢ ¿Qué sucede cuando multiplicas una jugada por 1(uno)? ___________

➢ ¿Cual propiedad se cumple?: ____________________

➢ Argumenta tu respuesta ____________________

❑ ¿Y si divides la misma jugada, entre 1, cuál es el resultado? __________

❑ ¿Se cumplirá alguna propiedad? Si_____, No____,

❑ Justifica tu análisis ____________________

⌘ ¿Qué sucede cuando multiplicas una jugada por 0 (cero)? ________

⌘ Cual propiedad se cumple____________________

⌘ Argumenta tu respuesta ____________________

Por Mercedes Arrubla C.

¿Qué pasa cuando divides una jugada entre 0 (cero)? ____________

____

Si es posible que dividas una jugada entre cero? ______________

justifica tu respuesta: ______________________ ____________

¿Qué pasa cuando divides 0 (cero) entre una jugada? ___________

____

Transcribe la aplicación de la tabla No. 4, que alude a las siguientes preguntas y responde.

Analiza divisiones donde el divisor es mayor que el dividendo,

¿Que pasa? ______________________________________

- ¿Y si por el contrario el divisor es menor que dividendo?

____

- ¿Qué pasa cuando en la división el dividendo es igual al divisor?

____

- En los números que aparecen en ésta tabla, identifica los múltiplos de dos, tres, cinco. Utiliza diferentes colores ó convenciones y enciérralos.
- Expresar dos de los múltiplos encontrados en la actividad anterior en forma de factores.______________________________
- Descomponer en sus factores primos otros dos de los múltiplos encontrados: ______________________________

Explica los pasos de la división, mediante uno de los cocientes entre jugadas propuestas. ______________________________

Teniendo en cuenta los análisis en las 4 tablas:

- ¿A que conjunto numérico pertenece el valor de cada jugada ? N , Z ,Q
- ¿A que conjunto numérico pertenece el resultado de multiplicar una jugada por otra? ______________________________

Por Mercedes Arrubla C.

- ¿A que conjunto numérico pertenece el resultado de sumar una jugada con otra?. ______________________________
- ¿A que conjunto numérico pertenece el resultado de restar una jugada con otra?. ______________________________
- ¿A que conjunto numérico pertenece el resultado de dividir una jugada con otra? ______________________________
- Concluye: ¿Cuales operaciones y en que conjuntos numéricos cumplen la propiedad clausurativa?

Ubícate en las tablas 6 y 7 :

Puedes formular preguntas que den cuenta de las ejercitaciones que se asignan en las tablas 6 y 7, por ejemplo:

* ¿Que significa: $(1^a)^2$?______________________________
* ¿Qué hacer para calcular una potencia de una potencia? ______________________________

- Si multiplicamos una jugada a la dos, por la misma jugada a la 4: $(6^a)^2$ x $(6^a)^4$ Obtenemos: ______________________________
- ¿Qué resultado obtenemos cuando dividimos una jugada elevada a un exponente, entre ella misma elevada a ese mismo exponente? ______________________________

- Si elevamos una jugada a la cero ¿qué resultado obtenemos? ______________________________
- Argumenta tu respuesta ______________________________
- Si elevas una jugada a la 3 y le extraes la raíz cúbica obtienes: ______________________________

- Proponer las actividades complementarias faltantes, conjuntamente para las tablas 6 y 7: ______________________________

Por Mercedes Arrubla C.

COMPARA LOS RESULTADOS DE LAS SUMAS DE LOS TOTALES EN LAS TABLAS 2, 3, 4 Y 5.

Selecciona y encierra el símbolo, **mayor que, menor que e igual a,** así.

Total tabla 2:_______ < = > Total tabla 3: ______

Total tabla 4:_______ < = > Total tabla 5: ______

Por último se compararán los dos mayores totales.

Total Tabla ☐ ______ < = > Total Tabla ☐ ______

Comparte con los compañeros los resultados totales de las sumas, restas, multiplicaciones y divisiones y realiza un análisis comparativo, encontrando regularidades entre ellos, consígnalas.

OPERACIONES / EQUIPOS	**SUMA TOTAL RESULTADOS: Valores otros equipos**						
	1°	**2°**	**3°**	**4°**	**5°**	**6°**	**7°**
Suma							
Resta							
Multiplicación							
División							

Qué concluyes con relación a regularidades frente a la comparación: < = >, entre tus sumas totales y las de tus compañeros, argumenta tu respuesta: ____

____

____

____

____

OBSERVACIONES FINALES Y ALGUNOS ALCANCES

La experiencia, nos ha permitido hilar un verdadero tejido en la medida de nuestras posibilidades, enfocándonos en: propuestas metodológicas con enfoque constructivista, metodología activa, mediante la aplicación de situaciones problema, basándonos en algunas de las fundamentaciones de Dienes, Gastón de Mialaret, Piaget, Vigotsky, Mesa Betancur, Palissy, De Guzman, Azcarate, entre otros, a la luz de la Ley General, los Lineamientos, los Estándares Curriculares y el Desarrollo de Competencias Básicas. Lo que conlleva a sugerir a nuestros docentes, el aprovechamiento de la contextualización de juegos comerciales, rediseñados por los estudiantes, variando los niveles de complejidad, específicamente en (La Triada operativa) lo puede hacer cambiando los valores seleccionados para el juego, mediante el conjunto numérico pertinente, para el grado correspondiente.

La Neurología moderna ha descubierto que en el proceso de enseñanza aprendizaje a través del juego y la relación amorosa, el cerebro medio permite la comunicación entre los hemisferios, dando paso a aprendizajes significativos y trascendentes.

"Sólo el amor hace milagro el barro"
Silvio Rodríguez-

BIBLIOGRAFÍA

[1] *Estándares Básicos de Matemáticas, MEN. Mayo de 2003.*

[2] *Monsalve Miguel. (Algunas ideas para la enseñanza de las Ciencias). Documento.2001*

[3] *Mesa Betancur, Orlando.(Criterios y estrategias para la enseñanza de la Matemática). 1994.*

[4] *Lineamientos curriculares Matemáticas Julio de 1998.*

[5] *Zill- Dewar, Trigonometría - editorial Mc Graw Hill*

Un Teorema Literario

RUBÉN DARÍO HENAO CIRO

Magister en Didáctica de las Matemáticas.
Instituto Pedagógico Latinoamericano y Caribeño IPLAC.
La Habana-Cuba.

MEDELLÍN
2010

UN TEOREMA LITERARIO

Rubén Darío Henao Ciro
Máster en Didáctica de la Matemática
IPLAC, La Habana, Cuba

..La literatura es un camino hacia la construcción de significados..

ANTECEDENTES: Los profesores no leen.

¿Quién es un buen maestro?

1. Dominio de contenidos
2. Trato afectivo
3. Competente lingüísticamente
4. ¿✪?

TEOREMA PREVIO: un teorema es una proposición científica que puede ser demostrada.

COROLARIO PREVIO: un corolario es una proposición que se deduce por sí sola de un teorema demostrado.

PROPOSICIÓN PREVIA: una proposición es un enunciado del cual podemos decir que es verdadero o falso.

TEOREMA 1: El lenguaje es una poderosa herramienta...

Funciones: cognitiva, comunicativa y poética.

Corolario 1: Los libros nos hacen competentes

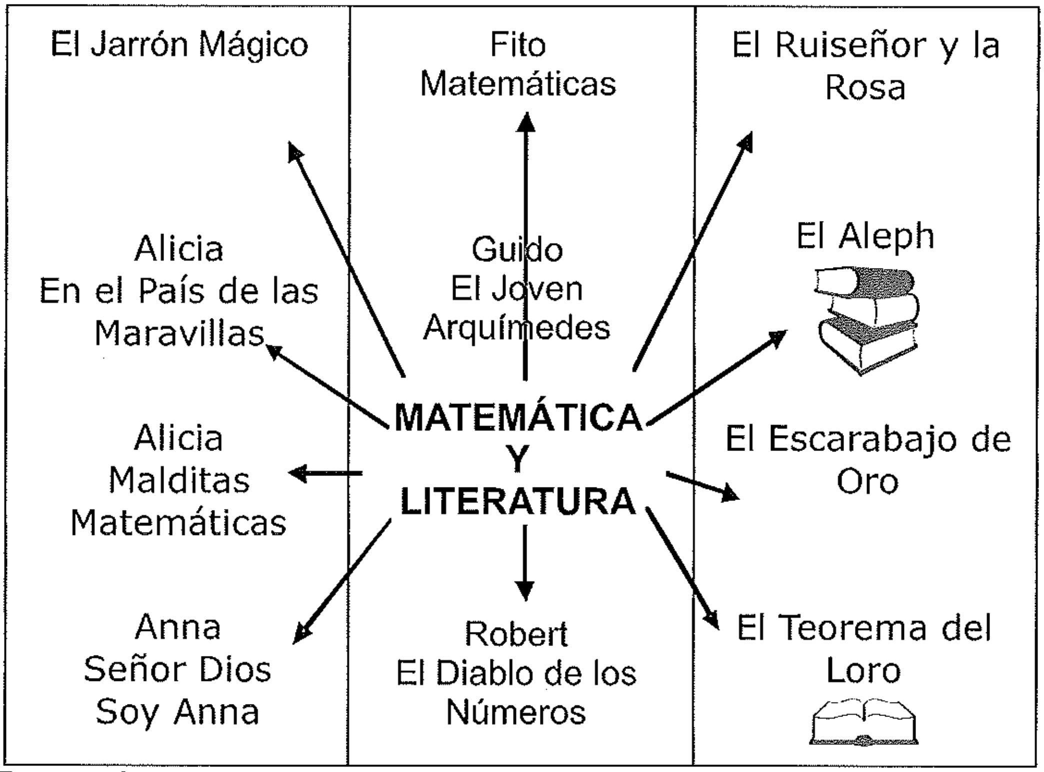
Teorema 2: Leer es un proceso que integra todo.

La lectura intertextual en matemáticas enriquece y fortalece la investigación; el alumno puede instaurar una relación dialogal entre diferentes textos matemáticos y consultar cómo abordan el mismo concepto.

COMPETENCIAS LINGÜÍSTICAS

Gramatical	Textual	Semántica	Pragmática	Literaria	Poética

Y

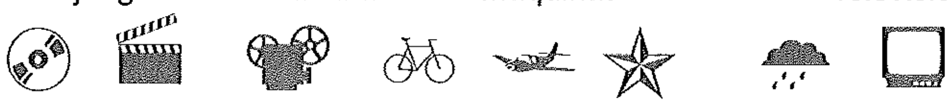


Puntos de encuentro:

- Dibujo y lectura de mapas en geografía
- Paralelo entre la verdad artística y la científica lógica en el tratamiento de conflictos
- Comprensión de fórmulas en física y química
- Manejo de unidades en los diferentes sistemas
- Análisis literario en matemática.

Corolario 1: Todo profesor enseña a leer la realidad.

Video juegos Películas Máquinas Televisión



¿hay aprendizaje en estos espectáculos robóticos y lúdicos?

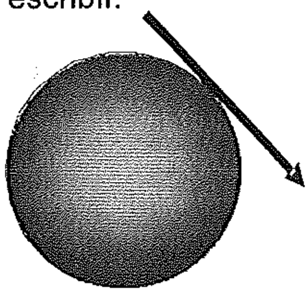
Se propone una lectura integral en la cual el lector separa el todo en sus partes, analiza la función de cada parte y responda qué problema resuelve la cosa analizada.

leer en la naturaleza; fenómenos naturales y climáticos, crecimiento y decrecimiento epidemiológico, observar la dinámica de la construcción.

Corolario 2: Sin lectura no hay comprensión matemática

Si el profesor utiliza los libros de manera creativa, despierta interés por la matemática y hace que la clase tenga más sentido.

- Recursos lingüísticos.
- Juegos de palabras.
- Recursos literarios para leer y escribir.
- Recursos lógicos.
- Relaciones semánticas.



Proposición 1: Guido mejora la comprensión en el aula.

A todos los niños les gusta jugar.
Guido es un niño.
A Guido le gusta jugar.

Proposición 2: Alicia mejora la comprensión en el aula.

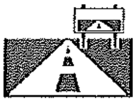
"¿Cómo sabes que estoy loca?. -debes estarlo dijo el gato, si no, no estarías aquí"

A={a, e, i, o, u, q}¿qué hace q?. Lógicas de pertenencia

"siempre es más fácil tomar más que nada" "poner nombre a las cosas y usar esos nombres es más cómodo que describirlas cada vez que hablamos de ellas".

Extensión vs comprensión.

"si no sabes a dónde vas poco importa el camino que tomes".



"No basta llegar a los sitios con los pies; hay que llegar con la cabeza".

Conclusión: "si no puedo medir la altura de la pirámide con instrumento alguno, voy a hacerlo con el intelecto".

Thales de Mileto.

Izquierda vs Derecha: si camina por la pared de la izquierda palpe con la mano izquierda y viceversa.
El Escarabajo de Oro Júpiter.

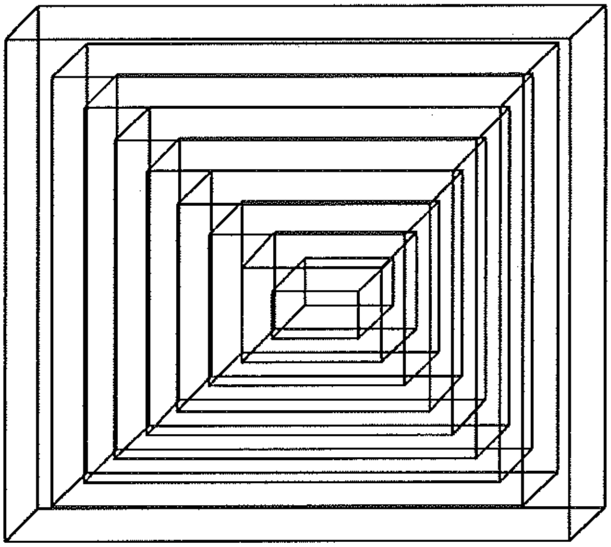
Proposición 3: Fito mejora la comprensión en el aula.

Proposición 4: Anna mejora la comprensión en el aula.

"... uno menos es lo mismo que uno más"
Para Anna un quillón es un número elástico que sirve para un montón de cosas, "los números reflejados son los números no"

Proposición 5: Robert mejora la comprensión en el aula.

"tantas como entre uno y el aburrimiento"



Multiplicar es saltar: 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512...
Sacar un rábano es extraer raíz

Los números de las liebres: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34...
Ene pum es ene factorial (n!=1x2x3x...xn)

Los cocos: 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28...

Corolario 3: En matemáticas se leen más que palabras.

Construcción de significado complementario a partir del texto (palabras, proposiciones, gráficas, objetos y ejemplos), conocimientos previos (memoria y procesos) y profesor.

AB={x/ xA xB}

David Pimm considera dos formas de ampliar el significado matemático: la expansión del término y la reinterpretación en el lenguaje ordinario.

$$\frac{-4.000.000}{2}=\frac{4.000.000}{-2}=-\frac{4.000.000}{2}$$

Leer un texto matemático es una operación compleja que exige el desarrollo de actividades mentales como: generalizar, particularizar, abstraer, concretar, analizar, comparar, clasificar y sintetizar.

Teorema 2: Todo profesor debe enseñar a resolver problemas.

Problema $\Rightarrow$ Lectura $\Rightarrow$ Resolución

Corolario 1: Hay verdades inconclusas en los textos

"x es un número mayor que 7 y menor que 5"

$p \wedge \neg p$ es una contradicción.

¿La edad de Carlitos es un número mayor que 7 y menor que 5. ¿cuántos años tiene Carlitos?

Esta clase de problemas puede fortalecerse con el análisis de antítesis, contradicciones y paradojas.

Un ejemplo aparece en "El Diablo de los Números":

"todos los ingleses son mentirosos. Pero, ¿qué significa que yo diga eso? Al fin y al cabo yo también soy inglés"

"estoy soñando con el rey rojo. También él duerme y sueña conmigo, que estoy soñando con él, quien sueña conmigo... !Cielos! ¡Esto se repite sin cesar!

"Si esta mañana y este encuentro son sueños, cada uno de los dos tiene que pensar que el soñador es él. Tal vez dejemos de soñar, tal vez no" Jorge Luis Borges

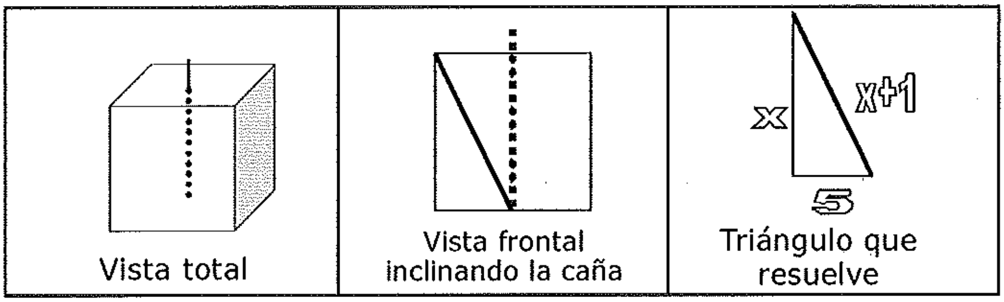
Corolario 2: Todo problema puede ser resuelto.

"Sonia tiene, como ella dice, 2+1 hijos. Dos mellizos y uno suelto. La suma de las edades de sus hijos es de 43 años y la diferencia 5. ¿Qué edad tienen los chicos?"

Denis Guedj

"¿en la mitad de un estanque cuadrado de 10 pies de lado, crece una caña que, desde el fondo, llega a la superficie y la supera en un pie. Si se inclina la caña, ésta llega a tocar justo con la punta en la mitad de un lado del estanque. ¿Qué profundidad tiene el estanque?"

Carlo Andrada Hernaz



Vista total | Vista frontal inclinando la caña | Triángulo que resuelve

Es necesario desarrollar el pensamiento lógico desde la literatura y enfrentar al estudiante a diferentes problemas en todas las áreas.

Corolario 3: La verdad puede ser bella

"La suma de las edades de Juan y Andrea es 25 años y la diferencia es 5 años. ¿Cuántos años tiene cada uno?"

De Bháskara Acharia a su hija Lilavati:

"Amable y querida Lilavati, de dulces ojos como los de la delicada y tierna gacela, dime cuáles son los números que resultan de la multiplicación de 135 por 12".

"La quinta parte de un enjambre de abejas se posa sobre una flor de kadamba, la tercera parte en una flor de silinda, el triple de la diferencia entre estos dos números vuela sobre una flor de krutja, y una abeja vuela indecisa de una flor de pandanus a un jazmín. Dime, hermosa niña, ¿cuál es el número de abejas?

"Un matemático que no tenga algo de poeta jamás será un matemático completo", Karl Weierstrass

LA RAZÓN NO TRIUNFA
SIN LA POESÍA"
José Martí

Corolario 4: Las noticias deben entrar al aula.

- Analizar noticias científicas
- plantear preguntas y problemas
- Resolver

"El número de desplazados en Colombia (Según El Colombiano, julio 17 de 2004) era de 2.040.000. En el 2004 dicha cantidad subió a 2.600.000, calcule la rapidez con que crece el desplazamiento en Colombia.

¿Cuál es el porcentaje de pobreza y de indigencia en Colombia si se sabe que de los 44 millones de habitantes, 29 son pobres y 10 millones son indigentes?

CONSECUENTES

- Los libros nos acercan a la realidad.
- En clase deben leerse cuentos, poemas o novelas.
- Al leer se enseña a interpretar el mundo.
- Los recursos lingüísticos y literarios fortalecen la lectura y la escritura en matemáticas.
- Todo profesor enseña a leer.
- Todo profesor enseña a resolver problemas.
- Los grandes escritores recurren a toda clase de estrategias para seducir a los niños y los maestros debemos continuar la creación.

La Lógica en La Vida

LUIS GONZAGA DE JESÚS RESTREPO RAMÍREZ .

Licenciado en Matemática y Física. Universidad de Antioquia,
Especialista en Enseñanza de las Matemáticas,
Universidad de Antioquia.
Educación Matemática. ELIME. CEID-ADIDA

MEDELLÍN
2010

INTRODUCCIÓN

La solución de problemas de razonamiento lógico ayuda a desarrollar el pensamiento. Es indispensable la necesidad de que nuestros estudiantes aprendan a realizar el trabajo independiente, aprendan a estudiar, aprendan a pensar, pues esto contribuirá a su mejor formación integral. Es indispensable enseñar y ejercitar al alumno para que por sí mismo y mediante el uso correcto del libro de texto, las obras de consulta y de otros materiales, analice, compare, valore, llegue a conclusiones que, por supuesto sean más sólidas y duraderas en su mente y le capaciten para aplicar sus conocimientos. Todas estas capacidades el alumno las adquirirá en la medida en que nosotros, los maestros seamos capaces de desarrollarlas, pero, para eso es preciso realizar un trabajo sistemático, consciente y profundo, de manera que, ellos sientan la necesidad de adquirir por sí mismos los contenidos y realmente puedan hacerlo.

Algunas veces nos encontramos en los libros de textos problemas que no dependan tanto del contenido y por el contrario, dependan más del razonamiento lógico. Pero también, es muy difícil establecer qué tipo de problemas es o no de razonamiento lógico, debido a que para resolver cualquier problema hay que razonar, a pesar de ello existen algunos problemas en los que predomina el razonamiento, siendo el contenido matemático que se necesita muy elemental, en la mayoría de los casos, con un conocimiento mínimo de aritmética, de teoría de los números, de geometría, etc., es suficiente, si razonamos correctamente, para resolver estos problemas.

Para despertar interés en los lectores se proponen problemas sobre temas originales y que despierten la curiosidad, se tratan problemas matemáticos y algunas aplicaciones elementales de la Aritmética, el Álgebra y la Geometría en cuestiones de la vida cotidiana y práctica.

El deseo de acertar adivinanzas, descubrir ingenios o resolver problemas de razonamiento, es propio de personas de todas las edades. Desde la infancia sentimos pasión por los juegos, los rompecabezas, las adivinanzas, lo cual, en ocasiones nos infunde el deseo de dedicarnos de lleno al estudio de las Matemáticas u otras ciencias. Todo esto va desarrollando la capacidad creativa de la persona, su manera lógica de razonar y nos enseña a plantear problemas importantes y dar soluciones a los mismos.

1 BREVE HISTORIA DE LA LÓGICA.

Se puede considerar distintos períodos en la evolución histórica de la Lógica:

1) el pre-aristotélico,
2) el aristotélico,
3) el post-aristotélico,
4) el medieval y escolástico,
5) el moderno de la Reforma y el racionalista, y
6) el más reciente, junto con el período logístico.

1) El prearistotélico. Antes de Aristóteles con los sofistas tienen los tratados acerca de las falacias o engaños, como se puede ver en el libro de Aristóteles titulado "Acerca de la falacia de los sofistas; de donde viene el vocablo "sofisma". Contra éstos tratan Sócrates y Platón, los cuales presentan, un método para hallar los conceptos y las definiciones rectas. El método mayeútico es cultivado por Sócrates, el cual influye en la doctrina de Platón.

La Mayéutica procede del verbo griego "mayeuo", que viene a significar "provocar un parto", pues Sócrates, con oportunas preguntas procuraba que los discípulos manifestaran sus pensamientos internos; de ahí que este método se llame "mayéutico".

2) El Aristotélico: Aristóteles es llamado el fundador de la Lógica Formal. Trata del raciocinio y lo del silogismo. Los libros de Aristóteles que pertenecen a la Lógica son estos cinco: "Las Categorías", que versan acerca de los géneros supremos; el libro titulado "Acerca de la interpretación"; trata sobre la proposición; "La analítica primera", acerca del silogismo; "La analítica posterior", acerca de la argumentación; "Los tópicos", trata del modo de construir argumentos probables, dicho método Aristóteles le llama "Dialéctica"; y por último el libro sobre "las listas sofísticas"; versa sobre las falacias o engaños.

3) El período postaristotélico o de los comentaristas: Los discípulos inmediatos de Aristóteles, Teofrasto y Eudemo, explican la doctrina de su maestro y la completan, según parece con una discusión acerca de la proposición hipotética y disyuntiva. Los posteriores peripatéticos defienden la doctrina misma contra las fútiles objeciones de los estóicos y la completan con comentarios: ellos mismos se llaman "comentaristas". Los principales son: Andrónico Rodo: se encargó de preparar una nueva edición de las obras de Aristóteles; Galeno: encontró una nueva figura del silogismo; Alejandro Afrodisia, principal entre los comentaristas; Profirio escribió la famosísima obra "Introducción a las categorías de Aristóteles", donde trata acerca de las categorías y de los cinco predicables; finalmente Boecio el cual interpretó en latín los libros acerca de las categorías. Sobre la interpretación de Aristóteles y la Isagogé porfiriana, e introdujo en la escolástica una gran parte de la terminología filosófica. Este trató por su cuenta algunos temas acerca de los universales, y dio lugar a las posteriores discusiones de los escolásticos.

4) **Período medieval y escolástico:** En el Siglo XII la lógica aristotélica es conocida en primer lugar por los comentaristas árabes Avicona y Averroes, y después directamente en las versiones latinas. Surge la cuestión muy controvertida acerca de los universales, dando ocasión a la cual algunas palabras de Porfirio comentadas por Boecio en la Isagogé. San Alberto Magno y Santo Tomás enriquecieron casi toda la lógica de Aristóteles con comentarios, e incluso con obras propias. Muy famosa en las escuelas del Medioevo fue la obra de esta época redactada por Pedro Hispano, después Sumo Pontífice Juan XXI, cuyo título fue "Pequeña cantidad de elementos lógicos"; en la obra se compendia la lógica aristotélica, y se proponen reglas, según la costumbre de las escuelas, con técnicas propias, aunque con cierta excesiva acumulación de términos. El fue el primero que trató acerca de la suposición y de la denominación de los términos y de otras propiedades, de las cuales posteriormente los autores ya suelen tratar siempre.

   Los escolásticos posteriores, expusieron esta misma lógica con comentarios, explicaciones, etc. con demasiadas reglas y muchas veces con nimiedades inútiles que añadieron.

5) **Período de la Reforma y racionalística:** En tiempos modernos, muchos autores, principalmente protestantes, comenzaron a menospreciar la filosofía escolástica, y juntamente con ella la lógica aristotélica. Así, v.g., Pedro Ramos. Calviniano, la ataca duramente por lo menos con palabras, aunque de hecho la siga en muchas cosas. El mismo es el autor de la división lógica en tres partes: de la noción, juicio y raciocinio, que todavía se mantiene. Beicon de Verulamio intenta introducir una nueva lógica opuesta a la antigua. Pues él mismo descuida el método deductivo y alaba y propone

principalmente la inducción. Debe reconocerse en cuanto que propone de modo ordenado el método de la inducción (las tablas), aunque no fue él el que la descubrió.

Los racionalistas también menosprecian la lógica aristotélica el padre de ellos, Descartes, "la dialéctica -según él- más destroza el recto pensamiento que lo incrementa". Son cartesianos los autores de la lógica de Port-Royale. Wolf sobresale por su claridad y orden; pero con una claridad demasiado subjetiva y como apriorística; pues de él proceden las nociones de idea clara con una tendencia racionalista-subjetivista.

Kant compuso una lógica meramente formalística, que sólo trata de las formas "a priori" meramente subjetivas; Hegel en cambio trocó la lógica en metafísica.

6) **Período más reciente:** Se cultivan de modo especial casi todas las cuestiones lógicas. Se hacen algunos progresos, v.g., en la cuestión de la inducción y de su método, y la metodología propia de cada ciencia; los modernos dan mucha importancia a las clasificaciones de las ciencias, a la relación mutua de la dependencia, etc. Entre estos sobresale Stuart Mill (+ 1873), el cual por una parte cultivó mucho el método inductivo, y por otra parte en cambio, es tenido como el principal autor del psicologismo. Por el contrario, atacan al psicologismo y Husserl (+ 1938). Y no faltan también ahora los que van en contra de la lógica de Aristóteles. Y por último, hoy se da una gran importancia, tal vez excesiva a la logística o lógica matemática, la cual usa de signos simbólicos, como las matemáticas, para significar las operaciones lógicas con simplicidad y de un modo abstracto. Esta logística la cultivan Bochenski y Rutsell, el cual editó varias obras de este género.

2 LA APLICACIÓN DE LA LÓGICA EN LA VIDA

La meta del ser humano desde que nace hasta que muere es hallar la "felicidad". Este propósito condicionante de vida se alcanzaría si en nuestro diario vivir y en la forma de interactuar con nuestro entorno, con la naturaleza, con nuestro medio ambiente, con nuestra familia, con los amigos y con los vecinos, le aplicamos una buena dosis de lógica.

¿Cuál lógica? La lógica del diario vivir: desde que despiertas en el amanecer, si tienes que madrugar, deberías dejar todo lo que necesitas para ese día organizado desde el día anterior. Que no lo coja el día buscando, alterándose por no hallar lo inencontrable; haciendo combinaciones apresuradas con la ropa que va lucir y que lo desluce por su improvisación e inmediatez.

Porque si te coge el día te sentirás mal, haces sentir mal al jefe que se verá en la obligación de llamarte la atención. Se retrasarán los programas, se perderá tiempo, entre otras cosas. Todo ocurre por no aplicar la lógica de la vida. No debemos convertir nuestro paso por el planeta tierra en un infierno, en un sinsentido individual, en un lastre personal, donde reinan la improvisación y el desorden humano.

Para "vivir" en el paraíso que nos soñamos se requiere el uso de la lógica aplicada al transcurrir de los días. Por ejemplo: si necesitas un permiso, cuando entres a saludar al jefe y percibes que está feliz, alegre y son las primeras horas del día, puedes solicitárselo y ten la seguridad de que no te será negado. Ahora, al contrario, no lo dejes para las últimas horas del día puesto que debe estar cansado y atiborrado de problemas; lo más seguro es que te negará sin mirarte a los ojos.

Por lo que podemos analizar en estas dos situaciones, y entre muchas otras similares que pueden ocurrir en el transcurso del día, para aplicar la lógica debes tener en cuenta un requisito necesario: conocerse a sí mismo y a los demás.

A través del autorreconocimiento de si mismo lograrás entender a los demás, y con la ayuda de las normas de conducta, que llamaríamos normas lógicas del diario vivir, desarrollarías una actitud eficiente y una lógica personal exitosa. Los sicólogos modernos vienen introduciendo el nombre de asertividad. Pero en su esencia natural, es sencilla y llanamente: lógica del diario vivir. A continuación referiré otros casos que nos ilustran esta esencial aptitud personal:

1. **Desenvolvimiento como peatón:** Uso de los símbolos y manejo de la frecuencia distancia y tiempo. De lo contrario serás arrollada e incrementarás la estadística de accidentalidad vial.

2. **Autoestima y código de preservación de la vida:** Deambular a pie, en altas horas de la noche, ebrio, en zonas de la ciudad con "fronteras invisibles"; o conflictos entre delincuencia organizada.

3. Movilización: mezcla de gasolina, alcohol y sustancias sicoactivas al conducir motos o vehículos: te convierten en una estadística más de la accidentalidad vial del país.

4. Proyecto de vida: Intensa y abundante vida social, negación del ser individual; falta de rigor y disciplina para abordar el estudio: hacer parte de la alta deserción escolar y universitaria, que fracasa en el primer semestre de cada lectivo, y, por último,

5. Autonomía personal: Adoptar mis propios juicios, códigos de vida, visiones de la economía y la política; no depender de la inducción de los medios, no pensar lo que quiere la sociedad que se piense y, sobre todo, duda metódica: dudar con elementos, no dudar por dudar (es desconfianza prejuiciosa); puesto que dudar lleva a interrogantes, su resolución a certidumbres y, éstas, a verdades. Construye tus verdades y confróntalas con la verdad de la mayoría. Y el ciclo continúa: reconstruye si estás errado.

En consecuencia, la lógica no permite "esguinces". Ni a izquierda ni a derecha. Es una razón que no acepta justificaciones. Es una proposición que contiene una sola cada de valor: A no permite ni consiente un B. El desarrollo y adquisición de la lógica te permitirá triunfar o fracasar en la vida. Ser exitoso o perecer en el intento.

La lógica del diario vivir viene precedida de algo innato en el ser humano: uso del sentido común que —decía alguien— es el más escaso de los sentidos en el hombre. La lógica es propia del humano, porque le permite pensar para vivir; en cambio los animales viven. Esta gran paradoja le da al hombre dominio y excepcionalidad entre las especies, puesto que al pensar (razonar) crea, planea, usa y saca ventaja o provecho. La acción lógica le da réditos. Y se convierte en un ejercicio preterintencional: cada acto conlleva una intención y un beneficio (positivo o negativo, placentero o amargo, etc.).

Ahora, quiero hacerles esta pregunta: ¿En qué lógica andas? ¿Cuál es la lógica que desarrollas para ser más lógico?

¡Pilas, la lógica es cuestión de vida!

¡Incorpórala a tu diario vivir!

3 LA LÓGICA EN LA VIDA COTIDIANA

Tomado de: http://www.uaq.mx/fcps/tribuna/348/opi02.htm

Sergio Centeno García

Tradicionalmente, se entiende a la Lógica como la disciplina que estudia el pensamiento en cuanto a sus formas mentales (concepto, juicio y raciocinio) con la finalidad de elaborar razonamientos correctos y verdaderos. Y es que existe una gran diferencia entre lo que es correcto y lo que es verdadero, pues en Lógica lo correcto se refiere a la estructura de los razonamientos, a su forma; es decir a la manera en como están construidos, pero no al contenido de verdad o falsedad de los mismos.

En este sentido, hay razonamientos que pueden estar perfectamente bien estructurados o construidos, pero que al analizar su contenido de verdad resultan falsos. Por ejemplo, he aquí un razonamiento correcto pero completamente falso: "Ninguna mujer piensa, María es mujer, por lo tanto, María no piensa". Este silogismo es correcto porque su conclusión "María no piensa" se deriva por necesidad de 2 premisas previamente planteadas, pero es falso porque tiene como punto de partida una premisa falsa: "Ninguna mujer piensa" y por lo tanto, su conclusión también es falsa. Vemos así como a la Lógica Formal, que es una especie de primera parte en el estudio de la Lógica, no se interesa por la verdad o falsedad de los razonamientos, sino sólo de su estructura o forma.

La otra parte de la Lógica, que se encarga de estudiar el contenido de verdad o falsedad de los razonamientos, suele llamarse Lógica Material, Científica o también Dialéctica, porque tiene como finalidad el estudio del método, y también el origen, posibilidad, esencia y formas del conocimiento.

Hablemos por lo pronto de Lógica Formal, que como hemos dicho, se interesa por el razonamiento correcto, que es lo mismo que decir coherente y ordenado. Un razonamiento de esta naturaleza es posible si la conclusión que se obtiene se deriva por necesidad de otros pensamientos previamente planteados llamados premisas. Esto es, todo razonamiento o argumento está estructurado con premisas y conclusión.

¿Qué es una premisa? Es un pensamiento que funciona como punto de partida o sustento para derivar otro al cual llamamos conclusión; y ¿qué es una conclusión? Es un pensamiento derivado por necesidad de otro(s) que llamamos premisa(s).

Para que un razonamiento sea correcto debe existir una conexión tan estrecha entre las premisas que haga necesaria la existencia de la conclusión. Pero, ¿qué se entiende en Lógica por necesario? Esto: lo necesario es aquello que es y ocurre de una manera y no puede ser ni ocurrir de otra.

Por ejemplo, si yo sostengo un objeto pesado y después lo suelto sin que haya ningún obstáculo entre mi mano y el piso es de toda necesidad que caiga hasta el suelo, en condiciones naturales no puede ser de otro modo. Eso es lo necesario, lo que no puede ser de otra manera, aquello que no deja opción para que suceda de otro modo.

Así, un razonamiento incorrecto ocurre cuando no existe un vínculo de necesidad entre su(s) premisa(s) y la conclusión, por ejemplo: "Está nublado y por tanto va a llover", este es un pensamiento ilógico o incorrecto por la sencilla razón de que del hecho de que esté nublado no se deriva por necesidad que tenga que llover, ya que todo el día puede permanecer totalmente nublado y sin embargo no caer una sola gota de lluvia.

En cambio, un razonamiento correcto sería el siguiente: "Todos los hermanos de Juan son varones, Toño es hermano de Juan, por lo tanto, Toño es varón", como es evidente, que Toño siendo hermano de Juan sea varón no podría ser de otra manera, pues la primera premisa ha establecido categóricamente que todos los hermanos de Juan son varones.

4 VIVIR EN LA LÓGICA

Según el P. Leovigildo Salcedo, S.J., en su Tratado de Lógica, expresa:

"La Lógica deriva su origen de la naturaleza misma racional del hombre; pues el hombre está dotado de una facultad natural para alcanzar con sus actos la verdad y para evitar el error; de donde puede también procurar la rectitud con unas reglas determinadas. Y ésta se llama 'Lógica Natural o Vulgar'."

Esta lógica natural acompañada de lo que los sicólogos actualmente denominan Programa Neurolingüística (lenguaje y destino), ayudaría en buena medida a evitar el error, puesto que si queremos asumir la responsabilidad de nuestras vidas debemos empezar por asumir la responsabilidad por lo que sale de nuestra boca.

Todo comienza por la boca, de ella salen palabras que no se las lleva el viento sino que, al contrario, llegan a nuestra mente subconsciente a través de ideas, sistemas de creencias, programas mentales, paradigmas; continuando a través de imágenes y sonidos, es decir, de nuestro pensamiento hasta la mente consciente. Los hijos de estos pensamientos son los sentimientos. Luego, éstos unidos con los sentimientos se convierten en normas de conducta, en actitudes, en comportamientos; y las conductas repetidas se convierten en hábitos; y el conjunto de hábitos estructura el carácter: forjando de esta manera el destino.

Haciendo alusión al premio Nobel de Paz, Octavio Paz, es pertinente tener en cuenta lo siguiente: "cuando las palabras se corrompen y los significados se vuelven inciertos el sentido de nuestros actos, es también inseguro". Lo que deseo decirles es que si por nuestras bocas salen palabras positivas, llenas de entusiasmo, se crearán en nuestra mente subconsciente ideas, sistemas de creencias, programas mentales positivos; llegando a nuestra mente consciente imágenes, sonidos, pensamientos positivos, alegres y transformándose en sentimientos también positivos y en actitudes positivas; naciendo hábitos positivos y formando un carácter alegre y creando un destino positivo.

En consecuencia con lo planteado anteriormente, debemos entender que mi cerebro no funciona con lo que yo quiero, sino con lo que yo le ordeno. Ahora bien, concluyo retomando una conocida sentencia popular: "dime cómo hablas y te diré quién eres".

5 FALACIA O SOFISMA

Una falacia o sofisma es un razonamiento lógicamente incorrecto, aunque psicológicamente pueda ser persuasivo y que nos encontramos frecuentemente en las discusiones diarias y en los debates. Estos se denominan falacias de pertinencia o de relevancia, porque las premisas son irrelevantes para la verdad de la conclusión. Para una persona desprevenida, las premisas parecen ser un soporte suficiente para la conclusión. Esto ocurre porque estas falacias son utilizadas con mucha frecuencia. Vamos a abordar su estudio por dos razones fundamentales.

La primera es para ayudarnos a evitarlas en nuestros razonamientos, e identificarlas cuando sean utilizadas en nuestra contra en los debates.

La segunda razón está, en que entendiendo por qué estos patrones de razonamiento son incorrectos, podemos comprender mejor la naturaleza del razonamiento correcto.

Destacaremos las más importantes y las clasificaremos en dos categorías.

5.1 FALACIAS SUBJETIVISTAS

La virtud fundamental en el razonamiento es la objetividad. Las falacias que se examinarán a continuación conllevan el rechazo de la objetividad en una u otra forma.

5.1.1 Subjetivismo

Se fundamenta en el hecho de considerar que lo que se cree o desea con respecto a una proposición, es suficiente evidencia para ser cierta.

Obedece en su estructura al siguiente esquema:

Yo creo / yo siento que P es verdadera

$\downarrow$

P es verdadera

5.1.2 Apelar a la mayoría

Utilizar el hecho de que un gran número de personas creen que una proposición es verdadera, para ser criterio suficiente de verdad. Obedece en su estructura al siguiente esquema.

La mayoría (de personas, naciones, etc.) creen en P

$\downarrow$

P es verdadera

5.1.3 Apelar a la emoción

Tratar de conseguir que alguien acepte una proposición fundamentado en la emoción que logramos despertar.

5.1.4 Apelar a la fuerza (Argumentum ad Baculum).

Tratar de conseguir que alguien acepte una proposición fundamentado en la amenaza.

5.1.5 Apelar a la autoridad (Argumentum ad Verecundiam)

Utilizar evidencia testimonial para una proposición, cuando las condiciones de credibilidad propias no son satisfechas, o el uso de tal evidencia es inapropiado.

5.1.6 Ad hominem

Utilizar un rasgo negativo del ponente como una evidencia de que su afirmación es falsa o su argumentación es inválida. Obedece en su estructura al siguiente esquema:

X afirma P, pero X es una mala persona

$$\downarrow$$

P es falsa

5.2 FALACIAS DE LA ESTRUCTURA LÓGICA

Analicemos ahora falacias que involucran errores dentro del mismo proceso de razonamiento. El problema en estas argumentaciones no está en las premisas utilizadas, sino, en la relación entre las premisas y la conclusión.

5.2.1 Argumentaciones circulares

Tratar de soportar una proposición con un argumento en el cual la proposición es la premisa. Obedece en su estructura al siguiente esquema:

$$P$$
$$\downarrow$$
$$P$$

5.2.2 Causalidad supuesta (post hoc ergo propter hoc)

Utilizar el hecho de que un evento precedió a otro, como evidencia suficiente para concluir que el primero causó el segundo. Obedece en su estructura al siguiente esquema:

A ocurrió antes que B

$$\downarrow$$

A causó a B

Esta falacia es probablemente la fuente de muchas supersticiones.

5.2.3 Falsa alternativa

Consiste en dejar de considerar todas las posibilidades pertinentes que pueden soportar la tesis, sin ninguna justificación.

5.2.4 Apelar a la ignorancia (argumentum ad ignorantiam)

Utiliza la ausencia de pruebas para sustentar una proposición, como evidencia para afirmar la verdad de la proposición opuesta.

5.2.5 "De ello no se sigue que" (Non sequitur).

Tratar de sustentar una proposición sobre la base de premisas irrelevantes. Esta falacia presenta dos formas típicas, así:

5.2.5.1 Distracción: Tratar de soportar una proposición, argumentando por otra proposición (no equivalente).

5.2.5.2 Testaferro (títere): Tratar de refutar una proposición argumentando contra otra proposición.

TALLER DE FALACIAS

Identificar la falacia (o falacias) incluidas en cada uno de los siguientes argumentos:

1) Los Beatles fueron el mejor grupo de rock de los años 60.

   Ellos vendieron más discos que cualquier otro grupo.

2) "Esta fue una gran película".

   "¿Por qué lo afirma?".

   "Bien, simplemente me fascinó".

3) No me gusta escucharle su posición frente a la participación sindical. ¿Sabe su jefe que usted piensa así?.

4) ¿Cómo puede usted negarse a aceptar que creer en la vida eterna no es una creencia universal? Después de todo, todos creemos en ello.

5) "B' anoche fui conducido a una nave espacial de otro planeta".

   "¿Cómo puedes probarlo?".

   "¿B' como me comprueba que no fue así?.

6) Periodista: "Señor ministro, usted votó afirmativamente a favor de la compra de los helicópteros. ¿Podría usted explicarnos sus razones, específicamente acerca de las críticas hechas sobre la efectividad de los mismos en el control del orden público?"

Ministro: Encantado. El país necesita fortalecer su defensa. Nosotros queremos vivir en paz con las demás naciones del mundo, pero nos engañamos si creemos que podemos hacerlo sin prepararnos para defendernos a nosotros mismos y a nuestros aliados, nuestros derechos y sus intereses. El mundo fuera de aquí es peligroso, y yo sería irresponsable en mis obligaciones con la gente de mi país si los instara a someternos y a llorar".

7) Nadie puede criticar la teoría Sicoanalítica de Freud, a menos que haya sido sicoanalizado, aún así, la oposición a la teoría es originada normalmente por las resistencias inconscientes nacidas del complejo de Edipo, que distorsiona nuestros pensamientos.

8) Mi profesor de lógica dice que es una falacia apelar a la autoridad, pero yo he observado en la clase de hoy que él citó a Aristóteles en respuesta a una objeción que hicimos.

9) La vendedora al cliente: "yo sé que esta es la chaqueta que su esposa desea lucir. A cualquier mujer le encantará. ¿Se la envío a su oficina o la lleva usted mismo?"

10) El estudiante al profesor: "¿cómo pudo usted calificarme con 2.5 en este curso? Con cualquier otro profesor habría obtenido mínimo 3. Debe ser que su escala de calificación es muy alta".

Para cada una de las proposiciones siguientes, elabore una argumentación que introduzca la falacia indicada dentro del paréntesis. Trate de hacer su argumentación lo más convincente.

1) Marta gritó cuando ella dijo que vio un fantasma (falsa alternativa).

2) El país debe adoptar políticas serias que favorezcan la pequeña industria (apelar a la mayoría).

3) Grandes dosis de vitamina C pueden curar el cáncer (causalidad supuesta).

4) Los niños no deben ser castigados (apelar a la autoridad).

5) Viaje al centro de la tierra, es la mejor novela hasta hoy escrita (non sequitar).

6) Muchos crímenes son el resultado de la violencia observada en la T.V. (apelar a la ignorancia).

7) La lógica es un excelente estudio (argumentación circular).

8) Yo aprobaré este curso (subjetivismo).

9) El capitalismo explota la clase trabajadora (apelar a la emoción).

10) Es muy importante mantener buenas relaciones con los Estados Unidos (apelar a la fuerza).

6. LA LÓGICA Y LA INTELIGENCIA.

Afirma R. Feuerstein que casi todos los jóvenes pueden mejorar su inteligencia e incluso llegar a una estructuración general de sus procesos cognitivos y a mejorar su mismo potencial de aprendizaje por medio de un correcto aprendizaje mediado: "excepto en los casos más severos de impedimentos genéticos u orgánicos, el organismo humano está abierto a la modificabilidad en todas las edades y estados del desarrollo".

La inteligencia se puede aprender, por lo tanto se puede enseñar. Como maestros, estamos obligados a enseñar a pensar. El enseñar a pensar es y ha sido una meta educativa noble y constante por siglos.

Según las últimas investigaciones parece que la inteligencia no es innata: lo innato es la capacidad para adquirir esa inteligencia, igual que la capacidad para adquirir el lenguaje. De ahí que tanto la inteligencia, como el lenguaje, hay que aprenderlos a través de la enseñanza.

Esta concepción nos lleva al diseño de programas que permiten de manera sistemática aprender a ser inteligentes. Entre ellos podemos situar al PROYECTO DE INTELIGENCIA "HARVARD" (P.I.H.) que nos enseñan a fundamentar nuestro razonamiento; comprender mejor el lenguaje; expresar adecuadamente nuestros razonamientos; resolver problemas; tomar decisiones y desarrollar el pensamiento creativo.

EL P.I.H. está dividido en 6 series:

1. Los fundamentos del razonamiento: como la observación y clasificaciones, el ordenamiento, la clasificación jerárquica, el descubrimiento de relaciones (analogías) y el razonamiento espacial.
2. La comprensión del lenguaje: como la relación entre palabras, la estructura del lenguaje y leer para entender.
3. El razonamiento verbal: como las aseveraciones y argumentos.
4. La resolución de problemas: como representaciones lineales y tabulares, representación por simulación y puesta en acción, tanteo sistemático, poner en claro los sobreentendidos.
5. La toma de decisiones: como introducción a la toma de decisiones, buscar y evaluar información para reducir incertidumbre, análisis de situaciones en que es difícil tomar decisiones.

6. El pensamiento inventivo: como el diseño y procedimientos como diseños.

Todas las seis series nos ayuda para alcanzar un buen desarrollo intelectual y por ende vivir mejor en la lógica, a su tiempo abordaremos todos los temas pero por ahora nos detendremos en la resolución de problemas y empezaremos por el más elemental que es:

7 RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

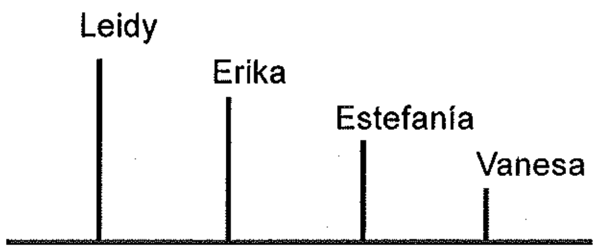
7.1. REPRESENTACIONES LINEALES

La expresión verbal de muchos problemas dificulta enormemente su representación. Una ayuda importante puede ser hacer una REPRESENTACIÓN gráfica que nos haga ver más intuitivamente la estructura del problema.

Cuando el enunciado de un problema te parezca oscuro y te confunda. Trata de visualizar lo que dice, y dibuja una figura que lo represente.

LECCIÓN 1: ENUNCIADOS DIRECTOS

Ejemplos: Érika es más baja que Leidy pero más alta que Estefanía. Estefanía es más baja que Érika, pero más alta que Vanesa. ¿Quién es la más alta y quien le sigue en altura?



Variable involucrada: altura

Jennifer (J), Ruth(R), Carolina(C) y Melisa (M) fueron de compras al mercado. Carolina gastó menos que Ruth pero más que Melisa. Jennifer gastó más que Carolina pero menos que Ruth ¿Quién gastó más y quien gastó menos?

Variable involucrada: gastó

LECCIÓN 2: ENUNCIADOS CON INVERSIÓN DE ORDEN

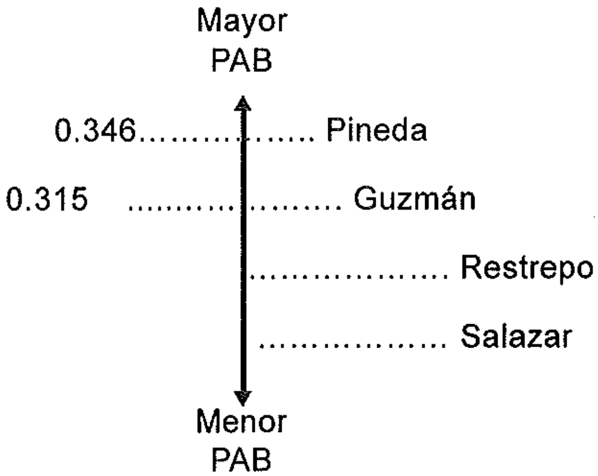
CUANDO TE CUESTE MUCHO RESOLVER UNA PARTE DE UN PROBLEMA, DÉJALO DE LADO Y ENCARA OTRA PARTE DEL PROBLEMA.

Ejemplo: Catalina está aprendiendo idiomas y considera que el ruso(R) es más difícil que el alemán(A). Considera además que el italiano(I) es más fácil que el francés(F) y que el alemán es más difícil que el francés. Según Catalina. ¿Cuál es el idioma más fácil y cuál es el más difícil?

Variable involucrada: dificultad de un idioma

LECCIÓN 3: ENUNCIADOS DIFÍCILES

Ejemplo: Pineda y Restrepo sobrepasan a Salazar en habilidad para el bateo. La destreza como bateador de otro integrante del equipo. Silvio Guzmán, puede juzgarse por el hecho de que su PAB (promedio de bateo) es solamente de 0.315. Mientras que la de Pérez es de 0.346. Con todo, Silvio batea mejor que su compañero de equipo. El sin par pícher Restrepo. ¿Cuál de los cuatro jugadores de beisbol mencionados tiene el peor PAB? ¿Quién le sigue en tan poca ilustre actuación?



Variable involucrada: habilidad para el bateo

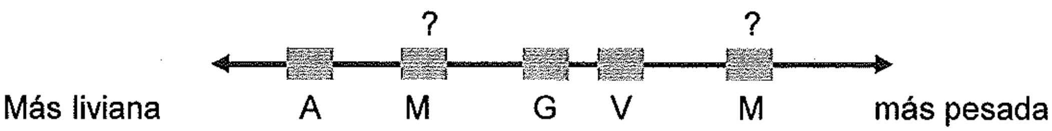
LECCIÓN 4: ENUNCIADOS INDETERMINADOS.

Ejemplo: Gloria y Vanesa pesan más o menos lo mismo. Gloria es más pesada que Anabel, quien es más liviana que Marbel. ¿Cuál de estas posibilidades es la más correcta?

a) Gloria es más liviana que Marbel.

b) Gloria pesa más que Marbel.

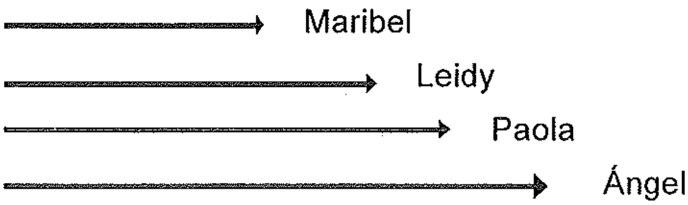
c) Gloria podría pesar más o podría pesar menos que Marbel.



Variable involucrada: peso

LECCIÓN 5: INVENCIÓN DE PROBLEMAS

Ejemplo: inventa un problema que pueda representarse por medio de esta figura. Y cuya respuesta sea: Ángel es el más generoso.



Variable involucrada: generosidad

7.2. REPRESENTACIONES TABULARES

LECCIÓN 6: TABLAS NUMÉRICAS

Ejemplo: tres muchachos, Pablo, Juan y Miguel tienen en total 9 lápices y 6 gomas. O sea un total de 15 útiles de escribir. Pedro tiene 3 gomas y Juan tiene el mismo número de lápices. Juan tiene un útil más que Pedro, que tiene 4. Miguel tiene tantas gomas como Pablo tiene lápices. ¿Cuántos lápices tiene Pedro y cuántos tiene Miguel?

	Pablo	Juan	Miguel
9 lápices	1	3	5
6 gomas	3	2	1
15 útiles	4	5	6

Variables involucradas: útiles y personas

LECCIÓN 7: TABLAS NUMÉRICAS CON CEROS.

Ejemplo: en las casas de María, Juana y Paula, hay un total de 16 animales domésticos, entre los cuales hay 3 perros, doble número de gatos, y además canarios y loros. En la casa de Juana aborrecen a los perros y a los loros. Pero tiene 4 gatos y 2 canarios (con mucho miedo). En la de Paula solo hay un perro y otros 2 animales, Ambos gatos. En la de María tiene 3 canarios y algunos otros animales. ¿Qué otros animales y cuantos de cada clase hay en la casa de María?.

No.	María	Juana	Paula
3 Perros	2	0	1
6 Gatos	0	4	2
Canarios	3	2	0
Loros	2	0	0
16 animales	7	6	3

Variables involucradas: animales y personas

LECCIÓN 8: TABLAS LÓGICAS

Ejemplo: tres niñitas están hablando con una simpática señora que quiere saber cómo se llaman. Una niña tiene puesta una blusa violeta, otra una blusa rosa y la tercera una blusa blanca. La niña con la blusa violeta dice: "nos llamamos blanca, Rosa y Violeta". A continuación, otra niña dice: "yo me llamo blanca. Como usted puede ver, nuestros nombres son los mismos que los colores de nuestras blusas, pero ninguna de nosotras usa blusa de color de nuestros nombres". La señora sonríe y dice: "pero ahora ya sé cómo se llaman".

Señalando con una X la eliminación de una posibilidad y con una O las respuestas verdaderas. Se siguen los siguientes pasos para la resolución de este problema.

1º

	Blanca	Rosa	Violeta
Blusa blanca	X		
Blusa rosa		X	
Blusa violeta			X

2º

	Blanca	Rosa	Violeta
Blusa blanca	X		
Blusa rosa		X	
Blusa violeta	X		X

3º

	Blanca	Rosa	Violeta
Blusa blanca	X		
Blusa rosa	O	X	
Blusa violeta	X		X

4º

	Blanca	Rosa	Violeta
Blusa blanca	X		
Blusa rosa	O	X	X
Blusa violeta	X		X

5º

	Blanca	Rosa	Violeta
Blusa blanca	X		O
Blusa rosa	O	X	X
Blusa violeta	X		X

6º

	Blanca	Rosa	Violeta
Blusa blanca	X	X	O
Blusa rosa	O	X	X
Blusa violeta	X	O	X

Variables involucradas: nombres de niñas, nombres de colores de sus blusas.

7.3 REPRESENTACIONES POR SIMULACIÓN Y PUESTA EN ACCIÓN

LECCIÓN 9: SIMULACIONES

Ejemplo: un tren de 1 km de largo se mueve lentamente a 1 km. por hora para pasar por un túnel en reparación que tiene 1 km. de largo. ¿Cuánto tiempo demorará el tren en salir completamente del túnel?

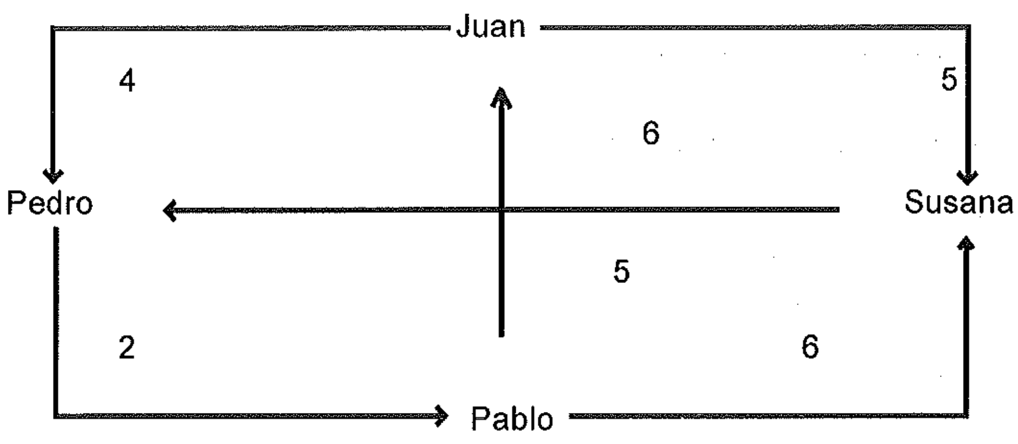
OOOOOOO > Comienza

OOOOOOO> 1 hora después

OOOOOOO> 2 horas después.

LECCIÓN 10: DIAGRAMAS DE FLUJO

Ejemplo: Pedro, Juan, Susana y Pablo fueron juntos al parque de diversiones y pasaron un buen rato con las vueltas que dieron en los juegos y las golosinas que comieron. Como durante ese tiempo se prestaron dinero mutuamente muchas veces, el arreglo de cuentas no les pareció nada fácil. Véanlo ustedes: Pedro le pidió prestados Bs 4 a Juan y Bs 6 a Susana. Susana le prestó Bs 5 a Juan y pidió Bs 6 a Pablo, quien a su vez obtuvo que Pedro le prestara Bs 2. Y Juan le pidió Bs 5 prestados a Pablo. Todas estas deudas pueden ser canceladas de una sola vez. ¿Cómo se efectuaría esa cancelación?



Pedro recibe	10	da	2	debe	8
Pablo recibe	2	da	11	le deben	9
Susana recibe	6	da	11	le deben	5
Juan recibe	10	da	4	debe	6

Pedro debe Bs	8	A Susana le deben	Bs	5
Juan debe Bs	6	A Pablo le deben	Bs	9
deben	14	les deben Bs		14

El problema, así, ya está resuelto: Juan y Pedro dejan en un montón 8 y 6 Bs, respectivamente y Susana y Pablo cogen de ese montón 5 y 9 Bs.

7.4 TANTEO SISTEMÁTICO

PIENSA EN TODAS LAS RESPUESTAS POSIBLES Y LUEGO BUSCA LA CORRECTA.

Sigue estos pasos:

1. Elige algunas respuestas tentativas y pruébalas.
2. Define el conjunto de todas las respuestas tentativas.
3. Haz una lista de todas las respuestas tentativas.
4. Explora la lista en busca de la respuesta correcta.

LECCIÓN 11: RESPUESTAS TENTATIVAS:

Ejemplo: seis muchachos compraron bebidas en una máquina expendedora que solo acepta monedas de 1 bolívar. La máquina vende refrescos a 2 bolívares y merengadas a 4 bolívares. Si los muchachos gastaron un total de 18 bolívares en seis bebidas. ¿Cuántos refrescos y cuantas merengadas compraron?

Para solucionarlo se van buscando tentativamente las posibilidades de combinación que cumplan las condiciones (sumar 6 entre refrescos y merengadas).

Refrescos	Merengadas	Total refrescos	Total costo
0	6	6	24
1	5	6	20
2	4	6	20
3	3	6	18
4	2	6	16
5	1	6	14
6	0	6	12

Solo una de las combinaciones da como resultado el gasto de 18 bolívares.

LECCIÓN 12: BÚSQUEDAS EXHAUSTIVAS

Ejemplo:

Las tres hijas del señor "z"

El señor "z", quien tiene la costumbre de expresarse enigmáticamente, está hablando de sus tres hijas con un amigo. Cuando este le pregunta por las edades de las hijas, el Sr. "z", fiel a su costumbre, le responde: "el producto de las edades es 36 y la suma es el número de la casa de al lado, a la derecha". El amigo, que es muy hábil resolviendo problemas, se pone a pensar intensamente por unos minutos, anota algunos números y sale fuera a mirar el número de la casa de al lado; luego regresa y le dice al Sr. "Z": "pero usted no me ha dado suficiente información" a esto, el sr "Z" responde: "es verdad, así que le diré el resto: mi hija mayor está durmiendo en la planta alta". ¿Cuáles son las edades de cada una de las hijas del Sr. "Z"?

Haciendo una tabla que cubra las condiciones (que el producto de sus edades sea siempre 36).

Edades de las hijas

Menor	Mediana	Mayor	Producto	Suma
1	1	36	36	38
1	2	18	36	21
1	3	12	36	16
1	4	9	36	14
1	6	6	36	13
2	2	9	36	13
2	3	6	36	11
3	3	4	36	10

La razón posible para que el amigo del señor "z" le dijese que no tenía suficiente información tenía que ser que al salir a ver el número de la casa de al lado vio que era el 13. Como hay dos sumas que dan 13, entonces pide más información.

8 CONTEXTO:

Los estudiantes de la institución han presentado resultados aceptables en las Pruebas de Estado en matemáticas, es por eso que se hace indispensable diseñar estrategias metodológicas dentro del área para estimular el aprendizaje de la lógica.

9 OBJETIVOS:

- Interpretar y argumentar sobre problemas de la vida diaria que implique desarrollo lógico.
- Proponer soluciones a situaciones de la vida diaria en forma lógica.

10 METODOLOGÍA

Se entregará un taller que contenga problemas de la vida diaria para que el grupo proponga soluciones lógicas.

Se hará un taller con implementos didácticos diseñados para hacer mas ameno y facilite el aprendizaje de la lógica.

11 RESULTADOS:

Estimular el aprendizaje de las matemáticas a través de la solución de problemas cotidianos utilizando la lógica.

12 CONCLUSIONES:

Es necesario eliminar la matemafobia cambiando la mentalidad y la metodología de los Docentes que enseñan matemáticas en las instituciones del Estado.

BIBLIOGRAFÍA

Pérez Avellaneda, Marino (Coordinador). Evaluación experimental y propuesta practicas de uso. El Proyecto Harvard en las aulas de secundaria. Ciencias de la educación preescolar y especial. General Pardiñas. Madrid. España.1995.

Jaramillo A. Alberto; Mejía L. Clara; Mesa B. Orlando .Modelos de razonamiento Lógico-matemático implementados en situaciones problema, en algunos temas específicos de la Matemática. U. de A. 1999.

DIRECCIONES ELECTRÓNICAS

http://es.wikipedia.org/wiki/Razonamiento_abductivo

20 de septiembre de 2010

http://www.uaq.mx/fcps/tribuna/348/opi02.htm

20 de septiembre de 2010

http://lalogicaenlavida.blogspot.com/2010_07_01_archive.html

20 de septiembre de 2010

http://www.scribd.com/doc/35231051/Demostrar-es-un-problema-o-el-problema-es-demostrar

20 de septiembre de 2010

http://nicolasordonez0.tripod.com/id16.html

20 de septiembre de 2010

Los Medios Audiovisuales en el proceso de Enseñanza - Aprendizaje de las Matemáticas

ÁNGELA MARÍA TANGARIFE BETANCUR

Licenciada en Educación Especial
Tecnológico de Antioquia

MEDELLÍN
2010

LOS MEDIOS AUDIOVISUALES EN EL PROCESO DE ENSEÑANZA - APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

Podemos encontrar una y mil formas de abordar la enseñanza de las matemáticas, gracias al inmenso bagaje de experiencias que la docencia nos haya podido permitir experimentar.

Con la ayuda de los medios audiovisuales, en este caso de la televisión, podemos hacer y darle la importancia y uso adecuado dentro del proceso de enseñanza - aprendizaje de las matemáticas, como una propuesta alternativa para acercarnos y acceder al espacio de nuestros educandos, con el objetivo de que puedan apropiarse de una manera diferente, pero de igual forma asertiva al aprendizaje y práctica del área, donde no se aísla del medio e igualmente, se puede trabajar de manera integrada con las demás áreas del conocimiento.

NUEVA VISIÓN PARA LA ENSEÑANZA - APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

Durante el año 2002 fui nombrada para laborar en la Escuela Municipal Especial Kennedy del barrio Robledo Kennedy.

Al entablar un diálogo con la compañera Falconery, y hacerle referencia sobre mi experiencia en educación, le comento que a pesar de ser educadora especial, estaba dictando el área de matemáticas en los grados 3°, 4° y 5° en una institución particular donde laboraba y que tenía facilidad para organizar y dirigir programas culturales, recreativos, eventos de grados, en fin, tomar un micrófono para mi no era difícil. Entonces exclama a lo lejos a Blanca Zuluaga, otra profe de la escuela, quien era la asesora pedagógica de un programa de televisión regional, "Blanca ya le tengo la que nos va a reemplazar en Telemedellín, en el programa de Titaramácara", yo le pregunté confundida, de qué se trata y ella muy amablemente me cuenta: es un programa infantil donde se comparten temas del currículo académico en las áreas de Matemáticas, Español, Ciencias Naturales y Ciencias Sociales.

Yo sonrío y le respondo: "¿qué voy a ir yo por allá?, ni loca y mas aún si es en directo"

En fin, no había terminado la jornada, cuando llega Blanca, hasta mi salón de clase, y acentúa, si de verdad iría al programa a la semana siguiente;

yo le pedí mayor explicación y con mas detalles, me convenció y acepté con un poco o quizás mucho temor, pero igualmente con la curiosidad y lo que representa salir en la pantalla chica, pues no todos los días se le presenta a una persona tal oportunidad y mas en un programa ya acreditado, con una audiencia no sólo infantil, sino también de padres de familia, docentes o adolescentes que simplemente toman el control del televisor en busca de cualquier programa para ver.

Pide entonces que me contacte con Dora Elena Patiño, la periodista y directora del programa, y así concretar todo lo relacionado con la actividad; es allí donde me comenta sobre el propósito del programa y el por qué del nombre "Titaramácara", me expresa cual era la idea inicial con el seriado, querían referirse a una abuelita a quien le llamaban Titá, la cual debía cuidar a sus nietos y ayudarles a realizar sus tareas escolares y es así como ella empieza a buscar personas que le colaboren con tal responsabilidad. Se cambian los planes y al final la tierna abuelita se convierte en una niña quien es la que pide ayuda.

Llega la tan esperada fecha, el 16 de abril de 2002, ya Blanca me había dado el tema a tratar ese día, "El Valor Posicional (unidades, decenas y centenas)", pasamos al estudio de grabación, todo lo llevaba preparado en mi cabeza, pero de todas formas yo esperaba encontrar un tablero, tizas, marcadores o no sé, cualquier clase de recurso, pues matemáticas en el aire, para mi era imposible, al final me facilitaron unas hojas de papel, el lapicero que yo había llevado, me instalaron el micrófono personal, los niños invitados, unas indicaciones de los camarógrafos, de actuar muy natural, que serían ellos los que se encargarían de ubicarme y enfocar el trabajo que estuviésemos realizando, pero siempre dirigiéndome a los niños que se encontraban con la periodista y conmigo en el estudio de grabación, responder las preguntas de los televidentes quienes eran generalmente niños que llamaban de sus casas para participar en el programa, de la periodista "Tita" (Irene Rengifo), que se pudieran establecer un diálogo muy tranquilo, familiar y que mi intervención sería de unos 20 minutos aproximadamente y listo.

Así fue, la adrenalina a alto nivel, las glándulas sudoríparas segregaron cualquier cantidad de sustancias y el brillo en mi cara; no valieron los polvos traslúcidos que utilizan los presentadores de televisión para que sus rostros no brillen y al final el celular suena con un grato mensaje conocido por los medios, de mi hermano menor Gustavo Alonso, "vamos maja has brillado y no precisamente por tu actuación" y termina con unos cuantos ja-ja. Pero la verdad es que si brillé y por mi actuación, pues al finalizar la emisión se dirigió a mi la directora Dora Elena y muy complacida, dice que me espera la semana próxima, pues le había gustado mi desempeño, la forma de abordar el tema y sobre todo el lenguaje empleado.

El propósito con esa sección, era servir de apoyo pedagógico a los niños y niñas, que por una u otra razón no comprendían determinados temas tratados en el aula, otros reforzaban lo aprendido y algunos que ya habían pasado por esa situación, recordaban la forma en que les habían enseñado, evocaban a sus docentes de matemáticas y narraban sus experiencias, gratas o no, pues siempre se ha visto la Matemática y a los docentes que la dictan como el "coco" dentro de todo el proceso de formación académica y a la vez no se tornara en otra clase magistral, sino por el contario fuera una actividad muy lúdica, con material concreto, de construcción de conceptos, de elaboración de materiales que contribuyeran al mejoramiento de todos los procesos de aprendizaje.

Igualmente, todos los temas del programa estaban de acuerdo con lo establecido por la Secretaria de Educación, pues éste se emitía gracias a un convenio que existía entre el canal Regional Telemedellín y la Secretaría de Educación Municipal.

Para el segundo semestre del mismo año, la compañera Blanca Zuluaga, no continuó como asesora y es así como yo paso a desempeñar tal función y sigo como presentadora del programa en compañía de otros docentes que manejaban las demás áreas, igualmente, contábamos con el apoyo del programa de CRISOL de Comfenalco, en las actividades lúdico-recreativas y con la hora del cuento, y yo entonces me centré en el área de Matemáticas.

Con cada presentación, no se tenía tanta tensión, pero de igual forma, se requería preparar, investigar, indagar sobre estrategias metodológicas, de experiencias de otros compañeros con el fin de enriquecer el programa, aprender de orientación espacial, por ejemplo para el manejo del ábaco, pues cuando estás en el estudio de grabación sentado al lado derecho, la ubicación del presentador, al salir en la pantalla cambia al lado izquierdo.

Recuerdo que durante la década de los setenta se emitían unos programas, tanto radiales como televisivos, donde se dictaban clases de las diferentes áreas, para todas aquellas personas que no podían acceder a las instituciones educativas por su lejanía; y hasta mis profesores de primaria nos llevaban a un pequeño salón al final del pasillo del colegio donde estudiaba, para que viésemos un viejo televisor a blanco y negro una de las tantas clases que se emitían, era algo así como una educación a distancia, pero en la que no se sabía quien era la persona que hablaba o daba tales explicaciones, y en las que los estudiantes de edades mayores recibían unos módulos de trabajo, los complementaban y se fijaban unas fechas para la presentación de evaluaciones o verificación de logros y así alcanzaban a realizar una validación de la básica primaria.

En esas condiciones, no existía ese acercamiento o relación directa entre docente y estudiante, tornándose en una educación carente de afecto o sentimiento, pues no se tenía la oportunidad de un intercambio de palabras, de conocimiento, de debates, de discusión enriquecida por las experiencias de todos los agentes participantes.

Con la realización de programas como "Titaramácara", se da a la educación un aire diferente: salir de las cuatro paredes de nuestras instituciones, donde los estudiantes se encuentran hacinados, sin un centímetro de baldosa para desplazarse. Tienen la oportunidad de crecer intelectualmente. Van a la par con los avances que la ciencia y la tecnología nos presentan. Pueden experimentar y vivenciar otros mágicos mundos y sentir de otra forma el proceso de educación. Donde para muchos de ellos, no es más que la obligación de asistir a una institución por orden de sus padres o en la mayoría de los casos por un alimento que se les provee allí (en el caso de la educación pública) y en el cual no se encuentran un incentivo que los anime a permanecer en las aulas de clase.

Llevar a estos chicos a un canal de televisión, representa lo máximo. En este espacio su familia, los amigos del barrio y otros, los verán donde sólo están los grandes personajes de la farándula, los actores y actrices. Allí ellos serán los protagonistas, ya que hacen parte del cuento, porque se les pregunta y deben responder. Ellos, igualmente, cuestionan y deben resolver sus dudas; centran no sólo su atención dentro del programa y adquieren nuevos aprendizajes, de igual manera se genera la curiosidad de los que están en casa e indagan por la forma en la cual pueden participar en el canal y poder también, por que no, volverse famosos por unos instantes.

Y para el docente, significa experimentar nuevas situaciones, buscar otras estrategias para llegar a sus estudiantes, establecer otros vínculos a través de este medio, mostrar una faceta diferente, dejar a un lado esta tiza enfermiza de cal mal elaborada y en el mejor de los casos si corre con suerte y existe presupuesto en su institución, le proporcionan una antialérgica.

El hacer parte de esta experiencia, te lleva constantemente como docente a replantear tu quehacer, a movilizar tu pensamiento hacia nuevas propuestas pedagógicas alternativas, a transformar con nueva vision y conocimiento realidades y crear nuevos proyectos de vida.

No se espera entonces, que las ayudas audiovisuales en este caso la televisión, transforme el proceso de enseñanza - aprendizaje, pero que si por lo menos cambie o modifique lo primero y la estructura de nuestra metodología, y entonces nos resultará mas fácil construir la verdadera telepedagogía al servicio de la liberación en el niño de mañana. Con esto tampoco se pretende reemplazar al docente como en algún momento se pensó que ocurriría con la implementación y la adaptación de las aulas de sistema en las instituciones educativas, pues de lo que se trata por el contrario, es darle una mayor participación activa y dinámica al docente dentro de esas nuevas propuestas alternativas de enseñanza - aprendizaje con los educandos.

Otra forma, con la cual se puede brindar mayor dinamismo al proceso e igualmente permitirles a los educandos que exploren este espacio de los medios audiovisuales, es el que ellos realicen sus propios videos aficionados, en los que sean los protagonistas y constructores de sus programas, creen sus guiones, establezcan sus estrategias metodológicas en los temas que deseen trasmitir a sus compañeros, ya sean como forma de motivación para el inicio de nuevo tema, con orientación del docente y no sea así siempre éste el encargado de inducir el trabajo.

PROCESO DE EVOLUCIÓN DE LOS MEDIOS AUDIOVISUALES

Antes de la invención de la imprenta, la cultura era exclusivamente verbal. Nos referimos a los filósofos, quienes en los rincones de las plazas griegas, trasmitían a sus discípulos la expresión de sabiduría; pero la cultura de la palabra más que a éste nivel, florecía en el pueblo, en el cual la palabra hablada era un arte usado habitualmente.

Esta cultura de la palabra, nos lleva a imaginar que hoy sea imposible que uno de nosotros pueda llegar a crear y a pulir un poema sin tener un lápiz o más aún una computadora, únicamente con la memoria y el lenguaje, y sin embargo, era un proceso normal hace tan sólo cien años atrás.

Vemos también que en esa época, algunos hombres dejaban la palabra como único medio de expresión y más con el instrumento, la mano y el gesto, lo hacían a través de las herramientas, el tallado en madera, la fundición de los metales, el esculpir la piedra, entre otros.

Se convirtió la escritura entonces, en un perfeccionamiento considerable de la técnica de expresión. Pero solo reservada a una elite o para especialistas. Muy lentamente, fue sustituyendo a la cultura de la palabra, que ha mantenido su supremacía durante mucho tiempo.

La ciencia contemporánea ha permitido sustituir la expresión y el pensamiento a través de la palabra y de la escritura por el pensamiento, por medio de la imagen; en primer lugar, por la imagen fija, y después por la imagen animada.

Así, pues, la imagen es hoy la forma superior de comunicación, en ocasiones es más fácil manejar una cámara fotográfica que cuesta más que un libro, que el mismo libro o el lápiz. El común de los hombres o de las mujeres puede sentarse hoy en el cine y participar en el espectáculo, que sin cansancio, sin aprendizaje técnico, permite impregnarse de los pensamientos, de sentimientos y de modos de vida que son extraños a nosotros.

No se trata en absoluto de ir en contraposición a los descubrimientos técnicos que influencian y modifican nuestro modo de vida, pero todo el progreso tiene ese precio, el cual de una u otra forma se debe asumir, de ahí el saber el cómo y el para qué se utilizan.

Hoy, nuestros niños piensan con imágenes; ya no buscan en sí mismos las resonancias del medio, sino en las imágenes que exteriorizan o traducen.

Las imágenes en general, y la imagen animada en particular, están transformando los procesos mentales de nuestros niños, sólo hay lamentaciones por el hecho de que nuestros niños ya no son capaces de prestar atención a lo que no sea imagen, porque lo traducen en dinamismo gesticulante, porque no tiene tiempo de reflexionar y volver sobres sus propios pensamientos, y porque, de esta forma, pierden su personalidad original para disolverse en una especie de colectivo de imagen.

La imagen debe estar directamente relacionada con la lección y con el libro, para permitir al estudiante que se acerque a la imagen mental, aún sin conocer su significado conceptual. Ya que la imagen es expresiva por si misma, pero el niño, además, la interpreta y se la apropia hasta hacerle expresar sus temores y sus sueños. Ahí se produce el mismo fenómeno que en los dibujos infantiles que el autor cuenta a posteriori dándoles una explicación completamente diferente de la que los ha hecho nacer. Y el hecho de que cada lector o televidente pueda interpretarlos a su manera, dejan siempre la puerta abierta a la aventura.

En primer lugar, ponemos la creación y la expresión personal en el centro de todo nuestro proceso educativo. Con el texto y el dibujo libre, el niño conserva o recupera su personalidad y una personalidad tal vez inquebrantable que no se dejará desviar fácilmente del camino por el pensamiento ajeno.

También con el dibujo, y con el empleo racional de la documentación ilustrada, con la utilización de las diapositivas, del cine y de la televisión, hacemos a nuestros niños actores del mundo que deben afrontar.

Sin embargo, los docentes en la actualidad, hacemos lo que en su época los pueblerinos; ellos atacaban la aparición de los primeros automóviles porque alteraban las costumbres del pueblo. De la misma forma los docentes criticaban las mismas costumbres que hacen que los niños lo vean, lo conozcan todo, pero sólo de una forma superficial, ya que la imagen y el cine solo les han presentado un aspecto exterior, y a veces errado de las cosas, y que ya no tengan el hábito del esfuerzo intelectual y de la concentración porque los mecanismos son accionados desde el exterior y no desde el interior, y que se sustituyan así a nuestro modo de pensamiento íntimo por una especie de humanidad de cultura falsa.

En los intentos por el mejoramiento de la calidad educativa, el docente ha puesto en marcha experimentalmente una pedagogía moderna, que superan los viejos instrumentos y las técnicas anticuadas, intenta sacar el máximo provecho cultural de las innovaciones científicas contemporáneas.

Si se quiere preparar el niño para su papel de hombre en la sociedad del mañana, la educación tiene que tener en cuenta estas transformaciones decisivas e irreversibles.

Las técnicas audiovisuales forman parte de los elementos dominante de esta evolución del medio. A continuación se explicarán dichas técnicas:

- Las imágenes han invadido el mercado con catálogos, libros, carteles y, sobretodo, con revistas y libros ilustrados en los que los cómics de tipo americano sustituyen casi totalmente a las historias para leer y meditar.

- Los medios magnetofónicos sustituyen la lengua escrita por la lengua hablada.

- Y, en la actualidad, la radio, la televisión y los juegos de video sustituyen el conocimiento natural del mundo por un medio obsesivo de difusión nacional e internacional.

Nos guste o no nos guste, estas técnicas existen. No han sido inventadas por los docentes, sino por técnicos, productores, especuladores y estados, que no se han preocupado lo más mínimo por la educación y que ahora nos ponen, por así decirlo, ante el hecho consumado.

Las técnicas audiovisuales han creado un mundo nuevo al que tenemos que adaptarnos.

Las técnicas audiovisuales existentes tienen sólo una influencia relativa en el comportamiento de los individuos y en el manejo de la escuela. No tienen ningún peligro, incluso los comics no habrían producido ninguna revolución y no serían significativos en nosotros y en nuestros niños, sino hubiesen sido reforzados por el cine y, en la actualidad por la televisión.

La escuela no puede ser entonces ajena a estos avances tecnológicos, y debe ir creciendo a la par con los mismos, introyectando en sus metodologías espacios como ayudas en el mejoramiento en localidad educativa y más bien tenemos que estudiar lo que debería y podría hacerse.

La escuela tradicional y las técnicas audiovisuales tienen bastantes posibilidades de coexistir y de complementarse porque están basadas en principios idénticos: la prioridad de la instrucción y de la formación que actúan desde el exterior, sobre individuos a los que se considera incapaces de pensar razonablemente y de actuar por sí mismos, en un permanente clima de pasividad. Es por eso que se debe cambiar esa concepción y abusarse de ello para justificarse, pues bien sabido por todos que el dinamismo de nuestros niños están muy por encima de estos preceptos y si se pretende dar una gira novedosa a las técnicas audiovisuales en la aplicación dentro del proceso de enseñanza-aprendizaje de los niños de nuestra época es inconcebible que se persista en tal apreciación.

Al igual que en todas las disciplinas, se deben buscar soluciones prácticas que permitan la integración de las técnicas audiovisuales en una pedagogía que, por si sola, sabe a donde va y lo que quiere. La adaptación de estas técnicas a una pedagogía anticuada sólo podría ser un enlace irracional que nos llevaría a un fracaso lamentable.

El cine y el video, en el contexto educativo, son poderosos medios para el aprendizaje. Resultados de investigaciones desarrolladas demuestran que dentro de los valores educativos que contienen están los siguientes: el uso de películas y videos apropiados da por resultado un mayor aprendizaje en menos tiempo y una mayor retención de lo aprendido, las películas y los videos instructivos estimulan otras actividades de enseñanza, los niños y los jóvenes cuyo aprendizaje se da a partir del lenguaje de las imágenes en movimiento, están mejor capacitados para aplicar lo que aprendieron, que aquellos que no han tenido dicha preparación, despierta el interés por aprender, motiva la actividad del conocimiento, desarrolla la creatividad y estimula la fantasía, aumenta la actividad psíquica y emocional del estudiante, mejora el proceso atención de los estudiantes, posibilitan procesos de retroalimentación en forma grupal. Se pueden realizar análisis y comparaciones con la realidad de cada uno, de acuerdo con sus propias experiencias, permiten la interactividad en la clase.

Comportamientos del docente, como por ejemplo: la lectura de algún documento impreso, desatención, o abandono de la clase, llevará a los estudiantes a no prestar atención a la información presentada en el video - documento y en consecuencia a no invertir el esfuerzo mental necesario para una interacción cognitiva necesaria con el documento. Es lógico que ocurra, que el estudiante piense que si el docente no le presta la atención conveniente al documento, por qué va a prestárselo él. Sin olvidar que en esos casos se está abandonando la clase al dominio del medio.

Otra variable a considerar, es la relación entre los contenidos que se presenten por el video y los contenidos y actividades requeridas por el docente en los instrumentos de evaluación que utilice para determinar las calificaciones de los estudiantes. No debe de quedar dudas que si el docente "pregunta en el examen" solamente aspectos no aparecidos en los video- documentos, la próxima vez que proyecte un video los estudiantes tenderán a percibirlo como una información mas sin ninguna validez fundamental dentro de su aprendizaje.

Es necesario elaborar buenos materiales impresos de acompañamientos de la proyección del video. Estos pueden incluir: las actividades de extensión que los estudiantes y docentes pueden realizar una vez observado el video - documento, bibliografía para el docente y los estudiantes de profundización del tema, términos técnicos en los que los estudiantes puedan tener algún problema para su comprensión y que a lo mejor deben ser aclarados antes de su proyección en el aula.

Debe existir igualmente, en la utilización de los programas en clase, la relación de evaluación de los contenidos dominados por los alumnos y los presentados por el video, la interacción entre las actividades posteriormente realizadas por el docente a la observación del video y los contenidos presentados por él, y la necesidad de materiales de acompañamiento. El valor que tiene la actitud que el docente mantenga durante la presentación del video.

La televisión, a su manera, hace parte de la vida cotidiana, introduce la magia, entonces, la televisión reduce a la nada las conductas elaboradas por la humanidad a lo largo de varios siglos. Para desplazarse ya no se necesita efectuarse trayectos largos y penosos; ni para encontrar a una personalidad, hacer gestiones, usar recomendaciones, presentarse, esperar, volver, sostener la mirada del otro, discutir con él. La televisión hace todo esto, instantáneamente, "como por encantamiento". El telespectador experimenta entonces el placer propio de la magia, el de la acción a distancia, porque el botón receptor se convierte en el equivalente a una varita mágica. En lo que respecta a los niños, es nuestra función como docentes el sacarlos de esa bruma indecisa en la que la realidad colinda con la ficción, para así poder incorporar esta técnica como una enseñanza - aprendizaje.

La televisión presenta estímulos "audiovisuales", los cuales son más efectivos que los visuales y auditivos por si solos. Ella se impone sobre los otros medios de comunicación por penetrar en el hogar, en la vida diaria y llegar a formar parte de los hábitos de nuestros niños, de igual forma, la televisión puede aportar beneficios a los niños, pero también riesgos y efectos no deseados. Por esto, es bueno tener un control de acceso a la televisión. Teniendo en cuenta algunas observaciones o guías se ayudará a manejar efectivamente la influencia de este medio en el hogar y en la escuela:

Solo permitir programación de calidad y no más de una o dos horas por día. No permitir ver televisión a niños de 2 años de edad o menos.

Cuando el programa es nuevo, es recomendable verlo antes que los niños, para evitar exponerlos a contenidos no deseados y previniendo conflictos con el niño.

Preferir programas que generan interés en otras actividades, como leer, hobbies o vida al aire libre. Con respecto a los deportes, aclarar la importancia de practicarlos en lugar de limitarse a ser un espectador.

Encender el televisor para mirar programas específicos, no "para ver que hay".

Crear el hábito de apagar la televisión cuando termina el programa, para que aprenda a hacer otras cosas.

Cada vez que se pueda, acompañar a los niños a ver programas. Estimular discusiones y actividades a partir de lo visto.

Cuando un programa ofende nuestros valores, hay que hacérselo saber a los niños. Usar un tono sereno y firme, para reducir el conflicto si el programa le gusta al niño.

Evitar terminantemente los programas con violencia.

Cuando se eligen dibujos animados, evitar aquellos que muestren a sus personajes sufrir. Esto es muy común en las grandes películas de dibujos animados, en las que el niño se angustia al identificarse con el personaje.

Hacerles saber que los personajes son desempeñados por actores, no por personajes reales.

Explicarles que los comerciales están dirigidos a vender y despertar deseos, por lo tanto, deben tomarlos con precaución.

Los niños necesitan un tiempo suficiente de juegos activos, para desarrollarse física, mental y socialmente. Muchas horas frente a la televisión no contribuye a esto, ya que quita el tiempo útil para desarrollar estas aptitudes.

APLICABILIDAD DE ALGUNOS CONCEPTOS MATEMÁTICOS

En muchas actividades propias de la educación sobre los medios hacen falta conocimientos y destrezas matemáticas. El desarrollo de actividades matemáticas en el contexto de la educación sobre los medios permite promover también la compresión de los conceptos matemáticos, así como la motivación de los niños para ocuparse de ellos.

Algunos casos de aplicación son:

- Encuestas: en la popularidad de los programas de televisión, periódicos, historietas dibujadas, discos, entre otros, en un grupo concreto; presentación de resultados en gráficos de bloques o diagramas.
- Porcentajes: hacer comparaciones directas; por ejemplo, por porcentaje de espacios destinados a temas en periódicos distintos.
- Tiempo: investigación de la duración de los programas, películas y anuncios; análisis de horarios de televisión y radio; duración de las secciones de los programas; planificación de producciones de video, cine o de grabación de cintas magnetofónicas y cálculo del tiempo de cada sección para ajustar la duración; manipulación o cálculo de pequeñas secciones de tiempo.
- Cálculos numéricos: cambios de longitud focal, velocidad de grabación.
- Medidas: planificación o análisis de composición de páginas en carteles, periódicos, libros, otros; relación entre las medidas de tiempo y las físicas; medidas de distancia de micrófonos o de cámaras de alcance de proyector.

A través de los medios de comunicación pueden tratarse y estudiarse conceptos matemáticos tales como:

- El uso de números, porcentajes, gráficos y diagramas que aparecen en la presentación de las noticias, deportes, anuncios, previsión del tiempo, documentales, otros.
- Empleo de encuestas y cuestionarios para niveles de audiencia.
- Uso de expresiones comparativas para aumentar el entusiasmo o el afecto de persuasión.

- Utilización de diferentes tipos de encuadre, ángulos de cámara, movimientos de cámara, otros.
- Usos de sistemas de puntuación y límites de tiempo en los deportes, juegos y cursos.
- Utilización de efectos especiales para alterar la escala, la perspectiva, las percepciones de tiempo y espacio.
- Costos de producción, espacio dedicado a publicidad.
- Uso de números y fechas para dar sensación de credibilidad, categoría, novedad.

DESARROLLO DE LOS EJES TEMÁTICOS DENTRO DEL PROGRAMA

Desde el inicio del año, se realiza un cronograma de actividades, donde se planean los temas en las diferentes áreas a trabajar durante la emisión de los programas, iniciando con el currículo desde el grado de transición hasta el grado quinto de básica primaria.

La dinámica en general. Para todas las sesiones es la misma; se tiene el tema, se empieza a trabajar, buscando las mejores alternativas para llegar a los televidentes, especialmente a los estudiantes de una forma dinámica, con material concreto, de fácil manejo, al alcance de los niños, si es necesario se dan conceptos generales, se presentan propuestas de enseñanza, si el tema es un poco extenso y no se alcanza a cubrir en su sesión se deja y se continúa en la siguiente emisión.

Al inicio del programa, se presentan los temas a tratar en las diferentes secciones del mismo, se anuncian a los invitados y se invita a todos en general para que realicen sus llamadas y presenten sus inquietudes o sencillamente participen del programa con aportes u opiniones.

A continuación se describirá como se desarrollan algunos de los temas tratados en el programa.

TEMA: VALOR POSICIONAL EN EL SISTEMA ARÁBIGO.

MATERIALES: hojas de papel, marcadores, ábaco abierto.

TIEMPO: 3 secciones de programa.

Se da inicio entonces, definiendo el término Numeración y realizando una reseña histórica de los Sistemas de Numeración que surgieron en las diferentes culturas orientales, hasta llegar al Sistema Arábigo que nosotros empleamos.

Un sistema de numeración es un conjunto de signos o símbolos utilizados para expresar los números. Las primeras formas de notación numérica eran simplemente grupos de líneas rectas, verticales u horizontales, cada una de ellas representando al número 1. Este sistema era engorroso para manejar grandes números. Ya en el año 3400 a.c. en Egipto y en el 3000 a.c. en Mesopotamia se empezó a utilizar un símbolo especial para el número 10. La inclusión de este segundo símbolo hizo posible expresar el número 11 con dos símbolos en vez de 11 símbolos unitarios, y el número 99 con 18 símbolos en vez de 99. Las numeraciones posteriores introdujeron símbolos adicionales para cierto número entre el 1 el 10, generalmente el 4 o el 5, y más símbolos para números mayores de 10.

En la anotación cuneiforme de Babilonia el símbolo utilizado para el 1 era también usado para representar el 60 y sus potencias; el valor de un símbolo venía dado por su posición. Este sistema tenía sentido desde el punto de vista matemático, pues 600=1, 601=60, y 602=3.600.

La numeración jeroglífica egipcia tenía símbolos para el 10, 100, 1.000 y 10.000.

En la Grecia antigua coexistieron dos sistemas paralelos de enumeración. El primero de ellos estaba basado en las iniciales de los nombres de los números: el número 5 se indicaba con la letra p (pi); el 10 con la letra d (delta); el 100 con la letra h (eta); el 1.000 con la letra c (chi) y el 10.000 con la letra m (mu). En el segundo sistema, utilizado por primera vez hacia el tercer siglo a.c., se usaban todas las letras del alfabeto griego más tres letras tomadas del alfabeto fenicio como guarismos.

Las nueve primeras letra del alfabeto griego eran las unidades del 1 al 9, de la novena a la decimoctava eran las decenas del 10 al 90 y las otras nueve letras eran los centenares del 100 al 900. Los millares se indicaban colocando una raya vertical a la izquierda de la correspondiente letra, y las decenas de millar colocando la letra pertinente sobre la letra M. este segundo sistema griego de numeración tenía la ventaja de que números grandes podían ser expresados con un pequeño número de símbolos, pero tenían la desventaja de tener que saberse de memoria un total de 27 símbolos.

El sistema de enumeración romano está basado en símbolos para representar dicho sistema. Tiene el mérito de ser capaz de expresar todos los números del 1 al 1.000.000 utilizando solo 7 símbolos: I para el 1, V para el 5, X para el 10, L para el 50, C para el 100, D para el 500 y M para el 1.000.

Los números romanos se leen de izquierda a derecha. Las letras que representan las cantidades mayores se colocan a la izquierda, a continuación se colocan las letras que representan las siguientes cantidades y así sucesivamente.

Los valores de los símbolos suelen sumarse, excepto cuando una letra se coloca a la izquierda de otra que representa una cantidad mayor, en cuyo caso la primera se resta de la segunda, por ejemplo, LX = 60, XIX = 19 y MMCIII = 2.103. representa 1.000.000 - una pequeña raya horizontal colocada sobre un símbolo multiplica su valor por mil. De esta manera, en teoría, es posible, utilizando un número infinito de rayas, expresar todos los números del 1 al infinito. Sin embargo, en la práctica, se usa solo una raya y casi nunca se utilizan más de dos.

Los números romanos todavía se utilizan en nuestros días, más de 2.000 años después de su aparición, generalmente con fines decorativos. La enumeración romana tiene el inconveniente de no ser adecuada para realizar cálculos escritos con rapidez.

La innovación más importante del sistema arábigo de numeración fue el uso de la notación posicional, en el que los símbolos individuales cambian su valor según su posición en el número escrito.

Solo es posible utilizar la anotación posicional si existe un símbolo para el cero. El guarismo 0 permite distinguir entre 11, 101 y 1.001 sin tener que utilizar símbolos adicionales. Además, todos los números se pueden expresar utilizando solo diez guarismos, del 1 al 9 más el 0. La anotación posicional simplifica todos los tipos de cálculo numérico por escrito.

Se van entonces, haciendo representaciones gráficas de cada uno de los sistemas planteados, cuando se dan llamadas, se hacen preguntas a los niños sobre el tema, por ejemplo, si conocía acerca de la historia que se contó, si ya ha trabajado el tema en clase, qué opinión tiene del tema, como se lo enseñaron, entre otras, se puede dar un número arábigo o en cualquier sistema para que el niño lo identifique, lo lea o lo represente en alguno de los demás sistemas.

Al llegar al sistema Arábigo, se realizan conversiones y equivalencias, primero entre unidades, decenas y centenas, haciendo claridad sobre la definición de cada una de ellas, por ejemplo, las unidades se representan hasta la cantidad de 9, por que al llegar a 10 ya se convierte en una decena, al realizar el conteo ascendente hasta el 99 y llegar a 100 ya se habla de centena o sea 100 unidades o 10 decenas, se juega con estas conversaciones, hasta que el niño comprenda o clarifique el concepto.

Dichas cantidades, son representadas en el ábaco abierto y/o en la casita mágica.

Para la representación en la casita mágica, se construye efectivamente una casa y en su parte interna se realizan las divisiones en casillas horizontales, para ubicar cada una de las cantidades deseadas, diferenciando cada una desde la primera de la derecha que ubica las unidades, siguiendo por la del medio a la izquierda que corresponde a las decenas y la tercera ubicada a la izquierda de la segunda que pertenece a las centenas.

Se pide a los niños que están dentro del estudio de grabación o a los televidentes, que realicen conversaciones de diferentes cantidades y las ubiquen en el ábaco abierto o en la casita mágica.

TEMA: NÚMEROS RACIONALES

MATERIAL: hojas de papel, marcadores, material didáctico (torta fraccionada), regla, tijeras, naranja.

TIEMPO: 3 secciones de programas.

Aunque los conceptos o definiciones, suelen ser en ocasiones un poco complejos en su gramática, se trata de emplear un lenguaje técnico, comprensible para todos.

Damos inicio, contándoles a los televidentes sobre los nombres con los que conocemos a los números racionales, como son los quebrados, los fraccionarios, números que pueden ser mayores o menores que la unidad.

Para trabajar con los números racionales, partimos de la unidad o el todo como base para establecer la referencia comparativa.

Número Racional, es el que se puede expresar como cociente o división de dos números enteros, es decir, en forma de fracción. Los números enteros son racionales, pues se puede expresar como cociente de ellos mismos por la unidad: a = a/1.

Los números racionales no enteros se llaman fraccionarios. El conjunto de todos los números racionales se designan por Q.

Así como en el conjunto Z de los números enteros cada número tiene un siguiente (el siguiente al 7 es al 8, el siguiente al -5 es el -4), no pasa lo mismo con los racionales, pues entre cada dos números racionales existen infinitos números.

Se pueden sumar, restar, multiplicar y dividir (salvo por cero) y el resultado de todas esas operaciones entre dos números racionales es siempre otro numero racional.

Hablamos de los términos de los fraccionarios.

A : numerador ; B : denominador

SUMA DE NÚMEROS RACIONALES

La suma de dos números racionales es otro número racional (véase Fracción: Suma de fracciones). Cumple las siguientes propiedades:

Asociativa: (a + b) + c = a + (b + c)

Conmutativa: a + b = b + a

Elemento neutro: el cero es un número racional que hace de elemento neutro en la suma, a + 0 = a.

Elemento opuesto: el opuesto de un número racional a, es otro número racional -a, a + (-a) = 0.

PRODUCTO DE NÚMEROS RACIONALES

El producto de dos números racionales es otro número racional. Cumple las siguientes propiedades:

Asociativa: (a · b) · c = a · (b · c)

Conmutativa: a · b = b · a

Elemento neutro: el 1 es un número racional que hace de elemento neutro del producto, $a \cdot 1 = a$.

Elemento inverso: el inverso de un número racional $a \neq 0$ es otro número racional que multiplicado por a da 1:

Distributiva respecto a la suma: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Presentamos la torta fraccionada, material didáctico elaborado en madera o el que igualmente, lo podemos construir en cartulina, cartón paja, fommy; teniendo en cuenta las medidas de longitud exactas, para que se pueda mantener la relación de medida entre unidad como el todo y la parte.

Se muestran las figuras o particiones que deseamos representar por ejemplo: ½, especificando, numerador 1 y denominador 2; donde el denominador representa el número de veces en que se divide la unidad, en este caso en 2 partes iguales y el numerador corresponde al número de partes que elijo de esas 2 en la que dividí. Así sucesivamente, se van haciendo representaciones de fracciones y se van comparando con las anteriores, con el fin de poder ir identificando y estableciendo relaciones entre ellas, también podemos ir construyendo de diversas formas con la utilización de varias fracciones mayores que, menores que, fracciones homogéneas, fracciones heterogéneas, equivalentes, complificacion o amplificación y simplificación de fracciones, entre otros conceptos.

Con la ayuda del papel, podemos dibujar circunferencias o utilizar cuadrículas para realizar representaciones de fracciones.

Llevar a los niños a que jueguen a repartirse por ejemplo, una naranja, una tira de dulce, una chocolatina, una torta en iguales proporciones o partes, según la cantidad de compañeros que sean.

- "Ser maestro es un legado histórico. Ser docente es movilizar el pensamiento pedagógico hacia una propuesta educativa alternativa"
- "Tú eres maestro de maestros, porque con tu visión y conocimiento transformas realidades y creas proyectos de vida"
- La ciencia contemporánea ha permitido sustituir la expresión y el pensamiento a través de la palabra y de la escritura por el pensamiento, por medio de la imagen; en primer lugar, por la imagen fija, y después por la imagen animada.

- En los intentos por el mejoramiento de la calidad educativa, el docente ha puesto en marcha experimentalmente una pedagogía moderna, que, superando los viejos instrumentos y las técnicas anticuadas, intenta sacar el máximo provecho cultural de las innovaciones científicas contemporáneas.

- La escuela no puede ser ajena a los avances tecnológicos, y debe ir creciendo a la par con los mismos, introyectando en sus metodologías espacios como ayudas en el mejoramiento en la calidad educativa y más bien que estudiar lo que debería y podría hacerse.

- La utilización de los medios audiovisuales dentro del aula de clase, pueden convertirse en una gran herramienta que contribuirá al mejoramiento de la calidad educativa sin desplazar al docente, siempre y cuando se les dé el manejo adecuado.

- Los alumnos, pueden convertirse en actores activos dentro de su proceso de aprendizaje, con una adecuada orientación en la utilización de los medios audiovisuales.

- Como práctica e innovación educativa, las instituciones, pueden realizar adaptaciones de los medios audiovisuales, para ser las formadoras y creadoras de programas especiales a sus necesidades, con la participación de la comunidad en general.

BIBLIOGRAFÍA.

FREINET, CELESTIN. Las técnicas audiovisuales. Biblioteca de la Escuela Moderna. Barcelona: Laia. 516 p.

BAZALGETTE, CARY. Los medios audiovisuales en la educación primaria. Ministerio de educación y ciencia. Ediciones Morata.

Documento de Internet: valores y ventajas del uso de los medios audiovisuales.

Pedagogía y medios audiovisuales. Universidad autónoma latinoamericana Medellín.

Biblioteca de consulta ENCARTA 2005.

Apuntes Metodológicos de la Enseñanza - Aprendizaje de las Matemáticas

CARLOS HUMBERTO OSPINA NOREÑA

Magister en Didáctica de las Matemáticas. Instituto Pedagógico Latinoamericano y Caribeño IPLAC. La Habana-Cuba.
Integrante de la Mesa Departamental de Matemáticas.
Educación Matemática. ELIME. CEID-ADIDA

MEDELLÍN
2010

APUNTES METODOLÓGICOS EN LA ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

CARLOS HUMBERTO OSPINA NOREÑA
ELIME

En los últimos años se está reconociendo la importancia que tiene una visión adecuada de la naturaleza de las Matemáticas como condicionante de los distintos modelos de instrucción, así como de la actuación de los profesores en clase.

Si se piensa, por ejemplo, que los objetos matemáticos tienen una existencia idealista independiente del sujeto y de la realidad a la que se aplican, e incluso de la cultura, quedará entonces justificada una instrucción basada en la presentación formal de estos objetos, los cuales estarían determinados por sus definiciones y enunciados respectivos. En esta concepción las aplicaciones y los problemas matemáticos, serían un apéndice que se trataría después de que el alumno ya ha aprendido matemática.

La otra concepción parte del supuesto que:

1. Las matemáticas son una construcción humana que surge como consecuencia de la necesidad y curiosidad del hombre por resolver cierta clase de problemas o disposiciones del entorno.
2. En la invención de los objetos matemáticos tiene lugar un proceso de negociación social.
3. Que estos objetos son falibles y sujetos a evolución.

Esta última es la posición de las teorías psicológicas que están apoyadas en un constructivismo social como filosofía de las matemáticas, tal y como lo describe Ernest (1991).

Si la Matemática es una ciencia que participa mucho más de lo que hasta ahora se pensaba del carácter empírico, sobre todo en su invención, que es mucho más interesante que su construcción formal, es necesario que la inmersión en ella se realice teniendo en cuenta mucho más intensamente la experiencia y la manipulación de objetos de los que surge; la formalización rigurosa de las experiencias iniciales corresponde a un estado posterior.

Sobre el tema se pronuncia Miguel de Guzmán ,el matemático observa el mundo real dentro de si mismo y en su entorno, abstrae unas cuantas propiedades que a él le interesa destacar, con ellas construye su mundo mental abstracto que pone en movimiento mediante las leyes básicas de su mente. Guiado por su intuición y sentido estético dirige su construcción escogiendo unas cuantas de las infinitas posibles estructuras que podría crear. Descubre así un complejo mundo mental, que él ha perseguido por su coherencia, armonía, belleza intrínseca, y de repente, o paulatinamente, según los casos, observa que cierta parcela del mundo real es iluminada y plenamente explicada mediante aquella teoría matemática que hasta entonces se había mostrado alejada de la realidad.

Los estudiantes deben ver por si mismos que la axiomatización, la generalización y la abstracción de las matemáticas son necesarias con el fin de comprender los problemas de la naturaleza y la sociedad.

Las matemáticas como quehacer humano, lenguaje simbólico y sistema conceptual.

Con base en el proyecto *Edumat–maestros* liderado por Juan D. Godino consideramos necesario distinguir en las matemáticas al menos cuatro aspectos esenciales mutuamente implicados, que deben ser tenidos en cuenta en la organización de su enseñanza.

a. Las matemáticas constituyen una actividad de resolución de situaciones problemáticas de una cierta índole, socialmente compartida; estas situaciones problemáticas se pueden referir al mundo natural y social o bien pueden ser internas a la propia matemática; como respuesta o solución a estos problemas externos o internos surgen y evolucionan progresivamente los objetos matemáticos (conceptos, procedimientos, teorías,...).
b. Las matemáticas son un lenguaje simbólico en el que se expresan las situaciones-problema y las soluciones encontradas; como todo lenguaje implica unas reglas de uso que hay que conocer y su aprendizaje ocasiona dificultades similares al aprendizaje de otro lenguaje no materno.
c. Las matemáticas constituyen un sistema conceptual, lógicamente organizado y socialmente compartido; la organización lógica de los conceptos, teoremas y propiedades explican también gran número de las dificultades en el aprendizaje.

d. La búsqueda de relaciones entre los diversos objetos matemáticos pone en juego razonamientos inductivos y plausibles, pero la estructuración de los resultados se realiza de acuerdo con la lógica deductiva.

Como ingredientes característicos de la actividad de matematización (Freudenthal, 1991) podemos destacar la representación simbólica, la búsqueda de lo esencial entre los distintos contextos, situaciones, problemas o procedimientos, la generalización, la axiomatización, la validación, etc.

De acuerdo a lo anterior, la tendencia es a hacer énfasis en la transmisión de los procesos de pensamiento propios de las matemáticas, más bien que en la mera transferencia de contenidos.

Cambios Metodológicos.

La adquisición de los procesos típicos del pensamiento matemático:

El proceso de aprendizaje matemático debería tener lugar de una forma semejante a la que el hombre ha seguido en su creación de las ideas matemáticas, de modo parecido al que el matemático activo utiliza al enfrentarse con el problema de matematización de la parcela de la realidad de la que se ocupa.

Se trata de ponernos en contacto con la realidad matematizable que ha dado lugar a los conceptos matemáticos que queremos explorar con nuestros alumnos.

Si conocemos la evolución de las ideas de las que pretendemos ocuparnos sabremos perfectamente el lugar que ocupan y las distintas consecuencias, aplicaciones interesantes que de ellas han podido surgir y la situación reciente de las teorías que de ellas han derivado.

Otra forma de acercamiento puede ser a través del intento directo de una modelización de la realidad en la que el profesor sabe que han de aparecer las estructuras matemáticas en cuestión.

Ubicados con nuestros estudiantes delante de situaciones–problema en las que tuvo lugar la gestación de las ideas con las que queremos ocuparnos, debemos tratar de estimular su búsqueda autónoma, su propio descubrimiento paulatino de estructuras matemáticas sencillas, de problemas interesantes relacionados con tales situaciones que surgen de forma natural.

La búsqueda con guía, sin aniquilar el placer de descubrir, es un objetivo alcanzable en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, así como la detección de técnicas concretas, de estrategias útiles de pensamiento en el campo en cuestión y de su transmisión a los estudiantes.

La teoría así concebida, resulta llena de sentido, plenamente motivada y mucho más fácilmente asimilable. Su aplicación a la resolución de problemas, que en un principio aparecían como objetivos inalcanzables, puede llegar a ser una verdadera fuente de satisfacción y placer intelectual, de asombro ante el poder del pensamiento matemático eficaz y de una fuerte atracción hacia las matemáticas.

El conocimiento de la historia de la matemática y de la biografía de sus creadores más importantes nos hace plenamente conscientes del carácter profundamente histórico, es decir, dependiendo del momento y de las circunstancias sociales, ambientales, prejuicios del momento.... así como de los mutuos y fuertes impactos que la cultura en general, la filosofía, la matemática, la tecnología y las diversas ciencias han ejercido unas sobre otras. La historia puede proporcionar una visión verdaderamente humana de la ciencia y de las matemáticas, de lo cual suele estar también el matemático muy necesitado.

El gusto por el descubrimiento en matemáticas es posible y fuertemente motivador para superar otros aspectos rutinarios necesarios de su aprendizaje, por los que por supuesto hay que pasar. La apreciación de las posibles aplicaciones del pensamiento matemático en las ciencias y en las tecnologías actuales puede llenar de asombro y placer a muchas personas más orientadas hacia la práctica. Otros se sentirán más movidos ante la contemplación de los impactos que la matemática ha ejercido sobre la historia y filosofía del hombre, o ante la biografía de tal o cual matemático famoso.

Es necesario romper, por todos los medios, con la idea preconcebida, y fuertemente arraigada en nuestra sociedad, proveniente con probabilidad de bloqueos iniciales en la niñez de muchos, de que la matemática es necesariamente aburrida, abstrusa, inútil, inhumana y muy difícil.

"Conocer" ó "saber" matemáticas, por parte de una persona, no puede reducirse a identificar las definiciones y propiedades de los objetos matemáticos. Implica además ser capaz de usar el lenguaje y el sistema conceptual matemático en la resolución de problemas.

La actividad realizada con el fin de resolver problemas es uno de los pilares del aprendizaje significativo de las matemáticas. Es fuente de motivación intrínseca hacia la matemática ya que posibilita contextualizar y personalizar los conocimientos; permite, además, atribuir significado a las prácticas de índole matemático realizador, mediante el reconocimiento de una finalidad o intención en las mismas.

En términos de Miguel de Guzmán... la enseñanza a través de la resolución de problemas es actualmente el método más invocado para poner en práctica el principio general de aprendizaje activo. Lo que en el fondo se persigue con ella es transmitir, en lo posible, de una manera sistemática los procesos de pensamiento eficaces en la resolución de verdaderos problemas.

El método de enseñanza por resolución de problemas propone armonizar adecuadamente los dos componentes que lo integran, la componente heurística, es decir, la atención a los procesos de pensamiento y los contenidos específicos del pensamiento matemático.

El método con base en situaciones problemáticas se aplica más efectivamente mediante la formación de pequeños grupos de trabajo; se relacionan entre otras las siguientes ventajas:

- Proporciona la posibilidad de un gran enriquecimiento, al permitirnos percibir las distintas formas de afrontar una misma situación-problema.

- Se puede aplicar el método desde diferentes perspectivas, unas veces en el papel de moderador del grupo, otras en el de observador de su dinámica.

- El grupo proporciona apoyo y estímulo en una labor que de otra manera puede resultar dura, por su complejidad y por la constancia que requiere.

- El trabajo con otros nos da la posibilidad de contrastar los progresos que el método es capaz de producir en uno mismo y en otros.

- El trabajo en grupo proporciona la posibilidad de prepararse mejor para ayudar a nuestros estudiantes permitiendo un mayor conocimiento de las variables que funcionan en diferentes circunstancias y personas.

Elementos para la Programación en el Aula:

a. Descriptores de unidad:

En este punto indicamos las situaciones introductorias que contextualizan los conocimientos pretendidos, el nivel de enseñanza para el cual se propone, los objetivos prioritarios, los contenidos (conceptos, propiedades y procedimientos) que desglosan el contenido indicado en el título de la unidad, los requisitos previos que en cuanto a conocimientos, los alumnos deben satisfacer para el desarrollo de la unidad, el material manipulativo cuando se precisa alguno y además, la reflexión e indagación personal del estudiante.

b. Situaciones, Problemas y Ejercicios.

En este apartado proporcionamos una colección de enunciados de "situaciones problemáticas" en torno de los cuales debería girar la actividad de la clase y el discurso del profesor y de los alumnos. Estas actividades las clasificamos en tres grupos.

1. Situaciones introductorias

2. Situaciones complementarias

3. Ejercicios y aplicaciones

Las diversas situaciones y cuestiones atienden a distintas variables de tarea y niveles de complejidad del contenido pretendido; por tanto pueden ser usadas para tener en cuenta la diversidad de capacidades de los alumnos. Aunque inicialmente todos los alumnos puedan trabajar sobre una misma situación introductoria, las cuestiones más complejas y las situaciones complementarias pueden ser propuestas a los alumnos más aventajados.

Los enunciados de los "ejercicios y aplicaciones" responden a la necesidad de que los alumnos adquieran un cierto dominio de las técnicas introductorias y las apliquen a nuevas situaciones.

c. Análisis de los Contenidos y de la Gestión de la Clase.

La teoría de situaciones didácticas (Brousseau 1986) resalta el papel de las situaciones de acción para que los alumnos doten de sentido a las nociones y procedimientos matemáticos.

De esta forma, luego de cada situación de acción en la que los alumnos han tratado de encontrar y de formular las respuestas pertinentes, es necesario organizar situaciones (o momentos) de comunicación de los resultados y de argumentación o validación de las soluciones propuestas.

De este modo se habrá logrado crear unas condiciones propicias para el momento o situación de institucionalización de los conocimientos pretendidos, con el grado de formalización que el profesor juzgue conveniente según el desarrollo de las situaciones previas y el nivel particular de los alumnos. Además el profesor hará referencia a otros objetos matemáticos ya conocidos y a problemas previamente trabajados; es decir, ayudará al establecimiento de conexiones matemáticas.

APORTES DE LA PROPUESTA:

- *Con respecto al alumno*

La enseñanza por resolución de problemas pone el énfasis en los procesos de pensamiento, en los procesos de aprendizaje y toma los contenidos matemáticos, cuyo valor no se debe en absoluto dejar a un lado, como campo de operaciones privilegiado para la tarea de hacerse con formas de pensamiento eficaces.

Se trata de considerar como lo más importante:

- Que el alumno manipule los objetos matemáticos
- Que active su propia capacidad mental
- Que ejercite su creatividad
- Que reflexione sobre su propio proceso de pensamiento a fin de mejorarlo conscientemente
- Que, de ser posible, haga transferencias de estas actividades a otros aspectos de su trabajo mental

- Que adquiera confianza en sí mismo
- Que se divierta con su propia actividad mental
- Que se prepare así para otros problemas de la ciencia y, posiblemente, de su vida cotidiana
- Que se prepare para los nuevos retos de la tecnología y de la ciencia

A nivel general

- Porque es lo mejor que podemos proporcionar a nuestros jóvenes: capacidad autónoma para resolver sus propios problemas
- Porque el mundo evoluciona muy rápidamente: los procesos efectivos de adaptación a los cambios de nuestra ciencia y de nuestra cultura no se hacen obsoletos
- Porque el trabajo se puede hacer atrayente, divertido, satisfactorio, autorrealizador y creativo.
- Porque muchos de los hábitos que así se consolidan tienen un valor universal, no limitado al mundo de las matemáticas
- Porque es aplicable a todas las edades.

Secuencia de aplicación de la propuesta.

La forma de presentación de un tema matemático basada en el espíritu de la resolución de problemas debería proceder más o menos del siguiente modo:

Propuesta de la situación problema de la que surge el tema (basada en la historia, aplicaciones, modelos, juegos...) — manipulación autónoma por los estudiantes — familiarización con la situación y sus dificultades — elaboración de estrategias posibles — ensayos diversos por los estudiantes — herramientas elaboradas a lo largo de la historia (contenidos motivados) — elección de estrategias — abordaje y resolución de los problemas — recorrido crítico (reflexión sobre el proceso) — afianzamiento formalizado (si conviene) — generalización — nuevos problemas — posibles transferencias de resultados, de métodos, de ideas y otros.

En todo el proceso el eje principal ha de ser la propia actividad dirigida con tino por el profesor, colocando al alumno en situación de participar, sin aniquilar el placer de ir descubriendo por sí mismo lo que los grandes matemáticos han logrado con tanto esfuerzo. Las ventajas del procedimiento bien llevado son claras: actividad contra pasividad, motivación contra aburrimiento, adquisición de procesos válidos contra rígidas rutinas inmotivadas que se pierden en el olvido.

Considero de aporte para el presente trabajo adjuntar uno de los anexos que fueron parte de la tesis de maestría del autor (Ospina C. 2001).

BIBLIOGRAFÍA

Edward y Penney. *Cálculo con geometría analítica.* Pearson Educación. México. 1994

Godino D. Juan. *Investigaciones sobre fundamentos teóricos y metodológicos de la educación matemática.* Universidad de Granada. Octubre de 2003.

Godino D. Juan. *La formación matemática y didáctica de maestros como campo de acción e investigación para la didáctica de las matemáticas.* Proyecto Edumat-maestros. 2003.

Guzmán M. de. *Enseñanza de las ciencias y la matemática.*

Guzmán M. de. *Algunos aspectos insólitos de la actividad matemática.* Revista Investigación y Ciencia. Febrero de 1983.

Ospina, Carlos Humberto. *Tesis de Maestría en didáctica de la matemática.* Cuba. 2001.

ANEXO 1

OPERACIONES A EJECUTAR EN CADA UNA DE LAS ACCIONES EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS

Comprender el problema

Para la comprensión del problema el sujeto tendrá que:

Analizar, a partir de la lectura detallada del problema, separando lo dado de lo buscado, para lograr hallar alguna palabra clave u otro recurso que permita encontrar una adecuada orientación en el contexto de actuación.

Relacionar los elementos previamente analizados para expresar el problema con sus palabras o con un sistema simbólico abreviado o realizando una figura de análisis, construyendo una tabla o elaborando cualquier medio que sirva para modelar el texto. También podrá establecer analogías entre el problema y otros problemas o entre los conceptos y juicios que aparecen en el texto y otros conceptos y juicios incorporados al saber del individuo, o transferir el problema de un contexto a otro.

Para la realización de esta acción el sujeto deberá ejecutar operaciones propias del contexto matemático en el que está enunciado el problema.

Analizar el problema

Para la realización de esta acción el sujeto deberá:

Analizar nuevamente el problema para encontrar relaciones, precisando con exactitud lo dado y lo buscado, interpretando el significado de los elementos dados y buscados, y profundizando en lo relativo al conocimiento necesario para resolver el problema.

Relacionar los elementos dados y los buscados o estos con otros que puedan sustituirlos en el contexto de actuación, realizando inferencias de proposiciones dadas en el problema o conocidas de antemano, establecer relaciones entre los elementos disponibles en la memoria y los elementos del problema o entre la situación planteada y otras semejantes, más generales o particulares.

Sintetizar relacionando lo dado y lo buscado y otros elementos conocidos, para determinar los elementos y relaciones que son esenciales para la solución del problema.

Generalizar las propiedades comunes a casos particulares que constituyen elementos integradores para la solución del problema, mediante la comparación de estos sobre la base de la distinción de las cualidades relevantes y significativas de las que no lo son.

Valorar a través de la evaluación crítica de los pasos dados en pos de la búsqueda de una solución.

Aplicar, toda la información acumulada, así como su experiencia en la determinación de la vía de solución del problema.

Tomar decisiones, al tener que comparar diferentes estrategias y procedimientos para escoger el más adecuado a la tarea a realizar.

Para la realización de esta acción el sujeto deberá ejecutar operaciones propias del contexto matemático en el que está enunciado el problema.

Resolver el problema.

Para la realización de esta acción el sujeto deberá ejecutar las siguientes operaciones:

Sintetizar, al unificar los elementos separados en el análisis del problema para poder escribir la solución del mismo, considerando sólo aquellas propiedades que son necesarias o suficientes para la solución, puede también sintetizar al reconstruir la solución del problema cuando utiliza la estrategia de trabajo hacia atrás.

Aplicar, utilizando los elementos obtenidos en el análisis del problema en la solución del mismo.

Para la realización de esta acción el sujeto deberá ejecutar operaciones propias del contexto matemático en el que está enunciado el problema.

Evaluar la solución del problema.

Para la realización de esta acción el sujeto deberá:

Relacionar la solución hallada con las exigencias planteadas en el texto del problema para determinar si la misma es apropiada.

Analizar la solución planteada, contemplando diferentes variantes para determinar si es posible encontrar otra solución.

Sintetizar el análisis realizado determinando otra solución para el problema.

Valorar críticamente el trabajo realizado, determinando cuál solución es la más racional.

Tomar decisiones, al decidir cuáles son los procedimientos más apropiados para solucionar el problema.

Para la realización de esta acción el sujeto deberá ejecutar operaciones propias del contexto matemático en el que está enunciado el problema.

EQUIPO LÍNEA DE INVESTIGACIÓN MATEMÁTICA EDUCATIVA Y ESCOLAR -ELIME-

Históricamente y desde el año 1993, aproximadamente, el equipo de Matemáticas del CEID, con la coordinación de Carlos Enrique Pino Guerra, fundador del equipo de Matemáticas del CEID-ADIDA (1993-1998) y su cofundador, Jorge Cardeño Espinosa (1993 - 1999), Luis Gonzaga Restrepo Ramírez (2000), Erasmo Puerta Gómez (2001-2003) y, nuevamente, Jorge Cardeño Espinosa (2004 - hasta el presente), se ha mantenido como constante, la preocupación por el mejoramiento de la Educación Matemática que se orienta en las instituciones educativas del departamento de Antioquia y, particularmente en los niveles de Preescolar, Básica, Media y Ciencias Básicas de Educación Superior.

Es así como sistemáticamente, y consistentes con nuestro trabajo pedagógico e investigativo, se han organizado catorce encuentros departamentales de Matemáticas y ahora en el 2010 el I Encuentro Nacional de la Enseñanza de las Matemáticas: "Las Matemáticas en la Vida".

El equipo investigador está además formado desde componentes teóricos y metodológicos de otras disciplinas. Conoce un poco otras teorías que no son propias de su disciplina o área de las Matemáticas. Además son docentes en ejercicio que pertenecen a distintos niveles del sistema educativo, desde el primario hasta el universitario, lo cual permite un campo de acción amplio en la interpretación de los problemas planteados.

Se cuenta con un Equipo Pedagógico consolidado desde comienzos del año 1993, formados en Matemáticas y Física de la Universidad de Antioquia, Universidad de Medellín y Universidad Nacional; otros con especializaciones y algunos aprobaron sus estudios de Maestría, en el exterior.

Igualmente el equipo ha publicado: Lecciones de Matemáticas No. Uno, dos, tres y cuatro. También se han publicado textos de manera individual y diversos artículos en el correo pedagógico del CEID, tratando siempre de aportar a la calidad de la educación y de la enseñanza de las Matemáticas.

9 789588 523033