



Institución  
Universitaria

# PUNTOS NOTABLES Y ESCINTORES DE UN TRIÁNGULO



HERNÁN DARÍO ORTIZ ALZATE

## Puntos notables y escintores de un triángulo

# Puntos notables y escintores de un triángulo

---

Hernán Darío Ortiz Alzate



Institución  
**Universitaria**

*Puntos notables y escintores de un triángulo.*

© Hernán Darío Ortiz Alzate

© Instituto Tecnológico Metropolitano

Hechos todos los depósitos legales

Edición: Noviembre de 2021

ISBN: 978-958-5122-61-1 (PDF)

Autor

Hernán Darío Ortiz Alzate

Comité editorial

Jorge Iván Brand Ortiz, PhD.

Gloria Mercedes Díaz Cabrera, PhD.

Juliana Cardona Quiros, Esp.

Jorge Iván Ríos Rivera, Ms.

Viviana Díaz, Esp.

Equipo editorial

Juliana Cardona Quiros. *Directora editorial*

Viviana Díaz. *Asistente editorial*

Gustavo Otálvaro Ocampo. *Editor de mesa*

María Fernanda Aristizábal Arango. *Correctora de textos*

Hernán Darío Ortiz Alzate. *Diseño y diagramación*

Sello Fondo Editorial ITM

Calle 73 No. 76A 354 / Tel.: (574) 440 5100 ext. 5197-5382

Editado en Medellín, Colombia por el Instituto Tecnológico Metropolitano

catalogo.itm.edu.co - fondoeditorial.itm.edu.co

www.itm.edu.co

---

Ortiz Alzate, Hernán Darío

Puntos notables y escintores de un triángulo / Hernán Darío Ortiz Alzate. – 1 ed.– Medellín:  
Instituto Tecnológico Metropolitano, 2021.

237 p. – (Naturae)

Incluye bibliografía

1. Matemáticas. 2. Triángulo. I. Tít. II. Serie.

Catalogación en la publicación - Biblioteca ITM

---

Este es un Texto de Formación que se inscribe en la gran área de las Ciencias Naturales, en el área de Matemáticas, y en las disciplinas de Matemáticas puras y Matemáticas aplicadas.

Las opiniones expresadas en el presente texto no representan la posición oficial del ITM, por lo tanto, es responsabilidad de los autores quienes son igualmente responsables de las citaciones realizadas y de la originalidad de su obra. En consecuencia, el ITM no será responsable ante terceros por el contenido técnico o ideológico expresado en el texto, ni asume responsabilidad alguna por las infracciones a las normas de propiedad intelectual.

*A mi esposa Lucero  
y a mis hijos Carolina y Joseph*

# Índice general

<b>Prefacio</b>	<b>XIII</b>
<b>Introducción</b>	<b>17</b>
<b>1. Rectas y puntos notables de un triángulo</b>	<b>22</b>
1.1. Rectas notables de un triángulo . . . . .	23
1.2. Concurrencia de las rectas notables de un triángulo y puntos notables .	24
1.2.1. Concurrencia de las mediatrices de los lados de un triángulo y circuncentro . . . . .	24
1.2.2. Concurrencia de las alturas de un triángulo y ortocentro . . . . .	25
1.2.3. Concurrencia de las bisectrices de los ángulos interiores de un triángulo e incentro . . . . .	27
1.2.4. Concurrencia de las medianas de un triángulo y gravicentro . . .	28
1.3. Colinealidad del ortocentro, el gravicentro y el circuncentro . . . . .	30
1.4. Razón métrica en el segmento de Euler . . . . .	32
1.5. Teorema de Ceva y concurrencia de algunas líneas notables del triángulo	34
1.5.1. Concurrencia de las cevianas que contienen las alturas de un triángulo obtusángulo . . . . .	37
1.5.2. Concurrencia de las cevianas que contienen las medianas de un triángulo . . . . .	39
1.5.3. Concurrencia de las cevianas que contienen las bisectrices de un triángulo . . . . .	40
1.6. Ejercicios capítulo 1 . . . . .	43

<b>2. Coordenadas de los puntos notables de un triángulo</b>	<b>47</b>
2.1. Coordenadas de un punto notable respecto de un vértice y un lado de un triángulo . . . . .	48
2.2. Coordenadas de los puntos notables de un triángulo en términos de la longitud de sus lados . . . . .	48
2.2.1. Coordenadas de los vértices de un triángulo en términos de la longitud de sus lados . . . . .	48
2.2.2. Coordenadas del incentro en términos de la longitud de los lados	50
2.2.3. Coordenadas del gravicentro en términos de la longitud de los lados	51
2.2.4. Coordenadas del circuncentro en términos de la longitud de los lados . . . . .	52
2.2.5. Coordenadas del ortocentro en términos de la longitud de los lados	54
2.3. Coordenadas de los puntos notables en términos de las coordenadas cartesianas de los vértices de un triángulo . . . . .	55
2.3.1. Elementos de un triángulo en términos de las coordenadas cartesianas de los vértices . . . . .	55
2.3.2. Coordenadas del incentro en términos de las coordenadas cartesianas de los vértices de un triángulo . . . . .	56
2.3.3. Coordenadas del gravicentro en términos de las coordenadas cartesianas de los vértices de un triángulo . . . . .	57
2.3.4. Coordenadas del circuncentro en términos de las coordenadas cartesianas de los vértices de un triángulo . . . . .	58
2.3.5. Coordenadas del ortocentro en términos de las coordenadas cartesianas de los vértices de un triángulo . . . . .	60
2.4. Distancia entre los puntos notables de un triángulo en términos de la longitud de los lados . . . . .	61
2.4.1. Distancia entre el circuncentro y el ortocentro (longitud del segmento de Euler) en términos de la longitud de los lados . . . . .	61
2.4.2. Distancia entre el gravicentro y el ortocentro en términos de la longitud de los lados . . . . .	62

2.4.3.	Distancia entre el gravicentro y el circuncentro en términos de la longitud de los lados . . . . .	62
2.4.4.	Razón de las distancias entre los puntos notables en términos de la longitud de los lados . . . . .	63
2.5.	Radio de las circunferencias inscrita y circunscrita de un triángulo . .	63
2.5.1.	Radio de la circunferencia inscrita en términos de la longitud de los lados . . . . .	63
2.5.2.	Radio de la circunferencia circunscrita en términos de la longitud de los lados . . . . .	64
2.6.	Ejemplos capítulo 2 . . . . .	68
2.7.	Ejercicios capítulo 2 . . . . .	71
<b>3.</b>	<b>Circunferencia de los nueve puntos</b>	<b>73</b>
3.1.	Circunferencia de los nueve puntos. Definiciones y teoremas básicos . .	74
3.1.1.	Teorema de la circunferencia de los nueve puntos . . . . .	75
3.1.2.	Teorema del centro de la circunferencia de los nueve puntos . . .	77
3.2.	Coordenadas del centro de la circunferencia de los nueve puntos . . . .	78
3.2.1.	Coordenadas del centro de la circunferencia de los nueve puntos en términos de la longitud de los lados de un triángulo . . . . .	78
3.2.2.	Coordenadas del centro de la circunferencia de los nueve puntos en términos de las coordenadas de los vértices de un triángulo .	78
3.3.	Radio de la circunferencia de los nueve puntos en términos de la longitud de los lados de un triángulo . . . . .	79
3.4.	Ejemplos capítulo 3 . . . . .	81
3.5.	Ejercicios capítulo 3 . . . . .	86
<b>4.</b>	<b>Puntos de Nagel y de Spieker</b>	<b>88</b>
4.1.	Determinación del punto de Nagel . . . . .	89



4.2.	Relación proporcional de las distancias entre los puntos de Nagel, el gravicentro y el incentro . . . . .	90
4.2.1.	Relación de homotecia entre las circunferencias inscrita y exinscrita respecto de un lado de un triángulo . . . . .	90
4.2.2.	Teorema del punto medio entre los puntos de tangencia de las circunferencias inscrita y exinscrita respecto de un lado de un triángulo . . . . .	91
4.2.3.	Teorema del punto medio de un segmento de Nagel . . . . .	92
4.2.4.	Colinealidad de los puntos incentro, gravicentro y de Nagel y su relación métrica . . . . .	94
4.2.5.	Relación proporcional entre las coordenadas cartesianas de los puntos incentro, gravicentro y de Nagel . . . . .	96
4.3.	Coordenadas del punto de Nagel . . . . .	96
4.3.1.	Coordenadas del punto de Nagel en términos de la longitud de los lados . . . . .	96
4.3.2.	Coordenadas del punto de Nagel en términos de las coordenadas cartesianas de los vértices de un triángulo . . . . .	97
4.4.	Determinación del punto de Spieker . . . . .	98
4.5.	Teorema del punto de Spieker como punto medio entre el incentro y el punto de Nagel . . . . .	99
4.6.	Coordenadas del punto de Spieker . . . . .	100
4.6.1.	Coordenadas del punto de Spieker en términos de la longitud de los lados de un triángulo . . . . .	100
4.6.2.	Coordenadas del punto de Spieker en términos de las coordenadas cartesianas de los vértices de un triángulo . . . . .	101
4.7.	Ejemplos capítulo 4 . . . . .	103
4.8.	Ejercicios capítulo 4 . . . . .	109
<b>5.</b>	<b>Escintores de un triángulo</b>	<b>112</b>
5.1.	Escintor de un triángulo y su construcción sintética . . . . .	113

5.1.1.	Antecedentes . . . . .	113
5.1.2.	Definición de escintor y clasificación . . . . .	114
5.1.3.	Construcción sintética de un escintor general (procedimiento y justificación) . . . . .	115
5.1.4.	Construcción sintética de una escintriz general (procedimiento y justificación) . . . . .	116
5.2.	Teoremas sobre escintores de un triángulo . . . . .	123
5.2.1.	Teorema del segmento de Nagel como vescintor . . . . .	123
5.2.2.	Teorema general de los escintores de un triángulo . . . . .	124
5.2.3.	Teorema general de los vescintores de un triángulo . . . . .	126
5.2.4.	Teorema del segmento de Spieker como mescintor de un triángulo . . . . .	127
5.2.5.	Teorema del escintor incentral como escintriz . . . . .	128
5.3.	Ejercicios capítulo 5 . . . . .	130
<b>6.</b>	<b>Coordenadas de los puntos extremos de los escintores de un triángulo</b>	<b>131</b>
6.1.	Coordenadas de los puntos extremos de un escintor general de un triángulo	132
6.1.1.	Coordenadas de los puntos extremos de un escintor de un triángulo en términos de la distancia desde uno de ellos a un vértice de referencia y la longitud de los lados . . . . .	132
6.1.2.	Coordenadas de los puntos extremos de los escintores de un triángulo en términos de la distancia desde uno de ellos a un vértice de referencia y las coordenadas cartesianas de los vértices . . . . .	137
6.2.	Coordenadas de los puntos extremos de los vescintores de un triángulo . . . . .	142
6.2.1.	Coordenadas de los puntos extremos de los vescintores de un triángulo en términos de la longitud de los lados . . . . .	143
6.2.2.	Coordenadas de los puntos extremos de los vescintores en términos de las coordenadas cartesianas de los vértices de un triángulo . . . . .	145
6.3.	Coordenadas de los puntos extremos de los mescintores de un triángulo . . . . .	147

6.3.1.	Coordenadas de los puntos extremos de los mescintores en términos de la longitud de los lados . . . . .	148
6.3.2.	Coordenadas de los puntos extremos de los mescintores en términos de las coordenadas cartesianas de los vértices de un triángulo . . . . .	155
6.4.	Ejemplos capítulo 6 . . . . .	171
6.5.	Ejercicios capítulo 6 . . . . .	174
<b>7.</b>	<b>Coordenadas de los puntos extremos de las escintrices de un triángulo</b>	<b>177</b>
7.1.	Coordenadas de los puntos extremos de las escintrices de un triángulo en términos de la longitud de los lados . . . . .	178
7.1.1.	Coordenadas de los puntos extremos de las escintrices en ángulo $C$ , $\overline{H_1D_1}$ , en términos de la longitud de los lados . . . . .	179
7.1.2.	Análisis de existencia de las escintrices en ángulo $C$ , $\overline{H_1D_1}$ . . . . .	180
7.1.3.	Coordenadas de los puntos extremos de las escintrices en ángulo $A$ , $\overline{H_2D_2}$ , en términos de la longitud de los lados . . . . .	183
7.1.4.	Análisis de existencia de las escintrices en ángulo $A$ , $\overline{H_2D_2}$ . . . . .	185
7.1.5.	Coordenadas de los puntos extremos de las escintrices en ángulo $B$ , $\overline{H_3D_3}$ , en términos de la longitud de los lados . . . . .	188
7.1.6.	Análisis de existencia de las escintrices en ángulo $B$ , $\overline{H_3D_3}$ . . . . .	190
7.2.	Coordenadas de los puntos extremos de las escintrices en términos de las coordenadas cartesianas de los vértices de un triángulo . . . . .	193
7.2.1.	Coordenadas de los puntos extremos de las escintrices en ángulo $C$ , $\overline{H_1D_1}$ , en términos de las coordenadas cartesianas de los vértices de un triángulo . . . . .	194
7.2.2.	Coordenadas de los puntos extremos de las escintrices en ángulo $A$ , $\overline{H_2D_2}$ , en términos de las coordenadas cartesianas de los vértices de un triángulo . . . . .	197
7.2.3.	Coordenadas de los puntos extremos de las escintrices en ángulo $B$ , $\overline{H_3D_3}$ , en términos de las coordenadas cartesianas de los vértices de un triángulo . . . . .	200

7.3. Cantidad de escintrices existentes en un triángulo de acuerdo con la longitud de los lados . . . . .	202
7.4. Análisis de la existencia de las escintrices de un triángulo según otros autores . . . . .	206
7.5. Ejemplos capítulo 7 . . . . .	212
7.6. Ejercicios capítulo 7 . . . . .	216
<b>Índice de figuras</b>	<b>218</b>
<b>Índice de tablas</b>	<b>225</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>227</b>
<b>Bibliografía recomendada</b>	<b>231</b>
<b>Glosario</b>	<b>232</b>

## Prefacio

Una de las motivaciones que llevaron al tratamiento de la temática del texto surge de encontrar una escasa conexión entre lo abordado sobre los puntos notables de un triángulo como parte de la geometría sintética, en la básica secundaria, y su desarrollo posterior como parte de la geometría analítica en la educación media, situación que se hace evidente en los textos escolares habituales y cuya problemática geométrica es expuesta por Gascón (2002, p. 21) quien defiende la «tesis de la continuidad entre las geometrías sintética y analítica». Adicional a lo anterior, se encuentra el hecho que los textos escolares solo hacen mención de los puntos notables gravicentro, incentro, circuncentro y ortocentro, y con ello deja de tratarse lo que tiene que ver con otros puntos notables, como son los puntos de Nagel, de Spieker, de Feuerbach y el centro de la circunferencia de los nueve puntos, esenciales para el desarrollo de la temática abordada en este texto.

Por otro lado, se tiene como fuente de motivación especial el hecho de que el concepto de *escintor* de un triángulo no se desarrolla en los textos guía usados por los docentes escolares, los cuales, como plantean Abrate, R. S.; Delgado, G. I.; Pochulu, M. D. (2006), se convierten, sin lugar a duda, en el «vehículo que legitima los contenidos prescritos y en una de las principales fuentes de actividades y tareas». Concepto de *escintor* sobre el cual es necesario indicar que lo relacionado con su clasificación como *vescintor*, *mescintor* y *escintriz* (términos acuñados por Therán Palacio, E. y Falcón Dorado, F., 2006), se registra en ámbitos internacionales con los términos *splitter*, *cleaver* y *equalizer*,<sup>1</sup> respectivamente.

---

<sup>1</sup> Los conceptos de *splitter* y *cleaver* se pueden rastrear en la literatura con Avishalom (1963). El concepto de *equalizer* se puede rastrear en la literatura con el problema propuesto por Podkolzin (1978), citado por Vershik (1994), si bien el término se registra con Berzsenyi (1997).

En cuanto al aporte teórico de lo desarrollado en la presente obra se halla la obtención de las fórmulas que permiten determinar la ubicación de algunos de los puntos notables de un triángulo y de los puntos extremos de los escintores de este, cuando se conozcan la longitud de los lados o las coordenadas de sus vértices en un sistema cartesiano, dando continuidad a lo ya expuesto y publicado por el autor (Ortiz Alzate, 2010, 2013a,b, 2016, 2018).

Es de resaltar que la facilidad que brindan los procesadores geométricos para hacer construcciones dinámicas, esto es, «dibujar figuras en función de sus relaciones geométricas y no de su apariencia» (García Mangas, 2011, p. 9), permite hacer investigación en geometría, dado que el uso de sus potentes herramientas de visualización ofrece la posibilidad de hacer conjeturas sobre ciertas propiedades de los objetos geométricos, las cuales habrán de ser validadas con posterioridad.<sup>2</sup> Fue así como, a partir de construcciones geométricas dinámicas «que permiten unir el conocimiento empírico y teórico» (Kondratieva, 2013, p. 51), se pudo constatar la relación entre algunos de los escintores de un triángulo con puntos notables de este y, luego de considerar relaciones geométricas y trigonométricas intrafigurales, determinar las fórmulas que dan cuenta de las coordenadas de sus puntos extremos,<sup>3</sup> permitiendo con ello establecer las condiciones de su existencia y sus propiedades.

El contenido teórico expuesto en el texto va dirigido en primera instancia a docentes de matemáticas de los niveles de la educación básica y media, estudiantes de licenciatura en matemáticas y docentes de matemáticas básicas en la educación superior quienes, a partir de su lectura acuciosa, y una vez vislumbrada la opción de ampliar el margen

---

<sup>2</sup> «La actividad de experimentación con los objetos de la geometría dinámica es una actividad productiva de relaciones entre dos polos [objetos perceptibles y objetos teóricos]. La experimentación implica no solamente una manipulación perceptiva de los objetos, sino una postura teórica que busca explicar y predecir el comportamiento de los mismos. La actividad de experimentación implica enunciar conjeturas y verificarlas experimentalmente. Las conjeturas que sean validadas se convertirán en leyes teóricas que permitirán guiar y controlar la percepción» (Acosta Gempeler, M. E.; Fiallo Leal, J. E, 2017, p. 21).

<sup>3</sup> Para la validación de las fórmulas desarrolladas en el presente texto se hizo uso del procesador geométrico GeoGebra.

de aplicación de los conceptos que normalmente se desarrollan en la geometría escolar, tendrán la posibilidad de hacer una transposición didáctica de este ajustándolo a los niveles de complejidad adecuados para cada uno de los grados del sistema educativo.

Como una primera aproximación para el tratamiento del contenido expuesto en el texto, en los distintos niveles del sistema educativo, se tiene que en la educación básica primaria podría introducirse el trazo de los segmentos que bisecan el perímetro de un triángulo cuyas medidas de sus lados sean números enteros, donde, en una primera actividad, se podría partir, para los trazos, desde cada uno de los vértices (vescintores) y con ello mostrar la concurrencia en un punto, el punto de Nagel. En una segunda actividad se podría partir para los trazos desde los puntos medios de los lados (mescintores) y con ello mostrar también la concurrencia en un punto, el punto de Spieker.

En la básica secundaria podría llevarse a cabo la construcción sintética de los segmentos que bisecan el perímetro de cualquier triángulo (escintores). Adicionalmente, podrían tratarse las razones métricas entre el gravicentro, el incentro, el punto de Nagel y el punto de Spieker de un triángulo y hacer uso de las fórmulas para establecer la ubicación de los puntos notables en términos de la longitud de sus lados.

En la educación media podría llevarse a cabo la construcción sintética de los segmentos que bisecan tanto el perímetro como el área de un triángulo (escintrices) con relación a uno de sus ángulos y hacer uso de las fórmulas para establecer la ubicación de los puntos extremos de los escintores en términos de la longitud de sus lados. Asimismo, se podría abordar el proceso analítico para determinar las fórmulas algebraicas que permiten hallar las coordenadas de los puntos notables en términos de los lados del triángulo y de las coordenadas cartesianas de sus vértices.

En la educación superior se podría abordar el proceso analítico para determinar las fórmulas algebraicas que permiten hallar las coordenadas de los extremos de las escintrices en términos de la longitud de los lados del triángulo y de las coordenadas cartesianas de sus vértices.

Por otro lado, el contenido del texto podría servir de referencia para investigadores matemáticos interesados en profundizar en temas afines a los desarrollados, y como fuente de consulta para los amantes de las matemáticas que tengan curiosidad por ampliar sus conocimientos al respecto. Se espera que este texto sea de gran utilidad para ampliar el horizonte de estudio de los puntos notables de un triángulo y sirva de motivación para la inclusión de la temática de escintores como parte del contenido de las geometrías sintética y analítica, en el currículo de las matemáticas escolares.

Hernán Darío Ortiz Alzate



## Introducción

En el desarrollo de la geometría se acostumbra determinar la ubicación de los puntos notables de un triángulo por métodos sintéticos, analíticos o dinámicos. Los métodos sintéticos corresponden a procedimientos constructivos, con regla y compás, sin referencia a un sistema de coordenadas, los cuales conllevan la inexactitud propia de los instrumentos y la imprecisión en la manipulación de estos por parte del dibujante, siendo métodos netamente intuitivos y visuales. Entre las técnicas distintivas para resolver situaciones en geometría sintética Álvarez (2014) señala: los lugares geométricos, enriquecer la figura, el uso de la figura de análisis, el patrón de análisis-síntesis, el método reductivo, el método de las transformaciones y la razón (homotecia).

Por su parte, los métodos analíticos arrojan datos exactos, con referencia a un sistema de coordenadas. Estos métodos requieren de la referencia de las coordenadas y ubicación en el plano cartesiano de los vértices de un triángulo, y la posterior determinación de parámetros como puntos medios, pendientes, ecuaciones de rectas y puntos de intersección, elementos claves para establecer la ubicación de los puntos notables, todo haciendo uso de fórmulas y procedimientos de la geometría analítica (De Oteyza, E.; Lam, E.; Hernández, C.; Carrillo, A.; Ramírez, A., 2001, 2011; Vásquez, 2002). Dado que son netamente abstractos, estos requieren de gran desempeño matemático y cálculos diversos, en los cuales se acostumbra el uso de ayudas visuales. En los métodos analíticos difícilmente se parte de conocer las longitudes de los lados de un triángulo. Entre las técnicas distintivas de la geometría analítica Álvarez (2014) señala: asociar un sistema de coordenadas a una situación geométrica dada, la determinación del sistema de ecuaciones, las transformaciones algebraicas, la modelización algebraica con parámetros y el estudio analítico de casos, y el patrón de análisis-síntesis.

En cuanto a los métodos dinámicos puede decirse que son los más versátiles porque conjugan los dos anteriores y permiten una excelente visualización a partir de la manipulación de *software* creado para tal fin. Con ellos es posible determinar con exactitud la ubicación de los puntos notables, pero se requiere de acceso a un ordenador y pericia en el manejo del *software*. Entre las técnicas y tecnologías propias de la geometría dinámica Álvarez (2014), citando a Acosta (2005, p. 138), señala: el arrastre de exploración, el arrastre de verificación, las transformaciones y resoluciones en símbolos, la resolución y graficación en tiempo real.

En consideración con las posibilidades brindadas por los métodos descritos previamente, el presente texto pretende divulgar las fórmulas algebraicas directas que permiten determinar la ubicación de los puntos notables de un triángulo y los puntos extremos de los escintores, haciendo uso de cálculos exactos y sin requerir de construcciones geométricas elaboradas, es así que se plantean como objetivos:

- Exponer las fórmulas algebraicas directas que permitan determinar la ubicación de los puntos notables de un triángulo en términos de la longitud de los lados y de las coordenadas cartesianas de sus vértices.
- Mostrar las propiedades de los escintores y su relación con algunos de los puntos notables de un triángulo.
- Dar a conocer las fórmulas algebraicas directas que permitan determinar la ubicación de los puntos extremos de los escintores de un triángulo en términos de la longitud de los lados y de las coordenadas cartesianas de sus vértices.

Para el abordaje del contenido expuesto en el texto se precisa que el lector cuente con conocimientos básicos sobre la geometría del triángulo, métodos de demostración, relaciones de proporcionalidad y fundamentos de geometría analítica, bagaje teórico que le permitirá comprender algunos procesos implícitos en el desarrollo de las demostraciones geométricas y en la obtención de las ecuaciones algebraicas presentadas.

En la exposición de la temática se proporcionan algunas definiciones básicas, se plantean los teoremas que sustentan el desarrollo conceptual, se muestra el proceso llevado a cabo para la obtención de las fórmulas puestas en consideración como aporte teórico y, por último, se valida el uso de dichas fórmulas con la inserción de estas en un *software* dinámico (GeoGebra) obteniendo como resultado las figuras presentadas.

El texto se compone de siete capítulos; donde, en el **Capítulo 1** se desarrolla la conceptualización básica sobre las rectas y puntos notables de un triángulo más habituales en la geometría escolar: mediatrices-circuncentro, alturas-ortocentro, bisectrices-incentro y medianas-gravicentro. Para un mejor abordaje, se dan las demostraciones de los teoremas de concurrencia de las rectas notables, de colinealidad entre los puntos notables y de razones métricas en el segmento de Euler. Se concluye el capítulo con el teorema de Ceva que se utiliza para probar de un modo diferente la concurrencia de las rectas notables cevianas; correspondientes a las alturas, las medianas y las bisectrices.

Por su parte, en el **Capítulo 2** se hace un tratamiento analítico de las relaciones métricas y trigonométricas entre los elementos de un triángulo que llevan a establecer las coordenadas de los puntos notables en términos de la longitud de los lados y de las coordenadas cartesianas de los vértices. Así mismo, se presenta el desarrollo de la obtención de las fórmulas para el cálculo de la distancia entre puntos notables y para la medida de los radios de las circunferencias inscrita y circunscritas, en términos de la longitud de los lados de un triángulo.

A continuación, en el **Capítulo 3** se da la demostración del teorema de la circunferencia de los nueve puntos y se obtienen las coordenadas del centro de dicha circunferencia en términos de la longitud de los lados y de las coordenadas cartesianas de los vértices de un triángulo. De igual manera, se presentan las fórmulas para el cálculo de la medida del radio de la circunferencia de los nueve puntos en términos de la longitud de los lados de un triángulo.

En el **Capítulo 4** se desarrolla lo relativo a la conceptualización de los puntos de Nagel y de Spieker; se dan las demostraciones de los teoremas que sustentan su presentación y colinealidad con el gravicentro y el incentro para, a partir de la determinación de la relación métrica entre ellos, obtener sus coordenadas en términos de las longitudes de los lados y de las coordenadas cartesianas de los vértices de un triángulo.

Ulteriormente, en el **Capítulo 5** se aborda la conceptualización básica respecto de los escintores de un triángulo: vescintores, mescintores y escintrices. Se presentan los procesos para la construcción sintética de un escintor general y de una escintriz general, con su respectiva justificación, y se aborda la demostración de los teoremas relacionados con ellos: segmento de Nagel como vescintor, segmento de Spieker como mescintor y escintor incentral como escintriz.

Luego, en el **Capítulo 6** se desarrolla el proceso de obtención de las coordenadas de los puntos extremos de un escintor general y de los casos especiales: vescintores y mescintores, en términos de la longitud de los lados y de las coordenadas cartesianas de los vértices de un triángulo.

Y por último, en el **Capítulo 7** se desarrolla el proceso de obtención de las coordenadas de los puntos extremos de las escintrices en términos de la longitud de los lados y de las coordenadas cartesianas de los vértices de un triángulo. Conjuntamente, se presenta un análisis respecto de las condiciones para la existencia de las escintrices de un triángulo y su cantidad, de acuerdo con la longitud de sus lados.

Al final de los capítulos 2, 3, 4, 6 y 7 se presenta el resumen de las fórmulas más relevantes tratadas en ellos, junto con algunos ejemplos de su aplicación. De igual manera, en todos los capítulos se presentan para su ejecución una serie de ejercicios complementarios y pertinentes.

## CAPÍTULO 1

### Rectas y puntos notables de un triángulo

Al inicio de este capítulo se aborda la conceptualización relacionada con las rectas notables de un triángulo más comúnmente tratadas en la geometría escolar, como son las mediatrices, las alturas, las bisectrices y las medianas, y se expone la demostración de la concurrencia de cada uno de estos sistemas de rectas, lo cual lleva a la definición de los puntos notables correspondientes, circuncentro, ortocentro, incentro y gravicentro.

Posteriormente, se expone la demostración de la colinealidad de los puntos notables circuncentro, gravicentro y ortocentro en la que se conoce como la recta de Euler, junto con la demostración de la razón métrica entre ellos. Por último, se integra el concepto de ceviana y se aborda la demostración de su propiedad proporcional, la cual se aplica como un método alternativo para la demostración de la concurrencia de las cevianas que contienen las alturas, la concurrencia de las cevianas que contienen las medianas y la concurrencia de las cevianas que contienen las bisectrices de un triángulo.

### 1.1. Rectas notables de un triángulo

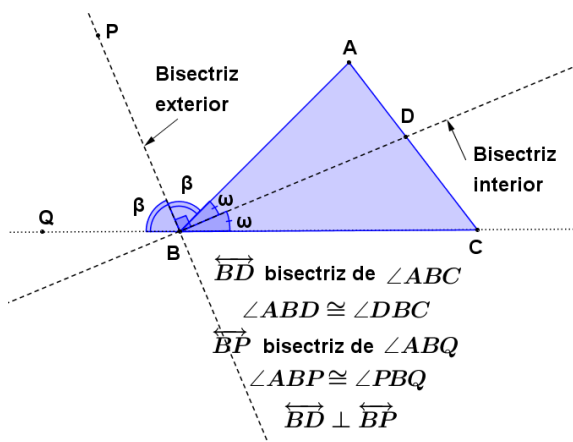
**Definición 1:** la *bisectriz* de un ángulo es la recta que lo divide en dos ángulos congruentes entre sí, donde sus puntos equidistan de los lados del ángulo (figura 1.1.).

En un triángulo por cada vértice puede trazarse una bisectriz interior (bisectriz de un ángulo interior),<sup>4</sup> que corta al lado opuesto, y una bisectriz exterior (bisectriz de un ángulo exterior)<sup>5</sup> que es perpendicular a la interior.

**Definición 2:** la *mediatriz* de un segmento es la recta que pasa por su punto medio y es perpendicular a este. Los puntos de una mediatriz equidistan de los puntos extremos del segmento.

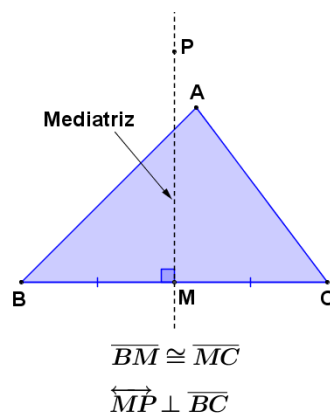
En un triángulo, por cada lado puede trazarse una mediatriz. (figura 1.2.).

Figura 1.1. Bisectrices interior y exterior respecto de un vértice de un triángulo



Fuente: elaboración propia.

Figura 1.2. Mediatriz de un lado de un triángulo



Fuente: elaboración propia.

<sup>4</sup> Un ángulo interior de un triángulo es la región de este que se forma entre dos de sus lados.

<sup>5</sup> Un ángulo exterior de un triángulo es la región exterior a este que se forma entre uno de sus lados y la prolongación del otro con el que comparte uno de sus vértices.

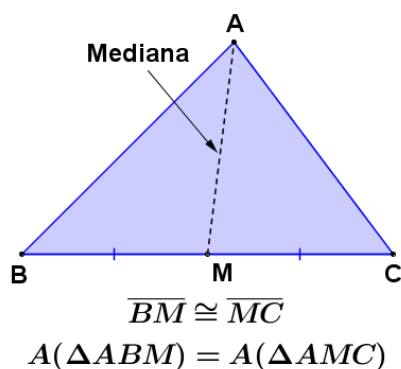
**Definición 3:** la *mediana* en un triángulo es el segmento de recta que une un vértice con el punto medio del lado opuesto. La mediana divide al triángulo en dos áreas iguales<sup>6</sup> (figura 1.3.).

En un triángulo, desde cada vértice puede trazarse una mediana.

**Definición 4:** la *altura* en un triángulo es el segmento de recta que va desde un vértice hasta el lado opuesto o su prolongación y es perpendicular a este (figura 1.4.). Al punto de corte de la altura con el lado de un triángulo, o su prolongación, se le denomina *pie de la altura*.

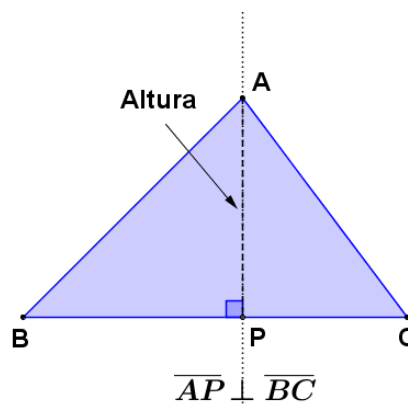
En un triángulo, desde cada vértice puede trazarse una altura.

Figura 1.3. Mediana de un triángulo



Fuente: elaboración propia.

Figura 1.4. Altura de un triángulo



Fuente: elaboración propia.

## 1.2. Concurrencia de las rectas notables de un triángulo y puntos notables

### 1.2.1. Concurrencia de las mediatrices de los lados de un triángulo y circuncentro

**Teorema 1:** las mediatrices de los lados de un triángulo concurren en un punto que equidista de los vértices.

---

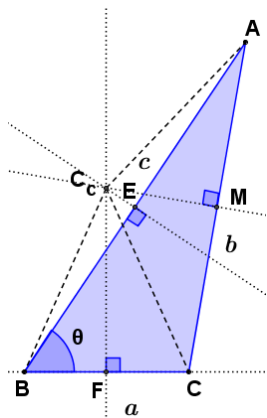
<sup>6</sup> Hay infinitos segmentos de recta que dividen el área de un triángulo en dos partes iguales. En el portal WOLFRAM Demonstrations Project se puede acceder a la construcción dinámica diseñada y publicada por Rangel-Mondragón (2013a), en la cual el usuario puede variar la ubicación del segmento de recta que bisecta el área del triángulo.



Demostración:

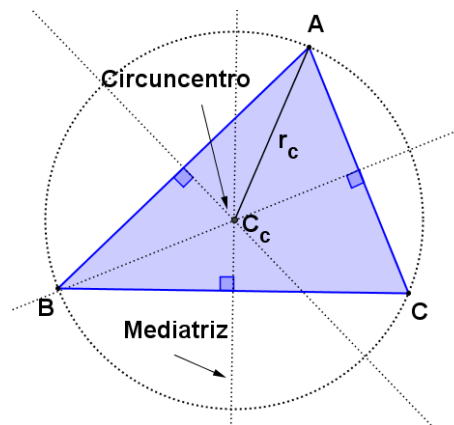
Sea el  $\triangle ABC$ , con  $M$ ,  $F$  y  $E$  puntos medios de  $\overline{AC}$ ,  $\overline{BC}$  y  $\overline{AB}$ , respectivamente. Trácese las mediatrices de los segmentos  $\overline{AC}$  y  $\overline{BC}$ , las cuales se cortan en el punto  $C_c$  (figura 1.5.).

Figura 1.5. Concurrencia de las mediatrices de los lados de un triángulo y circuncentro



Fuente: elaboración propia.

Figura 1.6. Circuncentro de un triángulo y circunferencia circunscrita



Fuente: elaboración propia.

Por ser  $C_c$  punto de la mediatriz de  $\overline{AC}$ , se tiene que  $\overline{AC_c} \cong \overline{CC_c}$ , y por ser, a su vez, punto de la mediatriz de  $\overline{BC}$ ,  $\overline{BC_c} \cong \overline{CC_c}$ , por lo tanto,  $\overline{AC_c} \cong \overline{BC_c}$ , es decir,  $C_c$  equidista de  $A$  y de  $B$ , esto es, hace parte de la mediatriz de  $\overline{AB}$  (QED).<sup>7</sup>

**Definición 5:** al punto de concurrencia de las mediatrices de los lados de un triángulo se le denomina *circuncentro*  $C_c$  y es el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo (que pasa por los vértices), por lo tanto, el segmento que une el circuncentro con uno de los vértices es el radio de la circunferencia circunscrita  $r_c$  (figura 1.6.).

### 1.2.2. Concurrencia de las alturas de un triángulo y ortocentro

**Teorema 2:** las rectas que contienen las alturas de un triángulo concurren en un punto.

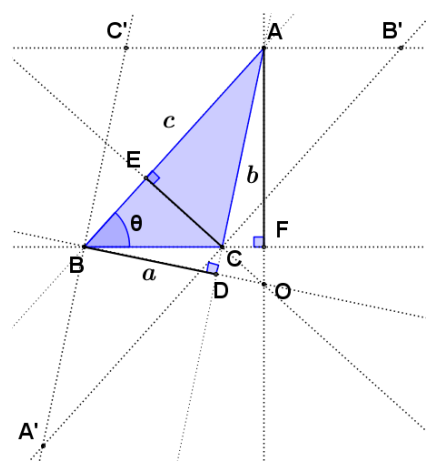
<sup>7</sup> «*Quod erat demonstrandum* es una locución latina que significa ‘lo que se quería demostrar’ y se abrevia QED». [Quod/erat/demonstrandum \(es.wikipedia.org\)](http://es.wikipedia.org/wiki/Quod_erat_demonstrandum)

Demostración:

Sea el  $\triangle ABC$ , cuyas rectas que contienen las alturas son  $\overleftrightarrow{AF}$ ,  $\overleftrightarrow{BD}$  y  $\overleftrightarrow{CE}$ , con  $F$ ,  $D$  y  $E$  pies de estas sobre  $\overleftrightarrow{BC}$ ,  $\overleftrightarrow{AC}$  y  $\overleftrightarrow{AB}$ , respectivamente. Así,  $\overleftrightarrow{AF} \perp \overleftrightarrow{BC}$ ,  $\overleftrightarrow{BD} \perp \overleftrightarrow{AC}$  y  $\overleftrightarrow{CE} \perp \overleftrightarrow{AB}$  (figura 1.7.). Trácese las paralelas a  $\overleftrightarrow{AB}$  por el vértice  $C$  y a  $\overleftrightarrow{AC}$  por el vértice  $B$ , las cuales se cortan en  $A'$ . Trácese, además, la paralela a  $\overleftrightarrow{BC}$  por el vértice  $A$ , la cual corta a  $\overleftrightarrow{A'B}$  en  $C'$  y a  $\overleftrightarrow{A'C}$  en  $B'$ .

A partir de la construcción hecha se forman el  $\triangle A'B'C'$  y los paralelogramos  $A'BAC$ ,  $B'ABC$  y  $C'ACB$ , de donde, en el paralelogramo  $A'BAC$ ,  $\overline{A'B} \cong \overline{CA}$  y  $\overline{A'B} \parallel \overline{CA}$ , y en el paralelogramo  $C'ACB$ ,  $\overline{BC'} \cong \overline{CA}$ , con lo cual,  $\overline{A'B} \cong \overline{BC'}$ , esto es,  $B$  es punto medio de  $\overline{A'C'}$ . Además, como  $\overleftrightarrow{A'B} \parallel \overleftrightarrow{CA}$  y  $\overleftrightarrow{BD} \perp \overleftrightarrow{AC}$ , entonces,  $\overleftrightarrow{BD} \perp \overleftrightarrow{A'C'}$ , de donde  $\overleftrightarrow{BD}$  es mediatriz de  $\overline{A'C'}$ .

Figura 1.7. Concurrencia de las rectas que contienen las alturas de un triángulo y ortocentro



Fuente: elaboración propia.

Usando un procedimiento análogo al anterior, se puede establecer también que  $C$  es punto medio de  $\overline{A'B'}$  y que  $A$  es punto medio de  $\overline{C'B'}$  y, con ello, que las alturas del  $\triangle ABC$  son a su vez mediatrices del  $\triangle A'B'C'$ , las cuales concurren en un mismo punto  $O$ , tal como fue demostrado en la sección 1.2.1. (QED).

**Definición 6:** al punto de concurrencia de las rectas de las alturas de un triángulo se le denomina *ortocentro*  $O$ .

### 1.2.3. Concurrencia de las bisectrices de los ángulos interiores de un triángulo e incentro

**Teorema 3:** las bisectrices de los ángulos interiores de un triángulo concurren en un punto que equidista de los lados.

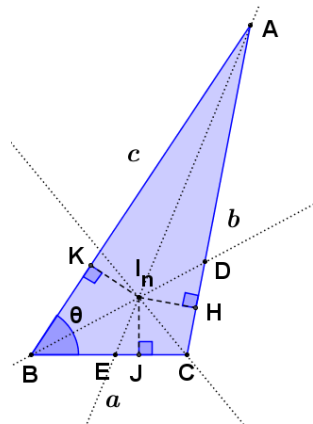
Demostración:

Sea el  $\triangle ABC$ , con  $\overleftrightarrow{AE}$  bisectriz del  $\angle A$ , y  $\overleftrightarrow{BD}$  bisectriz del  $\angle B$ , las cuales se cortan en el punto  $I_n$  (figura 1.8.).

Trácese desde  $I_n$  segmentos perpendiculares a cada uno de los lados del triángulo, cuyos pies son  $J$  sobre  $\overline{BC}$ ,  $K$  sobre  $\overline{BA}$  y  $H$  sobre  $\overline{AC}$ , con lo cual  $\overline{I_n J} \perp \overline{BC}$ ,  $\overline{I_n K} \perp \overline{BA}$  y  $\overline{I_n H} \perp \overline{AC}$ .

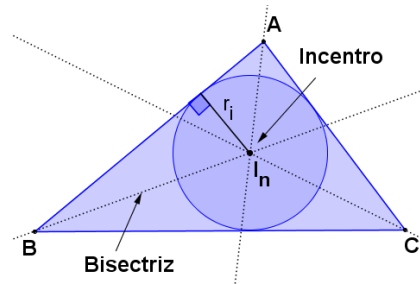
Por ser  $I_n$  punto de la bisectriz del  $\angle A$ , este equidista de los lados del ángulo, con lo cual,  $\overline{I_n K} \cong \overline{I_n H}$  y por ser  $I_n$  punto de la bisectriz del  $\angle B$ , se tiene que  $\overline{I_n K} \cong \overline{I_n J}$ , por lo tanto,  $\overline{I_n H} \cong \overline{I_n J}$ , es decir,  $I_n$  equidista de los lados del  $\angle C$  y, por consiguiente, hace parte de la bisectriz de este (QED).

Figura 1.8. Concurrencia de las bisectrices de los ángulos interiores de un triángulo e incentro



Fuente: elaboración propia.

Figura 1.9. Incentro de un triángulo y circunferencia inscrita



Fuente: elaboración propia.

**Definición 7:** al punto de concurrencia de las bisectrices de los ángulos interiores de un triángulo se le denomina *incentro*  $I_n$  y corresponde al centro de la circunferencia inscrita en el triángulo (tangente a los lados), por lo tanto, el segmento perpendicular que une el incentro con uno de los lados es el radio de la circunferencia inscrita  $r_i$  (Figura 1.9.).

#### 1.2.4. Concurrencia de las medianas de un triángulo y gravicentro

**Teorema 4:** las medianas de un triángulo concurren en un punto cuya distancia a cada vértice es dos tercios de la medida de la respectiva mediana.

Demostración:

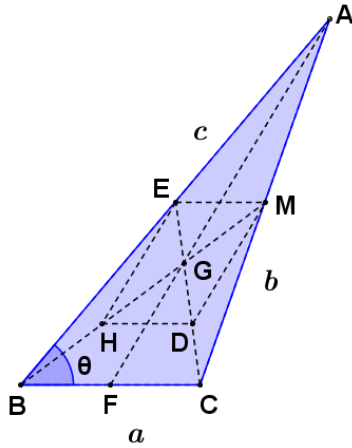
Sea el  $\triangle ABC$ , con  $E$ ,  $M$  y  $F$  puntos medios de  $\overline{AB}$ ,  $\overline{AC}$  y  $\overline{BC}$ , respectivamente.

Trácese  $\overline{CE}$  y  $\overline{BM}$ , medianas del triángulo, las cuales se cortan en el punto  $G$  (figura 1.10.), y sean  $H$  y  $D$  puntos medios de  $\overline{BG}$  y  $\overline{CG}$ , respectivamente, con lo cual  $\overline{BH} \cong \overline{HG}$  y  $\overline{CD} \cong \overline{DG}$ . Además, al trazar  $\overline{EM}$  en el  $\triangle ABC$  se tiene que  $\overline{EM} \parallel \overline{BC}$  y  $EM = \frac{1}{2}BC$ , por propiedad de los puntos medios de los lados de un triángulo. De igual manera, al trazar  $\overline{HD}$  en el  $\triangle BGC$  se tiene que  $\overline{HD} \parallel \overline{BC}$  y  $HD = \frac{1}{2}BC$ . Luego,  $\overline{EM} \parallel \overline{HD}$  y  $\overline{EM} \cong \overline{HD}$ .

Así, al unir  $H$  con  $E$  y  $D$  con  $M$  se forma el paralelogramo  $EMDH$ , cuyas diagonales  $\overline{HM}$  y  $\overline{DE}$  se dimidian, lo cual implica que  $\overline{HG} \cong \overline{GM}$  y  $\overline{DG} \cong \overline{GE}$ . Por lo tanto,  $CE = CD + DG + GE = 3CD$ , esto es,  $CD = \frac{1}{3}CE$  o  $CG = \frac{2}{3}CE$ . De igual manera,  $BM = BH + HG + GM = 3BH$ , donde,  $BH = \frac{1}{3}BM$  o  $BG = \frac{2}{3}BM$ .

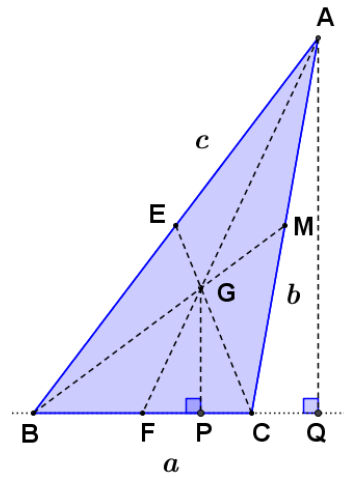
Al proceder de manera similar para las medianas  $\overline{CE}$  y  $\overline{AF}$ , bajo la consideración que se cortan en el punto  $G'$ , se obtendrá que  $AG' = \frac{2}{3}AF$  y  $CG' = \frac{2}{3}CE$ , con lo cual se puede concluir que el punto  $G'$  coincide con el punto  $G$  (QED).

Figura 1.10. Concurrencia de las medianas de un triángulo y gravicentro



Fuente: elaboración propia.

Figura 1.11. División de un triángulo en regiones triangulares de igual área a partir del gravicentro



Fuente: elaboración propia.

**Definición 8:** al punto de concurrencia de las medianas de un triángulo se le denomina *gravicentro*  $G$ , *baricentro* o *centroide*<sup>8</sup> y corresponde al centro de gravedad del triángulo.

**Corolario:** en todo triángulo los segmentos que unen el gravicentro con sus vértices lo dividen en tres regiones triangulares de igual área.<sup>9</sup>

Demostración:

Sea el  $\triangle ABC$ , con  $G$  gravicentro,  $E$ ,  $M$  y  $F$  puntos medios de  $\overline{AB}$ ,  $\overline{AC}$  y  $\overline{BC}$ , respectivamente (figura 1.11.).

Trácese  $\overline{AF}$ ,  $\overline{BM}$  y  $\overline{CE}$  medianas,  $\overline{AQ}$  altura del  $\triangle ABC$  respecto de  $\overleftrightarrow{BC}$  y  $\overline{GP}$  altura del  $\triangle BGC$  respecto de  $\overleftrightarrow{BC}$ .

<sup>8</sup> “The centroid is the unique point of a triangle with the property that three lines through it divide the area into six equivalent regions. [...] the centroid  $G$  is a sixpartite point of the triangle” (Berele, A.; Catoiu, S., 2018b).

<sup>9</sup> “The medians are the only three concurrent lines that divide the area of a triangle into six equivalent regions” (Berele, A.; Catoiu, S., 2018b)

De acuerdo con la construcción hecha, se obtiene  $\triangle AFQ \sim \triangle FGP$  (criterio A. A., dado que  $\angle AFQ \cong \angle GFP$ , por ser ángulo común, y  $\angle FQA \cong \angle FPG$ , por ser ángulos rectos), con lo cual, por aplicación del teorema de Tales,<sup>10</sup> se tiene que  $\frac{AF}{GF} = \frac{AQ}{GP}$ .

En concordancia con el teorema de concurrencia de las medianas de un triángulo  $GA = \frac{2}{3}AF$ , con lo cual  $GF = \frac{1}{3}AF$ , luego,  $\frac{AF}{\frac{1}{3}AF} = \frac{AQ}{GP}$ , esto es,  $GP = \frac{1}{3}AQ$ .

Así, teniendo en cuenta que  $A(\triangle BGC) = \frac{1}{2}BC \cdot GP$  y  $A(\triangle ABC) = \frac{1}{2}BC \cdot AQ$ , se tiene que  $A(\triangle BGC) = \frac{1}{6}BC \cdot AQ$ , por lo tanto,  $A(\triangle BGC) = \frac{1}{3}A(\triangle ABC)$

Mediante un procedimiento similar respecto de los lados  $\overline{AB}$  y  $\overline{AC}$ , se tendrá que  $A(\triangle AGC) = \frac{1}{3}A(\triangle ABC)$  y  $A(\triangle AGB) = \frac{1}{3}A(\triangle ABC)$ , con lo cual  $A(\triangle BGC) = A(\triangle AGC) = A(\triangle AGB)$  (QED).

### 1.3. Colinealidad del ortocentro, el gravicentro y el circuncentro

**Teorema 5:** en todo triángulo el ortocentro, el gravicentro y el circuncentro son puntos colineales (están sobre una misma recta).

Demostración:

Sea el  $\triangle ABC$  del cual  $C_c$  y  $O$  son el circuncentro y el ortocentro, respectivamente, con  $P$  punto medio de  $\overline{CA}$ ,  $K$  punto medio de  $\overline{BC}$  y  $M$  punto medio de  $\overline{BA}$  (figura 1.12.).

Trácese  $\overline{BP}$ , mediana del  $\triangle ABC$ , y  $\overline{C_cO}$ , las cuales se cortan en  $G$ . Trácese, además,  $\overline{BO}$  y  $\overline{CO}$ , segmentos de las rectas de las alturas respecto de los lados  $\overline{AC}$  y  $\overline{AB}$ , respectivamente. Así,  $\overline{BO} \perp \overleftrightarrow{AC}$  y  $\overline{CO} \perp \overleftrightarrow{AB}$ .

---

<sup>10</sup> «Dado un triángulo ABC, si se traza un segmento paralelo, B'C', a uno de los lados del triángulo, se obtiene otro triángulo AB'C', cuyos lados son proporcionales a los del triángulo ABC». Los teoremas de Tales de Mileto (superprof.es)

Sean  $J$  punto medio de  $\overline{GO}$ ,  $Z$  punto medio de  $\overline{CO}$ ,  $R$  punto medio de  $\overline{BG}$  y únense  $R$  con  $J$  y  $K$  con  $Z$ . Así, por propiedad de los puntos medios de los lados de un triángulo, se tiene que, en el  $\triangle BGO$ ,  $\overline{RJ} \parallel \overline{BO}$  y  $RJ = \frac{1}{2}BO$ ; y en el  $\triangle BCO$ ,  $\overline{KZ} \parallel \overline{BO}$  y  $KZ = \frac{1}{2}BO$ . Luego,  $\overline{RJ} \parallel \overline{KZ}$  y  $\overline{RJ} \cong \overline{KZ}$ .

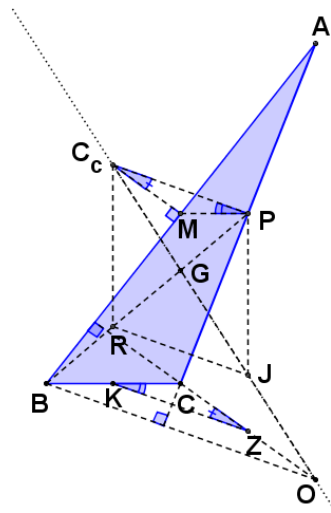
Únase  $M$  con  $P$ , así  $\overline{MP} \parallel \overline{BC}$ , es decir,  $\overline{MP} \parallel \overline{KC}$  (dado que  $\overline{KC}$  es segmento de  $\overline{BC}$ ). Únase, también,  $C_c$  con  $M$  y con  $P$ , con lo cual  $\overline{C_cM}$  es mediatriz del segmento  $\overline{BA}$  y  $\overline{C_cP}$  es mediatriz del segmento  $\overline{AC}$ , por lo tanto,  $\overline{C_cM} \perp \overline{AB}$  y  $\overline{C_cP} \perp \overline{AC}$ . Luego, como

$\overline{CO} \perp \overline{AB}$ , entonces, por ser perpendiculares a una misma recta,  $\overline{C_cM} \parallel \overline{CZ}$  (dado que  $\overline{CZ}$  es segmento de  $\overline{CO}$ ). De igual manera, como  $\overline{BO} \perp \overline{AC}$ , entonces  $\overline{C_cP} \parallel \overline{BO}$ , y como a su vez,  $\overline{BO} \parallel \overline{KZ}$ , se tiene que  $\overline{C_cP} \parallel \overline{KZ}$ , de donde  $\angle CZK \cong \angle MPC_c$ , por ser ángulos entre paralelas. En forma similar, como  $\overline{MP} \parallel \overline{KC}$  y  $\overline{C_cP} \parallel \overline{KZ}$ , entonces  $\angle MPC_c \cong \angle CKZ$ , por ser ángulos entre paralelas.

En el  $\triangle C_cMP$ ,  $\angle C_cMP = 180 - (\angle MC_cP + \angle MPC_c)$  y en el  $\triangle ZCK$ ,  $\angle ZCK = 180 - (\angle CZK + \angle CKZ)$ , por lo tanto,  $\angle C_cMP \cong \angle ZCK$ , por ser ángulos suplementarios de ángulos congruentes. Así, se puede determinar que  $\triangle C_cMP \cong \triangle ZCK$  (criterio A. L. A., dado que  $\angle C_cMP \cong \angle ZCK$ ,  $\overline{MP} \cong \overline{CK}$  y  $\angle MPC_c \cong \angle CKZ$ ), con lo cual  $\overline{KZ} \cong \overline{C_cP}$ , por ser lados correspondientes de triángulos congruentes.

Al unir  $C_c$  con  $R$  y  $P$  con  $J$  se forma el cuadrilátero  $C_cPJR$ , el cual es un paralelogramo, dado que  $\overline{RJ} \parallel \overline{KZ} \parallel \overline{C_cP}$ , es decir,  $\overline{RJ} \parallel \overline{C_cP}$ , y  $\overline{RJ} \cong \overline{KZ} \cong \overline{C_cP}$ , esto es,  $\overline{RJ} \cong \overline{C_cP}$ . Así,  $\overline{RP}$  y  $\overline{C_cJ}$  son diagonales del paralelogramo  $C_cPJR$ , con  $G$

Figura 1.12. Colinealidad del ortocentro, el gravicentro y el circuncentro de un triángulo



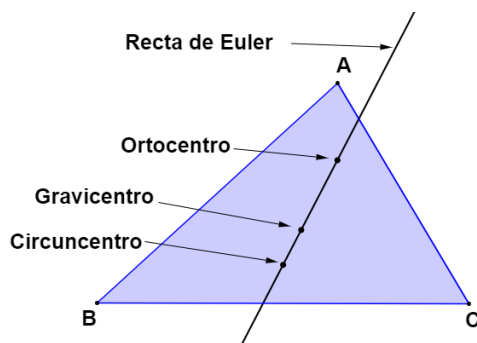
Fuente: elaboración propia.

punto de encuentro de las diagonales, por lo tanto,  $\overline{RG} \cong \overline{GP}$  y  $\overline{C_cG} \cong \overline{GJ}$ , por propiedad de los paralelogramos. Luego, para la mediana  $\overline{BP}$  del  $\triangle ABC$  se tiene que,  $BP = BR + RG + GP$  y como  $\overline{BR} \cong \overline{RG}$ , por ser  $R$  punto medio de  $\overline{BG}$ , entonces,  $\overline{BR} \cong \overline{RG} \cong \overline{GP}$ . Así,  $BP = GP + GP + GP$ , de donde,  $3GP = BP$  o  $GP = \frac{1}{3}BP$ , esto es,  $BG = \frac{2}{3}BP$ , con lo cual se establece que el punto  $G$  corresponde al gravicentro del  $\triangle ABC$  (teorema de concurrencia de las medianas de un triángulo). Por lo tanto, el circuncentro  $C_c$ , el gravicentro  $G$  y el ortocentro  $O$  son colineales (QED).

**Definición 9:** se denomina *recta de Euler* a la recta que une el ortocentro, el gravicentro y el circuncentro.

Toma ese nombre en honor al matemático suizo Leonhard Euler<sup>11</sup> quien descubrió este hecho a mediados del siglo XVIII (figura 1.13.).

Figura 1.13. Recta de Euler



Fuente: elaboración propia.

#### 1.4. Razón métrica en el segmento de Euler

**Definición 10:** se denomina *segmento de Euler* a la porción de la recta de Euler comprendida entre el circuncentro y el ortocentro de un triángulo.

<sup>11</sup> Leonhard Paul Euler, nació el 15 de abril de 1707 en Basilea, Suiza, y murió el 18 de septiembre de 1783 en San Petersburgo, Rusia. Fue un respetado matemático y físico, y está considerado como el principal matemático del siglo XVIII y como uno de los más grandes de todos los tiempos. [Leonhard Euler \(es.wikipedia.org\)](https://es.wikipedia.org/wiki/Leonhard_Euler)



**Teorema 6:** en el segmento de Euler de un triángulo no equilátero, el gravicentro está distante del circuncentro un tercio de la longitud entre el circuncentro y el ortocentro.

Demostración:

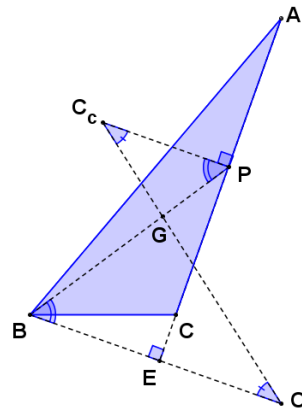
Sea el  $\triangle ABC$  del cual  $C_c$ ,  $G$  y  $O$  son el circuncentro, el gravicentro y el ortocentro, respectivamente. Con  $P$  punto medio de  $\overline{AC}$  (figura 1.14.). Trácese  $\overline{PC_c}$ ,  $\overline{C_cO}$ ,  $\overline{BO}$  y la mediana  $\overline{BP}$ , siendo  $G$  el punto de corte de los segmentos  $\overline{C_cO}$  y  $\overline{BP}$ , con lo cual se forman  $\triangle C_cGP$  y  $\triangle OGB$ .

Como  $\overline{BO}$  es segmento de la recta de la altura respecto del lado  $\overline{AC}$ , es decir,  $\overline{BO} \perp \overline{AC}$ , y  $\overline{C_cP}$  es segmento de la mediatriz del lado  $\overline{AC}$ , esto es,  $\overline{C_cP} \perp \overline{AC}$ , se tiene que  $\overline{C_cP} \parallel \overline{BO}$ .

Así,  $\triangle GPC_c \sim \triangle GBO$  (criterio A. A., dado que  $\angle GPC_c \cong \angle GBO$ , por ser alternos internos entre paralelas, y  $\angle C_cGP \cong \angle OGB$ , por ser opuestos por el vértice). Luego,  $\frac{GP}{GB} = \frac{GC_c}{GO}$ , por ser lados correspondientes de triángulos semejantes.

Por el teorema 4 (sección 1.2.4.) se tiene que  $GP = \frac{1}{3}BP$  y  $GB = \frac{2}{3}BP$ , así,  $\frac{\frac{1}{3}BP}{\frac{2}{3}BP} = \frac{GC_c}{GO}$ , esto es,  $\frac{1}{2} = \frac{GC_c}{GO}$ , de donde,  $GO = 2GC_c$  (1). Luego, de acuerdo con la figura 1.14, se tiene que  $GO = C_cO - GC_c$  (2), con lo cual, al reemplazar (1) en (2), se obtiene  $C_cO = 3GC_c$ , esto es,  $GC_c = \frac{1}{3}C_cO$  (QED).

Figura 1.14. Razón proporcional en el segmento de Euler



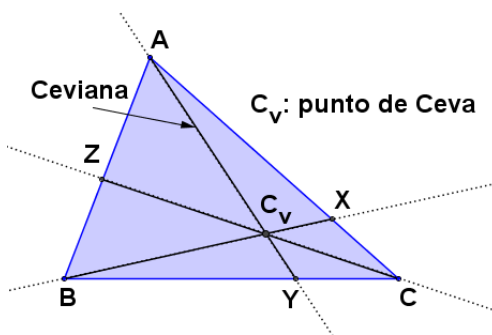
Fuente: elaboración propia.

### 1.5. Teorema de Ceva y concurrencia de algunas líneas notables del triángulo

**Definición 11:** se denomina a *ceviana*<sup>12</sup> de un triángulo a la recta que partiendo de un vértice corta al lado opuesto o su prolongación en un punto distinto a los otros vértices (figura 1.15).

**Definición 12:** al punto donde concurren las cevianas se le denomina *punto de Ceva* .

Figura 1.15. Ceviana y punto de Ceva



Fuente: elaboración propia .

Así, de acuerdo con la definición 11, las rectas que contienen las bisectrices y las medianas de cualquier triángulo son cevianas, al igual que las rectas que contienen las alturas de triángulos no rectángulos.

**Teorema 7 (teorema de Ceva):**<sup>13</sup> en un  $\triangle ABC$  con  $L$ ,  $M$  y  $N$  puntos sobre  $\overleftrightarrow{BC}$ ,  $\overleftrightarrow{AC}$  y  $\overleftrightarrow{AB}$ , respectivamente, las cevianas  $\overleftrightarrow{AL}$ ,  $\overleftrightarrow{BM}$  y  $\overleftrightarrow{CN}$  son concurrentes, si y solo si  $\frac{AN \cdot BL \cdot CM}{NB \cdot LC \cdot MA} = 1$ .

Demostración:

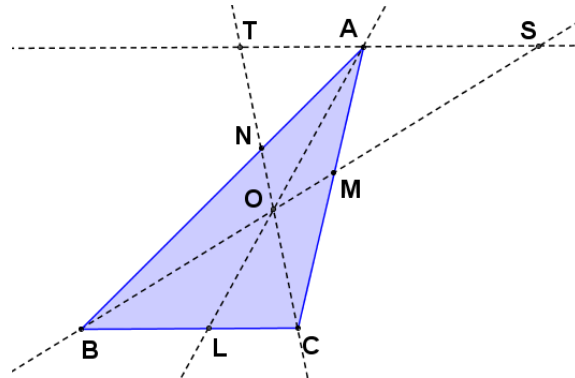
**Caso 1.** El punto de concurrencia de las cevianas está al interior de un triángulo.

<sup>12</sup> «El nombre de *ceviana* fue introducido por M. A. Poulain, que lo utilizó en honor de Giovanni Ceva». [Ceviana \(es.wikipedia.org\)](http://es.wikipedia.org/wiki/Ceviana)

<sup>13</sup> El denominado teorema de Ceva fue publicado por el matemático italiano Giovanni Ceva (1648-1734) en su *De lineis rectis* (1678).«Si bien este teorema había sido formulado ya en el siglo XI por Al-Mu'tamin, rey de la taifa de Zaragoza entre 1081 y 1085». [Giovanni Ceva \(es.wikipedia.org\)](http://es.wikipedia.org/wiki/Giovanni_Ceva)

Sean el  $\triangle ABC$  y  $O$  un punto interior desde el cual se trazan las rectas  $\overleftrightarrow{OA}$ ,  $\overleftrightarrow{OB}$  y  $\overleftrightarrow{OC}$  que cortan a los lados opuestos del triángulo, o su prolongación, en los puntos  $L$ ,  $M$  y  $N$ , respectivamente (figura 1.16.).

Figura 1.16. Caso en que el punto de Ceva está al interior de un triángulo



Fuente: elaboración propia.

Trácese por el vértice  $A$  una recta paralela a  $\overline{BC}$ , donde  $T$  y  $S$  son los puntos de intersección de las rectas  $\overleftrightarrow{OC}$  y  $\overleftrightarrow{OB}$  con esta paralela, de manera correspondiente.

A partir de esta construcción se tiene que:

- $\triangle BOL \sim \triangle SOA$  (criterio A. A., dado que  $\angle BOL \cong \angle SOA$ , por opuestos por el vértice, y  $\angle OLB \cong \angle OAS$ , por alternos internos entre las paralelas  $\overleftrightarrow{TS}$  y  $\overleftrightarrow{BC}$ ), por lo tanto,  $\frac{BL}{LO} = \frac{SA}{AO}$  (1).
- $\triangle AOT \sim \triangle LOC$  (criterio A. A., dado que  $\angle AOT \cong \angle LOC$ , por opuestos por el vértice, y  $\angle OTA \cong \angle OCL$ , por alternos internos entre las paralelas  $\overleftrightarrow{TS}$  y  $\overleftrightarrow{BC}$ ), de donde,  $\frac{LO}{LC} = \frac{AO}{AT}$  (2).
- $\triangle SAM \sim \triangle BCM$  (criterio A. A., dado que  $\angle AMS \cong \angle CMB$ , por opuestos por el vértice, y  $\angle MSA \cong \angle MBC$ , por alternos internos entre las paralelas  $\overleftrightarrow{TS}$  y  $\overleftrightarrow{BC}$ ), así,  $\frac{CM}{MA} = \frac{BC}{SA}$  (3).

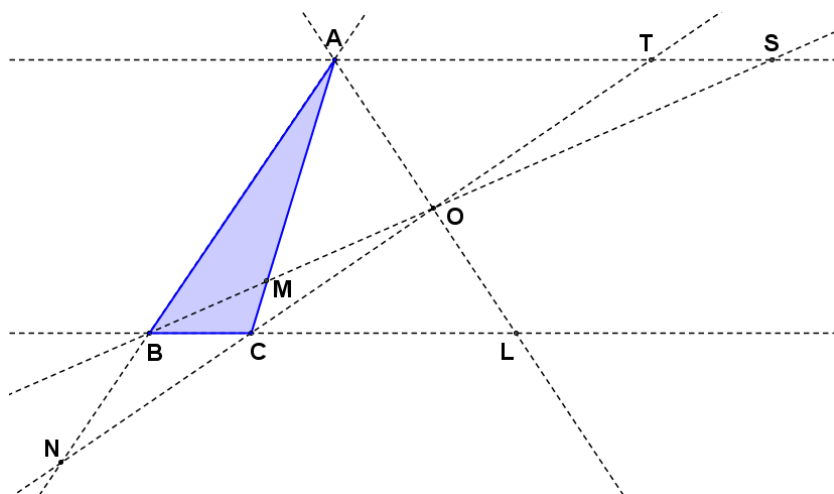
- $\triangle TAN \sim \triangle CBN$  (criterio A. A., dado que  $\angle ANT \cong \angle BNC$ , por opuestos por el vértice, y  $\angle NTA \cong \angle NCB$ , por alternos internos entre las paralelas  $\overleftrightarrow{TS}$  y  $\overleftrightarrow{BC}$ ), con lo cual,  $\frac{AN}{NB} = \frac{AT}{BC}$  (4).

Así, multiplicando las proporciones (1), (2), (3) y (4) miembro a miembro, se tiene que  $\frac{BL}{LO} \cdot \frac{LO}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} \cdot \frac{AN}{NB} = \frac{SA}{AO} \cdot \frac{AO}{AT} \cdot \frac{BC}{SA} \cdot \frac{AT}{BC}$ , luego,  $\frac{AN \cdot BL \cdot CM}{NB \cdot LC \cdot MA} = 1$  (QED).

**Caso 2.** El punto de concurrencia de las cevianas está al exterior de un triángulo,

Sean el  $\triangle ABC$  y  $O$  un punto exterior desde el cual se trazan las rectas  $\overleftrightarrow{OA}$ ,  $\overleftrightarrow{OB}$  y  $\overleftrightarrow{OC}$  que cortan a los lados opuestos del triángulo, o su prolongación, en los puntos  $L$ ,  $M$  y  $N$ , de manera correspondiente (figura 1.17.).

Figura 1.17. Caso en que el punto de Ceva está al exterior de un triángulo



Fuente: elaboración propia.

Trácese por el vértice  $A$  una recta paralela a  $\overline{BC}$ , donde  $T$  y  $S$  son los puntos de intersección de las rectas  $\overleftrightarrow{OB}$  y  $\overleftrightarrow{OC}$  con esta paralela, respectivamente.

De acuerdo con la construcción hecha se tiene que:

- $\triangle BOL \sim \triangle SOA$  (criterio A. A., dado que  $\angle BOL \cong \angle SOA$ , por opuestos por el vértice, y  $\angle OLB \cong \angle OAS$ , por alternos internos entre las paralelas  $\overleftrightarrow{AS}$  y  $\overleftrightarrow{BL}$ ), así,  $\frac{BL}{AS} = \frac{LO}{OA}$  (1).
- $\triangle TOA \sim \triangle COL$  (criterio A. A., dado que  $\angle TOA \cong \angle COL$ , por opuestos por el vértice, y  $\angle OAT \cong \angle OLC$ , por alternos internos entre las paralelas  $\overleftrightarrow{AT}$  y  $\overleftrightarrow{CL}$ ), de donde,  $\frac{LO}{OA} = \frac{CL}{AT}$  (2).
- $\triangle SAM \sim \triangle BCM$  (criterio A. A., dado que  $\angle AMS \cong \angle CMB$ , por opuestos por el vértice, y  $\angle MSA \cong \angle MBC$ , por alternos internos entre las paralelas  $\overleftrightarrow{AS}$  y  $\overleftrightarrow{BC}$ ), por lo tanto,  $\frac{CM}{MA} = \frac{BC}{AS}$  (3).
- $\triangle NBC \sim \triangle NAT$  (criterio A. A., dado que  $\angle NBC \cong \angle NAT$  y  $\angle BCN \cong \angle ATN$ , por ser ángulos correspondientes entre las paralelas  $\overleftrightarrow{AT}$  y  $\overleftrightarrow{BC}$ ), con lo cual,  $\frac{AN}{NB} = \frac{AT}{BC}$  (4).

Luego, multiplicando las proporciones (1), (2), (3) y (4) miembro a miembro, se tiene que  $\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{AS} \cdot \frac{CM}{MA} \cdot \frac{LO}{OA} = \frac{AT}{BC} \cdot \frac{LO}{OA} \cdot \frac{BC}{AS} \cdot \frac{CL}{AT}$ , así,  $\frac{AN \cdot BL \cdot CM}{NB \cdot LC \cdot MA} = 1$  (QED).

### 1.5.1. Concurrencia de las cevianas que contienen las alturas de un triángulo obtusángulo

De acuerdo con el teorema 7 (teorema de Ceva), para el  $\triangle ABC$  obtusángulo con  $N$  pie de la altura sobre  $\overleftrightarrow{AB}$ ,  $L$  pie de la altura sobre  $\overleftrightarrow{BC}$  y  $M$  pie de la altura sobre  $\overleftrightarrow{AC}$ , las cevianas que contienen a las alturas  $\overleftrightarrow{CN}$ ,  $\overleftrightarrow{AL}$  y  $\overleftrightarrow{BM}$  serán concurrentes si se cumple que  $\frac{AN \cdot BL \cdot CM}{NB \cdot LC \cdot MA} = 1$ .

Prueba:

Sea el  $\triangle ABC$  obtusángulo con  $N$ ,  $L$  y  $M$  pies de las alturas sobre  $\overleftrightarrow{AB}$ ,  $\overleftrightarrow{BC}$  y  $\overleftrightarrow{AC}$ , respectivamente, y trácense las alturas  $\overline{CN}$ ,  $\overline{AL}$  y  $\overline{BM}$  (figura 1.18.). Así, se obtiene que

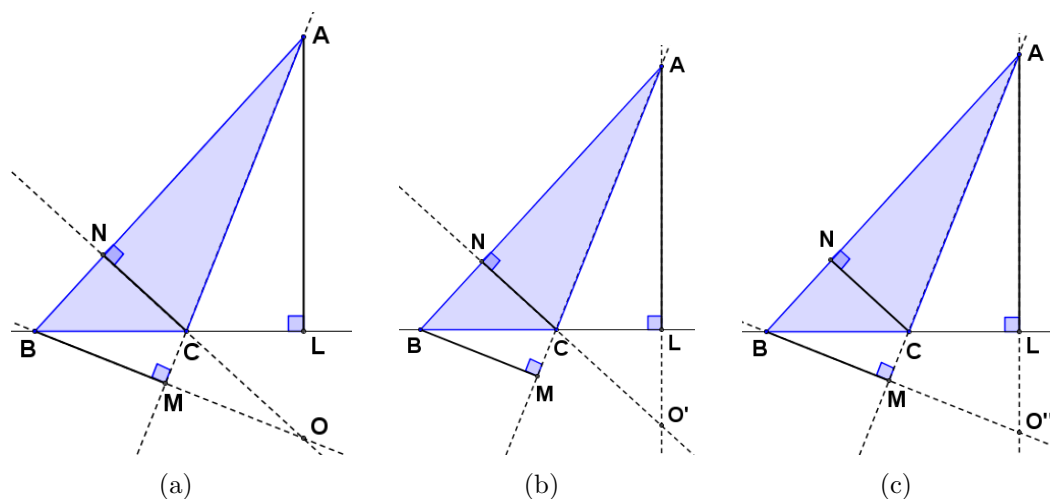
$\triangle BMC \sim \triangle ALC$  (por criterio A. A., dado que  $\angle BCM \cong \angle ACL$ , por opuestos por el vértice, y  $\angle BMC \cong \angle ALC$ , por ser ángulos rectos), con lo cual  $\angle MBC \cong \angle LAC$  (1).

Prolónguense  $\overleftrightarrow{CN}$  y  $\overleftrightarrow{BM}$  (figura 1.18a.), las cuales se encuentran en el punto  $O$ , obteniéndose que  $\triangle ANC \sim \triangle OMC$  (criterio A. A., dado que  $\angle ACN \cong \angle OCM$ , por opuestos por el vértice, y  $\angle ANC \cong \angle OMC$ , por ser ángulos rectos), con lo cual  $\frac{AN}{NC} = \frac{OM}{CM}$ , esto es,  $\frac{AN \cdot CM}{OM \cdot NC} = 1$  (2).

Prolónguense  $\overleftrightarrow{AL}$  la cual se encuentra con  $\overleftrightarrow{CN}$  en el punto  $O'$  (figura 1.18b.), a partir de lo cual se obtiene que  $\triangle CNB \sim \triangle CLO'$  (criterio A. A., dado que  $\angle BCN \cong \angle O'CL$ , por opuestos por el vértice, y  $\angle BNC \cong \angle O'LC$ , por ser ángulos rectos), así,  $\frac{NC}{NB} = \frac{LC}{LO'}$ , esto es,  $\frac{LC \cdot NB}{LO' \cdot NC} = 1$  (3), de donde, igualando (2) y (3), se tiene que  $\frac{AN \cdot CM}{NB \cdot LC} = \frac{OM}{LO'}$  (4).

Sea  $O''$  el punto de corte de  $\overleftrightarrow{AL}$  con  $\overleftrightarrow{BM}$  (figura 1.18c). Así, se tiene que  $\triangle BLO'' \sim \triangle AMO''$  (por criterio A. A., dado que  $\angle MBC \cong \angle LAC$  de (1) y  $\angle BLO'' \cong \angle AMO''$ , por ser ángulos rectos), con lo cual  $\frac{BL}{LO''} = \frac{MA}{MO''}$  o  $\frac{BL}{MA} = \frac{LO''}{MO''}$  (5).

Figura 1.18. Puntos de intersección de las cevianas que contienen las alturas de un triángulo



Fuente: elaboración propia.

Luego, multiplicando (5) y (4), miembro a miembro, se obtiene  $\frac{AN \cdot BL \cdot CM}{NB \cdot LC \cdot MA} = \frac{OM \cdot LO''}{LO' \cdot MO''}$ , de donde se cumple que  $\frac{OM \cdot LO''}{LO' \cdot MO''} = 1$ , si y solo si  $O, O'$  y  $O''$  son coincidentes o concurrentes (QED).

La demostración de la concurrencia de las cevianas que contienen las alturas de un triángulo acutángulo se deja al lector.

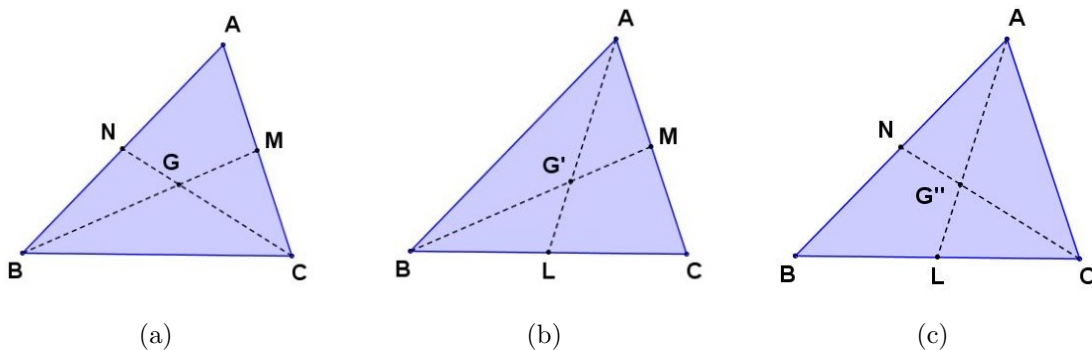
### 1.5.2. Concurrencia de las cevianas que contienen las medianas de un triángulo

De acuerdo con el teorema 7 (teorema de Ceva), para el  $\triangle ABC$  con  $N$  punto medio de  $\overline{AB}$ ,  $L$  punto medio de  $\overline{BC}$  y  $M$  punto medio de  $\overline{AC}$ , las cevianas que contienen a las medianas  $\overline{CN}$ ,  $\overline{AL}$  y  $\overline{BM}$  serán concurrentes si se cumple que  $\frac{AN \cdot BL \cdot CM}{NB \cdot LC \cdot MA} = 1$ .

Prueba:

Sea el  $\triangle ABC$ , con  $N$  punto medio de  $\overline{AB}$ ,  $L$  punto medio de  $\overline{BC}$  y  $M$  punto medio de  $\overline{AC}$  y trácense las medianas  $\overline{CN}$ ,  $\overline{AL}$  y  $\overline{BM}$  (figura 1.19.).

Figura 1.19. Puntos de intersección de las medianas de un triángulo



Fuente: elaboración propia.

Se partirá de suponer que las medianas  $\overline{CN}$ ,  $\overline{AL}$  y  $\overline{BM}$  del  $\triangle ABC$  no concurren en un punto, esto es, se cortan entre sí en puntos diferentes:  $\overline{CN}$  y  $\overline{BM}$  se cortan en  $G$

(figura 19a.),  $\overline{AL}$  y  $\overline{BM}$  se cortan en  $G'$  (figura 19b.), y  $\overline{CN}$  y  $\overline{AL}$  se cortan en  $G''$ , con lo cual no se cumpliría el teorema de Ceva, luego,  $\frac{AN \cdot BL \cdot CM}{NB \cdot LC \cdot MA} \neq 1$ .

Por definición de mediana se tiene que  $N$  es punto medio de  $\overline{AB}$ , con  $\overline{AN} \cong \overline{NB}$ ,  $L$  es punto medio de  $\overline{BC}$ , con  $\overline{BL} \cong \overline{LC}$ , y  $M$  es punto medio de  $\overline{CA}$ , con  $\overline{CM} \cong \overline{MA}$ . Así, al reemplazar en la ecuación de Ceva para la concurrencia de las cevianas de un triángulo, se tiene que  $\frac{AN \cdot BL \cdot CM}{NB \cdot LC \cdot MA} = \frac{AN \cdot BL \cdot CM}{AN \cdot BL \cdot CM} = 1$ , lo cual contradice lo supuesto, esto es, las medianas son concurrentes (QED).

### 1.5.3. Concurrencia de las cevianas que contienen las bisectrices de un triángulo

De acuerdo con el teorema 7 (teorema de Ceva), para el  $\triangle ABC$ , donde  $N$  es el punto de corte de la bisectriz del  $\angle C$  con  $\overline{AB}$ ,  $L$  el punto de corte de la bisectriz del  $\angle A$  con  $\overline{BC}$  y  $M$  el punto de corte de la bisectriz del  $\angle B$  con  $\overline{CA}$ , las bisectrices  $\overleftrightarrow{CN}$ ,  $\overleftrightarrow{AL}$  y  $\overleftrightarrow{BM}$  serán concurrentes si se cumple que  $\frac{AN \cdot BL \cdot CM}{NB \cdot LC \cdot MA} = 1$ .

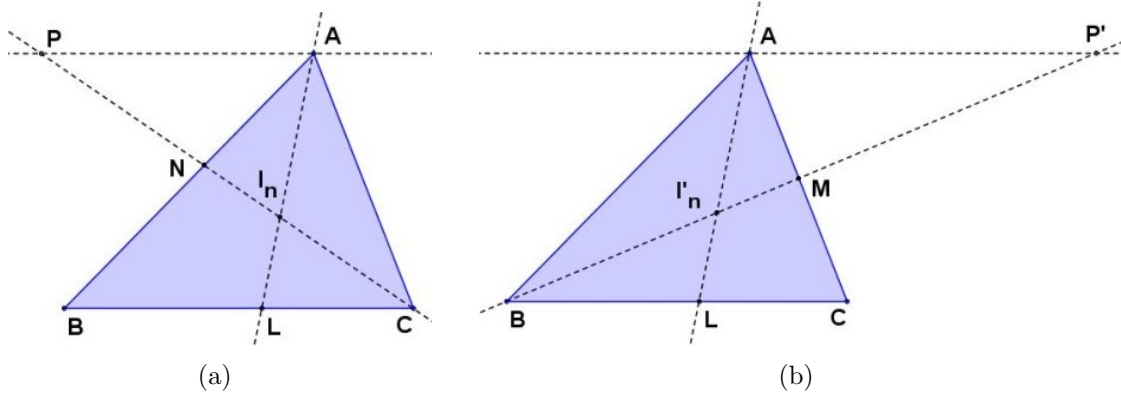
Prueba:

Sea el  $\triangle ABC$ , donde  $N$  es el punto de corte de la bisectriz del  $\angle C$  con  $\overline{AB}$ ,  $L$  el punto de corte de la bisectriz del  $\angle A$  con  $\overline{BC}$  y  $M$  el punto de corte de la bisectriz del  $\angle B$  con  $\overline{CA}$  (figura 1.20.).

Al considerar las bisectrices  $\overleftrightarrow{CN}$  y  $\overleftrightarrow{AL}$ , las cuales se encuentran en el punto  $I_n$ , y trazar la paralela a  $\overleftrightarrow{BC}$  por  $A$ , la cual se corta con  $\overleftrightarrow{CN}$  en  $P$  (figura 20a.), esto es,  $\overleftrightarrow{AP} \parallel \overleftrightarrow{BC}$ , se tiene que  $\triangle AI_nP \sim \triangle LI_nC$  (criterio A. A., dado que  $\angle PAI_n \cong \angle CLI_n$  y  $\angle API_n \cong \angle LCI_n$ , por ser ángulos alternos internos entre las paralelas  $\overleftrightarrow{AP}$  y  $\overleftrightarrow{BC}$ ) y  $\triangle APN \sim \triangle BCN$  (criterio A. A., dado que  $\angle PAN \cong \angle CBN$  y  $\angle APN \cong \angle BCN$ , por ser ángulos alternos internos entre las paralelas  $\overleftrightarrow{AP}$  y  $\overleftrightarrow{BC}$ ), con lo cual  $\frac{AP}{LC} = \frac{I_nA}{I_nL}$  (1) y  $\frac{AP}{BC} = \frac{AN}{NB}$  (2).



Figura 1.20. Puntos de intersección de las bisectrices de un triángulo



Fuente: elaboración propia.

Como  $\angle APC \cong \angle BCP$  (por ser alternos internos entre las paralelas  $\overleftrightarrow{AP}$  y  $\overleftrightarrow{BC}$ ) y  $\angle BCP \cong \angle ACP$  (por ser  $\overleftrightarrow{PC}$  bisectriz de  $\angle BCA$ ) por transitividad  $\angle APC \cong \angle ACP$ , con lo cual se establece que el  $\triangle APC$  es isósceles, donde  $\overline{AP} \cong \overline{AC}$ . Así, al reemplazar en (1) y en (2), se tiene que  $\frac{AC}{LC} = \frac{I_n A}{I_n L}$  (3) y  $\frac{AC}{BC} = \frac{AN}{NB}$  (4).

Al considerar las bisectrices  $\overleftrightarrow{AL}$  y  $\overleftrightarrow{BM}$ , las cuales se encuentran en el punto  $I'_n$ , y trazar la paralela a  $\overleftrightarrow{BC}$  por  $A$ , la cual se corta con  $\overleftrightarrow{BM}$  en  $P'$  (figura 20b.), esto es,  $\overleftrightarrow{AP'} \parallel \overleftrightarrow{BC}$ , se tiene que  $\triangle AI'_n P' \sim \triangle LI'_n B$  (criterio A. A., dado que  $\angle P' AI'_n \cong \angle BLI'_n$  y  $\angle AP' I'_n \cong \angle LBI'_n$ , por ser ángulos alternos internos entre las paralelas  $\overleftrightarrow{AP'}$  y  $\overleftrightarrow{BC}$ ) y  $\triangle AP' M \sim \triangle CBM$  (criterio A. A., dado que  $\angle P' AM \cong \angle BCM$  y  $\angle AP' M \cong \angle CBM$ , por ser ángulos alternos internos entre las paralelas  $\overleftrightarrow{AP'}$  y  $\overleftrightarrow{BC}$ ), con lo cual  $\frac{BL}{AP'} = \frac{I'_n L}{I'_n A}$  (5) y  $\frac{AP'}{AM} = \frac{BC}{CM}$  (6).

Como  $\angle AP' B \cong \angle CBP'$  (por ser alternos internos entre las paralelas  $\overleftrightarrow{AP'}$  y  $\overleftrightarrow{BC}$ ) y  $\angle CBP' \cong \angle ABP'$  (por ser  $\overleftrightarrow{BP'}$  bisectriz de  $\angle CBA$ ) por transitividad  $\angle AP' B \cong \angle ABP'$ , con lo cual se establece que el  $\triangle AP' B$  es isósceles, con  $\overline{AP'} \cong \overline{AB}$ . Así, al reemplazar en (5) y en (6), se tiene que  $\frac{BL}{AB} = \frac{I'_n L}{I'_n A}$  (7) y  $\frac{AB}{AM} = \frac{BC}{CM}$  (8).

Al multiplicar miembro a miembro (3) y (7) se obtiene  $\frac{AC}{LC} \cdot \frac{BL}{AB} = \frac{I_n A}{I_n L} \cdot \frac{I'_n L}{I'_n A}$  (9) y como de (8)  $AB = \frac{BC \cdot MA}{CM}$ , al reemplazar en (9), se llega a  $\frac{AC \cdot BL \cdot CM}{BC \cdot LC \cdot MA} = \frac{I_n A}{I_n L} \cdot \frac{I'_n L}{I'_n A}$  (10).

Luego, al sustituir (4) en (10), se obtiene  $\frac{AN \cdot BL \cdot CM}{NB \cdot LC \cdot MA} = \frac{I_n A}{I_n L} \cdot \frac{I'_n L}{I'_n A}$ , de donde se cumple que  $\frac{I_n A}{I_n L} \cdot \frac{I'_n L}{I'_n A} = 1$ , si y solo si  $I_n$  y  $I'_n$  son coincidentes o concurrentes (QED).

## 1.6. Ejercicios capítulo 1

1. Demostrar que un punto de la bisectriz de un ángulo está a igual distancia de los lados.
2. Demostrar que las bisectrices interior y exterior respecto de un ángulo de un triángulo son perpendiculares.
3. Demostrar que un punto de la mediatriz de un segmento está a igual distancia de los puntos extremos.
4. Demostrar que un triángulo es isósceles si tiene dos bisectrices iguales [teorema de Steiner-Lehmus].<sup>14</sup>
5. Demostrar que si en un triángulo dos medianas son iguales este es isósceles.
6. Demostrar que  $\overline{AR}$ ,  $\overline{BQ}$  y  $\overline{CP}$ , alturas del  $\triangle ABC$ , son las bisectrices del  $\triangle PQR$  (triángulo órtico). Así, el ortocentro  $O$  del triángulo  $\triangle ABC$  coincide con el incentro del  $\triangle PQR$ .<sup>15</sup>
7. Demostrar que  $R$ ,  $S$  y  $T$ , pies de las perpendiculares a los lados del  $\triangle ABC$ , trazadas desde un punto exterior  $P$ , están alineados,<sup>16</sup> si y solo si,  $P$  está sobre la circunferencia circunscrita.
8. Sea  $O$  el ortocentro del  $\triangle ABC$ ,  $P$  pie de una altura y  $Q$  el punto de intersección de  $\overrightarrow{OP}$  con la circunferencia inscrita. Demostrar que  $OP = PQ$ .<sup>17</sup>
9. Demostrar que el triángulo inscrito en un triángulo acutángulo dado, cuyo perímetro es mínimo, es el triángulo órtico [problema de Fagnano].<sup>18</sup>

<sup>14</sup> «Este teorema fue propuesto por primera vez en 1840 por C. L. Lehmus y lo demostró Jacobo Steiner» (Londoño, 2005, p. 310).

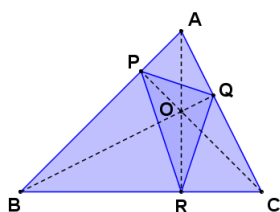
<sup>15</sup> Adaptado de Xambó (2000).

<sup>16</sup> La recta que une los pies de las perpendiculares se denomina *recta de Simson* del punto  $P$  relativa al triángulo (Xambó, 2000).

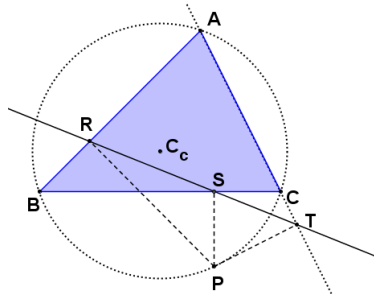
<sup>17</sup> Adaptado de Xambó (2000).

<sup>18</sup> Adaptado de Xambó (2000).

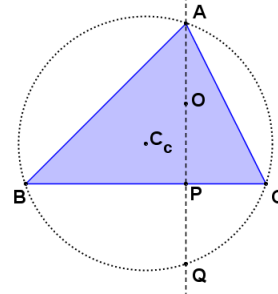
10. Si la recta de Euler de un triángulo pasa por uno de los vértices, probar que el triángulo es rectángulo o isósceles.<sup>19</sup>



Ejercicio No. 6



Ejercicio No. 7



Ejercicio No. 8

Fuente: elaboración propia.

11. Dado el  $\triangle ABC$  con  $I_n$  incentro, demuestre que el circuncentro del  $\triangle BI_nC$ , es el punto de intersección entre la circunferencia circunscrita al  $\triangle ABC$  y la bisectriz interior respecto del  $\angle A$ .<sup>20</sup>
12. Dados el  $\triangle ABC$  con  $I_n$  incentro y la circunferencia circunscrita al triángulo, con  $M$ ,  $N$  y  $P$  los puntos medios de los arcos  $BC$ ,  $CA$  y  $AB$ , correspondientemente, demuestre que si  $D$  y  $E$  son los puntos de intersección de  $\overline{MP}$  con  $\overline{AB}$  y de  $\overline{MN}$  con  $\overline{AC}$ , respectivamente, se cumple que  $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$  y que  $\overline{DE}$  pasa por  $I_n$ .<sup>21</sup>
13. Dado el  $\triangle ABC$  isósceles, con  $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ , si sobre  $\overline{BC}$  se escoge un punto  $P$  desde el cual se trazan  $\overline{PQ}$  y  $\overline{PS}$  perpendiculares a los lados iguales, probar que, independientemente de la elección de  $P$ ,  $PQ + PS$  es constante.<sup>22</sup>
14. Dado el  $\triangle ABC$  equilátero, probar que si desde cualquier punto del interior se trazan segmentos perpendiculares a cada lado, la suma de los tres segmentos resultantes es constante.<sup>23</sup>

<sup>19</sup> Adaptado de Xambó (2000).

<sup>20</sup> Adaptado de Castro (2010).

<sup>21</sup> Adaptado de Castro (2010).

<sup>22</sup> Adaptado de Velasco (1983).

<sup>23</sup> Adaptado de Velasco (1983).

15. Dado el  $\triangle ABC$  equilátero, probar que la suma de las distancias desde cualquier punto del plano hasta sus lados es constante e igual a la medida de la altura de dicho triángulo [teorema de Viviani].<sup>24</sup>
16. Demostrar que las circunferencias circunscritas de los triángulos equiláteros construidos exteriormente sobre los tres lados de un triángulo, concurren en un punto (punto de Fermat). Además, los centros de estos tres triángulos forman otro triángulo equilátero.<sup>25</sup>
17. Demostrar que la suma de las distancias desde el punto de Fermat a los vértices de un triángulo es la mínima.<sup>26</sup>
18. Dado un  $\triangle ABC$  cualquiera, con  $P$  un punto interior al triángulo. Si desde  $P$  se trazan las perpendiculares a los lados del triángulo, donde  $X$ ,  $Y$  y  $Z$  son los pies de las perpendiculares a  $\overline{BC}$ ,  $\overline{CA}$  y  $\overline{AB}$ , respectivamente (se dice que  $XYZ$  es el triángulo pedal del punto  $P$  relativo al  $\triangle ABC$ ), probar que  $YZ = \frac{a}{2r_c}PA$ ,  $ZX = \frac{b}{2r_c}PB$ ,  $XY = \frac{c}{2r_c}PC$  donde,  $r_c$  es el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo.<sup>27</sup>
19. Dado el  $\triangle ABC$  con  $a = BC$ ,  $b = AC$ ,  $c = AB$ ,  $D$  punto medio de  $\overline{BC}$ , y la mediana  $m_a = AD$ , probar que  $m_a = \frac{\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}}{2}$  [corolario del teorema de Apolonio].<sup>28</sup>
20. Dado el  $\triangle ABC$  con  $D$  punto de corte de la bisectriz interior respecto del  $\angle A$  con  $\overline{BC}$ , probar que la bisectriz divide a  $\overline{BC}$  en segmentos que son proporcionales a los otros dos lados  $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$  [teorema de la bisectriz].

<sup>24</sup> Adaptado de Cárdenas (2004).

<sup>25</sup> Adaptado de Xambó (2000).

<sup>26</sup> Adaptado de Xambó (2000).

<sup>27</sup> Adaptado de Xambó (2000).

<sup>28</sup> «Teorema de Apolonio (teorema de la mediana): para todo triángulo la suma de los cuadrados de dos lados cualesquiera, es igual al la mitad del cuadrado del tercer lado más el doble del cuadrado de su mediana correspondiente».  $b^2 + c^2 = \frac{1}{2}a^2 + 2(m_a)^2$ ;  $m_a$ : mediana respecto del lado  $a$ . Teorema de Apolonio (es.wikipedia.org)

21. Dado el  $\triangle ABC$  con  $a = BC$ ,  $b = AC$ ,  $c = AB$ ,  $M$  punto medio de  $\overline{BC}$  y  $D$  pie de la altura respecto del vértice  $A$ , probar que si  $b > c$ , entonces  $MD = \frac{b^2 - c^2}{2a}$  [corolario del teorema de Stewart].<sup>29</sup>
22. Dado el  $\triangle ABC$  con  $a = BC$ ,  $b = AC$ ,  $c = AB$  y  $D$  punto de corte de la bisectriz interior respecto del  $\angle A$  con  $\overline{BC}$ , probar que  $BD = \frac{ac}{b+c}$ .<sup>30</sup>
23. Dado el  $\triangle ABC$  con  $a = BC$ ,  $b = AC$ ,  $c = AB$ ,  $S = \frac{a+b+c}{2}$ ,  $D$  punto de corte de la bisectriz interior respecto del  $\angle A$  con  $\overline{BC}$ , donde la bisectriz  $b_a = AD$ , probar que  $b_a = \frac{2\sqrt{bcS(S-a)}}{b+c}$ .<sup>31</sup>
24. Comprobar que en todo triángulo la suma de los cuadrados de las medidas de las medianas es  $\frac{3}{4}$  de la suma de los cuadrados de las medidas de los lados.<sup>32</sup>
25. Dado el  $\triangle ABC$  con  $a = BC$ ,  $b = AC$ ,  $c = AB$ ,  $S = \frac{a+b+c}{2}$  y  $H$  pie de la altura del triángulo respecto de  $\overline{BC}$ , donde la altura  $h_a = AH$ , probar que  $h_a = \frac{2\sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}}{a}$  [fórmula de Herón].<sup>33</sup>
26. Probar que para todo  $\triangle ABC$  con  $a = BC$ ,  $b = AC$  y  $c = AB$ , donde  $a^2 + b^2 = 5c^2$ , dos de sus medianas son perpendiculares (es un triángulo ortomediano).<sup>34</sup>
27. Dados el  $\triangle ABC$  y  $\overline{HD}$  un segmento que pasa por el incentro, con  $H$  sobre  $\overline{AB}$  y  $D$  sobre  $\overline{AC}$ , demostrar que  $\frac{A(HBCD)}{A(AHD)} = \frac{HB + BC + CD}{AH + AD}$  [teorema de Haider].<sup>35</sup>

---

<sup>29</sup> «Si en un triángulo  $ABC$  se traza una ceviana (segmento que une el vértice  $A$  con el lado opuesto  $BC$ ), el punto de intersección  $D$  determina dos segmentos de longitudes  $m$  y  $n$ . Si  $d$  es la longitud de la ceviana y  $a$ ,  $b$ ,  $c$  las longitudes de los lados del triángulo, se cumple el teorema de Stewart:  $d^2a = nb^2 + mc^2 - nma$ ». Teorema de Stewart (matematicaseducativas.blogspot.com)

<sup>30</sup> Adaptado de Londoño (2005).

<sup>31</sup> Adaptado de Londoño (2005).

<sup>32</sup> Adaptado de Londoño (2005).

<sup>33</sup> Adaptado de Londoño (2005).

<sup>34</sup> Adaptado de Bellot (2005).

<sup>35</sup> “Haider’s Theorem. For any triangle  $ABC$  and any line  $l$ ,  $l$  divides the area and the perimeter of  $\triangle ABC$  in the same ratio if and only if it passes through the triangle’s incenter” (University of Regina., 2016).

## CAPÍTULO 2

### Coordenadas de los puntos notables de un triángulo

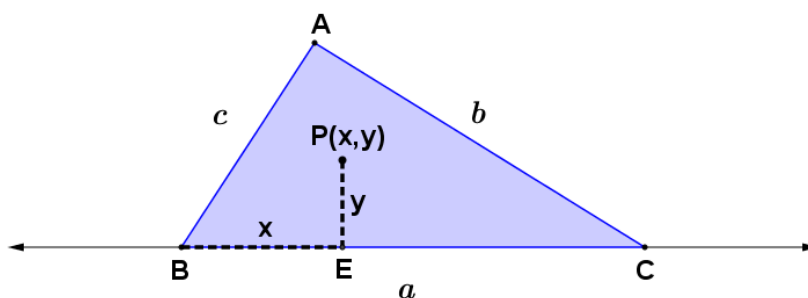
Este capítulo aborda la determinación analítica de las coordenadas de los puntos notables de un triángulo más comúnmente tratados en la geometría escolar, como son el circuncentro, el ortocentro, el incentro y el gravicentro. Para ello se establece un vértice como punto de referencia y la línea que contiene a uno de los lados como recta de referencia, a partir de lo cual se desarrollan las fórmulas que permiten la ubicación de los puntos notables en términos de la longitud de los lados y en términos de las coordenadas cartesianas de sus vértices.

Una vez obtenidas las coordenadas de los puntos notables en términos de la longitud de los lados se establecen las fórmulas que permiten obtener las distancias entre ellos, y así comprobar la razón métrica entre sus distancias. Por último, se determinan las fórmulas para hallar la medida de los radios de las circunferencias inscritas y circunscritas de un triángulo.

## 2.1. Coordenadas de un punto notable respecto de un vértice y un lado de un triángulo

Para determinar la ubicación de un punto notable  $P$  del  $\triangle ABC$  (figura 2.1.), en este texto, se adoptará el vértice  $B$  como punto de referencia y  $\overleftrightarrow{BC}$  como recta de referencia, con lo cual, las coordenadas del punto notable  $P(x, y)$  corresponden a  $y = PE$  y  $x = BE$ , donde  $E$  es el pie de la perpendicular trazada desde el punto  $P$  sobre  $\overleftrightarrow{BC}$ .

Figura 2.1. Coordenadas de un punto notable respecto del vértice  $B$  del  $\triangle ABC$  y la recta  $BC$



Fuente: elaboración propia.

Los valores de  $x$  se consideran positivos hacia la derecha de  $B$  y negativos hacia la izquierda. Los valores de  $y$  se consideran positivos hacia arriba de  $\overleftrightarrow{BC}$  y negativos hacia abajo.

## 2.2. Coordenadas de los puntos notables de un triángulo en términos de la longitud de sus lados

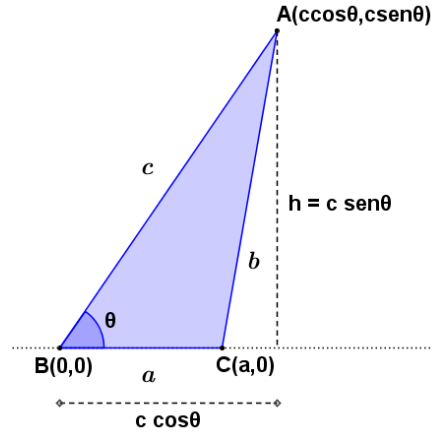
### 2.2.1. Coordenadas de los vértices de un triángulo en términos de la longitud de sus lados

Sea el  $\triangle ABC$  con  $a = BC$ ,  $b = AC$ ,  $c = AB$  y  $\theta$  el ángulo entre  $\overline{AB}$  y  $\overline{BC}$ , el cual se denominará *ángulo base* (figura 2.2.).



Tomando el vértice  $B$  como punto de referencia y  $\overleftrightarrow{BC}$  como recta de referencia, se tiene que las coordenadas de los vértices del  $\triangle ABC$  en términos del ángulo base son  $B(0, 0)$ ,  $C(a, 0)$  y  $A(ccos\theta, csen\theta)$ , donde la altura del triángulo respecto al lado  $a$  es  $h = csen\theta$ .

Figura 2.2. Coordenadas de los vértices del  $\triangle ABC$  en términos del ángulo base  $\theta$



Fuente: elaboración propia.

De acuerdo con las coordenadas de los vértices  $A$ ,  $B$  y  $C$ , se tiene que:

- Para  $\overleftrightarrow{AB}$ ,  $m_{\overleftrightarrow{AB}} = \frac{sen\theta}{cos\theta}$  y por lo tanto su ecuación es  $y = \frac{sen\theta}{cos\theta}x$ .
- Para  $\overleftrightarrow{AC}$ ,  $m_{\overleftrightarrow{AC}} = \frac{csen\theta}{ccos\theta - a}$  y por lo tanto su ecuación es  $y = \frac{csen\theta}{ccos\theta - a}(x - a)$ .
- Para  $\overleftrightarrow{BC}$ ,  $m_{\overleftrightarrow{BC}} = 0$  y por lo tanto su ecuación es  $y = 0$ .

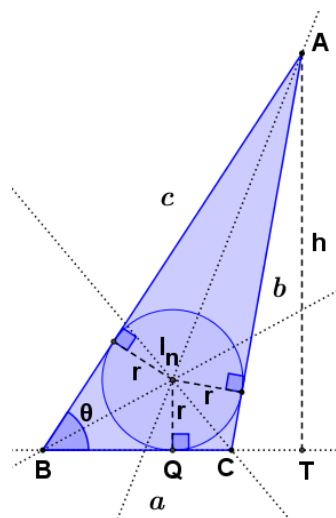
Al hacer uso del teorema del coseno  $b^2 = a^2 + c^2 - 2accos\theta$ , se tiene que  $cos\theta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$  y  $sen\theta = \sqrt{1 - \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}\right)^2}$ , de donde, al hacer  $\Omega = a^2 + c^2 - b^2$  y  $\Delta_0 = 4a^2c^2 - \Omega^2$ , los vértices de un triángulo en términos de la longitud de los lados son:

$$B = (0, 0), C = (a, 0) \text{ y } A = \left(\frac{\Omega}{2a}, \frac{\sqrt{\Delta_0}}{2a}\right)$$

### 2.2.2. Coordenadas del incentro en términos de la longitud de los lados

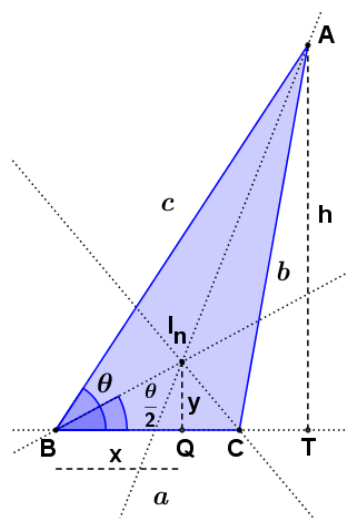
Sea el  $\triangle ABC$  con  $a = BC$ ,  $b = AC$ ,  $c = AB$ ,  $\theta$  ángulo base,  $I_n$  el incentro y  $r$  radio de la circunferencia inscrita (perpendicular trazada desde  $I_n$  hasta cada uno de los lados del triángulo) (figura 2.3.).

Figura 2.3. Incentro y radio de la circunferencia inscrita



Fuente: elaboración propia.

Figura 2.4. Coordenadas del incentro respecto del vértice B del  $\triangle ABC$  y la recta BC



Fuente: elaboración propia.

Trácese la altura del  $\triangle ABC$  respecto de  $\overline{BC}$ , cuyo pie es  $T$ , y hágase  $h = AT$ . Al unir  $I_n$  con cada uno de los vértices  $A$ ,  $B$  y  $C$  se forman los triángulos  $\triangle ABI_n$ ,  $\triangle BCI_n$  y  $\triangle CAI_n$ , para cada uno de los cuales  $r$  es su altura. Luego, el área total del  $\triangle ABC$  es igual a la suma de las áreas de los triángulos en que queda subdividido, esto es,  $A(\triangle ABC) = A(\triangle ABI_n) + A(\triangle BCI_n) + A(\triangle CAI_n)$ , donde  $A(\triangle ABC) = \frac{ar}{2} + \frac{br}{2} + \frac{cr}{2} = \frac{r(a+b+c)}{2} = \frac{Pr}{2}$ , con  $P = a+b+c$ .

Por lo tanto, como  $A(\triangle ABC) = \frac{ah}{2}$  se puede establecer que  $r = \frac{ah}{P}$ , con lo cual, al ser  $h = c \operatorname{sen} \theta$ , se tiene que  $r = \frac{ac \operatorname{sen} \theta}{P}$ .

Así, al hacer  $y = r$ , altura del  $\triangle BCI_n$  respecto de  $\overline{BC}$  y cuyo pie es  $Q$  (figura 2.4.),  $x = BQ$ , y considerando que  $\overline{BI_n}$  hace parte de la bisectriz del ángulo  $\theta$ , se tiene que  $y = \frac{\text{acsen}\theta}{P}$  y  $x = \frac{y}{\tan(\frac{\theta}{2})}$ , donde  $\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1 - \cos\theta}{\text{sen}\theta}$  y, por lo tanto,  $x = \frac{ac(1 + \cos\theta)}{P}$ .

Luego, las coordenadas del incentro  $I_n$  respecto del vértice  $B$  y la recta de referencia  $BC$  (sección 2.1.), en términos del ángulo base  $\theta$ , están dadas por:

$$I_n = \left( \frac{ac(1 + \cos\theta)}{P}, \frac{\text{acsen}\theta}{P} \right) \quad (2.1)$$

y en términos de la longitud de los lados (sección 2.2.1.):

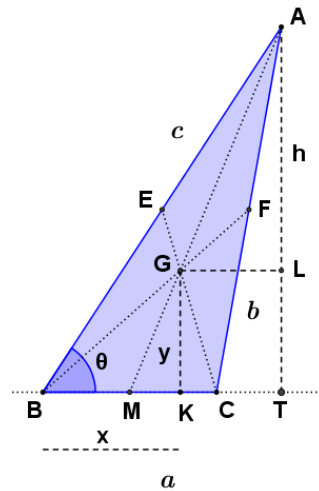
$$I_n = \left( S - b, \frac{\sqrt{\Delta_0}}{2P} \right) \quad (2.2)$$

### 2.2.3. Coordenadas del gravicentro en términos de la longitud de los lados

Sea el  $\triangle ABC$  con  $a = BC$ ,  $b = AC$ ,  $c = AB$ ,  $\theta$  ángulo base,  $G$  el gravicentro,  $M$  punto medio de  $\overline{BC}$  y  $\overline{AM}$  mediana (figura 2.5.).

Por el teorema de concurrencia de las medianas (teorema 4, sección 1.2.4.), se tiene que  $GA = \frac{2}{3}AM$  y  $MG = \frac{1}{3}AM$  (1). Trácese la altura del  $\triangle ABC$  respecto de  $\overline{BC}$  cuyo pie es  $T$ , con lo cual se forma el  $\triangle MAT$ . Al trazarse la paralela a  $\overline{BC}$  que pasa por el punto  $G$ , y la cual corta a  $\overline{AT}$  en  $L$ , se obtiene  $\triangle GAL \sim \triangle MAT$  (criterio A. A., dado que  $\angle AGL \cong \angle AMT$

Figura 2.5. Coordenadas del gravicentro respecto del vértice  $B$  del  $\triangle ABC$  y la recta  $BC$



Fuente: elaboración propia.

y  $\angle ALG \cong \angle ATM$ , por ser ángulos correspondientes entre las paralelas  $\overleftrightarrow{GL}$  y  $\overleftrightarrow{MT}$ , con lo cual  $\frac{\frac{2}{3}MA}{\frac{1}{3}MA} = \frac{AL}{LT}$ . Así,  $2LT = AL$  y como  $AL = AT - LT$ , entonces,  $LT = \frac{1}{3}AT$ .

Luego, al ser  $AT = c \operatorname{sen} \theta$  y al hacer  $y = LT$ , se obtiene  $y = \frac{c \operatorname{sen} \theta}{3}$ .

Al trazar por el punto  $G$  la paralela a  $\overline{AT}$ , la cual corta a  $\overline{BC}$  en  $K$ , se genera el  $\triangle MGK \sim \triangle MAT$  (criterio A. A., dado que  $\angle MGK \cong \angle MAT$ , por ser ángulos correspondientes entre las paralelas  $\overleftrightarrow{GK}$  y  $\overleftrightarrow{AT}$ ), con lo cual  $\frac{MK}{MT} = \frac{MG}{MA}$  y de donde  $MK = \frac{MT \cdot MG}{MA}$  (2).

Como  $BT = c \cos \theta$  y  $BM = \frac{a}{2}$  se tiene que  $MT = BT - BM$ , con lo cual  $MT = \frac{2c \cos \theta - a}{2}$  (3), luego, al reemplazar (1) y (3) en (2)  $MK = \frac{2c \cos \theta - a}{6}$ . Al hacer  $x = BK$  y dado que  $BK = BM + MK$  se obtiene  $x = \frac{a + c \cos \theta}{3}$ .

Así, las coordenadas del gravicentro  $G$  respecto del vértice  $B$  y la recta de referencia  $BC$  (sección 2.1.), en términos del ángulo base  $\theta$ , están dadas por:

$$G = \left( \frac{a + c \cos \theta}{3}, \frac{c \operatorname{sen} \theta}{3} \right) \quad (2.3)$$

y en términos de la longitud de los lados (sección 2.2.1.)

$$G = \left( \frac{2a^2 + \Omega}{6a}, \frac{\sqrt{\Delta_0}}{6a} \right) \quad (2.4)$$

#### 2.2.4. Coordenadas del circuncentro en términos de la longitud de los lados

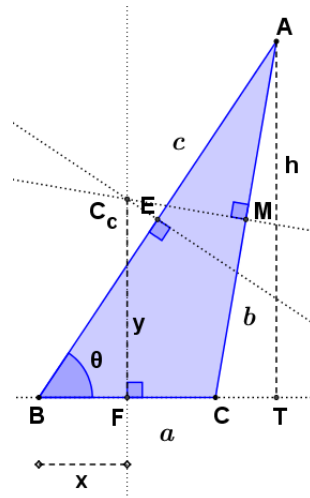
Sea el  $\triangle ABC$  con  $a = BC$ ,  $b = AC$ ,  $c = AB$ ,  $\theta$  ángulo base,  $C_c$  el circuncentro,  $F$  punto medio de  $\overline{BC}$  y  $M$  punto medio de  $\overline{AC}$  (figura 2.6.).

Únase  $C_c$  con  $F$  y con  $M$ . Luego, al hacer  $y = FC_c$  y  $x = BF = \frac{a}{2}$ , las coordenadas de  $C_c$  respecto del vértice  $B$  (sección 2.1.) están dadas por  $C_c = \left( \frac{a}{2}, y \right)$ . Al ser  $M$  punto

medio de  $\overline{AC}$ , con  $A(ccos\theta, csen\theta)$  y  $C(a, 0)$  aplicando la fórmula del punto medio, se tiene que  $M = \left( \frac{ccos\theta + a}{2}, \frac{csen\theta}{2} \right)$ .

Como  $\overline{MC_c}$  es mediatriz de  $\overline{AC}$ , entonces  $\overline{MC_c} \perp \overline{AC}$  y, por lo tanto,  $m_{\overline{MC_c}} \cdot m_{\overline{AC}} = -1$ , donde  $m_{\overline{AC}} = \frac{csen\theta}{ccos\theta - a}$ , luego,  $m_{\overline{MC_c}} = \frac{a - ccos\theta}{csen\theta}$ .

Figura 2.6. Coordenadas del circuncentro respecto del vértice  $B$  del  $\triangle ABC$  y la recta  $BC$



Fuente: elaboración propia.

Así, para  $\overline{MC_c}$  se cumple que  $\frac{y - csen\theta}{2} = \frac{a - ccos\theta}{csen\theta} \cdot \left( \frac{a}{2} - \frac{ccos\theta + a}{2} \right)$ , con lo cual  $y = \frac{c - acos\theta}{2sen\theta}$ .

Luego, las coordenadas del circuncentro  $C_c$  respecto del vértice  $B$  y la recta de referencia  $BC$  (sección 2.1.), en términos del ángulo base  $\theta$ , están dadas por:

$$C_c = \left( \frac{a}{2}, \frac{c - acos\theta}{2sen\theta} \right) \quad (2.5)$$

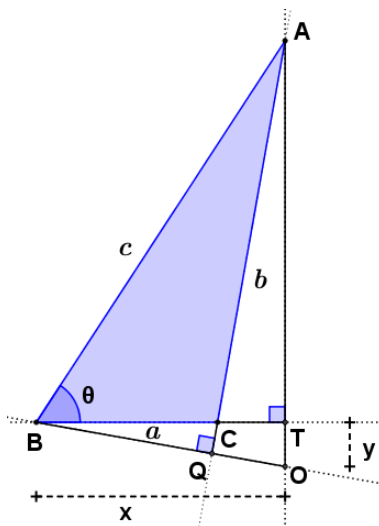
y en términos de la longitud de los lados (sección 2.2.1.):

$$C_c = \left( \frac{a}{2}, \frac{a(c^2 + b^2 - a^2)}{2\sqrt{\Delta_0}} \right) \quad (2.6)$$

### 2.2.5. Coordenadas del ortocentro en términos de la longitud de los lados

Sea el  $\triangle ABC$  con  $a = BC$ ,  $b = AC$ ,  $c = AB$ ,  $\theta$  ángulo base,  $O$  el ortocentro, (figura 2.7.).

Figura 2.7. Coordenadas del ortocentro respecto del vértice  $B$  del  $\triangle ABC$  y la recta  $BC$



Fuente: elaboración propia.

Trácese  $\overline{OA}$  y  $\overline{OB}$ , segmentos de las rectas de las alturas del triángulo, donde,  $T$  y  $Q$  son los pies de las alturas respecto de  $\overleftrightarrow{BC}$  y  $\overleftrightarrow{AC}$ , respectivamente.

De la construcción hecha, se tiene que  $\triangle CTA \sim \triangle CQB$  (por criterio A. A., dado que  $\angle CTA \cong \angle CQB$ , por ser ambos rectos, y  $\angle ACT \cong \angle BCQ$ , por ser opuestos por el vértice), luego,  $\angle TAC \cong \angle QBC$  (1).

Adicionalmente, se tiene que  $\triangle CTA \sim \triangle OTB$  (por criterio A. A., dado que  $\angle OTB \cong \angle CTA$ , por ser ambos rectos, y  $\angle TBO \cong \angle QBC \cong \angle TAC$  de (1)), con lo cual  $\frac{BT}{AT} = \frac{TO}{CT}$  o  $TO = \frac{BT \cdot CT}{AT}$ .

Como  $BT = c \cos \theta$ ,  $AT = c \sin \theta$  y  $CT = BT - BC = c \cos \theta - a$ , entonces,  $TO = \frac{c \cos \theta - a}{\tan \theta}$  (como distancia).

Al hacer  $x = BT$  e  $y = TO$  y considerando que, respecto del vértice  $B$  y la recta de referencia  $BC$ , la ordenada  $y$  está dirigida en sentido negativo (sección 2.1.), se tiene que las coordenadas del ortocentro  $O$ , en términos del ángulo base, están dadas por:

$$O = \left( c \cos \theta, \frac{a - c \cos \theta}{\tan \theta} \right) \quad (2.7)$$

y en términos de la longitud de los lados (sección 2.2.1.):

$$O = \left( \frac{\Omega}{2a}, \frac{2a^2\Omega - \Omega^2}{2a\sqrt{\Delta_0}} \right) \quad (2.8)$$

### 2.3. Coordenadas de los puntos notables en términos de las coordenadas cartesianas de los vértices de un triángulo<sup>36</sup>

#### 2.3.1. Elementos de un triángulo en términos de las coordenadas cartesianas de los vértices

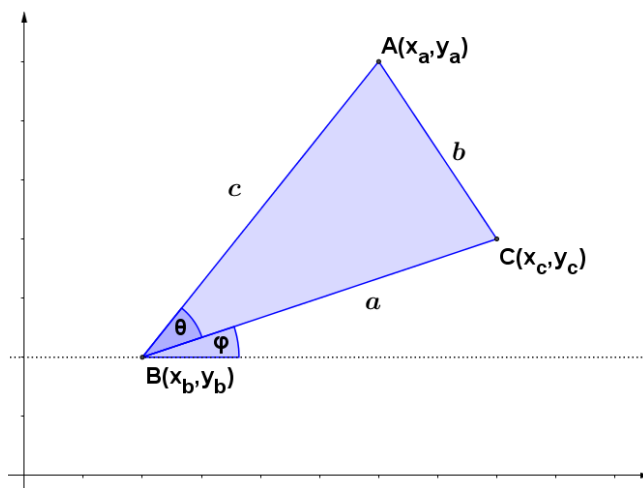
Sea el  $\triangle ABC$  con  $A = (x_a, y_a)$ ,  $B = (x_b, y_b)$  y  $C = (x_c, y_c)$ ,  $a = BC$ ,  $b = AC$ ,  $c = AB$ ,  $\theta$  ángulo base entre los lados  $\overline{AB}$  y  $\overline{BC}$  y  $\varphi$  el ángulo de giro del triángulo respecto de una paralela al eje  $x$  que pasa por el vértice  $B$  del triángulo (figura 2.8.).

De acuerdo con la figura 2.8., se tiene que  $a = \sqrt{(x_c - x_b)^2 + (y_c - y_b)^2}$ ,  $b = \sqrt{(x_c - x_a)^2 + (y_c - y_a)^2}$ ,  $c = \sqrt{(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2}$ ,  $\text{sen} \varphi = \frac{y_c - y_b}{a}$ ,  $\text{sen}(\theta + \varphi) = \frac{y_a - y_b}{c}$ ,  $\text{cos} \varphi = \frac{x_c - x_b}{a}$  y  $\text{cos}(\theta + \varphi) = \frac{x_a - x_b}{c}$ .

---

<sup>36</sup> En el portal RiuNet de la Universitat Politècnica de València, se puede acceder al laboratorio virtual diseñado por José Luis Hueso Hueso Pagoaga (2011), en el cual el usuario introduce las coordenadas de los vértices de un triángulo obteniéndose los puntos notables del triángulo (uno a uno), sin hacerse referencia teórica de la forma de obtener dichos puntos.

Figura 2.8. Coordenadas cartesianas de los vértices de un triángulo



Fuente: elaboración propia.

Tomando el ángulo  $\theta$  en sentido positivo, esto es,  $m_{\overrightarrow{BA}}$  es la pendiente del lado final del ángulo y  $m_{\overrightarrow{BC}}$  la pendiente del lado inicial del ángulo, se tiene que  $m_{\overrightarrow{BA}} = \frac{y_a - y_b}{x_a - x_b}$  y  $m_{\overrightarrow{BC}} = \frac{y_c - y_b}{x_c - x_b}$ , de donde,  $\tan\theta = \frac{m_{\overrightarrow{BA}} - m_{\overrightarrow{BC}}}{1 + m_{\overrightarrow{BA}} \cdot m_{\overrightarrow{BC}}}$ .

«... en cualquier caso, en el numerador aparece la pendiente de la recta final menos la pendiente de la recta inicial» (De Oteyza, E. *et all*, 2011, p.67).

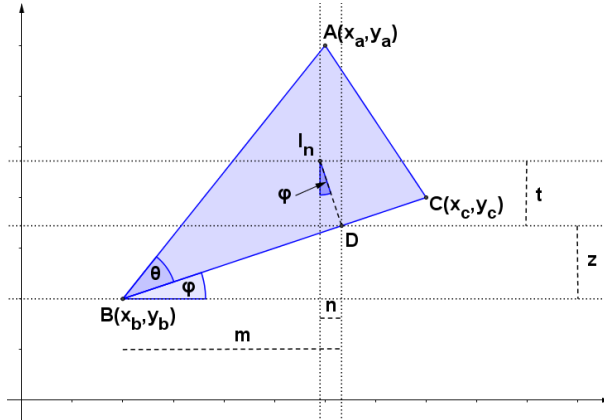
### 2.3.2. Coordenadas del incentro en términos de las coordenadas cartesianas de los vértices de un triángulo

Sea el  $\triangle ABC$  con  $a = BC$ ,  $b = AC$ ,  $c = AB$ ,  $I_n$  incentro y  $D$  pie de la perpendicular trazada desde  $I_n$  hasta  $\overline{BC}$  (figura 2.9.), cuyas coordenadas cartesianas del incentro están dadas por:

$$I_n = (x_b + m - n, y_b + z + t), \text{ donde } t = (I_n D)\cos\varphi, z = (BD)\sen\varphi, m = (BD)\cos\varphi \text{ y } n = (I_n D)\sen\varphi.$$



Figura 2.9. Coordenadas del incentro en un sistema cartesiano



Fuente: elaboración propia.

Como las coordenadas del incentro respecto del vértice  $B$  y la recta de referencia  $\overleftrightarrow{BC}$  (sección 2.1.) corresponden a  $I_n = (BD, I_nD)$ , entonces, dada la ecuación 2.1 (sección 2.2.2.), se tiene que  $m - n = \frac{ac(\cos\varphi + \cos(\theta + \varphi))}{P}$  y  $z + t = \frac{ac(\sen\varphi + \sen(\theta + \varphi))}{P}$ , con lo cual, en términos de los vértices de un triángulo (sección 2.3.1.):

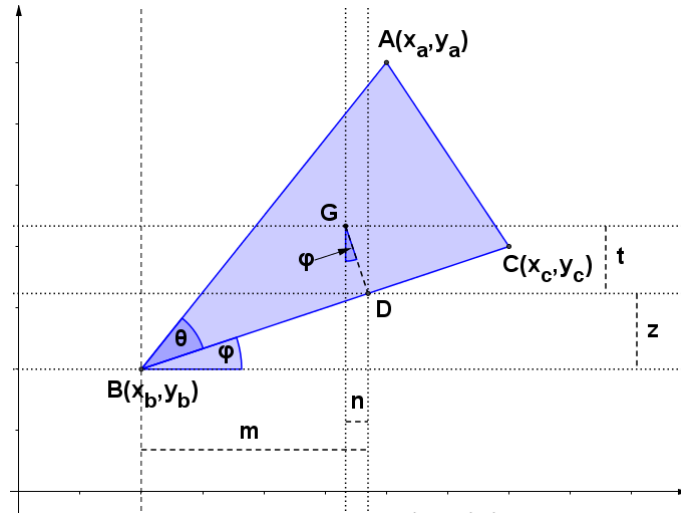
$$I_n = \left( \frac{ax_a + bx_b + cx_c}{P}, \frac{ay_a + by_b + cy_c}{P} \right) \quad (2.9)$$

### 2.3.3. Coordenadas del gravicentro en términos de las coordenadas cartesianas de los vértices de un triángulo

Sea el  $\triangle ABC$  con  $a = BC$ ,  $b = AC$ ,  $c = AB$ ,  $G$  gravicentro y  $D$  pie de la perpendicular trazada desde  $G$  hasta  $\overline{BC}$  (figura 2.10.), cuyas coordenadas cartesianas del gravicentro están dadas por  $G = (x_b + m - n, y_b + z + t)$ , donde  $t = (GD)\cos\varphi$ ,  $z = (BD)\sen\varphi$ ,  $m = (BD)\cos\varphi$  y  $n = (GD)\sen\varphi$ .

Como las coordenadas del gravicentro respecto del vértice  $B$  y la recta de referencia  $\overleftrightarrow{BC}$  (sección 2.1.) corresponden a  $G = (BD, GD)$ , entonces, dada la ecuación 2.3 (sección 2.2.3.), se tiene que  $m - n = \frac{acos\varphi + c\cos(\theta + \varphi)}{3}$  y  $z + t = \frac{a\sen\varphi + c\sen(\theta + \varphi)}{3}$ , con lo cual, en términos de los vértices de un triángulo (sección 2.3.1.):

Figura 2.10. Coordenadas del gravicentro en un sistema cartesiano



Fuente: elaboración propia.

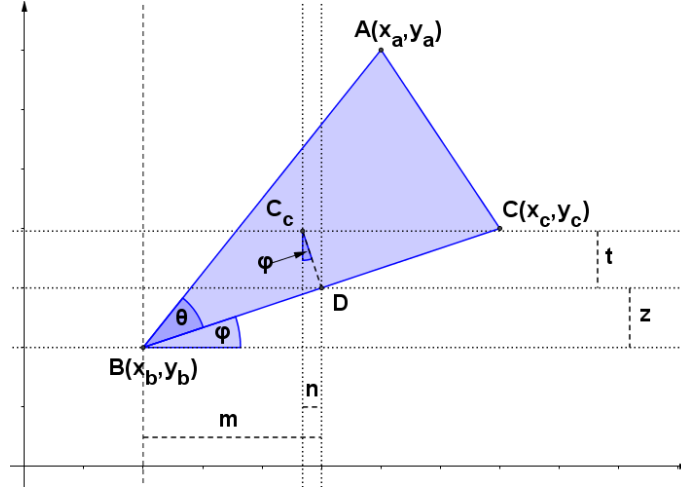
$$G = \left( \frac{x_a + x_b + x_c}{3}, \frac{y_a + y_b + y_c}{3} \right) \quad (2.10)$$

### 2.3.4. Coordenadas del circuncentro en términos de las coordenadas cartesianas de los vértices de un triángulo

Sea el  $\triangle ABC$  con  $a = BC$ ,  $b = AC$ ,  $c = AB$ ,  $C_c$  circuncentro y  $D$  pie de la perpendicular trazada desde  $C_c$  hasta  $\overline{BC}$  (figura 2.11.), cuyas coordenadas cartesianas del circuncentro están dadas por  $C_c = (x_b + m - n, y_b + z + t)$ , donde  $t = (C_cD)\cos\varphi$ ,  $z = (BD)\sen\varphi$ ,  $m = (BD)\cos\varphi$  y  $n = (C_cD)\sen\varphi$ .

Como las coordenadas del circuncentro respecto del vértice  $B$  y la recta de referencia  $\overleftrightarrow{BC}$  (sección 2.1.) corresponden a  $C_c = (BD, C_cD)$ , entonces, dada la ecuación 2.5 (sección 2.2.4.), se tiene que  $m - n = \frac{-c\sen\varphi + a\sen(\theta + \varphi)}{2\sen\theta}$  y  $z + t = \frac{c\cos\varphi - a\cos(\theta + \varphi)}{2\sen\theta}$ , con lo cual, en términos de los vértices de un triángulo (sección 2.3.1.):

Figura 2.11. Coordenadas del circuncentro en un sistema cartesiano



Fuente: elaboración propia.

$$C_c = \left( x_b + \frac{a^2(y_a - y_b) - c^2(y_c - y_b)}{\Omega \tan \theta}, y_b + \frac{c^2(x_c - x_b) - a^2(x_a - x_b)}{\Omega \tan \theta} \right)$$

Desarrollando  $\Omega$  y  $\tan \theta$  en términos de las coordenadas de los vértices, se obtiene:

$$\Omega = 2[x_a x_c - x_a x_b - x_b x_c + x_b^2 + y_a y_c - y_a y_b - y_b y_c + y_b^2]$$

$$\tan \theta = \frac{(y_a - y_b)(x_c - x_b) - (y_c - y_b)(x_a - x_b)}{x_a x_c - x_a x_b - x_b x_c + x_b^2 + y_a y_c - y_a y_b - y_b y_c + y_b^2}$$

de donde,

$$\Omega \tan \theta = 2[(y_a - y_b)(x_c - x_b) - (y_c - y_b)(x_a - x_b)].$$

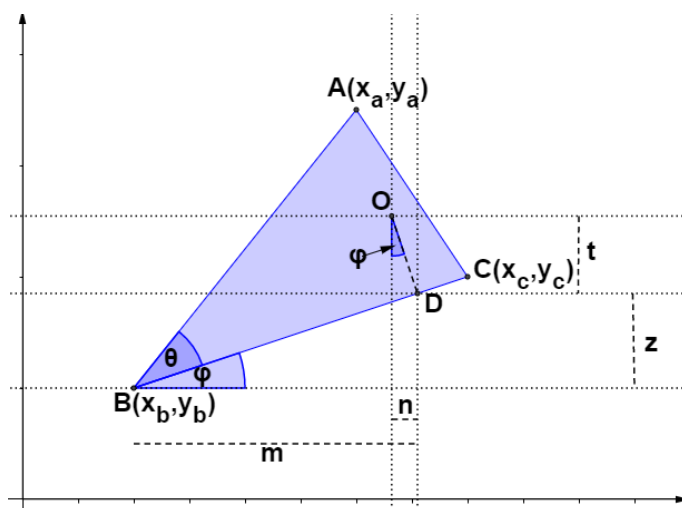
Así:

$$C_c = \left( x_b + \frac{a^2(y_a - y_b) - c^2(y_c - y_b)}{2[(y_a - y_b)(x_c - x_b) - (y_c - y_b)(x_a - x_b)]}, y_b + \frac{c^2(x_c - x_b) - a^2(x_a - x_b)}{2[(y_a - y_b)(x_c - x_b) - (y_c - y_b)(x_a - x_b)]} \right) \quad (2.11)$$

### 2.3.5. Coordenadas del ortocentro en términos de las coordenadas cartesianas de los vértices de un triángulo

Sea el  $\triangle ABC$  con  $a = BC$ ,  $b = AC$ ,  $c = AB$ ,  $O$  ortocentro y  $D$  pie de la perpendicular trazada desde  $O$  hasta  $\overline{BC}$  (figura 2.12.), cuyas coordenadas cartesianas del ortocentro están dadas por  $O = (x_b + m - n, y_b + z + t)$ , donde  $t = (OD)\cos\varphi$ ,  $z = (BD)\sen\varphi$ ,  $m = (BD)\cos\varphi$  y  $n = (OD)\sen\varphi$ .

Figura 2.12. Coordenadas del ortocentro en un sistema cartesiano



Fuente: elaboración propia.

Como las coordenadas del ortocentro respecto del vértice  $B$  y la recta de referencia  $\overleftrightarrow{BC}$  (sección 2.1.) corresponden a  $O = (BD, OD)$ , entonces, dada la ecuación 2.7 (sección 2.2.5.), se tiene que  $m - n = \frac{-a\sen\varphi + c\sen(\theta + \varphi)}{\tan\theta}$  y  $z + t = \frac{a\cos\varphi - c\cos(\theta + \varphi)}{\tan\theta}$ , con lo cual, en términos de los vértices de un triángulo (sección 2.3.1.):

$$O = \left( x_b + \frac{y_a - y_c}{\tan\theta}, y_b + \frac{x_c - x_a}{\tan\theta} \right)$$

de donde:

$$O = \left( x_b + \frac{(y_a - y_c)[(x_a - x_b)(x_c - x_b) + (y_a - y_b)(y_c - y_b)]}{(y_a - y_b)(x_c - x_b) - (y_c - y_b)(x_a - x_b)}, \right. \\ \left. y_b + \frac{(x_c - x_a)[(x_a - x_b)(x_c - x_b) + (y_a - y_b)(y_c - y_b)]}{(y_a - y_b)(x_c - x_b) - (y_c - y_b)(x_a - x_b)} \right) \quad (2.12)$$

## 2.4. Distancia entre los puntos notables de un triángulo en términos de la longitud de los lados

Para determinar la distancia entre puntos notables, se parte de considerar las coordenadas de dichos puntos y aplicar la fórmula de la distancia, en un sistema coordenado.

### 2.4.1. Distancia entre el circuncentro y el ortocentro (longitud del segmento de Euler) en términos de la longitud de los lados

De las ecuaciones 2.5 (sección 2.2.4.) y 2.7 (sección 2.2.5.), se tiene que

$$d(C_c, O) = \sqrt{\left(\frac{a}{2} - c \cos \theta\right)^2 + \left(\frac{c - a \cos \theta}{2 \sin \theta} - \frac{a - c \cos \theta}{\tan \theta}\right)^2}, \text{ con lo cual:}$$

$$d(C_c, O) = \frac{1}{2 \sin \theta} \sqrt{(a^2 + c^2) - 10ac \cos \theta + 8(a^2 + c^2) \cos^2 \theta - 8ac \cos^3 \theta} \quad (2.13)$$

y en términos de la longitud de los lados (sección 2.2.1.):

$$d(C_c, O) = \sqrt{\frac{a^2 b^2 c^2 - 4a^2 c^2 \Omega + 2b^2 \Omega^2 + \Omega^3}{\Delta_0}} \quad (2.14)$$

### 2.4.2. Distancia entre el gravicentro y el ortocentro en términos de la longitud de los lados

De las ecuaciones 2.3 (sección 2.2.3.) y 2.7 (sección 2.2.5.), se tiene que

$$d(G, O) = \sqrt{\left(\frac{a + c \cos \theta}{3} - c \cos \theta\right)^2 + \left(\frac{c \sin \theta}{3} - \frac{a - c \cos \theta}{\tan \theta}\right)^2}, \text{ con lo cual:}$$

$$d(G, O) = \frac{1}{3 \sin \theta} \sqrt{(a^2 + c^2) - 10ac \cos \theta + 8(a^2 + c^2) \cos^2 \theta - 8ac \cos^3 \theta} \quad (2.15)$$

y en términos de la longitud de los lados (sección 2.2.1.):

$$d(G, O) = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{a^2 b^2 c^2 - 4a^2 c^2 \Omega + 2b^2 \Omega^2 + \Omega^3}{\Delta_0}} \quad (2.16)$$

Así, de las ecuaciones 2.14 y 2.16 se puede determinar que  $d(G, O) = \frac{2}{3} d(C_c, O)$ .

### 2.4.3. Distancia entre el gravicentro y el circuncentro en términos de la longitud de los lados

De las ecuaciones 2.3 (sección 2.2.3.) y 2.5 (sección 2.2.4.), se tiene que

$$d(G, C_c) = \sqrt{\left(\frac{a}{2} - \frac{a + c \cos \theta}{3}\right)^2 + \left(\frac{c - a \cos \theta}{2 \sin \theta} - \frac{c \sin \theta}{3}\right)^2}, \text{ con lo cual:}$$

$$d(G, C_c) = \frac{1}{6 \sin \theta} \sqrt{(a^2 + c^2) - 10ac \cos \theta + 8(a^2 + c^2) \cos^2 \theta - 8ac \cos^3 \theta} \quad (2.17)$$

y en términos de la longitud de los lados (sección 2.2.1.):

$$d(G, C_c) = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{a^2 b^2 c^2 - 4a^2 c^2 \Omega + 2b^2 \Omega^2 + \Omega^3}{\Delta_0}} \quad (2.18)$$

Así, de las ecuaciones 2.14 y 2.18 se puede determinar que  $d(G, C_c) = \frac{1}{3} d(C_c, O)$ .

#### 2.4.4. Razón de las distancias entre los puntos notables en términos de la longitud de los lados

La razón entre la distancia desde el gravicentro al ortocentro (ecuación 2.16) y la distancia desde el gravicentro al circuncentro (ecuación 2.18) es  $\frac{d(G, O)}{d(G, C_c)} = 2$ , esto es,  $d(G, O) = 2d(G, C_c)$ .

Como un **caso especial** se tiene que si  $a = b = c$  y  $\theta = 60^\circ$ , es decir, en el caso particular de un triángulo equilátero,

$$d(G, O) = \frac{a}{3\text{sen}60^\circ} \sqrt{2 - 10\text{cos}60^\circ + 16\text{cos}^260^\circ - 8\text{cos}^360^\circ} = 0,$$

de igual manera,  $d(G, C_c) = 0$ , lo cual indica que para los triángulos equiláteros los puntos  $C_c$ ,  $G$  y  $O$  son coincidentes.

### 2.5. Radios de las circunferencias inscrita y circunscrita de un triángulo

#### 2.5.1. Radio de la circunferencia inscrita en términos de la longitud de los lados

Como la ordenada  $y$  del incentro (ecuación 2.1, sección 2.2.2.) corresponde a la distancia desde este hasta el lado  $a$ , se tiene que esta distancia corresponde al radio de la circunferencia inscrita  $r_i$  (figura 2.3.), esto es:

$$r_i = \frac{a\text{csen}\theta}{P} \quad (2.19)$$

y en términos de la longitud de los lados (sección 2.2.1.):

$$r_i = \frac{\sqrt{\Delta_0}}{2P} \quad (2.20)$$

### 2.5.2. Radio de la circunferencia circunscrita en términos de la longitud de los lados

Como el radio de la circunferencia circunscrita de un triángulo  $r_c$  corresponde a la distancia entre el circuncentro  $C_c = \left(\frac{a}{2}, \frac{c - a \cos \theta}{2 \operatorname{sen} \theta}\right)$  y uno de sus vértices, al determinar la distancia entre el circuncentro y el vértice  $B(0,0)$  se tiene que:

$$r_c = d(C_c, B) = \sqrt{\left(\frac{a}{2} - a\right)^2 + \left(\frac{c - a \cos \theta}{2 \operatorname{sen} \theta} - 0\right)^2}$$

donde,

$$r_c = \frac{b}{2 \operatorname{sen} \theta} \tag{2.21}$$

Así, la distancia desde el circuncentro hasta los vértices de un triángulo (radio de la circunferencia circunscrita) es mínima cuando  $\theta = 90^\circ$  (para triángulos rectángulos) y tiende a infinito cuando  $\theta = 0^\circ$  o  $\theta = 180^\circ$ .

En términos de la longitud de los lados (sección 2.2.1.):

$$r_c = \frac{abc}{\sqrt{\Delta_0}} \tag{2.22}$$

En las tablas 2.1. a 2.3. puede verse el resumen de las fórmulas desarrolladas en el capítulo.



Tabla 2.1. Fórmulas para obtener las coordenadas de los puntos notables de un triángulo en términos de la longitud de los lados

Coordenadas de los puntos notables de un triángulo en términos de la longitud de los lados	
<b>Incentro</b>	$I_n = \left( S - b, \frac{\sqrt{\Delta_0}}{2P} \right)$
<b>Gravicentro</b>	$G = \left( \frac{2a^2 + \Omega}{6a}, \frac{\sqrt{\Delta_0}}{6a} \right)$
<b>Circuncentro</b>	$C_c = \left( \frac{a}{2}, \frac{a(c^2 + b^2 - a^2)}{2\sqrt{\Delta_0}} \right)$
<b>Ortocentro</b>	$O = \left( \frac{\Omega}{2a}, \frac{2a^2\Omega - \Omega^2}{2a\sqrt{\Delta_0}} \right)$
<p><math>\triangle ABC</math>, con <math>B = (0, 0)</math>, <math>C = (a, 0)</math> y <math>A = \left( \frac{\Omega}{2a}, \frac{\sqrt{\Delta_0}}{2a} \right)</math>, donde, <math>a = BC</math>, <math>b = AC</math>, <math>c = AB</math>,  <math>P = a + b + c</math>; <math>S = \frac{P}{2}</math>; <math>\Omega = a^2 + c^2 - b^2</math>; <math>\Delta_0 = 4a^2c^2 - \Omega^2</math></p>	

Fuente: elaboración propia.

Tabla 2.2. Fórmulas para el cálculo de la distancia entre puntos notables de un triángulo en términos de la longitud de los lados

<b>Distancia entre el circuncentro y el ortocentro en términos de la longitud de los lados</b>	
$d(C_c, O) = \sqrt{\frac{a^2b^2c^2 - 4a^2c^2\Omega + 2b^2\Omega^2 + \Omega^3}{\Delta_0}}$	
<b>Distancia entre el gravicentro y el ortocentro en términos de la longitud de los lados</b>	
$d(G, O) = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{a^2b^2c^2 - 4a^2c^2\Omega + 2b^2\Omega^2 + \Omega^3}{\Delta_0}}$	
<b>Distancia entre el gravicentro y el circuncentro en términos de la longitud de los lados</b>	
$d(G, C_c) = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{a^2b^2c^2 - 4a^2c^2\Omega + 2b^2\Omega^2 + \Omega^3}{\Delta_0}}$	
<b>Radio de la circunferencia inscrita en términos de la longitud de los lados</b>	<b>Radio de la circunferencia circunscrita en términos de la longitud de los lados</b>
$r_i = \frac{\sqrt{\Delta_0}}{2P}$	$r_c = \frac{abc}{\sqrt{\Delta_0}}$
$\triangle ABC, \text{ con } a = BC, b = AC, c = AB,$ $P = a + b + c; \Omega = a^2 + c^2 - b^2; \Delta_0 = 4a^2c^2 - \Omega^2$	

Fuente: elaboración propia.

Tabla 2.3. Fórmulas para obtener las coordenadas de los puntos notables de un triángulo en términos de las coordenadas cartesianas de los vértices

Coordenadas de los puntos notables de un triángulo en términos de las coordenadas cartesianas de los vértices	
<b>Incentro</b>	$I_n = \left( \frac{ax_a + bx_b + cx_c}{P}, \frac{ay_a + by_b + cy_c}{P} \right)$
<b>Gravicentro</b>	$G = \left( \frac{x_a + x_b + x_c}{3}, \frac{y_a + y_b + y_c}{3} \right)$
<b>Circuncentro</b>	$C_c = \left( x_b + \frac{a^2(y_a - y_b) - c^2(y_c - y_b)}{2[(y_a - y_b)(x_c - x_b) - (y_c - y_b)(x_a - x_b)]}, \right. \\ \left. y_b + \frac{c^2(x_c - x_b) - a^2(x_a - x_b)}{2[(y_a - y_b)(x_c - x_b) - (y_c - y_b)(x_a - x_b)]} \right)$
<b>Ortocentro</b>	$O = \left( x_b + \frac{(y_a - y_c)[(x_a - x_b)(x_c - x_b) + (y_a - y_b)(y_c - y_b)]}{(y_a - y_b)(x_c - x_b) - (y_c - y_b)(x_a - x_b)}, \right. \\ \left. y_b + \frac{(x_c - x_a)[(x_a - x_b)(x_c - x_b) + (y_a - y_b)(y_c - y_b)]}{(y_a - y_b)(x_c - x_b) - (y_c - y_b)(x_a - x_b)} \right)$
<p><math>\triangle ABC</math>, con <math>A = (x_a, y_a)</math>, <math>B = (x_b, y_b)</math> y <math>C = (x_c, y_c)</math>, donde, <math>a = BC</math>, <math>b = AC</math>, <math>c = AB</math>,</p> <p><math>a = \sqrt{(x_c - x_b)^2 + (y_c - y_b)^2}</math>; <math>b = \sqrt{(x_c - x_a)^2 + (y_c - y_a)^2}</math>; <math>c = \sqrt{(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2}</math></p> <p><math>P = a + b + c</math></p>	

Fuente: elaboración propia.

## 2.6. Ejemplos capítulo 2

### Ejemplo 1:

Para el  $\triangle ABC$  con  $a = BC$ ,  $b = AC$ ,  $c = AB$ , donde  $a = 24$ ,  $b = 6\sqrt{10}$  y  $c = 18\sqrt{2}$ , hallar las coordenadas de los puntos notables gravicentro  $G$ , circuncentro  $C_c$ , ortocentro  $O$  e incentro  $I_n$  y comprobar que  $\overleftrightarrow{C_cO} \parallel \overleftrightarrow{BC}$ .

Solución:

Tomando el vértice  $B$  como punto de referencia y  $\overleftrightarrow{BC}$  como recta de referencia (sección 2.2.1.), se tiene que, al reemplazar para las longitudes de los lados,  $P = 6(4 + \sqrt{10} + 3\sqrt{2})$ ,  $S = 3(4 + \sqrt{10} + 3\sqrt{2})$ ,  $\Omega = 864$ ,  $\sqrt{\Delta_0} = 864$ ,  $B = (0, 0)$ ,  $C = (24, 0)$ , y  $A = (18, 18)$ .

De acuerdo con la tabla 2.1., para el gravicentro  $G$  la abscisa es  $\frac{2a^2 + \Omega}{6a} = \frac{2(24)^2 + 864}{6(24)} = 14$  y la ordenada es  $\frac{\sqrt{\Delta_0}}{6a} = \frac{864}{6(24)} = 6$ , luego,  $G = (14, 6)$ .

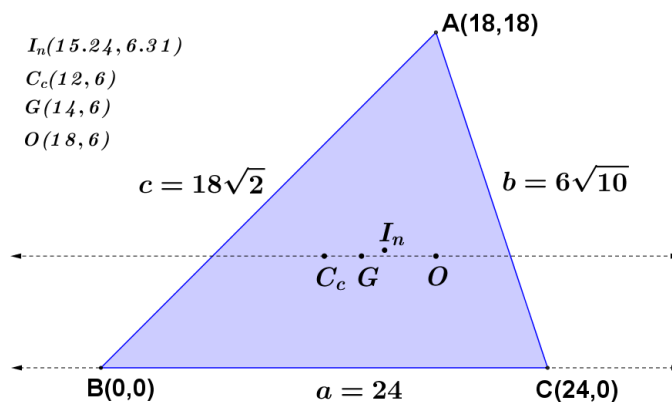
Para el circuncentro  $C_c$  la abscisa es  $\frac{a}{2} = 12$  y la ordenada es  $\frac{a(c^2 + b^2 - a^2)}{2\sqrt{\Delta_0}} = \frac{24[(18\sqrt{2})^2 + (6\sqrt{10})^2 - 24^2]}{2(864)} = 6$ , por lo tanto,  $C_c = (12, 6)$ .

Para el ortocentro  $O$  la abscisa es  $\frac{\Omega}{2a} = \frac{864}{2(24)} = 18$  y la ordenada es  $\frac{2a^2\Omega - \Omega^2}{2a\sqrt{\Delta_0}} = \frac{2(24)^2(864) - (864)^2}{2(24)(864)} = 6$ , así,  $O = (18, 6)$ .

Para el incentro  $I_n$  la abscisa es  $S - b = 3(4 + \sqrt{10} + 3\sqrt{2}) - 6\sqrt{10} = 12 + 9\sqrt{2} - 3\sqrt{10} \approx 15.24$  y la ordenada es  $\frac{\sqrt{\Delta_0}}{2P} = \frac{864}{2(6)(4 + \sqrt{10} + 3\sqrt{2})} = \frac{72}{4 + \sqrt{10} + 3\sqrt{2}} \approx 6.31$ , luego,

$$I_n = \left( 12 + 9\sqrt{2} - 3\sqrt{10}, \frac{72}{4 + \sqrt{10} + 3\sqrt{2}} \right) \approx (15.24, 6.31).$$

Al ser iguales las ordenadas de  $C_c$ ,  $G$  y  $O$  se comprueba que son colineales y  $\overleftrightarrow{C_cO} \parallel \overleftrightarrow{BC}$ .



Ejemplo No. 1

Fuente: elaboración propia.

### Ejemplo 2:

Para el  $\triangle ABC$  con  $a = BC$ ,  $b = AC$ ,  $c = AB$ , cuyas coordenadas de sus vértices son  $A = (1, 4)$ ,  $B = (7, 6)$  y  $C = (4, 0)$ , hallar las coordenadas cartesianas de los puntos notables: gravicentro  $G$ , circuncentro  $C_c$ , ortocentro  $O$  e incentro  $I_n$ .

Solución:

De acuerdo con la tabla 2.3., al reemplazar para las coordenadas de los vértices del triángulo, se tiene que  $a = 3\sqrt{5}$ ,  $b = 5$  y  $c = 2\sqrt{10}$ .

Así, para el gravicentro  $G$ , la abscisa es  $\frac{x_a + x_b + x_c}{3} = \frac{1 + 7 + 4}{3} = 4$  y la ordenada es  $\frac{y_a + y_b + y_c}{3} = \frac{4 + 6 + 0}{3} = \frac{10}{3}$ , luego,  $G = \left(4, \frac{10}{3}\right)$ .

Para el circuncentro  $C_c$ , la abscisa es  $x_b + \frac{a^2(y_a - y_b) - c^2(y_c - y_b)}{2[(y_a - y_b)(x_c - x_b) - (y_c - y_b)(x_a - x_b)]} = 7 + \frac{45(4 - 6) - 40(0 - 6)}{2[(4 - 6)(4 - 7) - (0 - 6)(1 - 7)]} = 4.5$

y la ordenada es  $y_b + \frac{c^2(x_c - x_b) - a^2(x_a - x_b)}{2[(y_a - y_b)(x_c - x_b) - (y_c - y_b)(x_a - x_b)]}$

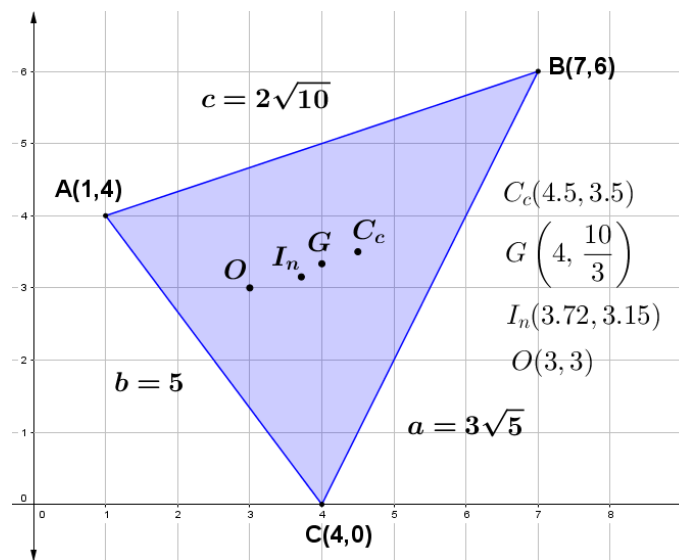
$$= 6 + \frac{40(4-7) - 45(1-7)}{2[(4-6)(4-7) - (0-6)(1-7)]} = 3.5, \text{ por lo tanto, } C_c = (4.5, 3.5).$$

Para el ortocentro  $O$ , la abscisa es  $x_b + \frac{(y_a - y_c)[(x_a - x_b)(x_c - x_b) + (y_a - y_b)(y_c - y_b)]}{(y_a - y_b)(x_c - x_b) - (y_c - y_b)(x_a - x_b)} =$   
 $7 + \frac{(4-0)[(1-7)(4-7) + (4-6)(0-6)]}{(4-6)(4-7) - (0-6)(1-7)} = 3$

y la ordenada es  $y_b + \frac{(x_c - x_a)[(x_a - x_b)(x_c - x_b) + (y_a - y_b)(y_c - y_b)]}{(y_a - y_b)(x_c - x_b) - (y_c - y_b)(x_a - x_b)} =$   
 $6 + \frac{(4-1)[(1-7)(4-7) + (4-6)(0-6)]}{(4-6)(4-7) - (0-6)(1-7)} = 3$ , así,  $O = (3, 3)$ .

Para el incentro  $I_n$ , la abscisa es  $\frac{ax_a + bx_b + cx_c}{a + b + c} = \frac{(3\sqrt{5})(1) + (5)(7) + (2\sqrt{10})(4)}{3\sqrt{5} + 5 + 2\sqrt{10}} =$   
 $\frac{35 + 3\sqrt{5} + 8\sqrt{10}}{5 + 3\sqrt{5} + 2\sqrt{10}} \approx 3.72$

y la ordenada es  $\frac{ay_a + by_b + cy_c}{a + b + c} = \frac{(3\sqrt{5})(4) + (5)(6) + (2\sqrt{10})(0)}{3\sqrt{5} + 5 + 2\sqrt{10}} =$   
 $\frac{30 + 12\sqrt{5}}{5 + 3\sqrt{5} + 2\sqrt{10}} \approx 3.15$ , luego,  $I_n = \left( \frac{35 + 3\sqrt{5} + 8\sqrt{10}}{5 + 3\sqrt{5} + 2\sqrt{10}}, \frac{30 + 12\sqrt{5}}{5 + 3\sqrt{5} + 2\sqrt{10}} \right)$   
 $\approx (3.72, 3.15)$ .



Ejemplo No. 2

Fuente: elaboración propia.

## 2.7. Ejercicios capítulo 2

1. Comprobar la concurrencia de los puntos notables: incentro  $I_n$ , gravicentro  $G$ , circuncentro  $C_c$  y ortocentro  $O$  del  $\triangle ABC$ , para un triángulo equilátero, haciendo uso de las fórmulas para las coordenadas de éstos en términos de la longitud de los lados.
2. Comprobar la colinealidad de los puntos notables: incentro  $I_n$ , gravicentro  $G$ , circuncentro  $C_c$  y ortocentro  $O$  del  $\triangle ABC$ , para un triángulo isósceles, haciendo uso de las fórmulas para las coordenadas de éstos en términos de la longitud de los lados.
3. Dado el  $\triangle ABC$  con  $a = BC$ ,  $b = AC$ ,  $c = AB$ ,  $I_n$  incentro y  $D$  punto de corte de la bisectriz interior respecto del  $\angle A$  con  $\overline{BC}$ , probar que  $\frac{AI_n}{I_nD} = \frac{b+c}{a}$ .<sup>37</sup>
4. Dado el  $\triangle ABC$  con  $a = BC$ ,  $b = AC$ , y  $c = AB$ , donde,  $\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ , esto es,  $a = \frac{bc}{b+c}$  y  $\frac{2}{1+\sqrt{5}}b < c < \frac{1+\sqrt{5}}{2}b$ , probar que:<sup>38</sup>
  - a)  $h_a = h_b + h_c$
  - b) La recta que une los pies de las bisectrices interiores respecto del  $\angle B$  y del  $\angle C$  pasa por el gravicentro  $G$
5. Dado el  $\triangle ABC$  con  $a = BC$ ,  $b = AC$ , y  $c = AB$ , donde  $a = (b+c)(\sqrt{2}-1)$ , probar que  $\overleftrightarrow{GI_n}$  pasa por el pie de la altura desde  $A$ .<sup>39</sup>
6. Dado el  $\triangle ABC$  con  $a = BC$ ,  $b = AC$ , y  $c = AB$ , donde  $a = \sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}}$  y  $M$  es punto medio de  $\overline{BC}$ , probar que la recta de Euler es perpendicular a la mediana  $\overline{AM}$ .<sup>40</sup>

<sup>37</sup> Adaptado de Castro (2010).

<sup>38</sup> Adaptado de Bellot (2005).

<sup>39</sup> Adaptado de Bellot (2005).

<sup>40</sup> Adaptado de Bellot (2005).

7. Para el  $\triangle ABC$  con  $a = BC$ ,  $b = AC$ ,  $I_n$  incentro y  $G$  gravicentro, probar que:<sup>41</sup>

a)  $\overrightarrow{I_n G} \parallel \overrightarrow{BC}$  si  $2a = b + c$

b)  $\overrightarrow{I_n G} \perp \overrightarrow{BC}$  si  $3a = b + c$

8. Para el  $\triangle ABC$  con  $I_n$  incentro,  $C_c$  circuncentro,  $r_c$  radio de la circunferencia circunscrita y  $r_i$  radio de la circunferencia inscrita, demostrar que  $(I_n C_c)^2 = r_c^2 - 2r_c r_i$ .<sup>42</sup>

9. Para el  $\triangle ABC$  con  $O$  ortocentro,  $C_c$  circuncentro,  $R$ ,  $Q$  y  $S$ , puntos medios sobre los lados  $\overline{AB}$ ,  $\overline{AC}$  y  $\overline{BC}$ , respectivamente, probar que  $AO = 2C_c S$ ,  $BO = 2C_c Q$  y  $CO = 2C_c R$ .<sup>43</sup>

10. Para el  $\triangle ABC$  de lados  $a = 5$ ,  $b = 4$  y  $c = 6$ , comprobar que  $\overrightarrow{I_n G} \parallel \overline{BC}$ .

11. Para el  $\triangle ABC$  con  $a = 6$ ,  $b = 5$  y  $c = 9$ , comprobar que  $\overrightarrow{I_n G} \perp \overline{AC}$ .

12. Para el  $\triangle ABC$  con  $a = 3$ ,  $b = 5$  y  $c = 7$ , comprobar que  $(I_n C_c)^2 = r_c^2 - 2r_c r_i$ .

13. Hallar las coordenadas de los puntos notables: incentro  $I_n$ , gravicentro  $G$ , circuncentro  $C_c$  y ortocentro  $O$  para el  $\triangle ABC$ , de lados:

a)  $a = 4$ ,  $b = 7$  y  $c = 6$

b)  $a = 4$ ,  $b = \sqrt{11}$  y  $c = \sqrt{5}$

14. Hallar las coordenadas cartesianas de los puntos notables: incentro  $I_n$ , gravicentro  $G$ , circuncentro  $C_c$  y ortocentro  $O$  para el  $\triangle ABC$ , cuyas coordenadas de sus vértices son:

a)  $A = (3, 1)$ ,  $B = (6, 7)$  y  $C = (9, 4)$

b)  $A = (-4, -3)$ ,  $B = (-1, 3)$  y  $C = (7, -1)$

---

<sup>41</sup> Adaptado de Bellot (2005).

<sup>42</sup> Adaptado de Smith (1929, p. 343).

<sup>43</sup> Adaptado de Smith (1929, p. 343).



## CAPÍTULO 3

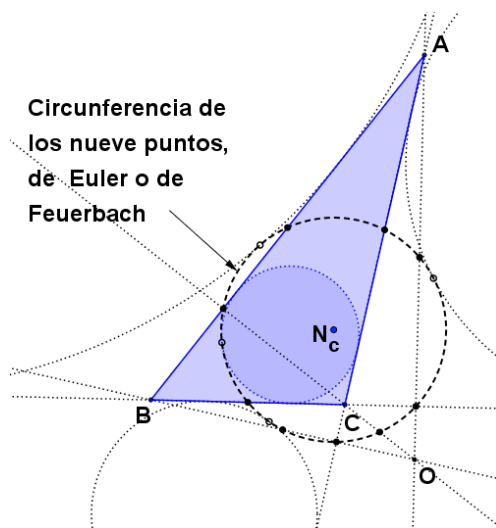
### Circunferencia de los nueve puntos

En este capítulo se aborda la demostración del teorema de lo que en la literatura geométrica se conoce como circunferencia de los nueve puntos, circunferencia de Feuerbach o círculo de Euler de un triángulo dado. Se demuestra el teorema del centro de la circunferencia de los nueve puntos, que permite establecer sus coordenadas en términos de la longitud de los lados y en términos de las coordenadas cartesianas de los vértices del triángulo, a partir de las de los puntos notables ortocentro e incentro vistos en el Capítulo 2. Por último, se determina la fórmula para hallar la medida del radio de la circunferencia de los nueve puntos, en términos de la longitud de los lados del triángulo.

### 3.1. Circunferencia de los nueve puntos. Definiciones y teoremas básicos

**Definición 13:** para un triángulo cualquiera, se denomina *circunferencia de los nueve puntos*<sup>44</sup> a la circunferencia que pasa por los puntos medios de los lados, por los pies de las alturas respecto de sus lados y por los puntos medios de los segmentos que unen el ortocentro con los vértices<sup>45</sup> (figura 3.1.).

Figura 3.1. Circunferencia de los nueve puntos



Fuente: elaboración propia.

Si bien esta circunferencia es adjudicada al alemán Karl Wilhelm Feuerbach (1800-1834), se registra que previamente Charles Brianchon (1783-1864) y Jean-Victor Poncelet (1788-1867) habían demostrado el mismo teorema.<sup>46</sup> Por su parte Álvarez C. (2003, p. 132) afirma que: «El teorema del círculo de los nueve puntos se le debe a Euler; lo publicó en 1765, en las memorias de Saint-Pétesbourg».

<sup>44</sup> «Poncelet la llamó circunferencia de los nueve puntos, denominación generalmente usada en los países de habla inglesa. Algunos geómetras franceses la llaman círculo de Euler (o circunferencia de Euler) y los geómetras teutones la denominan circunferencia de Feuerbach, y en México, circunferencia de los nueve puntos». [Circunferencia de los nueve puntos \(es.wikipedia.org\)](https://es.wikipedia.org/wiki/Circunferencia_de_los_nueve_puntos)

<sup>45</sup> «En 1822, Karl Feuerbach descubrió una de las propiedades más profundas sobre la circunferencia que lleva su nombre: la circunferencia de los nueve puntos es tangente exterior a los círculos exinscritos al triángulo. La circunferencia inscrita al triángulo es tangente interior a la circunferencia de Feuerbach». [Circunferencia de los nueve puntos \(es.wikipedia.org\)](https://es.wikipedia.org/wiki/Circunferencia_de_los_nueve_puntos)

<sup>46</sup> «Uno de estos artículos, escrito con Jean Victor Poncelet, *Recherches sur la détermination d'une hyperbole équilatère, au moyen de quatres condition onnée* (1820), contiene una demostración del teorema del círculo de nueve puntos». [Charles Brianchon \(es.wikipedia.org\)](https://es.wikipedia.org/wiki/Charles_Brianchon)

En el texto *Cours de geometrie* (Une réunion de professeurs., 1949, p. 133) se referencia a esta circunferencia (círculo) como el «Cercle d’Euler».

### 3.1.1. Teorema de la circunferencia de los nueve puntos

**Teorema 8:** para todo triángulo, los puntos medios de los lados, los pies de las alturas y los puntos medios de los segmentos que unen los vértices con el ortocentro, están situados sobre una misma circunferencia.

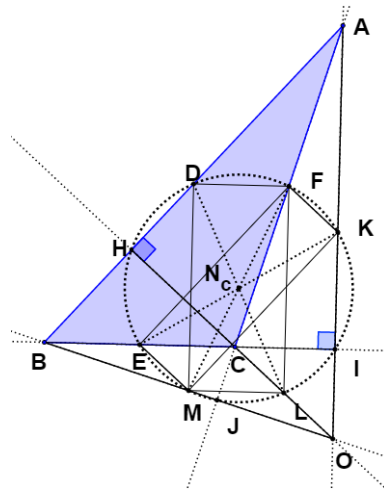
Demostración:

Sean el  $\triangle ABC$  con  $D$ ,  $E$  y  $F$  puntos medios de  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$  y  $\overline{AC}$ , respectivamente, y  $O$  el ortocentro respecto del  $\triangle ABC$ . Trácese las líneas de las alturas  $\overrightarrow{OA}$ ,  $\overrightarrow{OC}$  y  $\overrightarrow{OB}$  donde  $H$ ,  $I$  y  $J$  son los pies de las alturas sobre  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$  y  $\overline{AC}$ , respectivamente, y sean  $K$ ,  $L$  y  $M$  los puntos medios de  $\overline{OA}$ ,  $\overline{OC}$  y  $\overline{OB}$ , de manera correspondiente (figura 3.2.).

De acuerdo con la construcción hecha, al unir  $F$  con  $K$  en el  $\triangle CAO$ , se tiene por el teorema de la paralela media que  $\overline{FK} \parallel \overline{CO}$  y  $FK = \frac{1}{2}CO$ .

De igual manera, al unir  $E$  con  $M$  en el  $\triangle BCO$ , se tiene que  $\overline{EM} \parallel \overline{CO}$  y  $EM = \frac{1}{2}CO$ . Luego  $\overline{FK} \parallel \overline{EM}$  y  $FK = EM$ , con lo cual, al unir  $E$  con  $F$  y  $K$  con  $M$ , se obtiene el paralelogramo  $EFKM$ , donde  $\overline{EF} \parallel \overline{MK}$ .

Figura 3.2. Relación geométrica entre puntos de la circunferencia de los nueve puntos



Fuente: elaboración propia.

Para el  $\triangle ABC$  se tiene que  $\overline{EF} \parallel \overline{BA}$ , por ser  $E$  y  $F$  puntos medios de  $\overline{BC}$  y  $\overline{CA}$ , respectivamente, luego al ser  $\overline{BA} \perp \overline{CO}$  también  $\overline{EF} \perp \overline{CO}$ .

Así, al ser  $\overline{EM} \parallel \overline{CO}$  se concluye por transitividad que  $\overline{EF} \perp \overline{EM}$  y, por lo tanto,  $EFKM$  es un rectángulo con  $\overline{EK} \cong \overline{FM}$  diámetros de la circunferencia circunscrita<sup>47</sup> que pasa por  $E$ ,  $F$ ,  $K$  y  $M$ , y cuyo centro es  $N_c$ , el punto de encuentro de  $\overline{EK}$  y  $\overline{FM}$ .

Para el  $\triangle EIK$  se tiene que  $\angle I$  es recto, con lo cual, al ser  $\overline{EK}$  diámetro de la circunferencia que pasa por  $E$  y  $K$ , el vértice  $I$  también es punto de esta, dado que todo ángulo inscrito en una semicircunferencia es un ángulo recto.

Al unir  $D$  con  $F$  en el  $\triangle ABC$ , se tiene por el teorema de la paralela media que  $\overline{DF} \parallel \overline{BC}$  y  $DF = \frac{1}{2}BC$ . De igual manera, al unir  $M$  con  $L$  en el  $\triangle BCO$ , se tiene que  $\overline{ML} \parallel \overline{BC}$  y  $ML = \frac{1}{2}BC$ . Luego,  $\overline{DF} \parallel \overline{ML}$  y  $DF = ML$ , con lo cual, al unir  $D$  con  $M$  y  $F$  con  $L$ , se obtiene el paralelogramo  $DMLF$ , donde  $\overline{DM} \parallel \overline{FL}$ .

Para el  $\triangle BAO$  se tiene que  $\overline{DM} \parallel \overline{AO}$ , por ser  $D$  y  $M$  puntos medios de  $\overline{BA}$  y  $\overline{BO}$ , respectivamente, y al ser  $\overline{AO} \perp \overline{BC}$  también se cumple que  $\overline{DM} \perp \overline{BC}$ . Luego, al ser  $\overline{ML} \parallel \overline{BC}$  se concluye por transitividad que  $\overline{DM} \perp \overline{ML}$  y, por lo tanto,  $DMLF$  es un rectángulo con  $\overline{DL} \cong \overline{FM}$ . Al ser  $N_c$  punto medio de  $\overline{FM}$ , también lo es de  $\overline{DL}$ , con lo cual  $\overline{DL}$  es igualmente diámetro de la circunferencia de centro  $N_c$ .

Para el  $\triangle DHL$  se tiene que  $\angle H$  es recto, con lo cual, al ser  $\overline{DL}$  diámetro de la circunferencia que pasa por  $D$  y  $L$ , el vértice  $H$  también es punto de esta.

Así, se concluye que los puntos  $D$ ,  $E$ ,  $F$ ,  $H$ ,  $I$ ,  $J$ ,  $K$ ,  $L$  y  $M$  hacen parte de la misma circunferencia de centro  $N_c$ , esto es, la circunferencia de los nueve puntos (QED).

---

<sup>47</sup> Alrededor de todo rectángulo es posible circunscribir una circunferencia, donde la diagonal es el diámetro de la circunferencia.

### 3.1.2. Teorema del centro de la circunferencia de los nueve puntos

**Teorema 9:** el centro de la circunferencia de los nueve puntos es el punto medio del segmento de Euler.

Demostración:

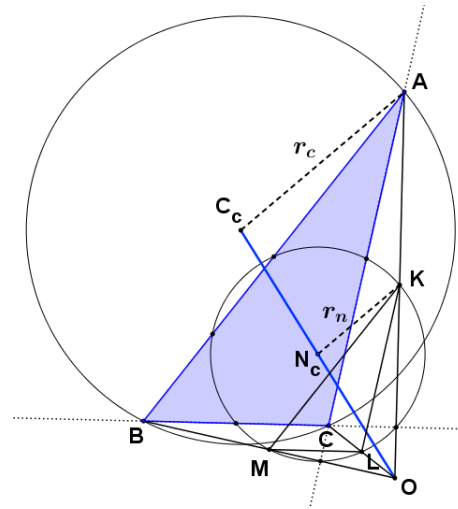
Sea el  $\triangle ABC$  con ortocentro  $O$ , circuncentro  $C_c$ , centro de la circunferencia de los nueve puntos  $N_c$ , y con  $K$ ,  $L$  y  $M$  los puntos medios de los segmentos  $\overline{OA}$ ,  $\overline{OC}$  y  $\overline{OB}$ , respectivamente (figura 3.3.).

Trácese el segmento de Euler  $\overline{OC_c}$ .

Al unir  $K$  con  $L$  en el  $\triangle AOC$ ,  $L$  con  $M$  en el  $\triangle BOC$  y  $M$  con  $K$  en el  $\triangle BAO$ , se tiene por el teorema de la paralela media que,  $\overline{KL} \parallel \overline{AC}$  y  $KL = \frac{1}{2}AC$ ;  $\overline{LM} \parallel \overline{BC}$  y  $LM = \frac{1}{2}BC$ ;  $\overline{MK} \parallel \overline{BA}$  y  $MK = \frac{1}{2}BA$ . Luego,  $\triangle KML \sim \triangle ABC$ .

Al ser las longitudes del  $\triangle KML$  la mitad de las longitudes del  $\triangle ABC$ , se tiene que el  $\triangle KML$  es una homotecia<sup>48</sup>  $H\left(O, \frac{1}{2}\right)$  del  $\triangle ABC$ , con lo cual, la circunferencia circunscrita  $ABC$ , de radio  $r_c = d(C_c, A)$ , se transforma en la circunferencia circunscrita  $KML$ , de radio  $r_n = d(N_c, K)$ , donde  $r_n = \frac{1}{2}r_c$  y, con ello, el centro  $C_c$  de la

Figura 3.3. Punto medio del segmento de Euler como centro de la circunferencia de los nueve puntos



Fuente: elaboración propia.

<sup>48</sup> «Dado un punto  $O$  y un número real  $k$  distinto de cero, se llama homotecia de centro  $O$  y razón  $k$ , y se denota por  $H_{(O,k)}$  a la transformación geométrica que asocia a cada punto  $P$  del plano otro punto  $P'$  de modo que la longitud del segmento  $\overline{OP'}$  es el resultado de multiplicar por  $k$  la longitud del segmento  $\overline{OP}$ ». Homotecia y semejanza (edu.xunta.gal)

circunferencia  $ABC$  se transforma en el centro  $N_c$  de la circunferencia  $KML$ , donde,  $O$ ,  $N_c$  y  $C_c$  son colineales, con  $ON_c = \frac{1}{2}OC_c$ , esto es,  $N_c$  (centro de la circunferencia de los nueve puntos) es punto medio de  $\overline{OC_c}$ <sup>49</sup> (segmento de Euler) (QED).

### 3.2. Coordenadas del centro de la circunferencia de los nueve puntos

#### 3.2.1. Coordenadas del centro de la circunferencia de los nueve puntos en términos de la longitud de los lados de un triángulo

Sea el  $\triangle ABC$  con  $a = BC$ ,  $b = AC$ ,  $c = AB$ . Al ser el centro de la circunferencia de los nueve puntos el punto medio entre el ortocentro y el circuncentro y dadas las ecuaciones 2.5 (sección 2.2.4.) y la 2.7 (sección 2.2.5.), se tiene que  $N_c = \left( \frac{c \cos \theta + \frac{a}{2}}{2}, \frac{\frac{a - c \cos \theta}{\tan \theta} + \frac{c - a \cos \theta}{2 \operatorname{sen} \theta}}{2} \right)$ , con lo cual:

$$N_c = \left( \frac{2c \cos \theta + a}{4}, \frac{a \cos \theta - 2c \cos^2 \theta + c}{4 \operatorname{sen} \theta} \right) \quad (3.1)$$

y en términos de la longitud de los lados (sección 2.2.1.):

$$N_c = \left( \frac{a^2 + \Omega}{4a}, \frac{2a^2 c^2 + a^2 \Omega - \Omega^2}{4a \sqrt{\Delta_0}} \right) \quad (3.2)$$

#### 3.2.2. Coordenadas del centro de la circunferencia de los nueve puntos en términos de las coordenadas de los vértices de un triángulo

Sea el  $\triangle ABC$  con  $a = BC$ ,  $b = AC$ ,  $c = AB$ ,  $N_c$  centro de la circunferencia de los nueve puntos y  $D$  pie de la perpendicular trazada desde  $N_c$  hasta  $\overline{BC}$  (figura 3.4.), cuyas coordenadas cartesianas de  $N_c$  están dadas por  $N_c = (x_b + m - n, y_b + z + t)$ , donde  $t = (N_c D) \cos \varphi$ ,  $z = (BD) \operatorname{sen} \varphi$ ,  $m = (BD) \cos \varphi$  y  $n = (N_c D) \operatorname{sen} \varphi$ .

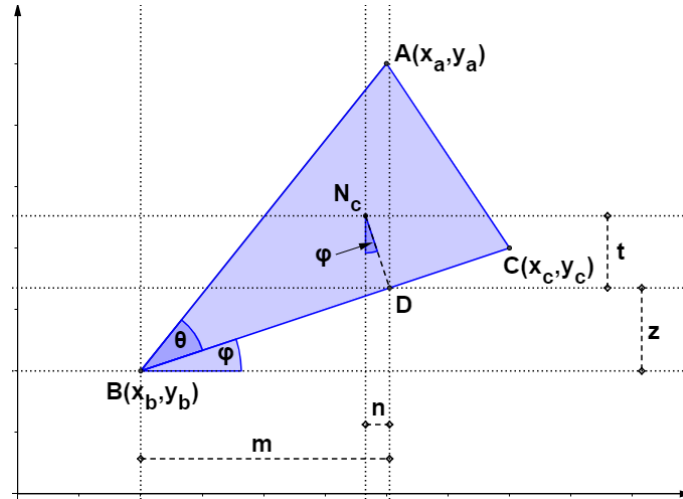
Como las coordenadas de la circunferencia de los nueve puntos respecto del vértice  $B$  y la recta de referencia  $\overleftrightarrow{BC}$  (sección 2.1.) corresponden a  $N_c = (BD, N_c D)$ ,

---

<sup>49</sup> «Segmentos homólogos por una homotecia son proporcionales según el valor absoluto  $|k|$  de la razón de homotecia. De aquí resulta que la transformación de la circunferencia de centro  $P$  y radio  $r$  por la homotecia  $h$  de razón  $k$  es la circunferencia de centro  $h(P)$  y radio  $|k|r$ » (Xambó, 2000, p. 15).

entonces, de la ecuación 3.1 (sección 3.2.1.), se tiene que  $m - n = \frac{c}{2}\cos(\theta + \varphi) + \frac{a}{4\text{sen}\theta}\text{sen}(\theta + \varphi) + \frac{c - 2a\cos\theta}{4\text{sen}\theta}\text{sen}\varphi$  y  $z + t = \frac{c}{2}\text{sen}(\theta + \varphi) + \frac{a}{4\text{sen}\theta}\cos(\theta + \varphi) - \frac{c\cos\varphi}{4\text{sen}\theta} + \frac{2a\text{sen}\varphi}{4}$ , con lo cual, de las secciones 2.2.1. y 2.3.1., se obtiene:

Figura 3.4. Coordenadas del centro de la circunferencia de los nueve puntos en un sistema cartesiano



Fuente: elaboración propia.

$$N_c = \left( \frac{x_a + x_b}{2} + \frac{a^2(y_a - y_c) - b^2(y_b - y_c)}{2\sqrt{\Delta_0}}, \right. \\ \left. \frac{y_a + y_c}{2} + \frac{a^2(x_a - x_b) + c^2(x_b - x_c)}{2\sqrt{\Delta_0}} \right) \quad (3.3)$$

### 3.3. Radio de la circunferencia de los nueve puntos en términos de la longitud de los lados de un triángulo

De acuerdo con el teorema 9 (sección 3.1.2.) el radio de la circunferencia de los nueve puntos corresponde a la mitad del radio de la circunferencia circunscrita,  $r_n = \frac{r_c}{2}$ , donde  $r_c = \frac{b}{2\text{sen}\theta}$  (ecuación 3.1, sección 2.5.2.), entonces se tiene que:

$$r_n = \frac{b}{4\text{sen}\theta} \quad (3.4)$$

y en términos de la longitud de los lados (sección 2.2.1.):

$$r_n = \frac{abc}{2\sqrt{\Delta_0}} \quad (3.5)$$

En la tabla 3.1. puede verse el resumen de las fórmulas desarrolladas en el capítulo.

Tabla 3.1. Fórmulas para obtener las coordenadas del centro de la circunferencia de los nueve puntos respecto de un triángulo y la determinación de su radio

Coordenadas del centro de la circunferencia de los nueve puntos en términos de la longitud de los lados	Radio de la circunferencia de los nueve puntos en términos de la longitud de los lados
$N_c = \left( \frac{a^2 + \Omega}{4a}, \frac{2a^2c^2 + a^2\Omega - \Omega^2}{4a\sqrt{\Delta_0}} \right)$	$r_n = \frac{abc}{2\sqrt{\Delta_0}}$
<b>Coordenadas del centro de la circunferencia de los nueve puntos en términos de las coordenadas de los vértices</b>	
$N_c = \left( \frac{x_a + x_b}{2} + \frac{a^2(y_a - y_c) - b^2(y_b - y_c)}{2\sqrt{\Delta_0}}, \frac{y_a + y_c}{2} + \frac{a^2(x_a - x_b) + c^2(x_b - x_c)}{2\sqrt{\Delta_0}} \right)$	
<p><math>\triangle ABC</math>, con <math>A = (x_a, y_a)</math>, <math>B = (x_b, y_b)</math> y <math>C = (x_c, y_c)</math>, donde, <math>a = BC</math>, <math>b = AC</math>, <math>c = AB</math>,</p> <p><math>a = \sqrt{(x_c - x_b)^2 + (y_c - y_b)^2}</math>; <math>b = \sqrt{(x_c - x_a)^2 + (y_c - y_a)^2}</math>; <math>c = \sqrt{(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2}</math></p> <p><math>P = a + b + c</math>; <math>\Omega = a^2 + c^2 - b^2</math>; <math>\Delta_0 = 4a^2c^2 - \Omega^2</math></p>	

Fuente: elaboración propia.



### 3.4. Ejemplos capítulo 3

#### Ejemplo 1:

Para el  $\triangle ABC$  con  $a = BC$ ,  $b = AC$ ,  $c = AB$ , donde  $a = 7$ ,  $b = 5$  y  $c = 9$ ,  $I_n$  incentro,  $G$  gravicentro y  $N_c$  centro de la circunferencia de los nueve puntos.

1. Comprobar que:

$$a) \overleftrightarrow{I_n N_c} \perp \overleftrightarrow{I_n G}$$

$$b) \overleftrightarrow{I_n N_c} \perp \overleftrightarrow{BC}$$

2. Hallar las coordenadas del punto de Feuerbach  $F_b$ <sup>50</sup>

Solución:

1. Tomando el vértice  $B$  como punto de referencia y  $\overleftrightarrow{BC}$  como recta de referencia (sección 2.2.1.), se tiene que al reemplazar para las longitudes de los lados  $P = 21$ ,  $S = \frac{21}{2}$ ,  $\Omega = 105$ ,  $\sqrt{\Delta_0} = 21\sqrt{11}$ ,  $B = (0, 0)$ ,  $C = (7, 0)$  y  $A = \left(7.5, \frac{3\sqrt{11}}{2}\right) \approx (7.5, 4.97)$ .

a) De acuerdo con la tabla 2.1., para el incentro  $I_n$ , la abscisa es  $S - b = \frac{21}{2} - 5 = 5.5$  y la ordenada es  $\frac{\sqrt{\Delta_0}}{2P} = \frac{21\sqrt{11}}{2(21)} = \frac{\sqrt{11}}{2} \approx 1.66$ , luego,

$$I_n = \left(5.5, \frac{\sqrt{11}}{2}\right) \approx (5.5, 1.66).$$

<sup>50</sup> Se denomina punto de Feuerbach  $F_b$  al punto de tangencia entre la circunferencia inscrita de un triángulo y la circunferencia de los nueve puntos. [Punto de Feuerbach \(es.wikipedia.org\)](http://es.wikipedia.org)

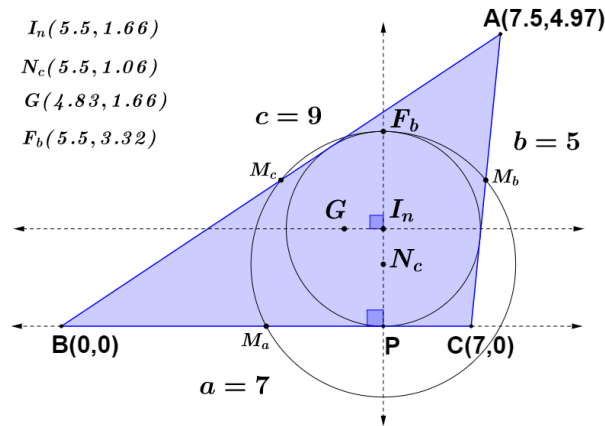
Para el gravicentro  $G$ , la abscisa es  $\frac{2a^2 + \Omega}{6a} = \frac{2(7^2) + 105}{6(7)} = \frac{29}{6} \approx 4.83$   
 y la ordenada es  $\frac{\sqrt{\Delta_0}}{6a} = \frac{21\sqrt{11}}{6(7)} = \frac{\sqrt{11}}{2} \approx 1.66$ , por lo tanto,  
 $G = \left( \frac{29}{6}, \frac{\sqrt{11}}{2} \right) \approx (4.83, 1.66)$ .

De acuerdo con la tabla 3.1., para el centro de la circunferencia de los nueve puntos  $N_c$ , la abscisa es  $\frac{a^2 + \Omega}{4a} = \frac{7^2 + 105}{4(7)} = \frac{11}{2} = 5.5$  y la ordenada es  $\frac{2a^2c^2 + a^2\Omega - \Omega^2}{4a\sqrt{\Delta_0}} = \frac{2(7^2)(9^2) + (7^2)(105) - (105^2)}{4(7)(21\sqrt{11})} = \frac{7\sqrt{11}}{22} \approx 1.06$ , luego,  
 $N_c = \left( 5.5, \frac{7\sqrt{11}}{22} \right) \approx (5.5, 1.06)$ .

Así, al ser iguales las abscisas de  $I_n$  y de  $N_c$ , se puede determinar que  $\overleftrightarrow{I_n N_c} \perp \overleftrightarrow{BC}$ .

b) Al ser iguales las ordenadas de  $I_n$  y de  $G$  (literal a), se tiene que  $\overleftrightarrow{I_n G} \parallel \overleftrightarrow{BC}$ , con lo cual se comprueba que  $\overleftrightarrow{I_n N_c} \perp \overleftrightarrow{I_n G}$ .

2. Para hallar las coordenadas del punto de Feuerbach  $F_b$  se tiene en cuenta que, al ser el punto de tangencia interior entre la circunferencia inscrita al triángulo y la circunferencia de los nueve puntos, este se encuentra sobre la recta que une sus centros, esto es,  $\overleftrightarrow{I_n N_c}$ . Así, para el caso particular en análisis, la abscisa de  $F_b$  corresponde a la abscisa de  $N_c$  y su ordenada corresponde a la ordenada de  $N_c$  más el radio de la circunferencia de los nueve puntos  $r_n$ , donde, de acuerdo con la tabla 3.1.,  $r_n = \frac{abc}{2\sqrt{\Delta_0}} = \frac{(7)(5)(9)}{2(21\sqrt{11})} = \frac{15\sqrt{11}}{22}$ . Luego, para el punto de Feuerbach  $F_b$ , la abscisa es 5.5 y la ordenada es  $\frac{7\sqrt{11}}{22} + \frac{15\sqrt{11}}{22} = \sqrt{11}$ , con lo cual  $F_b = (5.5, \sqrt{11}) \approx (5.5, 3.32)$ .



Ejemplo No. 1

Fuente: elaboración propia.

**Ejemplo 2**

Para el  $\triangle ABC$  con  $a = BC$ ,  $b = AC$ ,  $c = AB$ , donde  $a = 5$ ,  $b = 7$  y  $c = 8$ ,  $I_n$  incentro,  $G$  gravicentro y  $N_c$  centro de la circunferencia de los nueve puntos:

1. Comprobar que:

$$a) \overleftrightarrow{I_n G} \perp \overleftrightarrow{BC}$$

$$b) \overleftrightarrow{I_n N_c} \text{ es bisectriz del ángulo } B$$

$$c) \overleftrightarrow{I_n N_c} \perp \overleftrightarrow{N_c G}$$

2. Hallar las coordenadas del punto de Feuerbach  $F_b$

Solución:

1. Tomando el vértice  $B$  como punto de referencia y  $\overleftrightarrow{BC}$  como recta de referencia (sección 2.2.1.), se tiene que al reemplazar para las longitudes de los lados  $P = 20$ ,  $S = 10$ ,  $\Omega = 40$ ,  $\sqrt{\Delta_0} = 40\sqrt{3}$ ,  $B = (0, 0)$ ,  $C = (5, 0)$  y  $A = (4, 4\sqrt{3}) \approx (4, 6.93)$ .

- a) De acuerdo con la tabla 2.1., para el incentro  $I_n$ , la abscisa es  $S - b = \frac{20}{2} - 7 = 3$  y la ordenada es  $\frac{\sqrt{\Delta_0}}{2P} = \frac{40\sqrt{3}}{2(20)} = \sqrt{3} \approx 1.73$ , luego,  $I_n = (3, \sqrt{3}) \approx (3, 1.73)$ .

Para el gravicentro  $G$ , la abscisa es  $\frac{2a^2 + \Omega}{6a} = \frac{2(5^2) + 40}{6(5)} = 3$  y la ordenada es  $\frac{\sqrt{\Delta_0}}{6a} = \frac{40\sqrt{3}}{6(5)} = \frac{4\sqrt{3}}{3} \approx 2.31$ , así,  $G = \left(3, \frac{4\sqrt{3}}{3}\right) \approx (3, 2.31)$ .

Por lo tanto, al ser iguales las abscisas de  $I_n$  y de  $G$ , se puede determinar que  $\overleftrightarrow{I_n G} \perp \overleftrightarrow{BC}$ .

- b) De acuerdo con la tabla 3.1., para el centro de la circunferencia de los nueve puntos  $N_c$ , la abscisa es  $\frac{a^2 + \Omega}{4a} = \frac{5^2 + 40}{4(5)} = \frac{13}{4} = 3.25$  y la ordenada es  $\frac{2a^2c^2 + a^2\Omega - \Omega^2}{4a\sqrt{\Delta_0}} = \frac{2(5^2)(8^2) + (5^2)(40) - (40^2)}{4(5)(40\sqrt{3})} = \frac{13\sqrt{3}}{12} \approx 1.88$ , por lo tanto,  $N_c = \left(\frac{13}{4}, \frac{13\sqrt{3}}{12}\right) \approx (3.25, 1.88)$ .

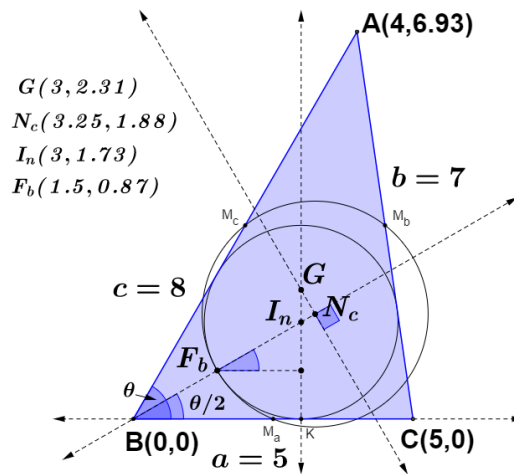
Al hallar la pendiente de  $\overleftrightarrow{BI_n}$ , se tiene que  $m_{\overleftrightarrow{BI_n}} = \frac{0 - \sqrt{3}}{0 - 3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$  y al hallar la pendiente de  $\overleftrightarrow{BN_c}$  se obtiene  $m_{\overleftrightarrow{BN_c}} = \frac{0 - \frac{13\sqrt{3}}{12}}{0 - \frac{13}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ , esto es,  $m_{\overleftrightarrow{BI_n}} = m_{\overleftrightarrow{BN_c}}$ .

Así,  $\overleftrightarrow{BI_n}$  y  $\overleftrightarrow{BN_c}$  son rectas coincidentes y como  $\overleftrightarrow{BI_n}$  es bisectriz del ángulo  $B$ , se logra comprobar que, para este caso particular,  $\overleftrightarrow{I_n N_c}$  es bisectriz del ángulo  $B$ .

- c) Al hallar la pendiente de  $\overleftrightarrow{N_c G}$ , se tiene que  $m_{\overleftrightarrow{N_c G}} = \frac{\frac{4\sqrt{3}}{3} - \frac{13\sqrt{3}}{12}}{\frac{3}{3} - \frac{13}{4}} = -\sqrt{3}$ , y de acuerdo con el literal anterior  $m_{\overleftrightarrow{I_n N_c}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ , así,  $m_{\overleftrightarrow{I_n N_c}} \cdot m_{\overleftrightarrow{N_c G}} = \frac{\sqrt{13}}{3}(-\sqrt{3}) = -1$  y, por lo tanto, se puede comprobar que  $\overleftrightarrow{I_n N_c} \perp \overleftrightarrow{N_c G}$ .

2. Al ser el punto de Feuerbach  $F_b$  punto de tangencia interior entre la circunferencia inscrita al triángulo y la circunferencia de los nueve puntos, este se encuentra sobre la recta que une sus centros, esto es,  $\overleftrightarrow{I_n N_c}$ . Así, como  $F_b$  es colineal con  $I_n$  y  $N_c$ , para el caso particular en análisis,  $F_b$  hace parte de la bisectriz del ángulo  $B$ , esto es, del ángulo base  $\theta$ , con lo cual  $\angle CBF_b = \frac{\theta}{2}$ .

Como  $F_b I_n$  es el radio de la circunferencia inscrita  $r_i$ , de acuerdo con la tabla 2.2. se tiene que  $r_i = \frac{\sqrt{\Delta_0}}{2P} = \frac{40\sqrt{3}}{2(20)} = \sqrt{3}$ , luego, para  $F_b$ , la abscisa es  $3 - \sqrt{3}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = 3 - \sqrt{3}\left(\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}\right) = 3 - \sqrt{3}\left(\sqrt{\frac{1+\frac{\Omega}{2ac}}{2}}\right) = 3 - \sqrt{3}\left(\sqrt{\frac{1+\frac{40}{2\cdot 5\cdot 8}}{2}}\right) = \frac{3}{2}$  y la ordenada es  $\sqrt{3} - \sqrt{3}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{3} - \sqrt{3}\left(\sqrt{\frac{1-\frac{\Omega}{2ac}}{2}}\right) = \sqrt{3} - \sqrt{3}\left(\sqrt{\frac{1-\frac{40}{2\cdot 5\cdot 8}}{2}}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.87$ , así,  $F_b = \left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \approx (1.5, 0.87)$ .



Ejemplo No. 2

Fuente: elaboración propia.

### 3.5. Ejercicios capítulo 3

1. Demostrar que para un triángulo cualquiera: las circunferencias circunscrita y de los nueve puntos son homotéticas respecto del ortocentro.
2. Demostrar que para un triángulo cualquiera: la circunferencia de los nueve puntos es tangente a las circunferencias exinscritas al triángulo.
3. Demostrar que para un triángulo cualquiera: las circunferencias inscrita y de los nueve puntos son tangentes interiormente [el punto de tangencia se denomina punto de Feuerbach  $F_b$ ].
4. Dado el  $\triangle ABC$  con  $a = BC$ ,  $b = AC$ ,  $c = AB$ ,  $S = \frac{a+b+c}{2}$ ,  $r_i$  radio de la circunferencia inscrita y  $r_b$  radio de la circunferencia exinscrita respecto de  $\overline{AC}$ , probar que  $r_i = \sqrt{\frac{(S-a)(S-b)(S-c)}{S}}$  y  $r_b = \sqrt{\frac{S(S-a)(S-c)}{S-b}}$ , con lo cual  $r_b = \frac{S}{S-b}r_i$  [los radios  $r_a$  y  $r_c$  de las otras dos circunferencias exinscritas se obtienen permutando cíclicamente  $a$ ,  $b$  y  $c$ ].<sup>51</sup>
5. Para el  $\triangle ABC$  con  $a = BC$ ,  $b = AC$ ,  $c = AB$ ,  $I_n$  incentro y  $N_c$  centro de la circunferencia de los nueve puntos, comprobar que  $\overrightarrow{I_n N_c} \perp \overrightarrow{BC}$  si  $2a = b + c$ .
6. Para el  $\triangle ABC$  con  $a = BC$ ,  $b = AC$  y  $c = AB$ , donde  $a = b$ ,  $N_c$  y  $r_n$  centro y radio de la circunferencia de los nueve puntos, respectivamente,  $r_i$  radio de la circunferencia inscrita y  $F_b$  punto de Feuerbach, comprobar que:
  - a)  $F_b$  coincide con el punto medio de  $\overline{AB}$
  - b)  $r_n = 2r_i$ , si  $c = \frac{a(2 \pm \sqrt{2})}{2}$
  - c)  $N_c$  coincide con el vértice  $C$ , si  $c = \sqrt{3}a$
7. Para el  $\triangle ABC$  de lados  $a = 15$ ,  $b = 5\sqrt{5}$  y  $c = 10\sqrt{2}$ , con  $M$ ,  $N$  y  $P$  pies de las alturas sobre  $\overline{AB}$ ,  $\overline{AC}$  y  $\overline{BC}$ , respectivamente, y  $r_o$  el radio de la circunferencia inscrita del triángulo órtico  $MNP$ , comprobar que:

---

<sup>51</sup> Adaptado de Xambó (2000)

- a) El  $\triangle MNP$  es rectángulo ( $\angle N$  recto)
- b) El ortocentro del  $\triangle ABC$  corresponde al incentro del  $\triangle MNP$
- c)  $r_o = \frac{\sqrt{10}}{2}$
- d)  $N_c$  es el punto medio de  $\overline{MP}$
- e)  $\overrightarrow{AC_c} \perp \overrightarrow{C_cC}$
8. Para el  $\triangle ABC$  rectángulo, de lados  $a = 3$ ,  $b = 4$  y  $c = 5$ , comprobar que  $\overrightarrow{N_cF_b} \parallel \overrightarrow{BC}$ .
9. Para el  $\triangle ABC$  de lados  $a = 8$ ,  $b = 9$  y  $c = 11$ , comprobar que  $\overrightarrow{GF_b} \parallel \overrightarrow{BC}$ .
10. Hallar las coordenadas de los centros de las circunferencias inscrita y exinscritas al  $\triangle ABC$ , de lados  $a = 2$ ,  $b = 4$  y  $c = 5$ .
11. Hallar las coordenadas del centro de la circunferencia de los nueve puntos  $N_c$  y del punto de Feuerbach  $F_b$  para el  $\triangle ABC$ , de lados  $a = 5$ ,  $b = 4$  y  $c = 6$ .
12. Hallar las coordenadas cartesianas del centro de la circunferencia de los nueve puntos  $N_c$  y del punto de Feuerbach  $F_b$  para el  $\triangle ABC$ , cuyas coordenadas de sus vértices son  $A = (-4, -3)$ ,  $B = (-1, 3)$  y  $C = (7, -1)$ .

## CAPÍTULO 4

### **Puntos de Nagel y de Spieker**

En este capítulo se aborda la conceptualización relacionada con otras dos de las líneas notables de un triángulo, las cuales no son comúnmente tratadas en la geometría escolar, como son las líneas de Nagel y de Spieker, que en el triángulo definen los segmentos y los puntos notables de igual nombre. Se expone la demostración de la colinealidad de los puntos incentro, gravicentro y de Nagel, y la relación métrica entre ellos. Adicionalmente, se aborda el teorema del punto de Spieker que permite establecer las coordenadas de este y del punto de Nagel en términos de la longitud de los lados y en términos de las coordenadas cartesianas de los vértices del triángulo.



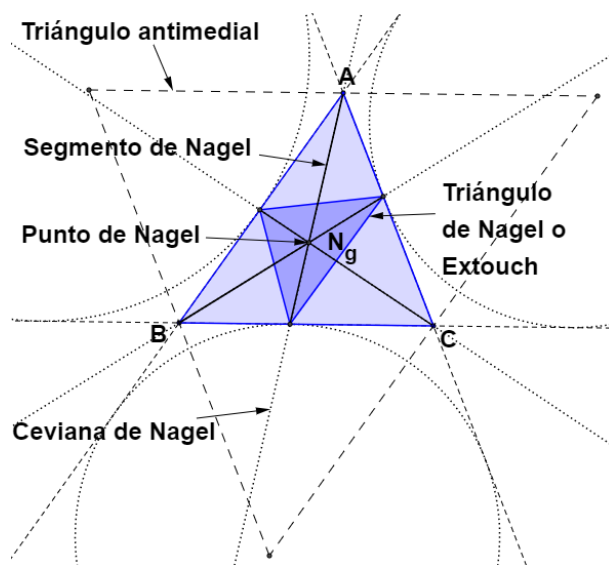
#### 4.1. Determinación del punto de Nagel<sup>52</sup>

**Definición 14:** se denomina *triángulo de Nagel* o *triángulo extouch* al triángulo inscrito formado por la unión de los puntos de extangencia<sup>53</sup> de un triángulo dado (figura 4.1.).

**Definición 15:** se denomina *segmento de Nagel* al segmento de recta que une un vértice de un triángulo con el punto de extangencia del lado opuesto. Hace parte de una *ceviana de Nagel*.<sup>54</sup>

**Definición 16:** se denomina *punto de Nagel*  $N_g$  al punto donde concurren los segmentos de Nagel de un triángulo dado. Corresponde al incentro de un *triángulo antimedial*.<sup>55</sup>

Figura 4.1. Punto de Nagel del  $\triangle ABC$



Fuente: elaboración propia.

<sup>52</sup> *The Nagel point is named after Christian Heinrich von Nagel, a nineteenth-century German mathematician, who wrote about it in 1836.* [Nagel point \(en-academic.com\)](http://en-academic.com)

<sup>53</sup> «Una circunferencia exinscrita o círculo exinscrita del triángulo es un círculo exterior al triángulo, tangente a uno de sus lados y tangente a la extensión de los otros dos lados. Cada triángulo tiene tres circunferencias exinscritas distintas, cada una tangente a uno de los lados del triángulo». [Circunferencia inscrita y exinscrita en un triángulo \(es.wikipedia.org\)](http://es.wikipedia.org)

Al punto de tangencia entre los lados de un triángulo y las circunferencias exinscritas (círculos exinscritos), se le denomina punto de extangencia

<sup>54</sup> «Llamamos ceviana de Nagel a la línea [...] que une un vértice con el punto de tangencia de la circunferencia exinscrita opuesta al vértice con el lado opuesto». [La línea de Nagel \(gaussianos.com\)](http://gaussianos.com)

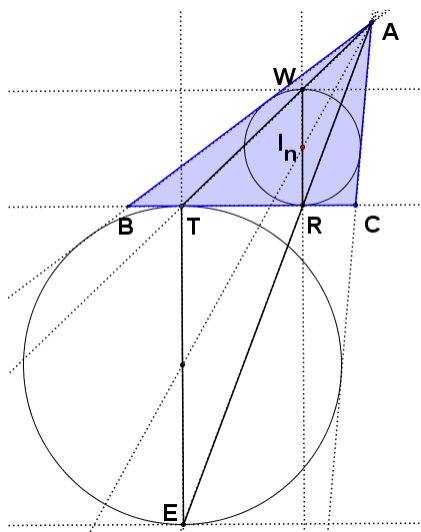
<sup>55</sup> Montesdeoca, 2017, p. 5.

## 4.2. Relación proporcional de las distancias entre los puntos de Nagel, el gravicentro y el incentro

### 4.2.1. Relación de homotecia entre las circunferencias inscrita y exinscrita respecto de un lado de un triángulo

Como se puede ver en la figura 4.2., el vértice  $A$  del  $\triangle ABC$  es el punto de intersección de las tangentes comunes a la circunferencia inscrita y a la circunferencia exinscrita respecto de  $\overline{BC}$ , con lo cual  $A$  «es el centro de una homotecia que transforma a la circunferencia exinscrita en la circunferencia inscrita».<sup>56</sup> Así, al ser  $T$  el punto de tangencia de la circunferencia exinscrita con  $\overline{BC}$  y  $E$  el punto diametralmente opuesto sobre esta circunferencia, se tiene que la ceviana  $\overline{AT}$  pasa por  $W$ , punto homólogo a  $T$  en la circunferencia inscrita, el cual es diametralmente opuesto a  $R$ , punto de tangencia de la circunferencia inscrita con  $\overleftarrow{BC}$ , y que es homólogo a  $E$ .

Figura 4.2. Relación homotética entre las circunferencias inscrita y exinscrita respecto de un lado de un triángulo



Fuente: elaboración propia a partir de <http://gaussianos.com/la-linea-de-nagel/>

---

<sup>56</sup> [La línea de Nagel \(gaussianos.com\)](http://gaussianos.com/la-linea-de-nagel/)

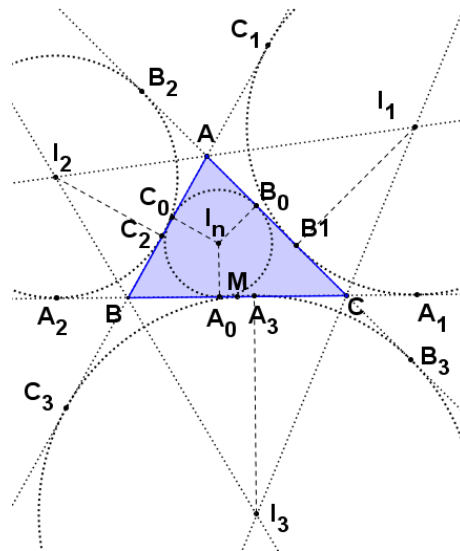
**4.2.2. Teorema del punto medio entre los puntos de tangencia de las circunferencias inscrita y exinscrita respecto de un lado de un triángulo**

**Teorema 10:** el punto medio de un lado de un triángulo es a su vez punto medio entre los puntos de tangencia de las circunferencias inscritas y exinscritas respecto de dicho lado.

Demostración:<sup>57</sup>

Sea el  $\triangle ABC$ , su circunferencia inscrita de centro  $I_n$  y sus circunferencias exinscritas de centros  $I_1, I_2$  e  $I_3$  (figura 4.3.), con  $C_0, A_0$  y  $B_0$  puntos de tangencia de la circunferencia inscrita con  $\overline{AB}, \overline{BC}$  y  $\overline{AC}$ .

Figura 4.3. Puntos de tangencia de las circunferencias inscrita y exinscrita respecto del lado de un triángulo



Fuente: elaboración propia a partir de <http://gaussianos.com/los-circulos-tritangentes/>

Sean  $C_2, A_3$  y  $B_1$  los puntos de tangencia de las circunferencias exinscritas de centros  $I_2, I_3$  e  $I_1$  con  $\overline{AB}, \overline{BC}$  y  $\overline{AC}$ , respectivamente. Sean, también,  $B_2$  y  $A_2$  puntos de

<sup>57</sup> Demostración adaptada y modificada de *Los círculos tritangentes*. Los círculos tritangentes (gaussianos.com)

tangencia de la circunferencia de centro  $I_2$  con  $\overleftrightarrow{AC}$  y  $\overleftrightarrow{BC}$ ;  $C_3$  y  $B_3$  puntos de tangencia de la circunferencia de centro  $I_3$  con  $\overleftrightarrow{AB}$  y  $\overleftrightarrow{AC}$ ;  $C_1$  y  $A_1$  puntos de tangencia de la circunferencia de centro  $I_1$  con  $\overleftrightarrow{AB}$  y  $\overleftrightarrow{BC}$ . Al hacer  $a = BC$ ,  $b = AC$ ,  $c = AB$ ,  $S_b = BC_0 = BA_0$ ,  $S_c = CB_0 = CA_0$ ,  $S_a = AB_0 = AC_0$ ,  $t = AC_3 = AB_3$ ,  $u = BA_3 = BC_3$ ,  $v = CA_3 = CB_3$  y  $2S = a + b + c$ , se tiene que  $2S_a + 2S_b + 2S_c = 2S$ , con lo cual  $S_a + S_b + S_c = S$  y como  $b = S_a + S_c$ , entonces,  $S_b = S - b$ .

Por otro lado,  $a = u + v$ ,  $t = u + c$  y  $t = v + b$ , donde,  $2t = u + v + b + c = a + b + c = 2S$ , esto es,  $t = S$ . Así,  $S = v + b$  o  $v = S - b = S_b$ , de donde  $CA_3 = BA_0$ . Por lo tanto, al ser  $M$  punto medio de  $\overline{BC}$ , se tiene que  $BM = BA_0 + A_0M = MA_3 + A_3C$ , con lo cual,  $A_0M = MA_3$ , esto es,  $M$  también es punto medio de  $\overline{A_0A_3}$  (QED).

### 4.2.3. Teorema del punto medio de un segmento de Nagel

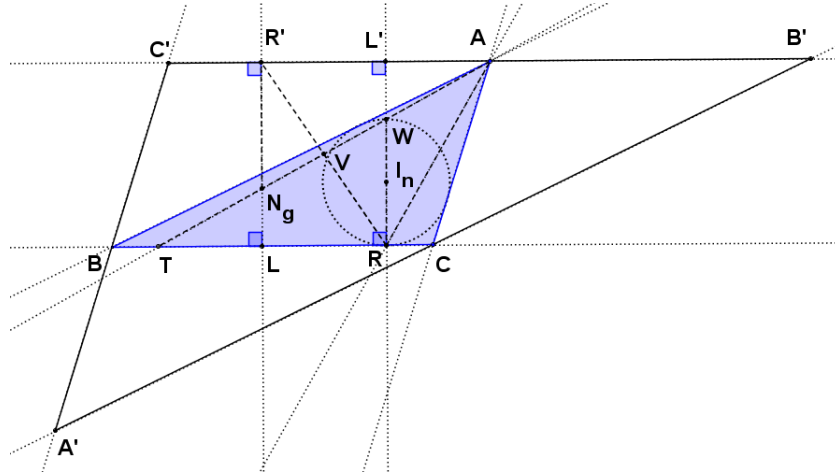
**Teorema 11:** el punto medio de un segmento de Nagel es, a su vez, punto medio entre el punto de Nagel y el punto de corte del segmento con la circunferencia inscrita (incírculo) de un triángulo.

Demostración:

Sea el  $\triangle ABC$  con  $N_g$  e  $I_n$  sus puntos de Nagel e incentro, respectivamente.

Trácese por los vértices del triángulo las paralelas a sus lados opuestos, con lo cual se forma entre sus puntos de corte el  $\triangle A'B'C'$ , triángulo antimedial del  $\triangle ABC$ , con  $A'$  opuesto a  $A$ ,  $B'$  opuesto a  $B$  y  $C'$  opuesto a  $C$ . Trácese, además,  $\overleftrightarrow{AN_g}$  cuyo punto de corte con  $\overline{BC}$  es  $T$  (punto de extangencia), la perpendicular a  $\overline{BC}$  por el punto de Nagel  $N_g$  cuyo punto de corte con  $\overline{BC}$  es  $L$  y con  $\overline{B'C'}$  es  $R'$ , y la perpendicular a  $\overline{BC}$  por el punto incentro  $I_n$  cuyo punto de corte con  $\overline{BC}$  es  $R$  y con  $\overline{B'C'}$  es  $L'$  (figura 4.4.).

Figura 4.4. Punto medio de un segmento de Nagel de un triángulo



Fuente: elaboración propia.

Así, de acuerdo con las construcciones hechas,  $\overline{LR'} \parallel \overline{L'R}$  (perpendiculares a un mismo segmento de recta) y, al ser  $\overline{B'C'} \parallel \overline{BC}$ , se tiene que  $\overline{LR'} \cong \overline{L'R}$  (perpendiculares entre paralelas) obteniéndose el rectángulo  $LRL'R'$ .

Trácese la circunferencia inscrita del  $\triangle ABC$  (circunferencia de radio  $\overline{RI_n}$ ) la cual corta a  $\overline{RL'}$  en el punto  $W$  (diametralmente opuesto a  $R$  sobre  $\overline{RL'}$ ), que es a su vez punto de la ceviana  $\overline{AT}$  (relación de homotecia entre las circunferencias inscritas y exinscrita sección 4.2.1.).

De acuerdo con el teorema de Nagel (Montesdeoca, 2017, p. 5) el punto de Nagel de un triángulo es el incentro de su triángulo antimedial, entonces, para el  $\triangle A'B'C'$  antimedial del  $\triangle ABC$ , se tiene que  $\overline{R'N_g}$  es el radio de la circunferencia inscrita. Por lo tanto, al ser el  $\triangle A'B'C'$  doble homotético del  $\triangle ABC$ , se concluye que  $R'N_g = 2RI_n$  y como  $RW = 2RI_n$ , entonces  $R'N_g = RW$  (1).

Trácese  $\overline{RR'}$ , el cual corta a  $\overline{AT}$  en  $V$ , formándose  $\triangle R'VN_g \cong \triangle RVW$  (criterio A. L. A., dado que  $\angle VR'N_g \cong \angle VRW$  por alternos internos entre  $\overline{LR'} \parallel \overline{L'R}$ ,  $\overline{R'N_g} \cong \overline{RW}$  por (1) y  $\angle R'N_gV \cong \angle RWV$  por alternos internos entre  $\overline{LR'} \parallel \overline{L'R}$ ), con lo cual  $\overline{N_gV} \cong \overline{VW}$ , esto es,  $V$  es punto medio de  $\overline{N_gW}$ .

Como  $LR' - R'N_g = LN_g$  y  $L'R - RW = L'W$ , donde,  $LR' = L'R$  y  $R'N_g = RW$ , se tiene que  $LN_g = L'W$  (2), luego,  $\triangle TLN_g \cong \triangle AL'W$  (criterio A. L. A., dado que  $\angle TLN_g \cong \angle AL'W$  por ser ángulos rectos,  $\overline{LN_g} \cong \overline{L'W}$  por (2) y  $\angle LN_gT \cong \angle L'WA$  por alternos externos entre  $\overline{LR'} \parallel \overline{L'R}$ ), con lo cual  $\overline{TN_g} \cong \overline{WA}$ . Así,  $TN_g + N_gV = VW + WA$ , esto es,  $V$  es punto medio de  $\overline{TA}$ .

Así,  $V$  es punto medio tanto de  $\overline{N_gW}$  como de  $\overline{TA}$  (QED).

#### 4.2.4. Colinealidad de los puntos incentro, gravicentro y de Nagel y su relación métrica

**Teorema 12:** los puntos incentro, gravicentro y de Nagel son colineales y la distancia desde el punto de Nagel al gravicentro es dos tercios de la distancia desde el punto de Nagel al incentro.<sup>58</sup>

Demostración:

Sea el  $\triangle ABC$  con  $N_g$ ,  $G$  e  $I_n$  sus puntos de Nagel, gravicentro e incentro, respectivamente (figura 4.5.).

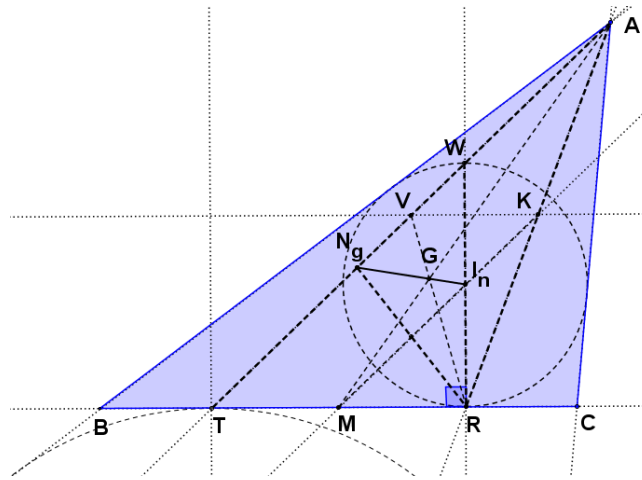
Trácese  $\overleftrightarrow{AN_g}$  y  $\overleftrightarrow{AG}$ , cuyos puntos de corte con  $\overline{BC}$  son, respectivamente,  $T$  punto de extangencia (definición de punto de Nagel), y  $M$  punto medio de  $\overline{BC}$  (propiedad del gravicentro). Al ser  $\overline{AM}$  mediana del  $\triangle ABC$ , se cumple que  $AG = \frac{2}{3}AM$ .

Trácese la perpendicular a  $\overline{BC}$  por  $I_n$ , cuyo pie es  $R$ , y la circunferencia inscrita al  $\triangle ABC$ , de radio igual a  $d(I_n, R)$ , la cual corta a  $\overleftrightarrow{I_nR}$  en  $W$ , que es, a su vez, punto de  $\overline{AT}$  (relación de homotecia entre las circunferencias inscrita y exinscrita, sección 4.2.1.).

---

<sup>58</sup> Demostraciones alternativas de este teorema puede verse en Honsberger (1995, pp. 8-10) o en Sawyer (2010, pp. 122-123).

Figura 4.5. Colinealidad y relación métrica entre el punto de Nagel, el gravicentro y el incentro



Fuente: elaboración propia.

Únase  $A$  con  $R$  para formar el  $\triangle ATR$ , donde,  $M$  es a su vez punto medio de  $\overline{TR}$  (teorema 10, sección 4.2.2.) y trácese  $\overrightarrow{MI_n}$ , la cual corta a  $\overline{AR}$  en  $K$ . Dado que  $I_n$  es punto medio de  $\overline{RW}$ , se tiene que  $\overline{MI_n} \parallel \overline{TA}$ , con lo cual  $K$  es punto medio de  $\overline{AR}$  (teorema de la paralela media).

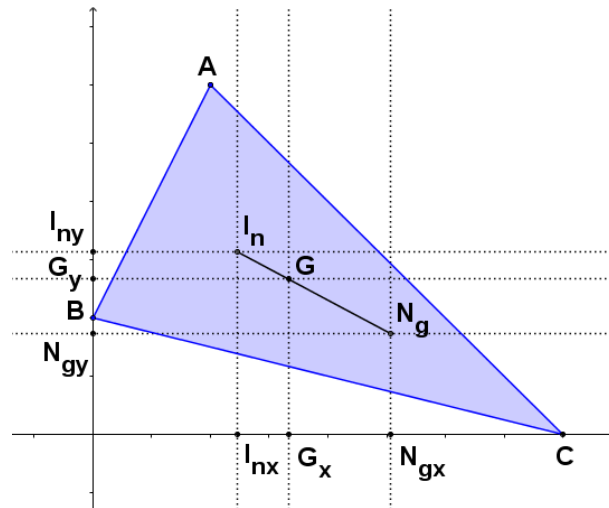
Trácese por  $K$  la paralela a  $\overline{BC}$  la cual corta a  $\overline{TA}$  en  $V$ , siendo este su punto medio (teorema de la paralela media), y únase  $V$  con  $R$ , con lo cual  $\overline{RV}$  y  $\overline{AM}$  son medianas del  $\triangle ART$  y su gravicentro es el mismo punto  $G$  (recíproco del teorema del gravicentro).<sup>59</sup> Así,  $RG = \frac{2}{3}RV$ .

De acuerdo con el teorema 11 (sección 4.2.3.)  $V$  es a su vez punto medio de  $\overline{N_gW}$ , luego  $\overline{VR}$  también es mediana del  $\triangle N_gRW$ . Así, al unir  $N_g$  con  $I_n$ , donde  $\overline{N_gI_n}$  es mediana del  $\triangle N_gRW$ , se concluye que su gravicentro es el mismo punto  $G$  (recíproco del teorema del gravicentro), con lo cual para el  $\triangle ABC$  los puntos de Nagel  $N_g$ , gravicentro  $G$  e incentro  $I_n$  son colineales y cumplen las relaciones  $N_gG = \frac{2}{3}N_gI_n$  y  $GI_n = \frac{1}{3}N_gI_n$ , esto es,  $N_gG = 2GI_n$  (QED).

<sup>59</sup> Si un punto de una mediana de un triángulo está ubicado, respecto de un vértice, a una distancia equivalente a dos tercios de la medida de la mediana y por este punto pasa otra mediana, dicho punto corresponde al gravicentro del triángulo.

### 4.2.5. Relación proporcional entre las coordenadas cartesianas de los puntos incentro, gravicentro y de Nagel

Figura 4.6. Relación proporcional entre las coordenadas cartesianas de los puntos incentro, gravicentro y de Nagel



Fuente: elaboración propia.

De acuerdo con el teorema 12 (sección 4.2.4.) y la figura 4.6., se tiene que  $G_x N_{gx} = \frac{2}{3} I_{nx} N_{gx}$  o  $N_{gx} - G_x = \frac{2}{3} (N_{gx} - I_{nx})$ , así,  $N_{gx} = 3G_x - 2I_{nx}$ . De igual manera, se cumple que:  $G_y N_{gy} = \frac{2}{3} I_{ny} N_{gy}$ , donde,  $N_{gy} - G_y = \frac{2}{3} (N_{gy} - I_{ny})$ , luego,  $N_{gy} = 3G_y - 2I_{ny}$ .

Por lo tanto, las coordenadas cartesianas del punto de Nagel, en relación con las de los puntos gravicentro e incentro, corresponden a  $N_g = (3G_x - 2I_{nx}, 3G_y - 2I_{ny})$ .

## 4.3. Coordenadas del punto de Nagel

### 4.3.1. Coordenadas del punto de Nagel en términos de la longitud de los lados

De las ecuaciones 2.1 (sección 2.2.2.) y 2.3 (sección 2.2.3.) y las relaciones obtenidas en la sección 4.2.5. se tiene que  $N_{gx} = \frac{a(S-c) + c(S-a)\cos\theta}{S}$  y  $N_{gy} = \frac{c(S-a)\sen\theta}{S}$ , con lo cual:



$$N_g = \left( \frac{a(S - c) + c(S - a)\cos\theta}{S}, \frac{c(S - a)\sen\theta}{S} \right) \quad (4.1)$$

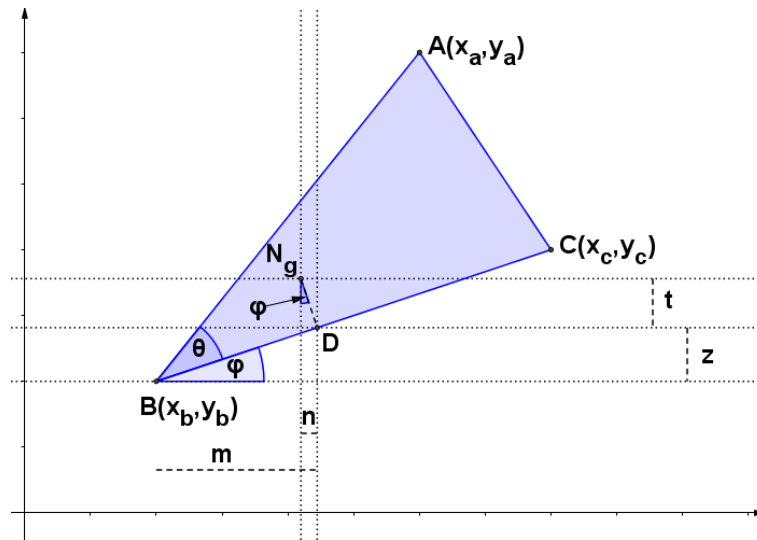
y en términos de la longitud de los lados (sección 2.2.1.):

$$N_g = \left( \frac{2a^2(S - c) + (S - a)\Omega}{aP}, \frac{(S - a)\sqrt{\Delta_0}}{aP} \right) \quad (4.2)$$

### 4.3.2. Coordenadas del punto de Nagel en términos de las coordenadas cartesianas de los vértices de un triángulo

Sea el  $\triangle ABC$  con  $N_g$ , punto de Nagel y  $D$  pie de la perpendicular trazada desde  $N_g$  hasta  $\overline{BC}$  (figura 4.7.), cuyas coordenadas cartesianas del punto de Nagel están dadas por  $N_g = (x_b + m - n, y_b + z + t)$ , donde  $t = (N_g D)\cos\varphi$ ,  $z = (BD)\sen\varphi$ ,  $m = (BD)\cos\varphi$  y  $n = (N_g D)\sen\varphi$ .

Figura 4.7. Coordenadas del punto de Nagel en un sistema cartesiano



Fuente: elaboración propia.

Como las coordenadas del punto de Nagel respecto del vértice  $B$  y la recta de referencia  $\overleftrightarrow{BC}$  (sección 2.1.) corresponden a  $N_g = (BD, N_g D)$ , entonces, de la

ecuación 4.1 (sección 4.3.1.), se tiene que  $m - n = \frac{a(S - c)\cos\varphi + c(S - a)\cos(\theta + \varphi)}{S}$  y  $z + t = \frac{a(S - c)\text{sen}\varphi + c(S - a)\text{sen}(\theta + \varphi)}{S}$ , con lo cual, en términos de los vértices de un triángulo (sección 2.3.1.):

$$N_g = \left( \frac{(S - a)x_a + (S - b)x_b + (S - c)x_c}{S}, \frac{(S - a)y_a + (S - b)y_b + (S - c)y_c}{S} \right) \quad (4.3)$$

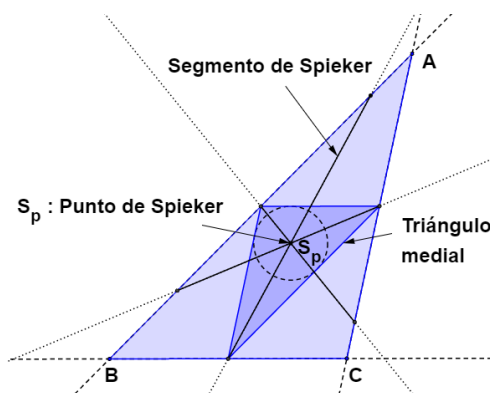
#### 4.4. Determinación del punto de Spieker<sup>60</sup>

**Definición 17:** se denomina *triángulo medial* al triángulo formado por la unión de los puntos medios de un triángulo dado.

**Definición 18:** se denomina *punto de Spieker*  $S_p$  al incentro de un triángulo medial.<sup>61</sup>

**Definición 19:** se denomina *segmento de Spieker* al segmento de recta que va desde el punto medio de uno de los lados de un triángulo hasta su lado opuesto, pasando por el punto de Spieker (figura 4.8.).

Figura 4.8. Punto de Spieker del  $\triangle ABC$



Fuente: elaboración propia.

<sup>60</sup> The point is named in honor of the 19th-century German geometer Theodor Spieker. Spieker center ([en.wikipedia.org](http://en.wikipedia.org))

<sup>61</sup> In geometry, the Spieker center is a special point associated with a plane triangle. It is defined as the center of mass of the perimeter of the triangle. The Spieker center of a triangle ABC is the center of gravity of a homogeneous wire frame in the shape of triangle ABC. Spieker center ([en.wikipedia.org](http://en.wikipedia.org))

### 4.5. Teorema del punto de Spieker como punto medio entre el incentro y el punto de Nagel

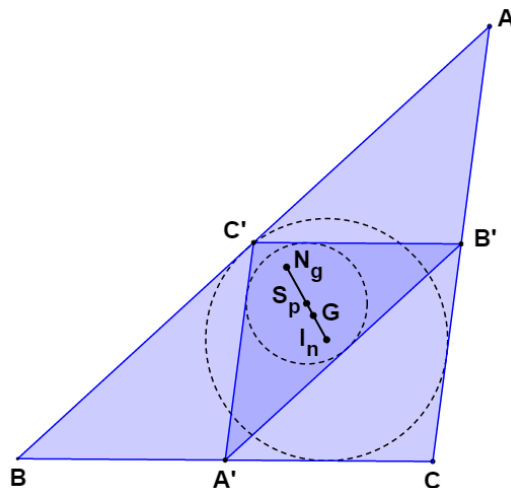
**Teorema 13:** el punto de Spieker es el punto medio entre el incentro y el punto de Nagel.

Demostración:<sup>62</sup>

Sea el  $\triangle ABC$  con  $I_n$ ,  $G$  y  $N_g$  incentro, gravicentro y punto de Nagel respectivamente. Sean también  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  puntos medios de  $\overline{BC}$ ,  $\overline{AC}$  y  $\overline{AB}$ , respectivamente, con lo cual el  $\triangle A'B'C'$  es su triángulo medial (figura 4.9).

Dado que el gravicentro del  $\triangle ABC$  lo es, a su vez, del  $\triangle A'B'C'$  siendo este su triángulo medial resultante de la homotecia  $H\left(G, \frac{-1}{2}\right)$ , se tiene que bajo esta misma transformación la circunferencia inscrita del  $\triangle ABC$  se transforma en la circunferencia inscrita del  $\triangle A'B'C'$ , y con ello, el incentro  $I_n$  del  $\triangle ABC$  se transforma en el incentro (punto de Spieker:  $S_p$ ) del  $\triangle A'B'C'$ , donde  $I_n$ ,  $G$ ,  $S_p$  y  $N_g$  son colineales<sup>63</sup> y  $S_p G = \frac{1}{2} G I_n$ .

Figura 4.9. Relación homotética entre el incentro de un triángulo y el punto de Spieker de su triángulo medial



Fuente: elaboración propia.

<sup>62</sup> Demostración adaptada de la expuesta por Honsberger (1995). Una demostración alternativa puede verse en Kondratieva (2013, p. 58).

<sup>63</sup> «... línea que en Wolfram MathWorld han decidido llamar un tanto arbitrariamente línea de Nagel, por el hecho de que el incentro del triángulo antimedial [del  $\triangle ABC$ ] es el punto de Nagel ...». La línea de Nagel ([gaussianos.com](http://gaussianos.com))

Así,  $GI_n = 2S_pG$  y como del teorema 12 (sección 4.2.4.) se tiene que  $GI_n = \frac{1}{3}N_gI_n$ , entonces,  $S_pG = \frac{1}{6}N_gI_n$ .

Como a su vez  $S_pG = \frac{1}{3}S_pI_n$ , se obtiene que  $\frac{1}{3}S_pI_n = \frac{1}{6}N_gI_n$ , y con ello  $S_pI_n = \frac{1}{2}N_gI_n$ , esto es,  $S_p$  es el punto medio de  $\overline{N_gI_n}$ .

Por lo tanto, de acuerdo con la figura 4.10.:

$$S_p = \left( \frac{I_{nx} + N_{gx}}{2}, \frac{I_{ny} + N_{gy}}{2} \right)$$

(QED).

## 4.6. Coordenadas del punto de Spieker

### 4.6.1. Coordenadas del punto de Spieker en términos de la longitud de los lados de un triángulo

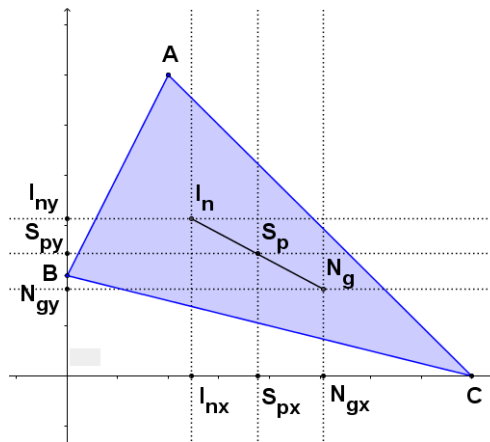
De las ecuaciones 2.1 (sección 2.2.2.) y 4.1 (sección 4.3.1.), se tiene que:

$$S_p = \left( \frac{a(P - c) + c(P - a)\cos\theta}{2P}, \frac{c(P - a)\sen\theta}{2P} \right) \quad (4.4)$$

y en términos de la longitud de los lados (sección 2.2.1.):

$$S_p = \left( \frac{2a^2(P - c) + (P - a)\Omega}{4aP}, \frac{(P - a)\sqrt{\Delta_0}}{4aP} \right) \quad (4.5)$$

Figura 4.10. Relación proporcional entre las coordenadas cartesianas de los puntos incentro, de Spieker y de Nagel

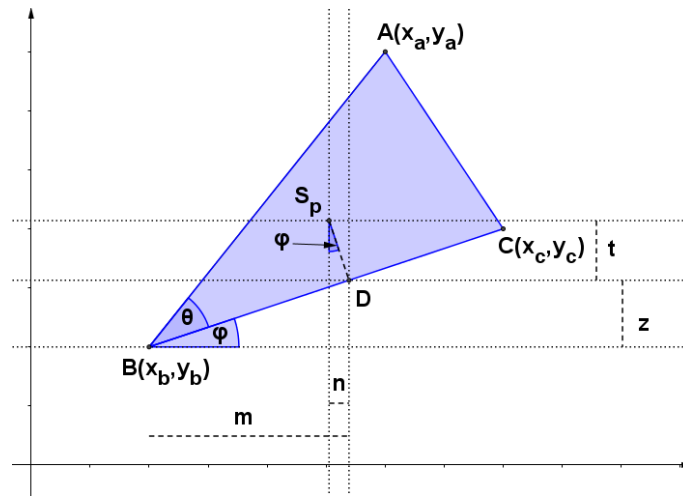


Fuente: elaboración propia.

### 4.6.2. Coordenadas del punto de Spieker en términos de las coordenadas cartesianas de los vértices de un triángulo

Sea el  $\triangle ABC$  con  $S_p$  punto de Spieker y  $D$  pie de la perpendicular trazada desde  $S_p$  hasta  $\overline{BC}$  (figura 4.11.), cuyas coordenadas cartesianas del punto de Spieker están dadas por  $S_p = (x_b + m - n, y_b + z + t)$ , donde  $t = (S_p D)\cos\varphi$ ,  $z = (BD)\sen\varphi$ ,  $m = (BD)\cos\varphi$  y  $n = (S_p D)\sen\varphi$ .

Figura 4.11. Coordenadas del punto de Spieker en un sistema cartesiano



Fuente: elaboración propia.

Como las coordenadas del punto de Spieker respecto del vértice  $B$  y la recta de referencia  $\overleftrightarrow{BC}$  (sección 2.1.) corresponden a  $S_p = (BD, S_p D)$ , entonces, de la ecuación 4.4 (sección 4.6.1.), se tiene que  $m - n = \frac{a(P - c)\cos\varphi + c(P - a)\cos(\theta + \varphi)}{2P}$  y  $z + t = \frac{a(P - c)\sen\varphi + c(P - a)\sen(\theta + \varphi)}{2P}$ , con lo cual, en términos de los vértices de un triángulo (sección 2.3.1.):

$$S_p = \left( \begin{array}{l} \frac{(P - a)x_a + (P - b)x_b + (P - c)x_c}{2P}, \\ \frac{(P - a)y_a + (P - b)y_b + (P - c)y_c}{2P} \end{array} \right) \quad (4.6)$$

En la tabla 4.1. puede verse el resumen de las fórmulas desarrolladas en el capítulo.

Tabla 4.1. Fórmulas para obtener las coordenadas de los puntos de Nagel y de Spieker en términos de la longitud de los lados y de las coordenadas cartesianas de los vértices de un triángulo

Coordenadas de los puntos de Nagel y de Spieker en términos de la longitud de los lados de un triángulo	
Nagel	$N_g = \left( \frac{2a^2(S-c) + (S-a)\Omega}{aP}, \frac{(S-a)\sqrt{\Delta_0}}{aP} \right)$
Spieker	$S_p = \left( \frac{2a^2(P-c) + (P-a)\Omega}{4aP}, \frac{(P-a)\sqrt{\Delta_0}}{4aP} \right)$
$\triangle ABC, \text{ con } B = (0, 0), C = (a, 0) \text{ y } A = \left( \frac{\Omega}{2a}, \frac{\sqrt{\Delta_0}}{2a} \right), \text{ donde, } a = BC, b = AC, c = AB,$ $P = a + b + c; S = \frac{P}{2}; \Omega = a^2 + c^2 - b^2; \Delta_0 = 4a^2c^2 - \Omega^2$	
Coordenadas de los puntos de Nagel y de Spieker en términos de las coordenadas cartesianas de los vértices de un triángulo	
Nagel	$N_g = \left( \frac{(S-a)x_a + (S-b)x_b + (S-c)x_c}{S}, \frac{(S-a)y_a + (S-b)y_b + (S-c)y_c}{S} \right)$
Spieker	$S_p = \left( \frac{(P-a)x_a + (P-b)x_b + (P-c)x_c}{2P}, \frac{(P-a)y_a + (P-b)y_b + (P-c)y_c}{2P} \right)$
$\triangle ABC, \text{ con } A = (x_a, y_a), B = (x_b, y_b) \text{ y } C = (x_c, y_c), \text{ donde, } a = BC, b = AC, c = AB,$ $a = \sqrt{(x_c - x_b)^2 + (y_c - y_b)^2}; b = \sqrt{(x_c - x_a)^2 + (y_c - y_a)^2}; c = \sqrt{(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2}$ $P = a + b + c; S = \frac{P}{2}$	

Fuente: elaboración propia.

## 4.7. Ejemplos capítulo 4

### Ejemplo 1

Para el  $\triangle ABC$  con  $a = BC$ ,  $b = AC$  y  $c = AB$ , donde  $a = 10$ ,  $b = 13$  y  $c = 17$ ,  $N_g$  punto de Nagel,  $S_p$  punto de Spieker,  $I_n$  incentro,  $N_c$  centro de la circunferencia de los nueve puntos y  $C_c$  circuncentro, comprobar que:

1.  $\overleftrightarrow{N_g S_p} \perp \overleftrightarrow{BC}$
2.  $\overleftrightarrow{I_n N_c} \parallel \overleftrightarrow{N_g C_c}$
3.  $N_g$  es punto de tangencia entre la paralela media a  $\overline{BC}$  y la circunferencia inscrita

Solución:

Tomando el vértice  $B$  como punto de referencia y  $\overleftrightarrow{BC}$  como recta de referencia (sección 2.2.1.), se tiene que, al reemplazar para las longitudes de los lados,  $P = 40$ ,  $S = 20$ ,  $\Omega = 220$ ,  $\sqrt{\Delta_0} = 40\sqrt{42}$ ,  $B(0, 0)$ ,  $C(10, 0)$  y  $A = (11, 2\sqrt{42}) \approx (11, 12.96)$ .

1. De acuerdo con la tabla 4.1., para el punto de Nagel  $N_g$ , la abscisa es  $\frac{2a^2(S-c) + (S-a)\Omega}{aP} = \frac{2(10^2)(20-17) + (20-10)(220)}{10(40)} = 7$  y la ordenada es  $\frac{(S-a)\sqrt{\Delta_0}}{aP} = \frac{(20-10)(40\sqrt{42})}{10(40)} = \sqrt{42} \approx 6.48$ , luego,  $N_g = (7, \sqrt{42}) \approx (7, 6.48)$ .

Para el punto de Spieker  $S_p$ , la abscisa es  $\frac{2a^2(P-c) + (P-a)\Omega}{4aP} = \frac{2(10^2)(40-17) + (40-10)(220)}{4(10)(40)} = 7$  y la ordenada es  $\frac{(P-a)\sqrt{\Delta_0}}{4aP} = \frac{(40-10)(40\sqrt{42})}{4(10)(40)} = \frac{3\sqrt{42}}{4} \approx 4.86$ , así,  $S_p = \left(7, \frac{3\sqrt{42}}{4}\right) \approx (7, 4.86)$ .

Luego, al ser iguales las abscisas de  $N_g$  y de  $S_p$ , se puede determinar que  $\overleftrightarrow{N_g S_p} \perp \overleftrightarrow{BC}$ .

2. De acuerdo con la tabla 2.1., para el incentro  $I_n$ , la abscisa es  $S - b = 20 - 13 = 7$  y la ordenada es  $\frac{\sqrt{\Delta_0}}{2P} = \frac{40\sqrt{42}}{2(40)} = \frac{\sqrt{42}}{2} \approx 3.24$ , luego,  $I_n = \left(7, \frac{\sqrt{42}}{2}\right) \approx (7, 3.24)$ .

Para el circuncentro  $C_c$ , la abscisa es  $\frac{a}{2} = 5$  y la ordenada es  $\frac{a(c^2 + b^2 - a^2)}{2\sqrt{\Delta_0}} = \frac{10(17^2 + 13^2 - 10^2)}{2(40\sqrt{42})} = \frac{179\sqrt{42}}{168} \approx 6.91$ , así,  $C_c = \left(5, \frac{179\sqrt{42}}{168}\right) \approx (5, 6.91)$ .

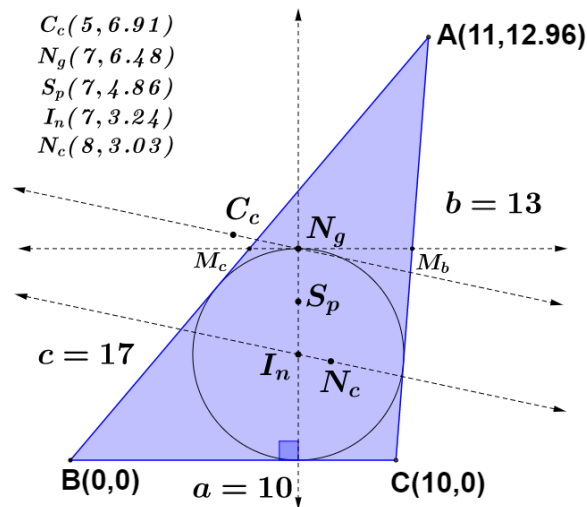
De acuerdo con la tabla 3.1., para el centro de la circunferencia de los nueve puntos  $N_c$ , la abscisa es  $\frac{a^2 + \Omega}{4a} = \frac{10^2 + 220}{4(10)} = 8$  y la ordenada es  $\frac{2a^2c^2 + a^2\Omega - \Omega^2}{4a\sqrt{\Delta_0}} = \frac{2(10^2)(17^2) + (10^2)(220) - (220^2)}{4(10)(40\sqrt{42})} = \frac{157\sqrt{42}}{336} \approx 3.03$ , por lo tanto,  $N_c = \left(8, \frac{157\sqrt{42}}{336}\right) \approx (8, 3.03)$ .

Al hallar la pendiente de  $\overrightarrow{I_n N_c}$ , se tiene que  $m_{\overrightarrow{I_n N_c}} = \frac{\frac{\sqrt{42}}{2} - \frac{157\sqrt{42}}{336}}{7 - 8} = -\frac{11\sqrt{42}}{336}$  y al hallar la pendiente de  $\overrightarrow{N_g C_c}$ , se obtiene  $m_{\overrightarrow{N_g C_c}} = \frac{\frac{179\sqrt{42}}{168} - \sqrt{42}}{5 - 7} = -\frac{11\sqrt{42}}{336}$ , con lo cual  $m_{\overrightarrow{I_n N_c}} = m_{\overrightarrow{N_g C_c}}$ , así, se puede comprobar que  $\overrightarrow{I_n N_c} \parallel \overrightarrow{N_g C_c}$ .

3. Para  $M_c$ , punto medio de  $\overline{AB}$ , la ordenada es  $\frac{\sqrt{\Delta_0}}{4a} = \frac{40\sqrt{42}}{4(10)} = \sqrt{42}$ , la cual es igual a la ordenada del punto de Nagel  $N_g$ , por lo tanto, se puede comprobar que este hace parte de la paralela media a  $\overline{BC}$ .

Como la ordenada del incentro  $I_n$  es  $\frac{\sqrt{42}}{2}$  y la del punto de Nagel  $N_g$  es  $\sqrt{42}$ , cuyo valor corresponde a dos veces el radio de la circunferencia inscrita, se puede comprobar que, en este caso, el punto de Nagel está sobre la circunferencia inscrita y, por lo tanto, corresponde al punto de tangencia entre la circunferencia inscrita y la paralela media a  $\overline{BC}$ .





Ejemplo No. 1

Fuente: elaboración propia.

**Ejemplo 2**

Para el  $\triangle ABC$  con  $a = BC$ ,  $b = AC$  y  $c = AB$ , donde  $a = 22$ ,  $b = 33 + \sqrt{33}$ ,  $c = 33 - \sqrt{33}$ ,  $I_n$  incentro,  $C_c$  circuncentro,  $S_p$  punto de Spieker,  $N_g$  punto de Nagel,  $F_b$  punto de Feuerbach,  $N_c$  y  $r_n$  el centro y el radio de la circunferencia de los nueve puntos, respectivamente, y  $r_i$  el radio de la circunferencia inscrita, comprobar que:

1.  $\overrightarrow{F_b C_c} \perp \overrightarrow{BC}$
2.  $N_g C_c F_b I_n$  es un paralelogramo
3.  $N_g$  es punto de tangencia entre la paralela media a  $\overline{BC}$  y la circunferencia inscrita
4.  $\overrightarrow{S_p F_b} \parallel \overrightarrow{BC}$
5.  $\triangle I_n S_p F_b$  es rectángulo
6.  $\angle S_p I_n F_b = 60^\circ$
7.  $r_i = \frac{2}{3} r_n$

Solución:

Tomando el vértice  $B$  como punto de referencia y  $\overleftrightarrow{BC}$  como recta de referencia (sección 2.2.1.), se tiene que, al reemplazar para las longitudes de los lados,  $P = 88$ ,  $S = 44$ ,  $\Omega = 44(11 - 3\sqrt{33})$ ,  $\sqrt{\Delta_0} = 352\sqrt{11}$ ,  $B(0, 0)$ ,  $C(22, 0)$  y  $A = (11 - 3\sqrt{33}, 8\sqrt{11}) \approx (-6.23, 26.53)$ .

1. De acuerdo con la tabla 2.1., para el incentro  $I_n$ , la abscisa es  $S - b = 44 - (33 + \sqrt{33}) = 11 - \sqrt{33} \approx 5.25$  y la ordenada es  $\frac{\sqrt{\Delta_0}}{2P} = \frac{352\sqrt{11}}{2(88)} = 2\sqrt{11} \approx 6.63$ , luego,  $I_n = (11 - \sqrt{33}, 2\sqrt{11}) \approx (5.25, 6.63)$ .

Para el circuncentro  $C_c$ , la abscisa es  $\frac{a}{2} = \frac{22}{2} = 11$  y la ordenada es  $\frac{a(c^2 + b^2 - a^2)}{2\sqrt{\Delta_0}} = \frac{(22)[(33 - \sqrt{33})^2 + (33 + \sqrt{33})^2 - 22^2]}{2(352\sqrt{11})} = 5\sqrt{11} \approx 16.58$ , así,  $C_c = (11, 5\sqrt{11}) \approx (11, 16.58)$ .

De acuerdo con la tabla 3.1., para el centro de la circunferencia de los nueve puntos  $N_c$ , la abscisa es  $\frac{a^2 + \Omega}{4a} = \frac{22^2 + 44(11 - 3\sqrt{33})}{4(22)} = \frac{22 - 3\sqrt{33}}{2} \approx 2.38$  y la ordenada es  $\frac{2a^2c^2 + a^2\Omega - \Omega^2}{4a\sqrt{\Delta_0}} = \frac{2(22)^2(33 - \sqrt{33})^2 + (22)^2[44(11 - 3\sqrt{33})] - [44(11 - 3\sqrt{33})]^2}{4(22)(352\sqrt{11})} = \frac{3\sqrt{11}}{2} \approx 4.97$ , así,  $N_c = \left( \frac{22 - 3\sqrt{33}}{2}, \frac{3\sqrt{11}}{2} \right) \approx (2.38, 4.97)$ .

Al ser el punto de Feuerbach  $F_b$  punto de tangencia interior entre la circunferencia inscrita al triángulo y la circunferencia de los nueve puntos, este se encuentra sobre la recta que une sus centros, esto es,  $N_c$ ,  $I_n$  y  $F_b$  son colineales, donde la pendiente de  $\overleftrightarrow{N_cI_n}$  es  $m_{\overleftrightarrow{N_cI_n}} = \frac{2\sqrt{11} - \frac{3\sqrt{11}}{2}}{11 - \sqrt{33} - \frac{22 - 3\sqrt{33}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ . Por lo tanto, el ángulo de inclinación de  $\overleftrightarrow{N_cI_n}$  respecto de  $\overleftrightarrow{BC}$  es  $\tan^{-1} \frac{\sqrt{3}}{3} = 30^\circ$ .

Así, como  $I_n F_b$  es el radio de la circunferencia inscrita  $r_i$ , donde, de acuerdo con la tabla 2.2.,  $r_i = \frac{\sqrt{\Delta_0}}{2P} = \frac{352\sqrt{11}}{2(88)} = 2\sqrt{11}$ , se tiene que para el punto de Feuerbach

$F_b$  la abscisa es  $F_{bx} = I_{nx} + r_i \cos 30^\circ = 11 - \sqrt{33} + 2\sqrt{11} \frac{\sqrt{3}}{2} = 11$  y la ordenada es  $F_{by} = I_{ny} + r_i \sin 30^\circ = 2\sqrt{11} + 2\sqrt{11} \frac{1}{2} = 3\sqrt{11}$ , luego,  $F_b = (11, 3\sqrt{11}) \approx (11, 9.95)$ .

Como las abscisas de  $C_c$  y  $F_b$  son iguales, se comprueba que  $\overrightarrow{F_b C_c} \perp \overrightarrow{BC}$ .

2. De acuerdo con la tabla 4.1., para el punto de Nagel  $N_g$ , la abscisa es  $\frac{2a^2(S-c) + (S-a)\Omega}{aP} = \frac{2(22)^2[11 + \sqrt{33}] + (22)(44)(11 - 3\sqrt{33})}{22(88)} = 11 - \sqrt{33}$  y la ordenada es  $\frac{(S-a)\sqrt{\Delta_0}}{aP} = \frac{(22)(352\sqrt{11})}{22(88)} = 4\sqrt{11}$ , así,  $N_g = (11 - \sqrt{33}, 4\sqrt{11}) \approx (5.26, 13.27)$ .

Al ser iguales las abscisas de  $I_n$  y de  $N_g$  se puede determinar que  $\overrightarrow{I_n N_g} \perp \overrightarrow{BC}$ , luego,  $\overrightarrow{I_n N_g} \parallel \overrightarrow{F_b C_c}$ .

La pendiente de  $\overrightarrow{N_g C_c}$  es  $m_{\overrightarrow{N_g C_c}} = \frac{5\sqrt{11} - 4\sqrt{11}}{11 - (11 - \sqrt{33})} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ , por lo tanto  $m_{\overrightarrow{N_g C_c}} = m_{\overrightarrow{N_c I_n}}$ , lo cual implica que  $\overrightarrow{N_g C_c} \parallel \overrightarrow{N_c I_n}$  y como  $\overrightarrow{I_n N_g} \parallel \overrightarrow{F_b C_c}$  se comprueba que el cuadrilátero  $N_g C_c F_b I_n$  es un paralelogramo.

3. Para  $M_c$ , punto medio de  $\overline{AB}$ , la ordenada es  $\frac{\sqrt{\Delta_0}}{4a} = \frac{352\sqrt{11}}{4(22)} = 4\sqrt{11}$ , la cual es igual a la ordenada del punto de Nagel, por lo tanto, se puede comprobar que este hace parte de la paralela media a  $\overline{BC}$ .

Como la ordenada del punto de Nagel es igual a dos veces la ordenada del incentro, cuyo valor corresponde al radio de la circunferencia inscrita, se puede comprobar que el punto de Nagel está sobre la circunferencia inscrita y por lo tanto, corresponde al punto de tangencia entre la circunferencia inscrita y la paralela media a  $\overline{BC}$ .

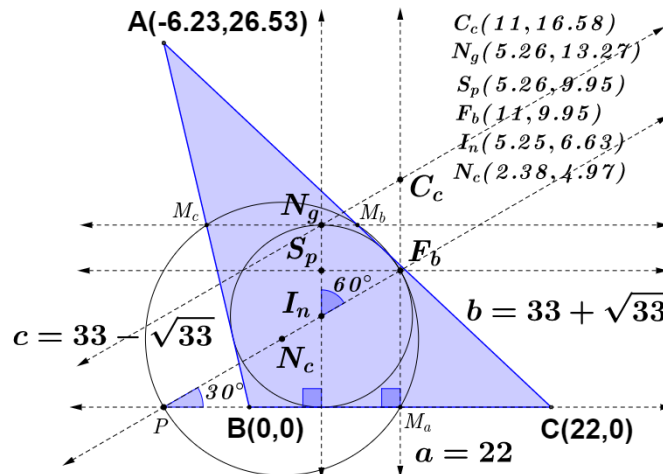
4. De acuerdo con la tabla 4.1., para el punto de Spieker  $S_p$ , la abscisa es  $\frac{2a^2(P-c) + (P-a)\Omega}{4aP} = \frac{2(22)^2(55 + \sqrt{33}) + (66)[44(11 - 3\sqrt{33})]}{4(22)(88)} =$

$11 - \sqrt{33} \approx 5.26$  y la ordenada es  $\frac{(P-a)\sqrt{\Delta_0}}{4aP} = \frac{(66)(352\sqrt{11})}{4(22)(88)} = 3\sqrt{11} \approx 9.95$ , así,  $S_p = (11 - \sqrt{33}, 3\sqrt{11}) \approx (5.26, 9.95)$ . Luego, al ser iguales las ordenadas de  $S_p$  y de  $F_b$  se puede determinar que  $\overleftrightarrow{S_p F_b} \parallel \overleftrightarrow{BC}$ .

5. Al ser iguales las abscisas de  $I_n$  y de  $S_p$ , se puede determinar que  $\overleftrightarrow{I_n S_p} \perp \overleftrightarrow{BC}$ , lo cual implica que  $\overleftrightarrow{S_p F_b} \perp \overleftrightarrow{I_n S_p}$ , esto es, el  $\triangle I_n S_p F_b$  es rectángulo, con  $\angle I_n S_p F_b$  recto.

6. Como  $N_c$ ,  $I_n$  y  $F_b$  son colineales, el ángulo de inclinación de  $\overleftrightarrow{I_n F_b}$ , respecto de  $\overleftrightarrow{BC}$ , es igual a  $30^\circ$  (numeral 1). Sea P el punto de intersección entre  $\overleftrightarrow{I_n F_b}$  y  $\overleftrightarrow{BC}$ , con lo cual  $\angle F_b P B = 30^\circ$  y al ser  $\overleftrightarrow{S_p F_b} \parallel \overleftrightarrow{BC}$  (numeral 4) se tiene que  $\angle S_p F_b I_n \cong \angle F_b P B$  por alternos internos. Luego, como  $\overleftrightarrow{I_n S_p} \perp \overleftrightarrow{BC}$  (numeral 5), se tiene que para el triángulo rectángulo  $I_n S_p F_b$  el  $\angle S_p I_n F_b = 60^\circ$ .

7. De acuerdo con la tabla 3.1., el radio de la circunferencia de los nueve puntos es  $r_n = \frac{abc}{2\sqrt{\Delta_0}} = \frac{(22)(33 + \sqrt{33})(33 - \sqrt{33})}{2(352\sqrt{11})} = 3\sqrt{11}$  y como  $r_i = 2\sqrt{11}$  (numeral 1), entonces  $\frac{r_i}{r_n} = \frac{2\sqrt{11}}{3\sqrt{11}} = \frac{2}{3}$ , así, se comprueba que  $r_i = \frac{2}{3}r_n$ .



Ejemplo No. 2

Fuente: elaboración propia.

#### 4.8. Ejercicios capítulo 4

1. Comprobar la concurrencia de los puntos notables: incentro  $I_n$ , gravicentro  $G$ , circuncentro  $C_c$ , ortocentro  $O$ , de Nagel  $N_g$  y de Spieker  $S_p$ , para un triángulo equilátero, haciendo uso de las fórmulas para las coordenadas de estos en términos de la longitud de los lados.
2. Comprobar la colinealidad de los puntos notables: incentro  $I_n$ , gravicentro  $G$ , circuncentro  $C_c$ , ortocentro  $O$ , de Nagel  $N_g$  y de Spieker  $S_p$  para un triángulo isósceles, haciendo uso de las fórmulas para las coordenadas de estos en términos de la longitud de los lados.
3. Comprobar la colinealidad de los puntos notables: incentro  $I_n$ , gravicentro  $G$ , de Nagel  $N_g$  y de Spieker  $S_p$  para un triángulo cualesquiera, haciendo uso de las fórmulas para las coordenadas de estos en términos de la longitud de los lados.
4. Para el  $\triangle ABC$  con  $a = BC$ ,  $b = AC$  y  $c = AB$ ,  $I_n$  incentro,  $C_c$  circuncentro,  $G$  gravicentro,  $S_p$  punto de Spieker,  $N_g$  punto de Nagel,  $N_c$  centro de la circunferencia de los nueve puntos, comprobar que si  $2a = b + c$ :

$$a) \overrightarrow{N_g S_p} \parallel \overrightarrow{BC}$$

$$b) \overrightarrow{N_g S_p} \perp \overrightarrow{N_g C_c}$$

$$c) \overrightarrow{N_g S_p} \perp \overrightarrow{I_n N_c}$$

$$d) \overrightarrow{S_p F_b} \parallel \overrightarrow{BC}$$

$$e) GN_g = 2|b - a|/3$$

5. Para el  $\triangle ABC$  con  $a = BC$ ,  $b = AC$  y  $c = AB$ ,  $I_n$  incentro,  $C_c$  circuncentro,  $G$  gravicentro,  $S_p$  punto de Spieker,  $N_g$  punto de Nagel y  $F_b$  punto de Feuerbach, donde  $b = a + k$  y  $c = a + 2k$ , para  $k < a$ , comprobar que:

a)  $B$ ,  $F_b$  y  $N_g$  son colineales

b)  $\overrightarrow{I_n N_g} \parallel \overrightarrow{AC}$

c)  $\overrightarrow{F_b I_n} \perp \overrightarrow{I_n N_g}$

d) Si  $k = 6$  entonces  $GS_p = 1$ ,  $I_n G = 2$ ,  $I_n S_p = 3$ ,  $GN_g = 4$  y  $I_n N_g = 6$

6. Para el  $\triangle ABC$  con  $a = BC$ ,  $b = AC$  y  $c = AB$ ,  $I_n$  incentro,  $C_c$  circuncentro,  $S_p$  punto de Spieker,  $N_g$  punto de Nagel,  $F_b$  punto de Feuerbach,  $N_c$  y  $r_n$  centro y radio de la circunferencia de los nueve puntos, respectivamente, y  $r_i$  el radio de la circunferencia inscrita, comprobar que, si  $b = \frac{a(33 \pm \sqrt{33})}{22}$  y  $c = 3a - b$ :

a)  $\overrightarrow{S_p F_b} \parallel \overrightarrow{BC}$

b)  $\overrightarrow{F_b C_c} \perp \overrightarrow{BC}$

c)  $N_g C_c F_b I_n$  es un paralelogramo

d)  $N_g$  es punto de tangencia entre la paralela media a  $\overline{BC}$  y la circunferencia inscrita

e)  $\triangle I_n S_p F_b$  es rectángulo

f)  $\angle S_p I_n F_b = 60^\circ$

g)  $r_i = \frac{2}{3}r_n$

7. Para el  $\triangle ABC$  con  $a = BC$ ,  $b = AC$  y  $c = AB$ ,  $I_n$  incentro,  $C_c$  circuncentro,  $N_g$  punto de Nagel y  $N_c$  centro de la circunferencia de los nueve puntos, comprobar que  $\overrightarrow{N_g C_c} \parallel \overrightarrow{I_n N_c}$ .

8. Para el  $\triangle ABC$  con  $a = BC$ ,  $b = AC$  y  $c = AB$ ,  $I_n$  incentro,  $C_c$  circuncentro,  $S_p$  punto de Spieker,  $N_g$  punto de Nagel,  $F_b$  punto de Feuerbach,  $N_c$  y  $r_n$  centro y radio de la circunferencia de los nueve puntos, respectivamente, y  $r_i$  el radio de la circunferencia inscrita, comprobar que, para el  $\triangle ABC$  de lados  $a = 5$ ,  $b = 4$  y  $c = 6$ :

$$a) \overrightarrow{N_g S_p} \parallel \overrightarrow{BC}$$

$$b) \overrightarrow{N_g S_p} \perp \overrightarrow{N_g C_c}$$

$$c) \overrightarrow{N_g S_p} \perp \overrightarrow{I_n N_c}$$

9. Hallar las coordenadas cartesianas de los puntos notables de Nagel  $N_g$  y de Spieker  $S_p$  para el  $\triangle ABC$ , cuyas coordenadas de sus vértices son  $A = (-4, -3)$ ,  $B = (-1, 3)$  y  $C = (7, -1)$ .

## CAPÍTULO 5

### Escintores de un triángulo

En este capítulo se aborda la conceptualización relacionada con los segmentos inscritos en un triángulo que dividen su perímetro en dos partes iguales, los cuales no son comúnmente tratados en la geometría escolar, y que en la literatura sobre el tema en Colombia se han referenciado como escintores, clasificándose a su vez como vescintores, mescintores y escintrices, pero que, a nivel internacional, se referencian como *splitter*, *cleaver* y *equalizer*, respectivamente.

Al inicio del capítulo se describe la construcción sintética de un escintor general de un triángulo y, a continuación, se exponen las definiciones y teoremas que sustentan la construcción sintética de las escintrices respecto de uno de sus ángulos, junto con un análisis de los casos en que se presentará la existencia de las escintrices respecto de ese ángulo. Por último se desarrollan los teoremas que relacionan los vescintores con el punto de Nagel, los mescintores con el punto de Spieker y las escintrices con el incentro.



## 5.1. Escintor de un triángulo y su construcción sintética

### 5.1.1. Antecedentes

En el desarrollo de este capítulo se adoptará el término escintor y su clasificación como vescintor, mescintor y escintriz acuñados por Therán Palacio, E. y Falcón Dorado, F. (2006) y retomados por Sánchez (2008). Sin embargo, cabe mencionar que en la literatura relacionada con lo referido por estos autores se encuentra información bajo los términos de *splitter* (en relación con el concepto de vescintor) y *cleaver* (en relación con el concepto de mescintor) en Avishalom (1963), Honsberger (1995), Marques (2008), Shawyer (2010), Kodokostas (2010), Kondratieva (2013), entre otros. Con relación al concepto de escintriz puede encontrarse información bajo el término de *equalizer* en Berzsényi (1997), Kodokostas (2010), Sfikas (2014), Shirali (2014), Ντριζος Δ.; Ριζος Γ. (2014), entre otros.

Por su parte, Todd (1999) adopta el término *B-line* para las líneas que bisecan el área y el perímetro de un triángulo dado (*equalizer*), Yiu (2016) prefiere adoptar el término *perimeter-area bisector*, mientras que Berele, A.; Catoiu, S. (2016) asignan la denominación de *AP-bisecting lines*

Adicionalmente, se encuentra que, sin hacer mención del término *equalizer*, Ilan Vardi<sup>64</sup> en 1999, Francisco García en el 2002 y Saturnino Campo<sup>65</sup> en el 2004 establecen expresiones algebraicas que permiten su determinación.

---

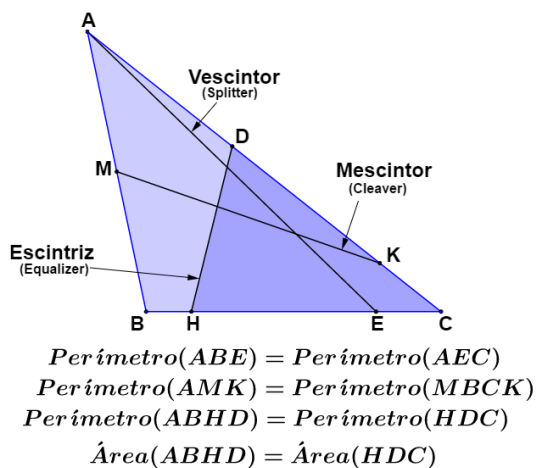
<sup>64</sup> Vardi, I. (2005) presenta una solución al problema “*Draw a straight line that halves the area and perimeter of a triangle*”, que, de acuerdo con Vershik (1994), hizo parte del examen de ingreso a la Mekh-mat en la Universidad Estatal de Moscú (MGU) en 1978. Vardi referencia que su solución fue elaborada en 1999.

<sup>65</sup> En la página web «Laboratorio virtual de triángulos con cabri» (Barroso, 2016) se puede encontrar la solución al Problema 138: «Dado un triángulo ABC trazar una secante que corte a AB en Q y a AC en P, de manera que el cuadrilátero BQPC y el triángulo AQP tengan el mismo perímetro y la misma área-», aportada por Saturnino Campo Ruiz el 10 de febrero de 2004.

### 5.1.2. Definición de escintor y clasificación<sup>66</sup>

**Definición 20:** un *escintor* es el segmento de recta inscrito en un triángulo que divide el perímetro del mismo en dos partes iguales.

Figura 5.1. Clasificación de los escintores de un triángulo



Fuente: elaboración propia.

#### □ Casos especiales (figura 5.1.):

**Definición 21:** un *mescintor* (*cleaver*) corresponde a un escintor que tiene como uno de sus puntos extremos al punto medio de un lado de un triángulo.

**Definición 22:** un *vescintor* (*splitter*)<sup>67</sup> es un escintor que tiene como uno de sus puntos extremos a un vértice de un triángulo.

**Definición 23:** una *escintriz* (*equalizer*) corresponde a un escintor que divide a un triángulo en dos regiones poligonales de igual área.

<sup>66</sup> Definición y clasificación adaptada de la planteada por Therán Palacio, E. y Falcón Dorado, F. (2006).

<sup>67</sup> Berele, A.; Catoiu, S. (2018a) mencionan que las cevianas que bisectan el perímetro de un triángulo (“*perimeter-bisecting cevians*”) son llamadas *splitters*, las cuales, a su vez, ellos denominan *perimeter-bisecting lines*.

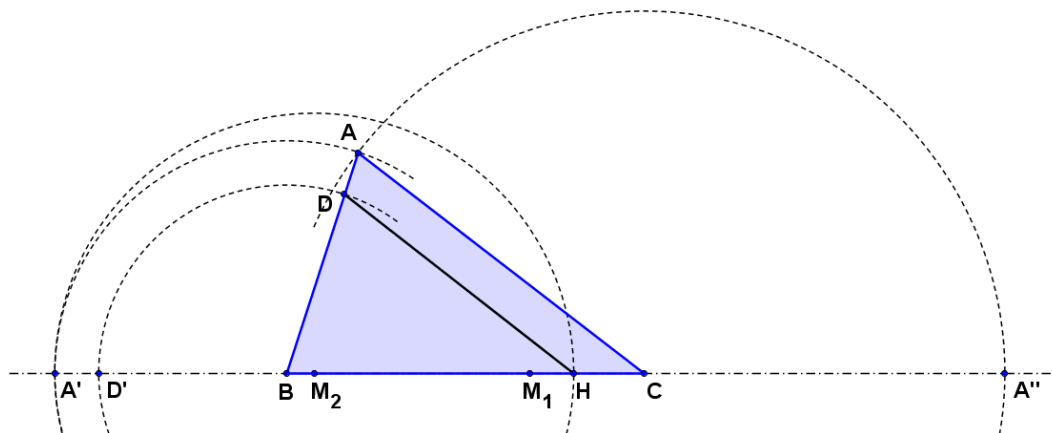
**Definición 24:** se entiende por *escintor en ángulo*  $\gamma$  a aquel cuyos puntos extremos hacen parte de los lados que forman dicho ángulo.

### 5.1.3. Construcción sintética de un escintor general (procedimiento y justificación)

Dado el  $\triangle ABC$ , trácense los arcos de circunferencia con centro en los vértices  $B$  y  $C$  de radios iguales a  $d(B, A)$  y  $d(C, A)$ , respectivamente, los cuales cortan a  $\overleftrightarrow{BC}$  en los punto  $A'$  y  $A''$ , de manera correspondiente (figura 5.2.), con lo cual  $BD = BD'$  y  $CA = CA''$  (1).

Sea  $M_1$  el punto medio de  $\overline{A'A''}$ , con lo cual  $M_1A' = M_1A''$  (2).

Figura 5.2. Construcción sintética de un escintor general de un triángulo



Fuente: elaboración propia.

Haciendo centro en el vértice  $B$  y tomando como radio una distancia menor a  $d(A, B)$ , trácese un arco de circunferencia, el cual cortará a  $\overline{AB}$  en el punto  $D$  y a  $\overleftrightarrow{BC}$  en el punto  $D'$ , obteniéndose  $DA = D'A'$  (3).

Sea  $M_2$  el punto medio de  $\overline{M_1D'}$ , con lo cual  $M_2D' = M_2M_1$  (4). Haciendo centro en el punto  $M_2$  trácese el arco de circunferencia con radio igual a  $d(M_2, A')$ , el cual corta a  $\overline{BC}$  en el punto  $H$ , obteniéndose  $M_2A' = M_2H$  (5).

Así, como  $M_2A' = M_2D' + D'A'$  y  $M_2H = M_2M_1 + M_1H$  se tiene de (3), (4) y (5) que  $M_1H = D'A' = DA$  (6). Al ser  $M_1A' = M_1M_2 + M_2B + BD' + D'A'$  se tiene de (1) y (6) que  $M_1A' = HM_1 + M_1M_2 + M_2B + BD$ , esto es,  $M_1A' = HB + BD$  (7). Por otro lado, al ser  $M_1A'' = M_1H + HC + CA''$  se tiene de (1) y (6) que  $M_1A'' = HC + CA + AD$  (8), luego, de (2), (7) y (8) se obtiene que  $HB + BD = HC + CA + AD$  (9).

Como el perímetro del triángulo es  $P = AD + DB + BH + HC + CA$ , entonces, de (9) se tiene que  $P = 2(HB + BD)$ , esto es,  $HB + BD = \frac{P}{2}$ , con lo cual se tiene que  $\overline{HD}$  es un escintor del  $\triangle ABC$ .

De acuerdo con lo planteado en la justificación precedente se puede establecer que si  $DA = 0$ , esto es,  $D$  coincide con  $A$ , entonces, el punto  $H$  coincide con el punto  $M_1$  y, así,  $AC + CM_1 = M_1B + BA = \frac{P}{2}$ , por lo tanto, se establece que  $\overline{AM_1}$  es un escintor del  $\triangle ABC$ .

#### 5.1.4. Construcción sintética de una escintriz general (procedimiento y justificación)<sup>68</sup>

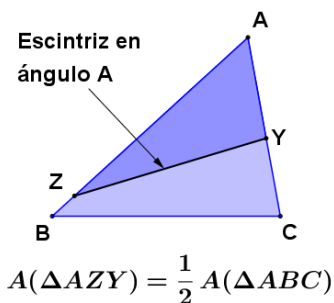
A continuación se describirá la construcción de la escintriz de un triángulo, adaptada de la publicada por Yiu (2016, p. 2).

##### 5.1.4.1. Definiciones y teoremas que sustentan el proceso constructivo de la escintriz de un triángulo

**Definición 25:** se denomina *escintriz en ángulo*  $\gamma$  a aquella que en el triángulo corta a los lados que forman dicho ángulo. Así, dado el  $\triangle ABC$  con escintriz  $\overline{YZ}$ , donde,  $Y$  está sobre  $\overline{AC}$  y  $Z$  sobre  $\overline{AB}$  (figura 5.3.),  $\overline{YZ}$  es una escintriz en ángulo  $A$ , con lo cual  $A(\triangle AZY) = \frac{1}{2}A(\triangle ABC)$ .

---

<sup>68</sup> En el portal WOLFRAM Demonstrations Project se puede acceder a la construcción dinámica diseñada y publicada por Rangel-Mondragón (2013b), en la cual el usuario puede variar la ubicación de los vértices del triángulo y observar la variación del segmento que biseca tanto el área como el perímetro, sin hacerse referencia al proceso constructivo.

Figura 5.3. Escintriz en ángulo  $A$  del  $\triangle ABC$ 

Fuente: elaboración propia.

**Teorema auxiliar 1:** dado  $\overline{YZ}$ , escintriz en ángulo  $A$  del  $\triangle ABC$ , se cumple para el  $\triangle AZY$  (figura 5.3.) que  $AZ \cdot AY = \frac{1}{2} AB \cdot AC$ .

Demostración:

Sea el  $\triangle ABC$  con  $\overline{YZ}$  escintriz en ángulo  $A$ , donde  $Y$  está sobre a  $\overline{AC}$  y  $Z$  sobre  $\overline{AB}$ .

Por definición de escintriz  $A(\triangle AZY) = \frac{1}{2} A(\triangle ABC)$ , luego,  $AZ \cdot AY \operatorname{sen} A = \frac{1}{2} (AB \cdot AC \operatorname{sen} A)$ , con lo cual  $AZ \cdot AY = \frac{1}{2} (AB \cdot AC)$  (QED).

**Teorema auxiliar 2:** si desde un punto exterior a una circunferencia se trazan dos rectas tangentes, los segmentos desde el punto exterior hasta los puntos de tangencia son congruentes (figura 5.4.).

[La demostración de este teorema se deja como ejercicio para el lector].

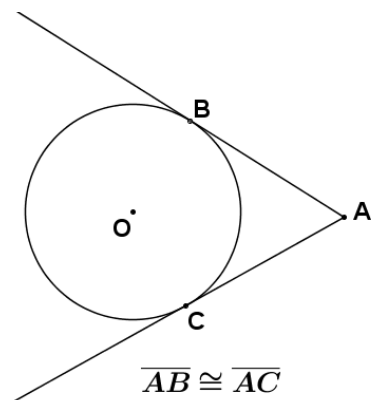
**Teorema auxiliar 3:** dadas dos circunferencias concéntricas, las cuerdas de la circunferencia mayor, tangentes a la circunferencia menor, son congruentes (figura 5.5.).

[La demostración de este teorema se deja como ejercicio para el lector].

**Teorema auxiliar 4:** dos cuerdas secantes de una misma circunferencia forman segmentos tales que los productos de las partes de una de ellas es igual al producto de las partes de la otra (figura 5.6.).

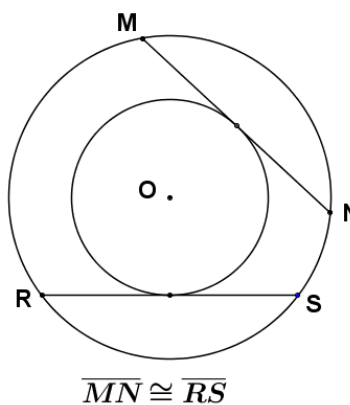
[La demostración de este teorema se deja como ejercicio para el lector].

Figura 5.4. Rectas tangentes a una circunferencia desde un punto exterior



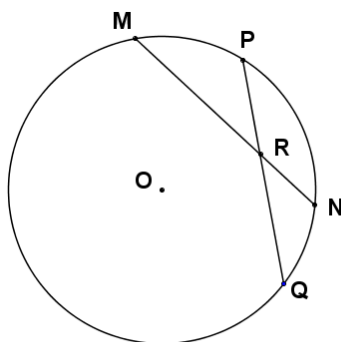
Fuente: elaboración propia.

Figura 5.5. Cuerdas de una circunferencia, tangentes a otra circunferencia concéntrica interior



Fuente: elaboración propia.

Figura 5.6. Producto entre los segmentos de cuerdas secantes en una circunferencia



$$(MR) \cdot (RN) = (PR) \cdot (RQ)$$

Fuente: elaboración propia.

#### 5.1.4.2. Proceso constructivo de la escintriz en ángulo $A$ de un triángulo

Sea el  $\triangle ABC$  con  $a = BC$ ,  $b = AC$  y  $c = AB$  (figura 5.7.). Trácese las bisectrices exteriores de los ángulos  $A$  y  $B$ , las cuales se intersecan en  $D$ . Trácese la perpendicular desde  $D$  hasta  $\overline{AB}$ , cuyo pie es  $E$ . Con centro en  $D$  y radio igual a  $d(D, E)$  trácese la circunferencia exinscrita que corta a  $\overleftrightarrow{CB}$  en  $F$  y a  $\overleftrightarrow{CA}$  en  $G$ .

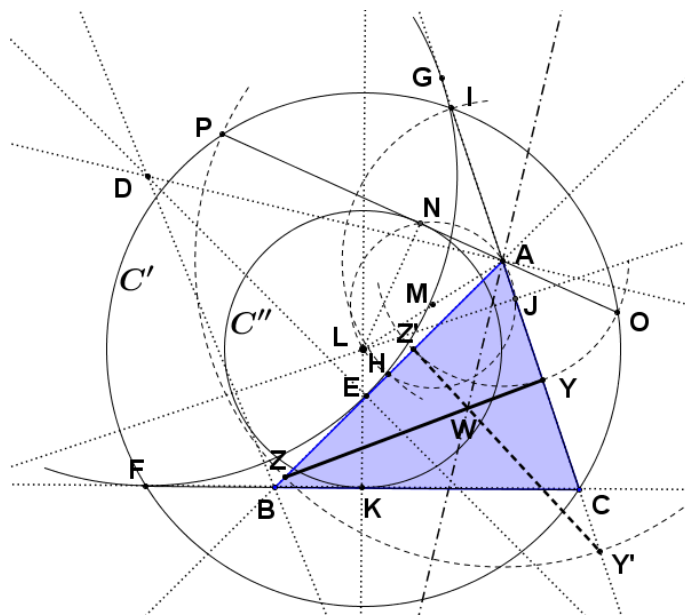
Como, de acuerdo con el teorema auxiliar 2,  $\overline{BF} \cong \overline{BE}$  (1) y  $\overline{AG} \cong \overline{AE}$  (2), se tiene de (1) que  $CF = CB + BF = CB + BE$  y de (2) que  $CG = CA + AG = CA + AE$ . Así, al ser  $\overline{CF} \cong \overline{CG}$  por el teorema auxiliar 2, se tiene que  $CB + BE = CA + AE$ , de donde  $E$  es el punto que dimidia el perímetro, con lo cual  $CF = CG = s$  ( $s$ : semiperímetro del  $\triangle ABC$ ).

Sea  $H$  el punto medio de  $\overline{AB}$ , esto es,  $AH = \frac{1}{2}AB$ . Con centro en  $A$  trácese el arco de circunferencia de radio igual a  $d(A, H)$ , el cual corta  $\overleftrightarrow{CA}$  en  $I$ . Únase  $A$  con  $I$ , donde,  $AI = AH = \frac{1}{2}AB$  (3).

Sea  $J$  el punto medio de  $\overline{CI}$  y  $K$  el punto medio de  $\overline{CF}$ . Trácese las perpendiculares por  $J$  y  $K$  (mediatrices), las cuales se cortan en  $L$ . Con centro en  $L$  y radio igual a  $d(L, C)$  trácese la circunferencia  $C'$  que pasa por  $I$ ,  $F$  y  $C$ . También, con centro en  $L$  y radio igual a  $d(L, K)$  trácese la circunferencia  $C''$  tangente a  $\overline{CF}$  en  $K$ .

Únase  $A$  con  $L$  y sea  $M$  punto medio de  $\overline{AL}$ . Trácese la circunferencia con centro en  $M$  y radio igual a  $d(M, A)$ , la cual corta a  $C''$  en  $N$ , y únase  $A$  con  $N$ ,  $N$  con  $L$  y  $L$  con  $A$ , con lo cual se forma el  $\triangle ALN$ , donde,  $\overline{LN} \perp \overline{NA}$ , dado que  $\angle LNA$  es un ángulo recto, por estar inscrito en la semicircunferencia  $LNA$ , y con lo cual  $\overline{AN}$  es tangente a la circunferencia  $C''$ , por ser a su vez  $\overline{LN}$  su radio. Trácese  $\overleftrightarrow{AN}$ , la cual corta a  $C'$  en  $O$  y en  $P$ , obteniéndose  $\overline{OP} \cong \overline{FC}$  por teorema auxiliar 3 y, con ello, por teorema auxiliar 4, se tiene que  $AO \cdot AP = AI \cdot AC$  (4). Al reemplazar (3) en (4) se obtiene  $AO \cdot AP = \frac{1}{2}AB \cdot AC$  (5).

Figura 5.7. Construcción sintética de una escintriz general de un triángulo con  $c > a > b$



Fuente: elaboración propia a partir de Yiu (2016).

Al hacer centro en el vértice  $A$  y trazar la circunferencia de radio igual a  $d(A, O)$  esta corta a  $\overleftrightarrow{AC}$  en  $Y$  y a  $\overleftrightarrow{AB}$  en  $Z'$ , con lo cual  $AO = AY = AZ'$  (6). Por otro lado, al hacer centro en el vértice  $A$  y trazar la circunferencia de radio igual a  $d(A, P)$  esta corta a  $\overleftrightarrow{AB}$  en  $Z$  y a  $\overleftrightarrow{AC}$  en  $Y'$ , con lo cual  $AP = AZ = AY'$  (7). Luego, al unirse  $Z$  con  $Y$  y  $Z'$  con  $Y'$  se forma  $\triangle AYZ \cong \triangle AZ'Y'$  (criterio L. A. L., por ser  $\overline{AY} \cong \overline{AZ'}$ ,  $\angle A$  común y  $\overline{AZ} \cong \overline{AY'}$ ), donde  $\overline{YZ} \cong \overline{Y'Z'}$ ,  $\angle AYZ \cong \angle AZ'Y'$  y  $\angle AZY \cong \angle AY'Z'$  (8).

Como  $AY = AZ'$  de (6) y  $AY' = AZ$  de (7) se tiene que al restar miembro a miembro  $AY' - AY = AZ - AZ'$ , esto es,  $YY' = ZZ'$  (9), con lo cual, al asignar  $W$  al punto de intersección entre  $\overline{YZ}$  y  $\overline{Y'Z'}$ , se obtiene  $\triangle Z'WZ \cong \triangle YWY'$  [criterio A. A. L., dado que  $\angle Z'WZ \cong \angle YWY'$  por opuestos por el vértice,  $\angle WZZ' \cong \angle WY'Y$  de (8) y  $YY' = ZZ'$  de (9)], así,  $\overline{Z'W} \cong \overline{YW}$  (10). Luego, al unir  $A$  con  $W$ , se genera  $\triangle AZ'W \cong \triangle AYW$  [criterio L. A. L., dado que  $\overline{AY} \cong \overline{AZ'}$ ,  $\angle AYW \cong \angle AZ'W$  de (8) y  $\overline{YW} \cong \overline{Z'W}$  de (10)], con lo cual  $\angle WAY \cong \angle WAZ'$ , esto es,  $\overleftrightarrow{AW}$  es bisectriz del ángulo  $A$  y, por lo tanto,  $\overline{YZ}$  y  $\overline{Y'Z'}$  son simétricos respecto de esta.



Al reemplazar (6) y (7) en (5) se obtiene  $AY \cdot AZ = \frac{1}{2}AB \cdot AC$  o  $AY' \cdot AZ' = \frac{1}{2}AB \cdot AC$ , donde por teorema auxiliar 1, en los casos en que  $\overline{YZ}$  o  $\overline{Y'Z'}$  sean segmentos inscritos del  $\triangle ABC$ , se cumplirá que  $A(\triangle AZY) = \frac{1}{2}A(\triangle ABC)$  o  $A(\triangle AZ'Y') = \frac{1}{2}A(\triangle ABC)$ , esto es,  $\overline{YZ}$  o  $\overline{Y'Z'}$  corresponderán a escintrices en ángulo  $A$ .

Siguiendo un proceso constructivo similar, pueden hallarse las escintrices en ángulo  $B$  y en ángulo  $C$ .

### 5.1.4.3. Análisis de existencia de las escintrices en ángulo $A$

Del proceso constructivo descrito en la sección anterior se pueden establecer los siguientes casos para la existencia de las escintrices en ángulo  $A$ , dependiendo de la ubicación del vértice  $A$  respecto de la circunferencia  $C''$ :

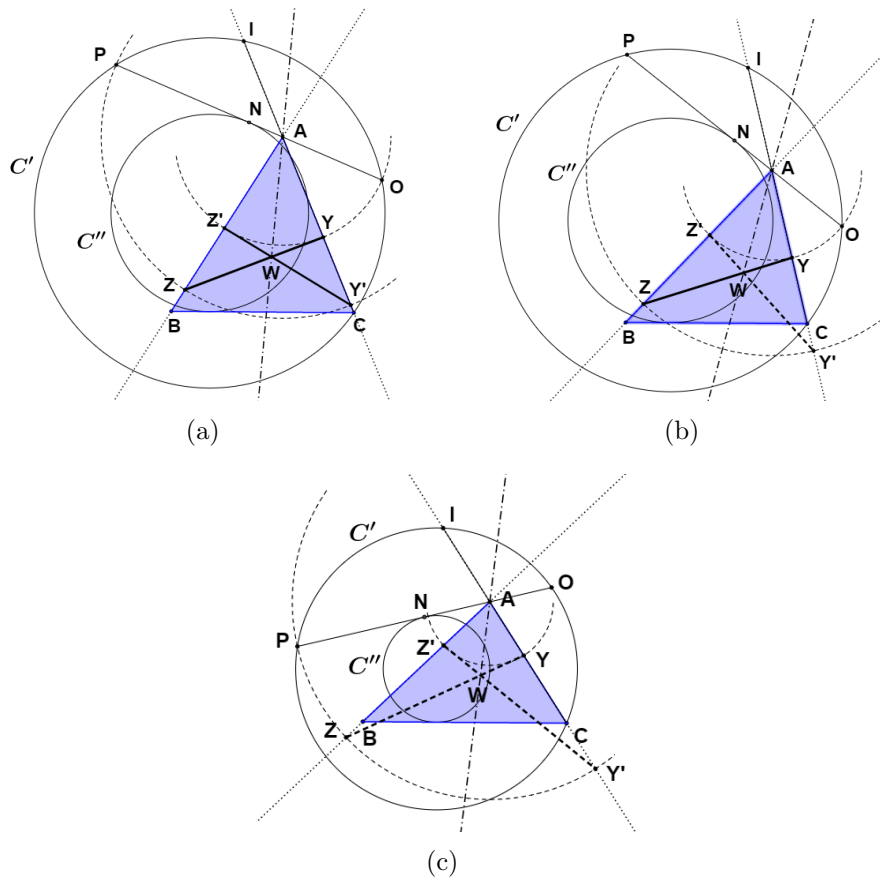
**Caso 1.** cuando  $A \neq N$  el vértice  $A$  es exterior a la circunferencia  $C''$  y  $AP \neq AO$ , con lo cual los segmentos  $\overline{YZ}$  y  $\overline{Y'Z'}$  no serán coincidentes y, dependiendo de las relaciones entre los lados del triángulo, podrán estar ambos inscritos, formando dos escintrices en ángulo  $A$  (figura 5.8a.), solo uno de ellos, formando una escintriz en ángulo  $A$  (figura 5.8b.), o ninguno, y no formar escintrices en ángulo  $A$  (figura 5.8c.).<sup>69</sup>

**Caso 2.** cuando  $A = N$  el vértice  $A$  hace parte de la circunferencia  $C''$  y  $AP = AO$ , con lo cual los segmentos  $\overline{YZ}$  y  $\overline{Y'Z'}$  serán coincidentes y perpendiculares a la bisectriz del ángulo  $A$ , y por lo tanto, habrá una sola escintriz en ángulo  $A$  (figura 5.9.).

**Caso 3.** cuando el vértice  $A$  sea interior a la circunferencia  $C''$  no existirá  $\overline{PO}$  y, por lo tanto, los segmentos  $\overline{YZ}$  y  $\overline{Y'Z'}$  no existirán, esto es, no habrá escintrices en ángulo  $A$  (figura 5.10.).

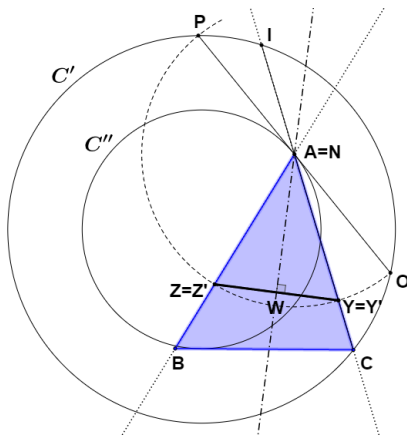
<sup>69</sup> Berele, A.; Catoiu, S. (2016) se refieren a los segmentos  $\overline{YZ}$  y  $\overline{Y'Z'}$  inscritos en el triángulo, o escintrices propiamente dichas, como *AP-bisecting lines* y a los no inscritos como *generalized AP-bisecting lines*.

Figura 5.8. Caso 1 de existencia de escintrices en ángulo  $A$  en proceso constructivo sintético



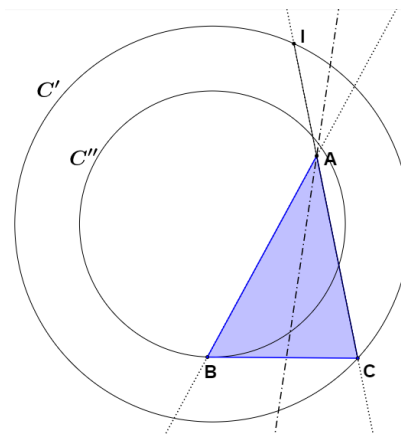
Fuente: elaboración propia.

Figura 5.9. Caso 2 de existencia de escintrices en ángulo  $A$  en proceso constructivo sintético



Fuente: elaboración propia.

Figura 5.10. Caso 3 de existencia de escintrices en ángulo  $A$  en proceso constructivo sintético



Fuente: elaboración propia.

## 5.2. Teoremas sobre escintores de un triángulo

### 5.2.1. Teorema del segmento de Nagel como vescintor

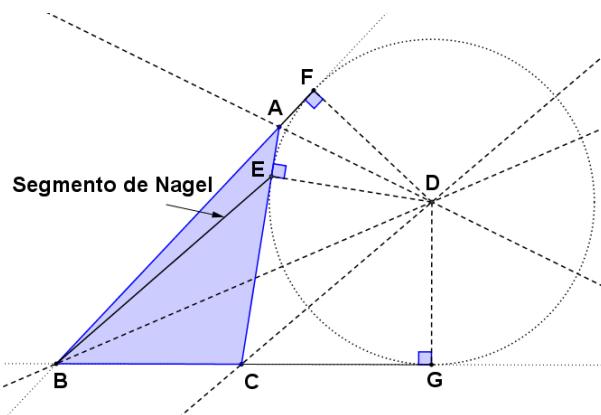
**Teorema 14:** el segmento de Nagel es un vescintor de un triángulo.

Demostración:

Sea el  $\triangle ABC$  y trácense las correspondientes bisectrices exteriores de  $\angle A$  y  $\angle C$ , las cuales se cortan en  $D$  (figura 5.11.). Únase  $D$  con el vértice  $B$  y trácense desde  $D$  las perpendiculares a  $\overleftrightarrow{AB}$ ,  $\overleftrightarrow{AC}$  y  $\overleftrightarrow{BC}$ , siendo  $F$ ,  $E$  y  $G$  los pies de las respectivas perpendiculares.

De acuerdo con la construcción hecha  $\triangle DCG \cong \triangle DCE$  (criterio A. L. A., dado que  $\angle DCG \cong \angle DCE$  por ser  $\overline{CD}$  bisectriz del ángulo exterior  $ECG$ ,  $\overline{CD}$  lado común y  $\angle CGD \cong \angle CED$  por ser ángulos rectos por construcción  $\overline{DG} \perp \overline{GC}$  y  $\overline{DE} \perp \overline{EC}$ ), con lo cual  $\overline{CE} \cong \overline{CG}$  y  $\overline{GD} \cong \overline{ED}$  (1).

Figura 5.11. Segmento de Nagel como un vescintor de un triángulo



Fuente: elaboración propia.

De igual manera,  $\triangle DAF \cong \triangle DAE$  (criterio A. L. A., dado que  $\angle DAF \cong \angle DAE$  por ser  $\overline{AD}$  bisectriz del ángulo exterior  $EAF$ ,  $\overline{AD}$  lado común y  $\angle AFD \cong \angle AED$  por ser ángulos rectos por construcción  $\overline{DF} \perp \overline{FA}$  y  $\overline{DE} \perp \overline{EA}$ ), con lo cual  $\overline{AE} \cong \overline{AF}$

y  $\overline{FD} \cong \overline{ED}$  (2), luego, de (1) y (2), se tiene que  $\overline{FD} \cong \overline{ED} \cong \overline{GD}$  (3). Así, al trazar la circunferencia con centro en  $D$  y radio igual a  $d(D, E)$  esta corresponde a la circunferencia exinscrita con respecto al lado  $\overline{AC}$  del  $\triangle ABC$ , donde  $E$  es el punto de extangencia y, con lo cual, uniendo  $B$  con  $E$  se tiene que  $\overline{BE}$  es un segmento de Nagel.

Como  $\triangle DFB \cong \triangle DGB$  (criterio L. L. A.,<sup>70</sup> dado que  $\overline{BD}$  es lado común, hipotenusa -lado mayor- de ambos triángulos,  $\overline{FD} \cong \overline{GD}$  por (3) y  $\angle DFB \cong \angle DGB$  por ser ángulos rectos por construcción  $\overline{DF} \perp \overline{FB}$  y  $\overline{DG} \perp \overline{GB}$ ), entonces,  $\overline{BF} \cong \overline{BG}$  (4), donde  $BF = BA + AF$  y  $BG = BC + CG$ , con lo cual,  $BF = BA + AE$  de (2) y  $BG = BC + CE$  de (1), luego,  $BA + AE = BC + CE$ . Así, como el perímetro del triángulo es  $P = BA + AE + EC + CB$ , esto es  $P = 2(BA + AE)$ , se tiene que  $BA + AE = \frac{P}{2}$ , por lo tanto,  $\overline{BE}$  (segmento de Nagel) dimidia al perímetro del  $\triangle ABC$ , es decir,  $\overline{BE}$  es un vescintor del  $\triangle ABC$  (QED).

El punto de concurrencia de los vescintores de un triángulo es el punto de Nagel.

### 5.2.2. Teorema general de los escintores de un triángulo

**Teorema 15:** en un triángulo cualquiera, la longitud entre el punto de corte de un escintor y el punto de extangencia sobre uno de los lados, es equivalente a la longitud entre el vértice opuesto a ese lado y el otro punto de corte del escintor.

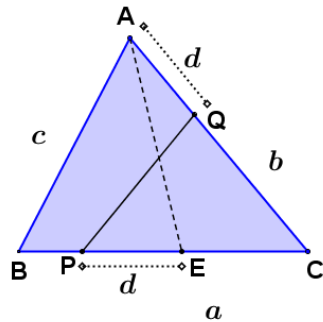
Demostración:

Sea el  $\triangle ABC$  con con  $a = BC$ ,  $b = AC$  y  $c = AB$ ,  $E$  punto de extangencia sobre  $\overline{BC}$  y  $\overline{PQ}$  un escintor, con  $Q$  sobre  $\overline{AC}$  y  $P$  sobre  $\overline{BC}$  (figura 5.12.).

---

<sup>70</sup> «Criterio L-L-A Si dos triángulos tienen dos pares de lados homólogos congruentes, y los ángulos opuestos al mayor de los lados son congruentes, entonces los triángulos son congruentes». Unidad32016.pdf (fceia.unr.edu.ar)

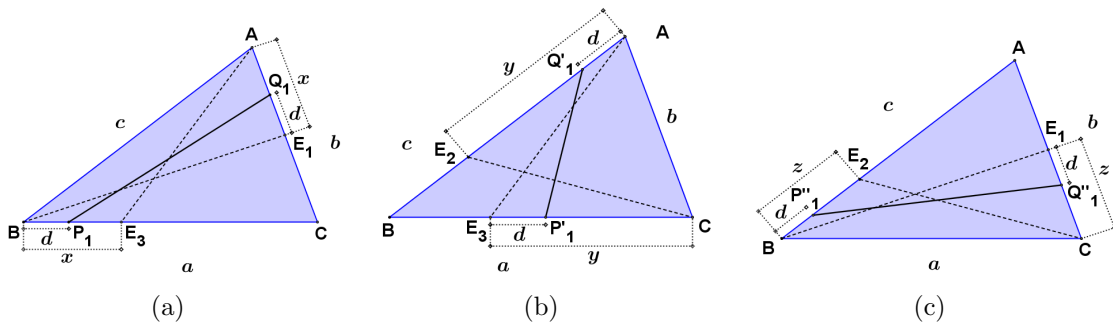
Figura 5.12. Equivalencia de la longitud entre el punto de corte de un escintor de un triángulo y el punto de extangencia sobre uno de los lados, con la longitud entre el vértice opuesto a ese lado y el otro punto de corte del escintor



Fuente: elaboración propia.

Como  $\overline{PQ}$  es un escintor del  $\triangle ABC$  se cumple que  $QC + CE + EP = PB + BA + AQ$  (1). Al unir  $A$  con  $E$  se obtiene el vescintor  $\overline{AE}$ , el cual dimidia el perímetro del  $\triangle ABC$ , con lo cual  $AQ + QC + CE = EP + PB + BA$  (2). Así, de (1)-(2), se tiene que  $EP - AQ = AQ - EP$ , por lo tanto  $EP = AQ$  (QED).

Figura 5.13. Segmentos de los lados de un triángulo que pueden contener los puntos extremos de un escintor



Fuente: elaboración propia.

**Corolario:** los puntos extremos de los escintores de un triángulo se encuentran entre los segmentos de un triángulo generado por dos de sus vescintores (segmentos de Nagel).

Como puede verse en la (figura 5.13a.) el escintor  $\overline{P_1Q_1}$  de puntos extremos en los segmentos  $\overline{AE_b} \cong \overline{BE_a} = x$  está formado entre los vescintores  $\overline{AE_a}$  y  $\overline{BE_b}$ . En la (figura 5.13b.) puede verse que el escintor  $\overline{P'_1Q'_1}$  de puntos extremos en los segmentos

$\overline{AE_c} \cong \overline{CE_a} = y$  está formado entre los vestictores  $\overline{AE_a}$  y  $\overline{CE_c}$ . De igual manera en la (figura 5.13c.) puede verse que el escintor  $\overline{P''_1Q''_1}$  de puntos extremos en los segmentos  $\overline{BE_c} \cong \overline{CE_b} = z$  está formado entre los vestictores  $\overline{BE_b}$  y  $\overline{CE_c}$ .

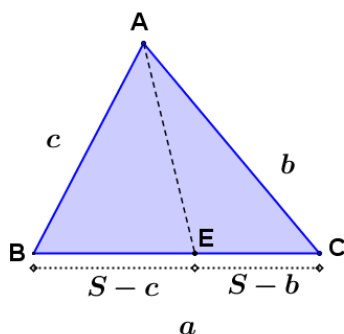
### 5.2.3. Teorema general de los vestictores de un triángulo

**Teorema 16:** en todo triángulo la longitud entre el punto de corte de un vestictor con uno de los lados (punto de extangencia) y un vértice es igual al semiperímetro menos la longitud del lado adyacente.

Demostración:

Sean el  $\triangle ABC$  con  $a = BC$ ,  $b = AC$  y  $c = AB$  y  $\overline{AE}$  un vestictor (figura 5.14.).

Figura 5.14. Relación métrica entre las longitudes de los segmentos generados por un punto de extangencia sobre un lado de un triángulo y el semiperímetro



Fuente: elaboración propia.

Al ser  $\overline{AE}$  un vestictor del triángulo, este divide el perímetro, con lo cual  $c + BE = \frac{a + b + c}{2}$ , luego, al hacer  $S = \frac{a + b + c}{2}$ , se obtiene  $BE = S - c$ .

Procediendo de forma similar se obtiene  $EC = S - b$  (QED).

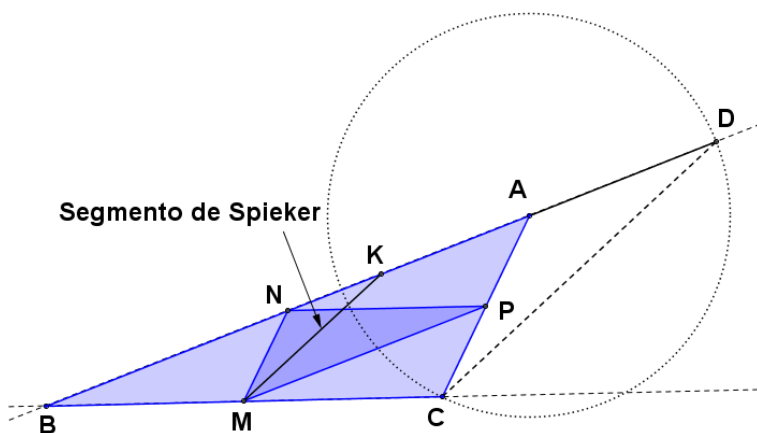
## 5.2.4. Teorema del segmento de Spieker como mescintor de un triángulo

**Teorema 17:** el segmento de Spieker es un mescintor de un triángulo.<sup>71</sup>

Demostración:

Sean el  $\triangle ABC$  y su triángulo medial  $\triangle NPM$ , con  $N$  punto medio de  $\overline{AB}$ ,  $P$  punto medio de  $\overline{AC}$  y  $M$  punto medio de  $\overline{BC}$  y sea  $\overline{MK}$  la bisectriz del  $\angle NMP$ , esto es, un segmento de Spieker (figura 5.15.). Trácese la circunferencia con centro en  $A$  y radio igual a  $d(A, C)$ , la cual corta a  $\overleftrightarrow{AB}$  en  $D$ , así,  $\overline{AD} \cong \overline{AC}$ . Únase  $D$  con  $C$  para formar el  $\triangle ADC$ .

Figura 5.15. Segmento de Spieker como un mescintor de un triángulo



Fuente: elaboración propia.

De acuerdo con la construcción hecha, al ser  $M$ ,  $N$  y  $P$  puntos medios de  $\overline{BC}$ ,  $\overline{BA}$  y  $\overline{AC}$ , respectivamente, se tiene por el teorema de la paralela media que  $\overline{MN} \parallel \overline{PA}$  y  $\overline{MN} \cong \overline{PA}$ ,  $\overline{MP} \parallel \overline{NA}$  y  $\overline{MP} \cong \overline{NA}$ , con lo cual  $NAPM$  es un paralelogramo, donde,  $\angle NMP \cong \angle NAP$  (1) por ser ángulos opuestos del paralelogramo.

<sup>71</sup> Una demostración alternativa haciendo uso del teorema de Arquímedes puede verse en Honsberger (1995), quien hace una explicación más amplia de lo presentado por Avishalom (1963), el cual utiliza el término *cleaver* para referirse a lo denominado en este texto como segmento de Spieker.

Como por construcción auxiliar  $\overline{AD} \cong \overline{AC}$  el  $\triangle CAD$  es isósceles, con lo cual  $\angle ADC \cong \angle ACD$  (2) por ser ángulos opuestos de lados congruentes en el  $\triangle ADC$ . Al ser  $\angle NAP$  exterior al  $\triangle ADC$  se tiene de (2) que  $m(\angle NAP) = 2m(\angle ACD)$  (3). Así, de (1) y (3)  $m(\angle NMP) = 2m(\angle ACD)$ , pero, a su vez,  $m(\angle NMP) = 2m(\angle NMK)$  por ser  $\overline{MK}$  bisectriz de  $\angle NMP$ , con lo cual  $\angle NMK \cong \angle ACD$ . Así,  $\overline{MK} \parallel \overline{CD}$  y por el recíproco del teorema de la paralela media se tiene que  $K$  es punto medio de  $\overline{BD}$  en el  $\triangle BDC$ .

Luego, como  $MB = MC$  y  $BK = DK$ , donde  $DK = DA + AK = CA + AK$ , se tiene que  $MB + BK = MC + DK$ , esto es,  $MB + BK = MC + CA + AK$ , con lo cual se establece que  $\overline{MK}$  es un escintor del  $\triangle ABC$  (QED).

El punto de concurrencia de los escintores es el punto de Spieker y, por lo tanto, el centro de gravedad del perímetro de un triángulo (Avishalom, 1963).

### 5.2.5. Teorema del escintor incentral como escintriz

**Teorema 18:** el escintor que pasa por el incentro de un triángulo es una escintriz.<sup>72</sup>

Demostración:

Sean el  $\triangle ABC$  con  $\overline{HD}$  escintor de este, el cual pasa por el incentro  $I_n$  del triángulo con  $H$  sobre  $\overline{BC}$  y  $D$  sobre  $\overline{AC}$ . Sean  $\overline{I_nB}$  segmento de la bisectriz del  $\angle ABC$ ,  $\overline{I_nC}$  segmento de la bisectriz del  $\angle BCA$  y  $\overline{I_nA}$  segmento de la bisectriz del  $\angle CAB$  (figura 5.16.).

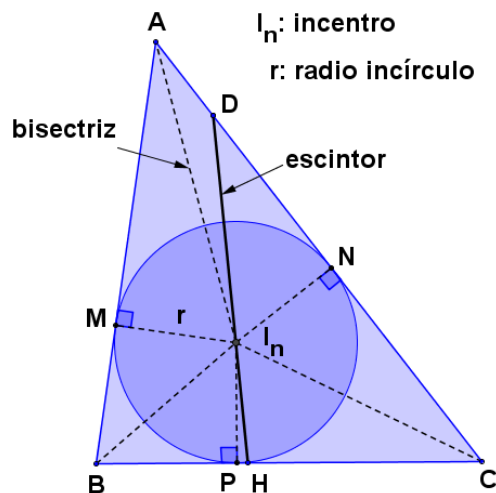
Sean  $M$ ,  $N$  y  $P$  los puntos de tangencia entre la circunferencia inscrita (incírculo) y los lados del  $\triangle ABC$ , con lo cual  $\overline{I_nM} \cong \overline{I_nN} \cong \overline{I_nP} = r$  son alturas de los triángulos  $HI_nB$ ,  $BI_nA$ ,  $AI_nD$ ,  $DI_nC$  y  $CI_nH$ . Así,  $A(\triangle ABC) = A(\triangle HI_nB) + A(\triangle BI_nA) + A(\triangle AI_nD) + A(\triangle DI_nC) + A(\triangle CI_nH)$ , esto es,  $A(\triangle ABC) = \frac{1}{2}(HB)r + \frac{1}{2}(BA)r + \frac{1}{2}(AD)r + \frac{1}{2}(DC)r + \frac{1}{2}(CH)r$ . De donde,  $A(\triangle ABC) = \frac{1}{2}(HB+BA+AD+DC+CH)r$ .

---

<sup>72</sup> Demostraciones alternativa de este teorema pueden verse en Kung (2002), Kodokostas (2010), Shirali (2014), Yiu (2016) y University of Regina. (2016).



Figura 5.16. Escintor incentral como escintriz de un triángulo

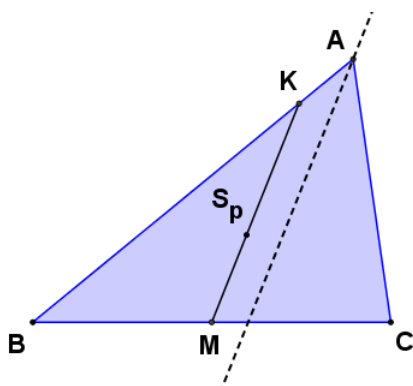


Fuente: elaboración propia.

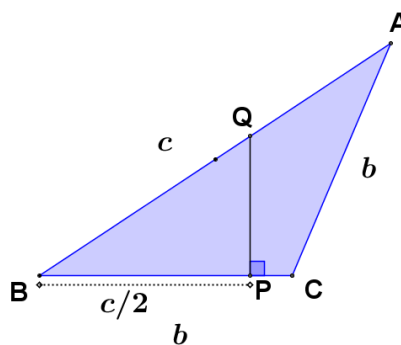
Como  $\overline{HD}$  es un escintor del  $\triangle ABC$ , se tiene que  $HB + BA + AD = DC + CH$ . Así,  $A(\triangle ABC) = \frac{1}{2}(2(DC + CH))r = 2(\frac{1}{2}DCr + \frac{1}{2}CHr) = 2(A(\triangle DI_nC) + A(\triangle CI_nH))$ , esto es,  $A(\triangle ABC) = 2A(\triangle DCH)$  o bien,  $A(\triangle DCH) = \frac{1}{2}A(\triangle ABC)$ , con lo cual, se concluye que cuando un escintor pasa por el incentro de un triángulo, este es, a su vez, escintriz (QED).

### 5.3. Ejercicios capítulo 5

1. Demostrar el teorema auxiliar 2 (Sección 5.1.4).
2. Demostrar el teorema auxiliar 3 (Sección 5.1.4).
3. Demostrar el teorema auxiliar 4 (Sección 5.1.4).
4. Demostrar el corolario del teorema 15 (Sección 5.2.2).
5. Demostrar que para todo triángulo los escintores (segmentos de Spieker) son paralelos a las bisectrices de los ángulos opuestos a los lados por cuyos puntos medios estos pasan [adaptado de Avishalom (1963)].
6. Dado el  $\triangle ABC$ , con  $a = BC$ ,  $b = AC$  y  $c = AB$ , donde  $3a = b + c$ , demostrar que el segmento inscrito paralelo a  $\overline{BC}$  y que pasa por el gravicentro  $G$  es un escintor.
7. Demostrar que para cualquier triángulo rectángulo el segmento inscrito que une al circuncentro  $C_c$  con el punto de Spieker  $S_p$  es un escintor.
8. Dado el  $\triangle ABC$  isósceles, con  $b = AC = BC$  y  $c = AB$ , donde  $c > b$ , con  $P$  sobre  $\overline{BC}$  y  $Q$  sobre  $\overline{AB}$ , donde,  $\overline{PQ} \perp \overline{BC}$ , trazado por el punto  $P$  distante  $\frac{c}{2}$  desde el vértice  $B$ , demostrar que:
  - a) El segmento inscrito  $\overline{PQ}$ , es una escintriz
  - b) Si  $\triangle ABC$  es rectángulo  $AB = 2PQ$



Ejercicio No. 5



Ejercicio No. 8

Fuente: elaboración propia.

## CAPÍTULO 6

# Coordenadas de los puntos extremos de los escintores de un triángulo

En este capítulo se expone el proceso analítico llevado a cabo para la obtención de las coordenadas de los puntos extremos de un escintor general de un triángulo, en términos de la distancia desde uno de ellos hasta un vértice tomado como punto de referencia y de la longitud de los lados. Posteriormente, se establecen las coordenadas de dichos puntos en términos de las coordenadas cartesianas de los vértices del triángulo. Por último, haciendo uso de las formulas previamente obtenidas para un escintor general, se aborda la determinación de las coordenadas de los puntos extremos para dos tipos especiales de escintores como son los vescintores y los mescintores.

## 6.1. Coordenadas de los puntos extremos de un escintor general de un triángulo

Sea el  $\triangle ABC$  con los puntos de extangencia  $E_b$  sobre  $\overline{AC}$ ,  $E_c$  sobre  $\overline{AB}$ ,  $E_a$  sobre  $\overline{BC}$  y con  $\overline{PQ}$  un escintor del triángulo.

Para la determinación de las coordenadas de los puntos extremos de los escintores, se tomará como referencia el vértice  $B$  y la recta  $\overleftrightarrow{BC}$  (sección 2.1.), a partir de lo cual se establece la distancia  $d$  a uno de ellos sobre  $\overline{BA}$  o  $\overline{BC}$  y, de acuerdo con el corolario del teorema 15 (sección 5.2.2.), se han de considerar las siguientes posibilidades (figura 5.13., sección 5.2.2.):

Escintor en ángulo  $C$ ,<sup>73</sup>  $\overline{P_1Q_1}$ , con  $P_1$  sobre  $\overline{BE_a}$  y  $Q_1$  sobre  $\overline{AE_b}$ .

Escintor en ángulo  $B$ ,  $\overline{P'_1Q'_1}$ , con  $P'_1$  sobre  $\overline{CE_a}$  y  $Q'_1$  sobre  $\overline{AE_c}$ .

Escintor en ángulo  $A$ ,  $\overline{P''_1Q''_1}$ , con  $P''_1$  sobre  $\overline{BE_c}$  y  $Q''_1$  sobre  $\overline{CE_b}$ .

### 6.1.1. Coordenadas de los puntos extremos de un escintor de un triángulo en términos de la distancia desde uno de ellos a un vértice de referencia y la longitud de los lados

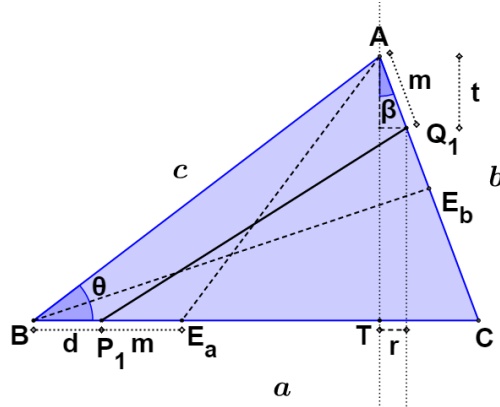
#### 6.1.1.1. Coordenadas de los puntos extremos del escintor en ángulo $C$ , $\overline{P_1Q_1}$ , en términos de la distancia desde $P_1$ al vértice de referencia $B$ y la longitud de los lados

Sea el  $\triangle ABC$  con  $a = BC$ ,  $b = AC$ ,  $c = AB$ ,  $E_b$  y  $E_a$  puntos de extangencia sobre  $\overline{AC}$  y  $\overline{BC}$ , respectivamente. Sea  $\overline{P_1Q_1}$  escintor en ángulo  $C$  del triángulo, con  $P_1$  sobre  $\overline{BE_a}$  y  $Q_1$  sobre  $\overline{AE_b}$  (figura 6.1.), donde  $BE_a = S - c$  (teorema 16, sección 5.2.3.).

---

<sup>73</sup> Definición sección 5.1.2.

Figura 6.1. Escintor en ángulo  $C$ ,  $\overline{P_1Q_1}$



Fuente: elaboración propia.

Al hacer  $d = BP_1$ , donde  $0 \leq d \leq S - c$ , se tiene que:

$$P_1 = (d, 0) \quad (6.1)$$

Al trazar  $\overline{AT}$ , altura del triángulo, con  $T$  sobre  $\overline{BC}$  (figura 6.1.), hacer  $\beta = \angle TAC$  y  $m = AQ_1 = P_1E_a$  (teorema 15, sección 5.2.2.), se tiene que  $r = m\text{sen}\beta$  y  $t = m\text{cos}\beta$ . Así, al ser  $AT = c\text{sen}\theta$  y  $BT = c\text{cos}\theta$ , entonces  $Q_1 = (c\text{cos}\theta + r, c\text{sen}\theta - t)$ . De la figura 6.1. también se tiene que  $\text{sen}\beta = \frac{(a - c\text{cos}\theta)}{b}$  y  $\text{cos}\beta = \frac{c\text{sen}\theta}{b}$ , luego,  $c\text{cos}\theta + r = \frac{(b - m)c\text{cos}\theta + ma}{b}$  y  $c\text{sen}\theta - t = \frac{(b - m)c\text{sen}\theta}{b}$ . Así, como  $m = BE_a - BP_1$ , al hacer  $d = BP_1$  y  $BE_a = S - c$  (teorema 16, sección 5.2.3.), se tiene  $m = S - c - d$ , con lo cual  $b - m = S - a + d$ , por lo tanto, para  $0 \leq d \leq S - c$ :

$$Q_1 = \left( \frac{a(S - c - d) + c(S - a + d)\text{cos}\theta}{b}, \frac{c(S - a + d)\text{sen}\theta}{b} \right) \quad (6.2)$$

donde, en términos de la longitud de los lados del triángulo (sección 2.2.1.):

$$P_1 = (d, 0)$$

y

$$Q_1 = \left( \frac{(S - a + d)\Omega + 2a^2(S - c - d)}{2ab}, \frac{(S - a + d)\sqrt{\Delta_0}}{2ab} \right) \quad (6.3)$$

Puede observarse que, cuando  $d = 0$ ,  $P_1$  coincide con  $B$  y  $Q_1$  coincide con  $E_b$ . Adicionalmente, cuando  $d = S - c$ ,  $P_1$  coincide con  $E_a$  y  $Q_1$  coincide con  $A$ .

**6.1.1.2. Coordenadas de los puntos extremos del escintor en ángulo  $B$ ,  $\overline{P'_1Q'_1}$ , en términos de la distancia desde  $P'_1$  al vértice de referencia  $B$  y la longitud de los lados**

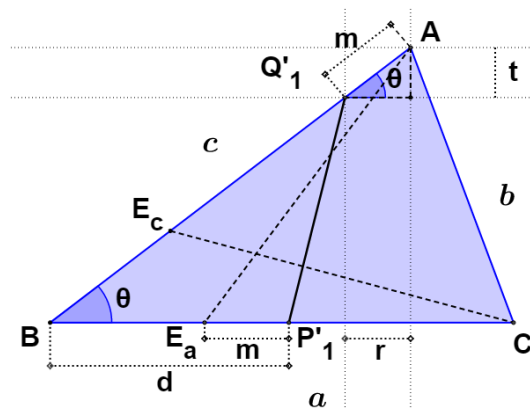
Sea el  $\triangle ABC$  con  $a = BC$ ,  $b = AC$ ,  $c = AB$ ,  $E_c$  y  $E_a$  puntos de extangencia sobre  $\overline{AB}$  y  $\overline{BC}$ , respectivamente. Sea  $\overline{P'_1Q'_1}$  escintor en ángulo  $B$  del triángulo, con  $P'_1$  sobre  $\overline{E_aC}$  y  $Q'_1$  sobre  $\overline{E_cA}$  (figura 6.2.), donde  $BE_a = S - c$  (teorema 16, sección 5.2.3.).

Al hacer  $d = BP'_1$ , donde  $S - c \leq d \leq a$ , se tiene que:

$$P'_1 = (d, 0) \tag{6.4}$$

De acuerdo con la figura 6.2. y las coordenadas para el vértice  $A$  (sección 2.2.1.), al hacer  $m = E_aP'_1 = AQ'_1$  (teorema 15, sección 5.2.2.),  $r = m \cos \theta$  y  $t = m \sin \theta$ , se tiene que  $Q'_1 = (c \cos \theta - r, c \sin \theta - t)$ , donde  $c \cos \theta - r = (c - m) \cos \theta$  y  $c \sin \theta - t = (c - m) \sin \theta$ .

Figura 6.2. Escintor en ángulo  $B$ ,  $\overline{P'_1Q'_1}$



Fuente: elaboración propia.

Así, al ser  $m = d - BE_a$ , de donde  $m = d - (S - c)$  (teorema 16, sección 5.2.3.), se tiene que, para  $S - c \leq d \leq a$ :

$$Q'_1 = ((S - d)\cos\theta, (S - d)\sen\theta) \quad (6.5)$$

donde, en términos de la longitud de los lados del triángulo (sección 2.2.1.):

$$P'_1 = (d, 0)$$

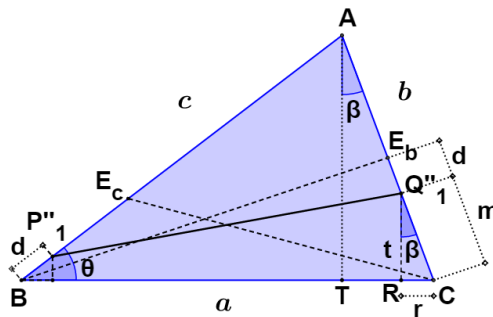
$$y \quad (6.6)$$

$$Q'_1 = \left( \frac{(S - d)\Omega}{2ac}, \frac{(S - d)\sqrt{\Delta_0}}{2ac} \right)$$

Puede observarse que, cuando  $d = S - c$ ,  $P'_1$  coincide con  $E_a$  y  $Q'_1$  coincide con  $A$ . Adicionalmente, cuando  $d = a$ ,  $P'_1$  coincide con  $C$  y  $Q'_1$  coincide con  $E_c$ .

### 6.1.1.3. Coordenadas de los puntos extremos del escintor en ángulo $A$ , $\overline{P''_1Q''_1}$ , en términos de la distancia desde $P''_1$ al vértice de referencia $B$ y la longitud de los lados

Figura 6.3. Escintor en ángulo  $A$ ,  $\overline{P''_1Q''_1}$



Fuente: elaboración propia.

Sea el  $\triangle ABC$  con  $a = BC$ ,  $b = AC$ ,  $c = AB$ ,  $E_b$  y  $E_c$  puntos de extangencia sobre  $\overline{AC}$  y  $\overline{BA}$ , respectivamente. Sea  $\overline{P''_1Q''_1}$  escintor en ángulo  $A$  del triángulo, con  $P''_1$  sobre  $\overline{BE_c}$  y  $Q''_1$  sobre  $\overline{CE_b}$  (figura 6.3.), donde  $BE_c = CE_b = S - a$  (teorema 16, sección 5.2.3.).

Al hacer  $d = BP''$ , donde  $0 \leq d \leq S - a$ , se tiene que:

$$P''_1 = (d\cos\theta, d\sen\theta) \quad (6.7)$$

Trazando las perpendiculares desde  $A$  y  $Q''_1$  hasta  $\overline{BC}$ , con  $T$  y  $R$  pies de las respectivas perpendiculares, se obtiene  $\triangle ATC \sim \triangle Q''_1RC$  (criterio A. A., dado que  $\angle TCA \cong \angle RCQ''_1$  por ser ángulo común y  $\angle ATC \cong \angle Q''_1RC$  por ser ángulos rectos por construcción), con lo cual  $\angle CAT \cong \angle CQ''_1R$  por ser ángulos correspondientes de triángulos semejantes. Así al hacer  $\beta = \angle CAT \cong \angle CQ''_1R$ ,  $d = E_bQ''_1 = BP''_1$  (teorema 15, sección 5.2.2.),  $m = CQ''_1$ ,  $r = RC = m\sen\beta$  y  $t = RQ''_1 = m\cos\beta$ , se tiene que las coordenadas de  $Q''_1$  están dadas por  $Q''_1 = (a - r, t)$ .

Como  $AT = c\sen\theta$  y  $BT = c\cos\theta$ , entonces  $\sen\beta = \frac{(a - c\cos\theta)}{b}$  y  $\cos\beta = \frac{c\sen\theta}{b}$ , con lo cual  $r = m\frac{(a - c\cos\theta)}{b}$  y  $t = m\frac{c\sen\theta}{b}$ . Luego, de acuerdo con la figura 6.3.  $m = CE_b - d$ , de donde  $m = S - a - d$  (teorema 16, sección 5.2.3.), por lo tanto, para  $0 \leq d \leq S - a$ :

$$Q''_1 = \left( \frac{a(S - c + d) + c(S - a - d)\cos\theta}{b}, \frac{c(S - a - d)\sen\theta}{b} \right) \quad (6.8)$$

donde, en términos de la longitud de los lados del triángulo (sección 2.2.1.):

$$P''_1 = \left( \frac{d\Omega}{2ac}, \frac{d\sqrt{\Delta_0}}{2ac} \right)$$

$y$

$$Q''_1 = \left( \frac{2a^2(S - c + d) + (S - a - d)\Omega}{2ab}, \frac{(S - a - d)\sqrt{\Delta_0}}{2ab} \right) \quad (6.9)$$

Puede observarse que, cuando  $d = 0$ ,  $P''_1$  coincide con  $B$  y  $Q''_1$  coincide con  $E_b$ . Adicionalmente, cuando  $d = S - a$ ,  $P''_1$  coincide con  $E_c$  y  $Q''_1$  coincide con  $C$ .



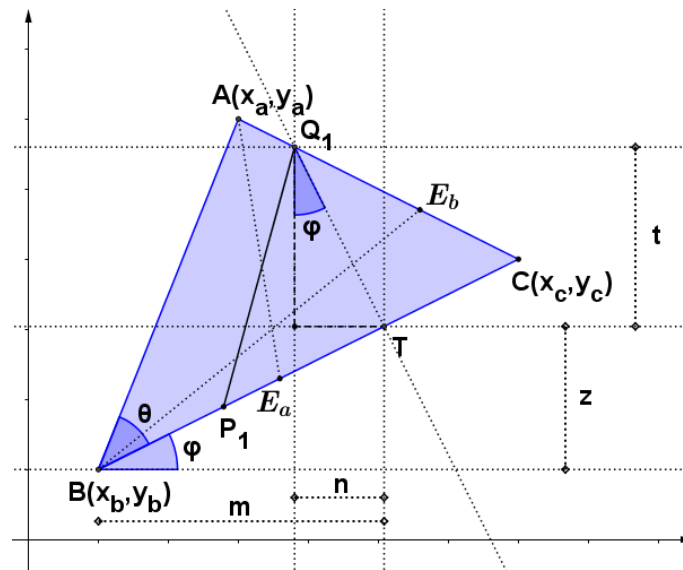
**6.1.2. Coordenadas de los puntos extremos de los escintores de un triángulo en términos de la distancia desde uno de ellos a un vértice de referencia y las coordenadas cartesianas de los vértices**

Para el desarrollo de las coordenadas cartesianas de los puntos extremos de los escintores se tomarán como base las fórmulas para los elementos de un triángulo en términos de las coordenadas cartesianas de los vértices dadas en la sección 2.3.1.

**6.1.2.1. Coordenadas de los puntos extremos del escintor en ángulo  $C$ ,  $\overline{P_1Q_1}$ , en términos de la distancia desde  $P_1$  al vértice de referencia  $B$  y las coordenadas cartesianas de los vértices de un triángulo**

Sea el  $\triangle ABC$  en un sistema cartesiano (sección 2.3.1.) con  $E_a$  y  $E_b$  puntos de extangencia sobre  $\overline{BC}$  y  $\overline{AC}$ , respectivamente,  $\overline{P_1Q_1}$  un escintor del triángulo, con  $P_1$  sobre  $\overline{BE_a}$  y  $Q_1$  sobre  $\overline{AE_b}$  (corolario teorema 15, sección 5.2.2.), y  $T$  el pie de la perpendicular trazada desde  $Q_1$  hasta  $\overline{BC}$  (figura 6.4.).

Figura 6.4. Escintor en ángulo  $C$ ,  $\overline{P_1Q_1}$ , en un sistema cartesiano



Fuente: elaboración propia.

Las coordenadas de  $P_1$  están dadas por  $P_1 = (x_b + (BP_1)\cos\varphi, y_b + (BP_1)\sen\varphi)$ , con lo cual, al hacer  $d = BP_1$ , para  $0 \leq d \leq S - c$ :

$$P_1 = (x_b + d\cos\varphi, y_b + d\sen\varphi) \quad (6.10)$$

Como las coordenadas de  $Q_1$  respecto del vértice  $B$  y la recta de referencia  $\overleftrightarrow{BC}$  (sección 2.1.) corresponden a  $Q_1 = (BT, Q_1T)$ , entonces, de la ecuación 6.2 (sección 6.1.1.1.), se tiene que, para  $0 \leq d \leq S - c$ ,  $BT = \frac{a(S - c - d) + c(S - a + d)\cos\theta}{b}$  y  $Q_1T = \frac{c(S - a + d)\sen\theta}{b}$ , con lo cual, de acuerdo con la figura 6.4., las coordenadas de  $Q_1$  están dadas por  $Q_1 = (x_b + m - n, y_b + z + t)$ .

Al ser  $t = (Q_1T)\cos\varphi$ ,  $z = (BT)\sen\varphi$ ,  $m = (BT)\cos\varphi$  y  $n = (Q_1T)\sen\varphi$ , se tiene que  $m - n = \frac{c(S - a + d)\cos(\theta + \varphi) + a(S - c - d)\cos\varphi}{b}$  y  $z + t = \frac{c(S - a + d)\sen(\theta + \varphi) + a(S - c - d)\sen\varphi}{b}$ .

Así:

$$Q_1 = \left( x_b + \frac{c(S - a + d)\cos(\theta + \varphi) + a(S - c - d)\cos\varphi}{b}, \right. \\ \left. y_b + \frac{c(S - a + d)\sen(\theta + \varphi) + a(S - c - d)\sen\varphi}{b} \right) \quad (6.11)$$

donde, en términos de las coordenadas cartesianas de los vértices del triángulo (sección 2.3.1.), para  $0 \leq d \leq S - c$ :

$$P_1 = \left( \frac{(a - d)x_b + dx_c}{a}, \frac{(a - d)y_b + dy_c}{a} \right) \quad (6.12)$$

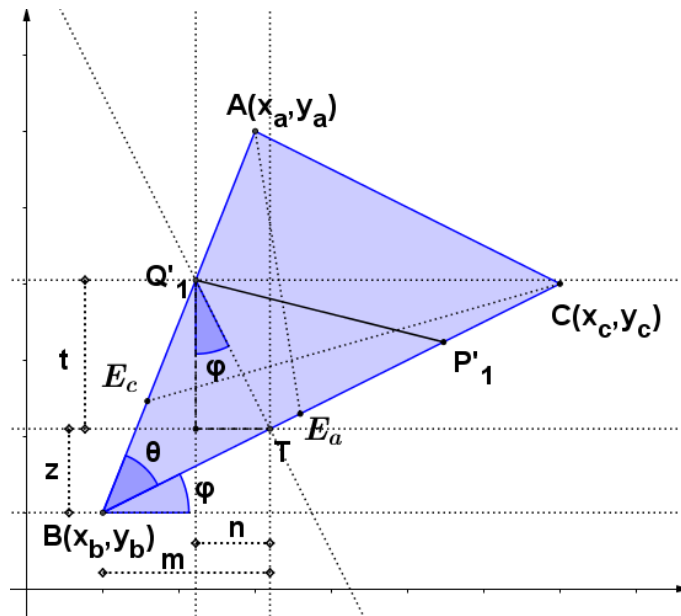
y

$$Q_1 = \left( \frac{(S - a + d)x_a + (S - c - d)x_c}{b}, \frac{(S - a + d)y_a + (S - c - d)y_c}{b} \right)$$

**6.1.2.2. Coordenadas de los puntos extremos del escintor en ángulo  $B$ ,  $\overline{P'_1Q'_1}$ , en términos de la distancia desde  $P'_1$  al vértice de referencia  $B$  y las coordenadas cartesianas de los vértices de un triángulo**

Sea el  $\triangle ABC$  en un sistema cartesiano (sección 2.3.1.) con  $E_c$  y  $E_a$  puntos de extangencia sobre  $\overline{AB}$  y  $\overline{BC}$ , respectivamente,  $\overline{P'_1Q'_1}$  un escintor del triángulo, con  $P'_1$  sobre  $\overline{CE_a}$  y  $Q'_1$  sobre  $\overline{AE_c}$  (corolario teorema 16, sección 5.2.2.), y  $T$  el pie de la perpendicular trazada desde  $Q'_1$  hasta  $\overline{BC}$  (figura 6.5.).

Figura 6.5. Escintor en ángulo  $B$ ,  $\overline{P'_1Q'_1}$ , en un sistema cartesiano



Fuente: elaboración propia.

Las coordenadas de  $P'_1$  están dadas por  $P'_1 = (x_b + (BP'_1)\cos\varphi, y_b + (BP'_1)\sen\varphi)$ , con lo cual, al hacer  $d = BP'_1$ , para  $S - c \leq d \leq a$ :

$$P'_1 = (x_b + d\cos\varphi, y_b + d\sen\varphi) \tag{6.13}$$

Como las coordenadas de  $Q'_1$  respecto del vértice  $B$  y la recta de referencia  $\overleftrightarrow{BC}$  (sección 2.1.) corresponden a  $Q'_1 = (BT, Q'_1T)$ , entonces, de la ecuación 6.5

(sección 6.1.1.2.), se tiene que, para  $S - c \leq d \leq a$ ,  $BT = (S - d)\cos\theta$  y  $Q'_1T = (S - d)\sen\theta$ , con lo cual, de acuerdo con la figura 6.5., las coordenadas de  $Q'_1$  están dadas por  $Q'_1 = (x_b + m - n, y_b + z + t)$ .

Al ser  $t = (Q'_1T)\cos\varphi$ ,  $z = (BT)\sen\varphi$ ,  $m = (BT)\cos\varphi$  y  $n = (Q'_1T)\sen\varphi$ , se tiene que  $m - n = (S - d)\cos(\theta + \varphi)$  y  $z + t = (S - d)\sen(\theta + \varphi)$ .

Así:

$$Q'_1 = (x_b + (S - d)\cos(\theta + \varphi), y_b + (S - d)\sen(\theta + \varphi)) \quad (6.14)$$

donde, en términos de las coordenadas cartesianas de los vértices del triángulo (sección 2.3.1.), para  $S - c \leq d \leq a$ :

$$P'_1 = \left( \frac{(a - d)x_b + dx_c}{a}, \frac{(a - d)y_b + dy_c}{a} \right)$$

$y$

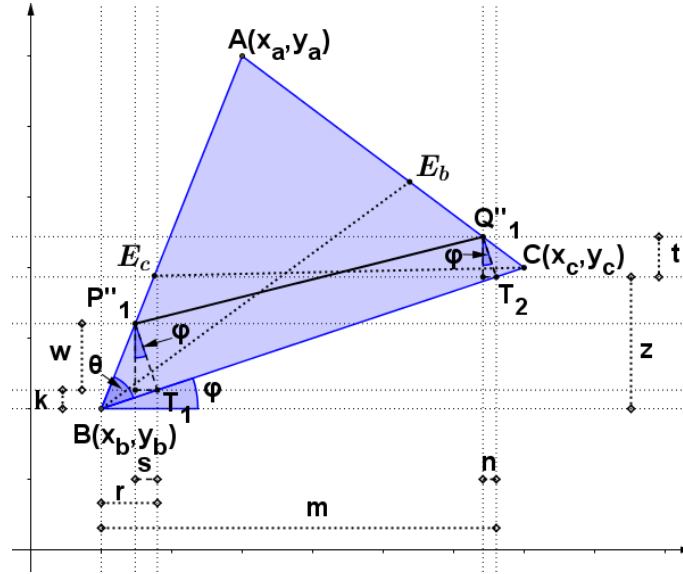
$$Q'_1 = \left( \frac{(S - d)x_a + (c + d - S)x_b}{c}, \frac{(S - d)y_a + (c + d - S)y_b}{c} \right) \quad (6.15)$$

### 6.1.2.3. Coordenadas de los puntos extremos del escintor en ángulo $A$ , $\overline{P''_1Q''_1}$ , en términos de la distancia desde $P''_1$ al vértice de referencia $B$ y las coordenadas cartesianas de los vértices de un triángulo

Sea el  $\triangle ABC$  en un sistema cartesiano (sección 2.3.1.) con  $E_c$  y  $E_b$  puntos de extangencia sobre  $\overline{AB}$  y  $\overline{AC}$ , respectivamente,  $\overline{P''_1Q''_1}$  un escintor del triángulo, con  $P''_1$  sobre  $\overline{BE_c}$  y  $Q''_1$  sobre  $\overline{CE_b}$  (corolario teorema 15, sección 5.2.2.), y  $T_1, T_2$  pies de las perpendicular trazadas desde  $P''_1$  y  $Q''_1$  hasta  $\overline{BC}$  (figura 6.6.).

Como las coordenadas de  $P''_1$  respecto del vértice  $B$  y la recta de referencia  $\overleftrightarrow{BC}$  (sección 2.1.) corresponden a  $P''_1 = (BT_1, P''_1T_1)$ , entonces, de la ecuación 6.7 (sección 6.1.1.3.), se tiene que, para  $0 \leq d \leq S - a$ ,  $BT_1 = d\cos\theta$  y  $P''_1T_1 = d\sen\theta$ , con lo cual, de acuerdo con la figura 6.6., las coordenadas de  $P''_1$  están dadas por  $P''_1 = (x_b + r - s, y_b + k + w)$ .

Figura 6.6. Escintor en ángulo  $A$ ,  $\overline{P''_1Q''_1}$ , en un sistema cartesiano



Fuente: elaboración propia.

Al ser  $w = (P''_1T_1)\cos\varphi$ ,  $k = (BT_1)\sen\varphi$ ,  $r = (BT_1)\cos\varphi$  y  $s = (P''_1T_1)\sen\varphi$ , se tiene que  $r - s = d\cos(\theta + \varphi)$  y  $k + w = d\sen(\theta + \varphi)$ . Así,

$$P''_1 = (x_b + d\cos(\theta + \varphi), y_b + d\sen(\theta + \varphi)) \quad (6.16)$$

Como las coordenadas de  $Q''_1$  respecto del vértice  $B$  y la recta de referencia  $\overleftrightarrow{BC}$  (sección 2.1.) corresponden a  $Q''_1 = (BT_2, Q''_1T_2)$ , entonces, de la ecuación 6.8 (sección 6.1.1.3.), para  $0 \leq d \leq S - a$ , se tiene que  $BT_2 = \frac{a(S - c + d) + c(S - a - d)\cos\theta}{b}$  y  $Q''_1T_2 = \frac{c(S - a - d)\sen\theta}{b}$ , con lo cual, de acuerdo con la figura 6.6., las coordenadas de  $Q''_1$  están dadas por  $Q''_1 = (x_b + m - n, y_b + z + t)$ .

Al ser  $t = (Q''_1T_2)\cos\varphi$ ,  $z = (BT_2)\sen\varphi$ ,  $m = (BT_2)\cos\varphi$  y  $n = (Q''_1T_2)\sen\varphi$ , se tiene que  $m - n = \frac{a(S - c + d)\cos\varphi + c(S - a - d)\cos(\theta + \varphi)}{b}$  y  $z + t = \frac{a(S - c + d)\sen\varphi + c(S - a - d)\sen(\theta + \varphi)}{b}$ .

Así,

$$Q_1'' = \left( x_b + \frac{a(S - c + d)\cos\varphi + c(S - a - d)\cos(\theta + \varphi)}{b}, \right. \\ \left. y_b + \frac{a(S - c + d)\sen\varphi + c(S - a - d)\sen(\theta + \varphi)}{b} \right) \quad (6.17)$$

donde, en términos de las coordenadas cartesianas de los vértices del triángulo (sección 2.3.1.), para  $0 \leq d \leq S - a$ :

$$P_1'' = \left( \frac{dx_a + (c - d)x_b}{c}, \frac{dy_a + (c - d)y_b}{c} \right) \\ y \quad (6.18)$$

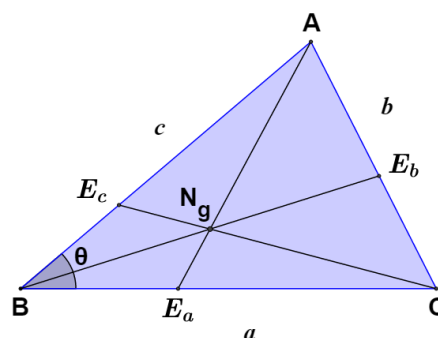
$$Q_1'' = \left( \frac{(S - a - d)x_a + (S - c + d)x_c}{b}, \frac{(S - a - d)y_a + (S - c + d)y_c}{b} \right)$$

## 6.2. Coordenadas de los puntos extremos de los vescintores de un triángulo

Un vescintor (segmento de Nagel) tiene por coordenadas de sus puntos extremos a las correspondientes de un vértice y las del punto de extangencia sobre el lado opuesto al vértice (figura 6.7.).

Así, para la obtención de las coordenadas de los puntos extremos de los vescintores respecto del vértice  $B$  y la recta de referencia  $\overleftrightarrow{BC}$  (sección 2.1.), de acuerdo con las fórmulas para las coordenadas de los escintores del  $\triangle ABC$  (secciones 6.1.1.1., 6.1.1.2. y 6.1.1.3.), se tendrá en cuenta que:

Figura 6.7. Vescintores de un triángulo



Fuente: elaboración propia.

$E_a$ , punto de extangencia sobre  $\overline{BC}$ , se obtendrá para  $d = S - c$ , tomado sobre  $\overline{BC}$ .

$E_b$ , punto de extangencia sobre  $\overline{AC}$ , se obtendrá para  $d = 0$ , tomado sobre  $\overline{BC}$ .

$E_c$ , punto de extangencia sobre  $\overline{BA}$ , se obtendrá para  $d = a$ , tomado sobre  $\overline{BC}$ .

### 6.2.1. Coordenadas de los puntos extremos de los vescintores de un triángulo en términos de la longitud de los lados

#### 6.2.1.1. Coordenadas de los puntos extremos del vescintor $\overline{BE_b}$ en términos de la longitud de los lados

De acuerdo con las fórmulas para la obtención de las coordenadas de los puntos extremos del escintor del  $\triangle ABC$ ,  $\overline{P_1Q_1}$ , con  $P_1$  sobre  $\overline{BE_a}$  y  $Q_1$  sobre  $\overline{AE_b}$  (ecuaciones 6.1 y 6.2, sección 6.1.1.1.), se tiene que, para  $d = 0$ ,  $P_1$  coincide con  $B$  y  $Q_1$  coincide con  $E_b$  (figura 6.1.), con lo cual:

$$\begin{aligned}
 & B = (0, 0) \\
 & y \\
 & E_b = \left( \frac{a(S - c) + c(S - a)\cos\theta}{b}, \frac{c(S - a)\sen\theta}{b} \right)
 \end{aligned} \tag{6.19}$$

donde, en términos de la longitud de los lados (sección 2.2.1.):

$$\begin{aligned}
 & B = (0, 0) \\
 & y \\
 & E_b = \left( \frac{2a^2(S - c) + (S - a)\Omega}{2ab}, \frac{(S - a)\sqrt{\Delta_0}}{2ab} \right)
 \end{aligned} \tag{6.20}$$

### 6.2.1.2. Coordenadas de los puntos extremos del vesticor $\overline{CE_c}$ en términos de la longitud de los lados

De acuerdo con las fórmulas para la obtención de las coordenadas de los puntos extremos del escintor del  $\triangle ABC$ ,  $\overline{P'_1Q'_1}$ , con  $P'_1$  sobre  $\overline{CE_a}$  y  $Q'_1$  sobre  $\overline{AE_c}$  (ecuaciones 6.4 y 6.5, sección 6.1.1.2.), se tiene que, para  $d = a$ ,  $P'_1$  coincide con  $C$  y  $Q'_1$  coincide con  $E_c$  (figura 6.1.), con lo cual:

$$\begin{aligned} C &= (a, 0) \\ y \\ E_c &= ((S - a)\cos\theta, (S - a)\sen\theta) \end{aligned} \tag{6.21}$$

donde, en términos de la longitud de los lados (sección 2.2.1.):

$$\begin{aligned} C &= (a, 0) \\ y \\ E_c &= \left( \frac{(S - a)\Omega}{2ac}, \frac{(S - a)\sqrt{\Delta_0}}{2ac} \right) \end{aligned} \tag{6.22}$$

### 6.2.1.3. Coordenadas de los puntos extremos del vesticor $\overline{AE_a}$ en términos de la longitud de los lados

De acuerdo con las fórmulas para la obtención de las coordenadas de los puntos extremos del escintor del  $\triangle ABC$ ,  $\overline{P_1Q_1}$ , con  $P_1$  sobre  $\overline{BE_a}$  y  $Q_1$  sobre  $\overline{AE_b}$  (ecuaciones 6.1 y 6.2, sección 6.1.1.1.), se tiene que, para  $d = S - c$  (teorema 16, sección 5.2.3.),  $P_1$  coincide con  $E_a$  y  $Q_1$  coincide con  $A$  (figura 6.1.), por lo tanto:



$$\begin{aligned}
 A &= (c\cos\theta, c\sin\theta) \\
 y \\
 E_a &= (S - c, 0)
 \end{aligned}
 \tag{6.23}$$

donde, en términos de la longitud de los lados (sección 2.2.1.):

$$\begin{aligned}
 A &= \left( \frac{\Omega}{2a}, \frac{\sqrt{\Delta_0}}{2a} \right) \\
 y \\
 E_a &= (S - c, 0)
 \end{aligned}
 \tag{6.24}$$

### 6.2.2. Coordenadas de los puntos extremos de los vescintores en términos de las coordenadas cartesianas de los vértices de un triángulo

Para el desarrollo de las coordenadas cartesianas de los puntos extremos de los vescintores se tomarán como base las fórmulas obtenidas en la sección 6.1.2.

#### 6.2.2.1. Coordenadas de los puntos extremos del vescintor $\overline{BE_b}$ en términos de las coordenadas cartesianas de los vértices de un triángulo

De acuerdo con las fórmulas para la obtención de las coordenadas cartesianas de los puntos extremos del escintor  $\overline{P_1Q_1}$  del  $\triangle ABC$  (ecuación 6.12 sección 6.1.2.1.) se tiene que, para  $d = 0$ ,  $P_1$  coincide con el vértice  $B$  y  $Q_1$  coincide con  $E_b$  (figura 6.1.). Así,

$$\begin{aligned}
 B &= (x_b, y_b) \\
 y \\
 E_b &= \left( \frac{(S - a)x_a + (S - c)x_c}{b}, \frac{(S - a)y_a + (S - c)y_c}{b} \right)
 \end{aligned}
 \tag{6.25}$$

### 6.2.2.2. Coordenadas de los puntos extremos del vesticor $\overline{CE_c}$ en términos de las coordenadas cartesianas de los vértices de un triángulo

De acuerdo con las fórmulas para la obtención de las coordenadas cartesianas de los puntos extremos del escintor  $\overline{P'_1Q'_1}$  del  $\triangle ABC$  (ecuación 6.15 sección 6.1.2.2.) se tiene que, para  $d = a$ ,  $P'_1$  coincide con el vértice  $C$  y  $Q'_1$  coincide con  $E_c$  (figura 6.5.). Luego:

$$C = (x_c, y_c)$$

$y$

$$E_c = \left( \frac{(S-a)x_a + (S-b)x_b}{c}, \frac{(S-a)y_a + (S-b)y_b}{c} \right) \quad (6.26)$$

### 6.2.2.3. Coordenadas de los puntos extremos del vesticor $\overline{AE_a}$ en términos de las coordenadas cartesianas de los vértices de un triángulo

De acuerdo con las fórmulas para la obtención de las coordenadas cartesianas de los puntos extremos del escintor  $\overline{P_1Q_1}$  del  $\triangle ABC$  (ecuación 6.12 sección 6.1.2.1.) se tiene que, para  $d = S - c$ ,  $Q_1$  coincide con el vértice  $A$  y  $P_1$  coincide con  $E_a$  (ver figura 6.4.).

Por lo tanto:

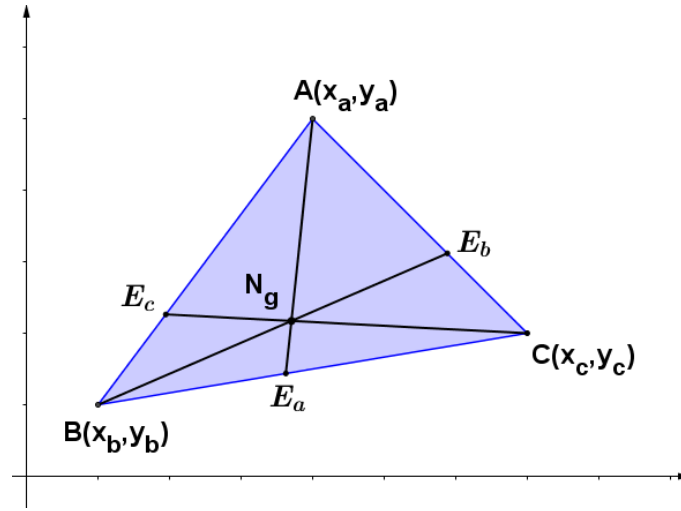
$$A = (x_a, y_a)$$

$y$

$$E_a = \left( \frac{(S-b)x_b + (S-c)x_c}{a}, \frac{(S-b)y_b + (S-c)y_c}{a} \right) \quad (6.27)$$

En la figura 6.8. pueden verse conjuntamente los vesticores  $\overline{AE_a}$ ,  $\overline{BE_b}$  y  $\overline{CE_c}$ .

Figura 6.8. Vescintores de un triángulo en un sistema cartesiano

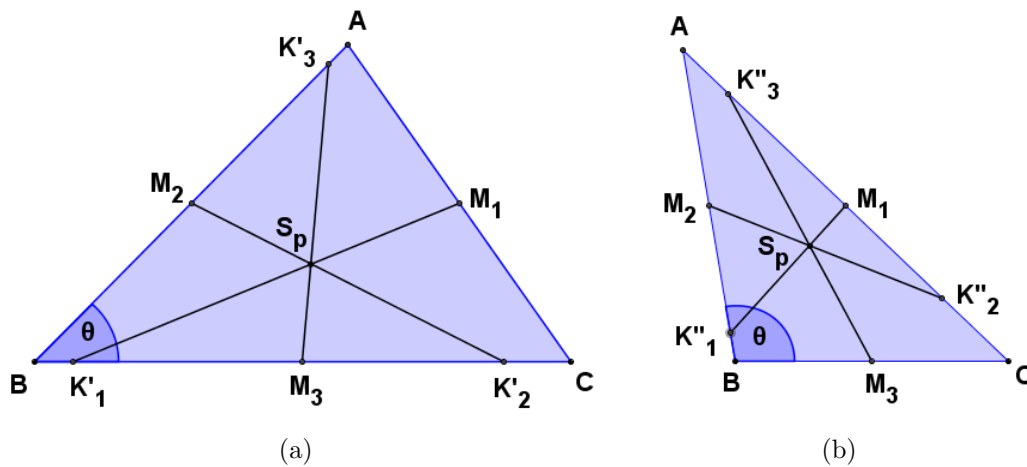


Fuente: elaboración propia.

### 6.3. Coordenadas de los puntos extremos de los mescintores de un triángulo

Un mescintor (segmento de Spieker) tiene por coordenadas de sus puntos extremos a las correspondientes del punto medio  $M$  de un lado de un triángulo y las del punto  $K$  sobre un lado adyacente, resultante de la intersección de este con la recta que une a  $M$  con el punto de Spieker  $S_p$  (figura 6.9.).

Figura 6.9. Mescintores de un triángulo



Fuente: elaboración propia.

Así, al ser  $M_1$ ,  $M_2$  y  $M_3$  puntos medios de  $\overline{AC}$ ,  $\overline{AB}$  y  $\overline{BC}$ , respectivamente, para la determinación de las coordenadas de los puntos extremos de los mescintores se hace necesario considerar las siguientes posibilidades:

Mescintor en ángulo  $C$ ,  $\overline{M_1K'_1}$  o  $\overline{M_3K''_3}$ , donde,  $K'_1 = \overleftrightarrow{BC} \cap \overleftrightarrow{M_1S_p}$  y  $K''_3 = \overleftrightarrow{AC} \cap \overleftrightarrow{M_3S_p}$ .

Mescintor en ángulo  $B$ ,  $\overline{M_2K'_2}$  o  $\overline{M_3K'_3}$ , donde,  $K'_2 = \overleftrightarrow{BC} \cap \overleftrightarrow{M_2S_p}$  y  $K'_3 = \overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{M_3S_p}$ .

Mescintor en ángulo  $A$ ,  $\overline{M_1K''_1}$  o  $\overline{M_2K''_2}$ , donde,  $K''_1 = \overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{M_1S_p}$  y  $K''_2 = \overleftrightarrow{AC} \cap \overleftrightarrow{M_2S_p}$ .

### 6.3.1. Coordenadas de los puntos extremos de los mescintores en términos de la longitud de los lados

Para la determinación de las coordenadas de los puntos extremos de los mescintores en términos la longitud de los lados se hará uso de las fórmulas para los elementos de un triángulo dadas en la sección 2.2.1. y las coordenadas para  $S_p$  (ecuación 4.4, sección 4.6.1.), además de las fórmulas para los puntos medios de los lados del triángulo:

$$M_1 = \left( \frac{a + c \cos \theta}{2}, \frac{c \operatorname{sen} \theta}{2} \right) \quad M_2 = \left( \frac{c \cos \theta}{2}, \frac{c \operatorname{sen} \theta}{2} \right) \quad M_3 = \left( \frac{a}{2}, 0 \right) \quad (6.28)$$

a) b) c)

Así,

- para  $\overleftrightarrow{M_1S_p}$  su pendiente es  $m_{\overleftrightarrow{M_1S_p}} = \frac{\operatorname{sen} \theta}{1 + \cos \theta}$  y por lo tanto su ecuación es  $y = \frac{(2x - a + c) \operatorname{sen} \theta}{2(1 + \cos \theta)}$ .
- para  $\overleftrightarrow{M_2S_p}$  su pendiente es  $m_{\overleftrightarrow{M_2S_p}} = \frac{c \operatorname{sen} \theta}{c \cos \theta - a - b}$  y por lo tanto su ecuación es  $y = \frac{(2x - a - b) c \operatorname{sen} \theta}{2(c \cos \theta - a - b)}$ .

- para  $\overleftrightarrow{M_3S_p}$  su pendiente es  $m_{\overleftrightarrow{M_3S_p}} = \frac{(b+c)\text{sen}\theta}{(b+c)\text{cos}\theta - a}$  y por lo tanto su ecuación es  $y = \frac{(b+c)\text{sen}\theta}{(b+c)\text{cos}\theta - a} \left(x - \frac{a}{2}\right)$ .

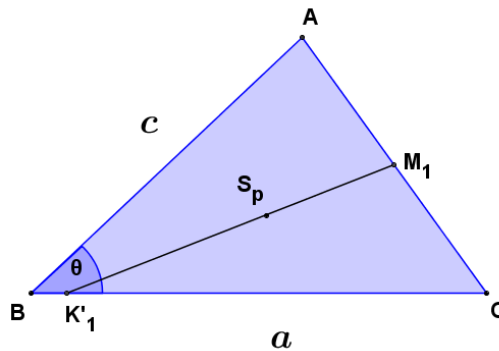
**6.3.1.1. Coordenadas de los puntos extremos del mescintor en ángulo  $C$ ,  $\overline{M_1K'_1}$  o  $\overline{M_3K''_3}$ , en términos de la longitud de los lados**

- **Coordenadas de los puntos extremos del mescintor en ángulo  $C$ ,  $\overline{M_1K'_1}$ , en términos de la longitud de los lados**

Como  $\overleftrightarrow{BC} \cap \overleftrightarrow{M_1S_p} = \{K'_1\}$  (figura 6.10.), donde  $K'_1 = (x, 0)$ , al igualar las ecuaciones de  $\overleftrightarrow{BC}$  (sección 2.2.1.) y  $\overleftrightarrow{M_1S_p}$  (sección 6.3.1.), se obtiene  $x = \frac{a-c}{2}$ , con lo cual:

$$K'_1 = \left(\frac{a-c}{2}, 0\right) \tag{6.29}$$

Figura 6.10. Mescintor en ángulo  $C$ ,  $\overline{M_1K'_1}$



Fuente: elaboración propia.

Luego, de acuerdo con la figura 6.10. y las coordenadas para  $K'_1$ , el mescintor  $\overline{M_1K'_1}$  existirá cuando  $\frac{a-c}{2} \geq 0$ , es decir, si  $a \geq c$ , por lo tanto, se tiene que en términos de la longitud de los lados (sección 2.2.1.):

$$M_1 = \left( \frac{2a^2 + \Omega}{4a}, \frac{\sqrt{\Delta_0}}{4a} \right)$$

y

$$K'_1 = \left( \frac{a - c}{2}, 0 \right)$$

(6.30)

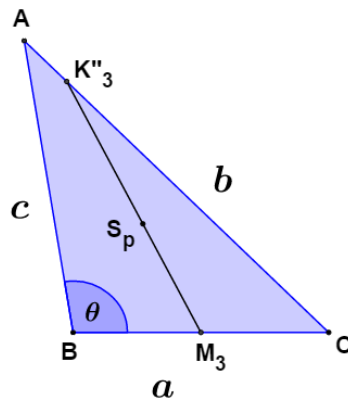
□ **Coordenadas de los puntos extremos del mescintor en ángulo  $C$ ,  $\overline{M_3K''_3}$ , en términos de la longitud de los lados**

Como  $\overleftrightarrow{AC} \cap \overleftrightarrow{M_3S_p} = \{K''_3\}$  (figura 6.11.), donde  $K''_3 = (x, y)$ , al igualar las ecuaciones de  $\overleftrightarrow{AC}$  (sección 2.2.1.) y  $\overleftrightarrow{M_3S_p}$  (sección 6.3.1.), se obtiene  $x = \frac{a(b - c) + c(b + c)\cos\theta}{2b}$ , con lo cual, al reemplazar en la ecuación de  $\overleftrightarrow{AC}$ ,  $y = \frac{c(b + c)\text{sen}\theta}{2b}$ . Así,

$$K''_3 = \left( \frac{a(b - c) + c(b + c)\cos\theta}{2b}, \frac{c(b + c)\text{sen}\theta}{2b} \right)$$

(6.31)

Figura 6.11. Mescintor en ángulo  $C$ ,  $\overline{M_3K''_3}$



Fuente: elaboración propia.

Luego, de acuerdo con la figura 6.11. y las coordenadas para  $K_3''$ , el mescintor  $\overline{M_3K_3''}$  existirá cuando  $\frac{c(b+c)\text{sen}\theta}{2b} \leq c\text{sen}\theta$ , es decir, si  $b \geq c$ , por lo tanto, se tiene que en términos de la longitud de los lados (sección 2.2.1.):

$$M_3 = \left(\frac{a}{2}, 0\right)$$

*y*

$$K_3'' = \left(\frac{2a^2(b-c) + (b+c)\Omega}{4ab}, \frac{(b+c)\sqrt{\Delta_0}}{4ab}\right) \quad (6.32)$$

**6.3.1.2. Coordenadas de los puntos extremos del mescintor en ángulo  $A$ ,  $\overline{M_1K_1''}$  o  $\overline{M_2K_2''}$ , en términos de la longitud de los lados**

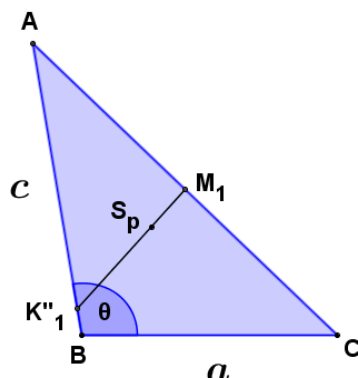
□ **Coordenadas de los puntos extremos del mescintor en ángulo  $A$ ,  $\overline{M_1K_1''}$ , en términos de la longitud de los lados**

Como  $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{M_1S_p} = \{K_1''\}$  (figura 6.12.), donde  $K_1'' = (x, y)$ , al igualar las ecuaciones de  $\overleftrightarrow{AB}$  (sección 2.2.1.) y  $\overleftrightarrow{M_1S_p}$  (sección 6.3.1.), se obtiene  $x = \frac{(c-a)\text{cos}\theta}{2}$ , con lo cual, al reemplazar en la ecuación de  $\overleftrightarrow{AB}$ ,  $y = \frac{(c-a)\text{sen}\theta}{2}$  y, por lo tanto:

$$K_1'' = \left(\frac{(c-a)\text{cos}\theta}{2}, \frac{(c-a)\text{sen}\theta}{2}\right) \quad (6.33)$$

Luego, de acuerdo con la figura 6.12. y las coordenadas para  $K_1''$ , el mescintor  $\overline{M_1K_1''}$  existirá cuando  $\frac{(c-a)\text{sen}\theta}{2} \geq 0$ , es decir, si  $c \geq a$ , por lo tanto, se tiene que en términos de la longitud de los lados (sección 2.2.1.):

Figura 6.12. Mescintor en ángulo A,  $\overline{M_1K_1''}$



Fuente: elaboración propia.

$$M_1 = \left( \frac{2a^2 + \Omega}{4a}, \frac{\sqrt{\Delta_0}}{4a} \right)$$

$y$

(6.34)

$$K_1'' = \left( \frac{(c-a)\Omega}{4ac}, \frac{(c-a)\sqrt{\Delta_0}}{4ac} \right)$$

□ **Coordenadas de los puntos extremos del mescintor en ángulo A,  $\overline{M_2K_2''}$ , en términos de la longitud de los lados**

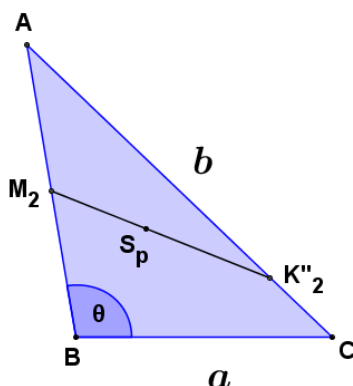
Como  $\overleftrightarrow{AC} \cap \overleftrightarrow{M_2S_p} = \{K_2''\}$  (figura 6.13.), donde  $K_2'' = (x, y)$ , al igualar las ecuaciones de  $\overleftrightarrow{AC}$  (sección 2.2.1.) y  $\overleftrightarrow{M_2S_p}$  (sección 6.3.1.), se obtiene  $x = \frac{a(a+b) + c(b-a)\cos\theta}{2b}$ , con lo cual, al reemplazar en la ecuación de  $\overleftrightarrow{AC}$ ,  $y = \frac{c(b-a)\sen\theta}{2b}$ . Así,

$$K_2'' = \left( \frac{a(a+b) + c(b-a)\cos\theta}{2b}, \frac{c(b-a)\sen\theta}{2b} \right)$$
(6.35)

Luego, de acuerdo con la figura 6.13. y las coordenadas para  $K_2''$ , el mescintor  $\overline{M_2K_2''}$  existirá cuando  $\frac{c(b-a)\sen\theta}{2b} \geq 0$ , es decir, si  $b \geq a$ , por lo tanto, se tiene que en términos de la longitud de los lados (sección 2.2.1.):



Figura 6.13. Mescintor en ángulo  $A$ ,  $\overline{M_2K_2''}$



Fuente: elaboración propia.

$$M_2 = \left( \frac{\Omega}{4a}, \frac{\sqrt{\Delta_0}}{4a} \right)$$

(6.36)

y

$$K_2'' = \left( \frac{2a^2(a+b) + (b-a)\Omega}{4ab}, \frac{(b-a)\sqrt{\Delta_0}}{4ab} \right)$$

### 6.3.1.3. Coordenadas de los puntos extremos del mescintor en ángulo $B$ ,

$\overline{M_2K_2'}$  o  $\overline{M_3K_3'}$ , en términos de la longitud de los lados

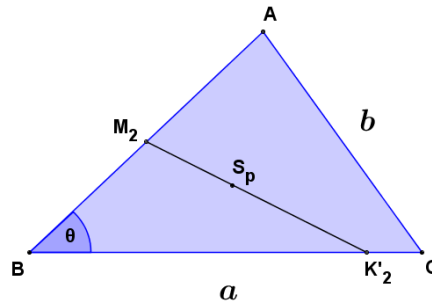
□ Coordenadas de los puntos extremos del mescintor en ángulo  $B$ ,  $\overline{M_2K_2'}$ , en términos de la longitud de los lados

Como  $\overleftrightarrow{BC} \cap \overleftrightarrow{M_2S_p} = \{K_2'\}$  (figura 6.14.), donde  $K_2' = (x, 0)$ , al igualar las ecuaciones de  $\overleftrightarrow{BC}$  (sección 2.2.1.) y  $\overleftrightarrow{M_2S_p}$  (sección 6.3.1.), se obtiene  $x = \frac{a+b}{2}$ , donde:

$$K_2' = \left( \frac{a+b}{2}, 0 \right)$$

(6.37)

Figura 6.14. Mescintor en ángulo  $B$ ,  $\overline{M_2K'_2}$



Fuente: elaboración propia.

Así, de acuerdo con la figura 6.14. y las coordenadas para  $K'_2$ , el mescintor  $\overline{M_2K'_2}$  existirá cuando  $\frac{a+b}{2} \leq a$ , es decir, si  $a \geq b$ , por lo tanto, se tiene que en términos de la longitud de los lados (sección 2.2.1.):

$$M_2 = \left( \frac{\Omega}{4a}, \frac{\sqrt{\Delta_0}}{4a} \right)$$

$y$

(6.38)

$$K'_2 = \left( \frac{a+b}{2}, 0 \right)$$

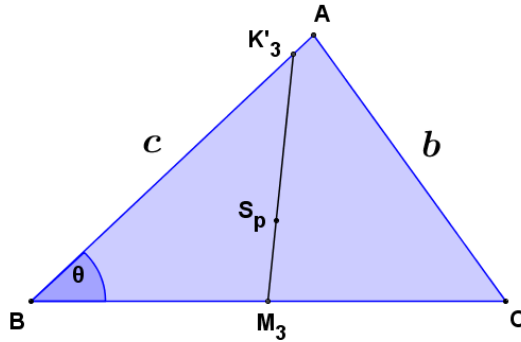
**□ Coordenadas de los puntos extremos del mescintor en ángulo  $B$ ,  $\overline{M_3K'_3}$ , en términos de la longitud de los lados**

Como  $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{M_3S_p} = \{K'_3\}$  (figura 6.15.), donde  $K'_3 = (x, y)$ , al igualar las ecuaciones de  $\overleftrightarrow{AB}$  (sección 2.2.1.) y  $\overleftrightarrow{M_3S_p}$  (sección 6.3.1.), se obtiene  $x = \frac{(b+c)\cos\theta}{2}$ , con lo cual, al reemplazar en la ecuación de  $\overleftrightarrow{AB}$ ,  $y = \frac{(b+c)\sen\theta}{2}$ . Así,

$$K'_3 = \left( \frac{(b+c)\cos\theta}{2}, \frac{(b+c)\sen\theta}{2} \right)$$
(6.39)

Luego, de acuerdo con la figura 6.15. y las coordenadas para  $K'_3$ , el mescintor  $\overline{M_3K'_3}$  existirá cuando  $\frac{(b+c)\sen\theta}{2} \leq c\sen\theta$ , es decir, si  $c \geq b$ , por lo tanto, se tiene que en términos de la longitud de los lados (sección 2.2.1.):

Figura 6.15. Mescintor en ángulo  $B$ ,  $\overline{M_3K'_3}$



Fuente: elaboración propia.

$$M_3 = \left( \frac{a}{2}, 0 \right)$$

y

$$K'_3 = \left( \frac{(b+c)\Omega}{4ac}, \frac{(b+c)\sqrt{\Delta_0}}{4ac} \right)$$

(6.40)

### 6.3.2. Coordenadas de los puntos extremos de los mescintores en términos de las coordenadas cartesianas de los vértices de un triángulo

Para la determinación de las coordenadas cartesianas de los puntos extremos de los mescintores se hará uso de las fórmulas para los elementos de un triángulo dadas en la sección 2.3.1., además de las fórmulas para los puntos medios de los lados del triángulo:

$$M_1 = \left( \frac{x_a + x_c}{2}, \frac{y_a + y_c}{2} \right) \quad M_2 = \left( \frac{x_b + x_a}{2}, \frac{y_b + y_a}{2} \right) \quad M_3 = \left( \frac{x_b + x_c}{2}, \frac{y_b + y_c}{2} \right)$$

a)

b)

c)

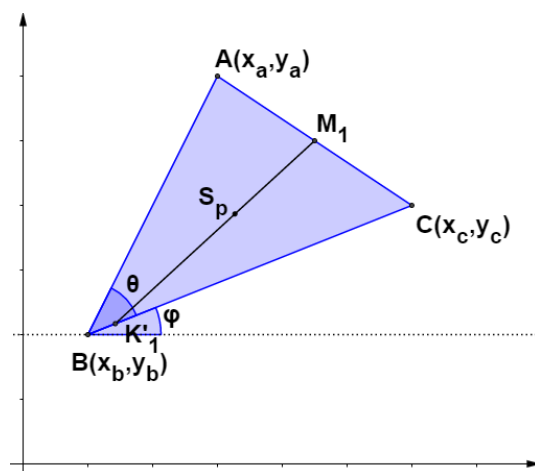
(6.41)

**6.3.2.1. Coordenadas de los puntos extremos del mescintor en ángulo  $C$ ,  $\overline{M_1K'_1}$  o  $\overline{M_3K''_3}$ , en términos de las coordenadas cartesianas de los vértices de un triángulo**

- **Coordenadas de los puntos extremos del mescintor en ángulo  $C$ ,  $\overline{M_1K'_1}$ , en términos de las coordenadas cartesianas de los vértices de un triángulo**

Sea el  $\triangle ABC$  en un sistema cartesiano con  $M_1$  punto medio de  $\overline{AC}$  y  $\{K'_1\} = \overleftrightarrow{BC} \cap \overleftrightarrow{M_1S_p}$  (figura 6.16.)

Figura 6.16. Mescintor en ángulo  $C$ ,  $\overline{M_1K'_1}$ , en un sistema cartesiano



Fuente: elaboración propia.

Como las coordenadas de  $K'_1$  respecto del vértice  $B$  y la recta de referencia  $\overleftrightarrow{BC}$  (sección 2.1.) corresponden a  $K'_1 = (BK'_1, 0)$ , entonces, de la ecuación 6.29 (sección 6.3.1.1.), se tiene que, para  $a \geq c$ ,  $BK'_1 = \frac{a-c}{2}$ , con lo cual, de acuerdo con la figura 6.16., las coordenadas de  $K'_1$  están dadas por  $K'_1 = (x_b + (BK'_1)\cos\varphi, y_b + (BK'_1)\sen\varphi)$ . Así,  $K'_1 = \left(x_b + \frac{a-c}{2}\cos\varphi, y_b + \frac{a-c}{2}\sen\varphi\right)$ . Luego, para  $a \geq c$ , se tiene que en términos de las coordenadas de los vértices de un triángulo (sección 2.3.1.):

$$M_1 = \left( \frac{x_a + x_c}{2}, \frac{y_a + y_c}{2} \right)$$

(6.42)

y

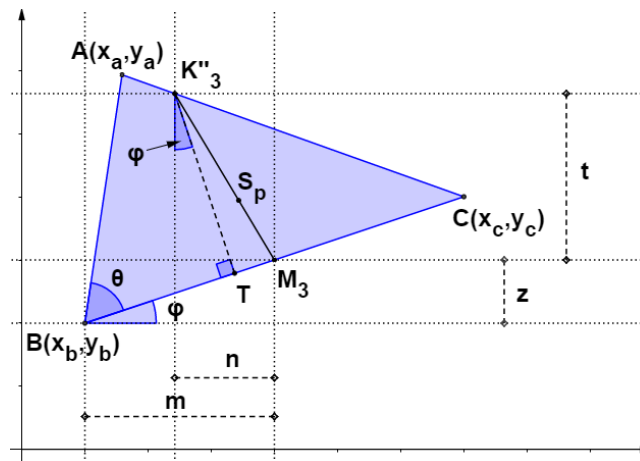
$$K'_1 = \left( \frac{(a+c)x_b + (a-c)x_c}{2a}, \frac{(a+c)y_b + (a-c)y_c}{2a} \right)$$

□ **Coordenadas de los puntos extremos del mescintor en ángulo  $C$ ,  $\overline{M_3K''_3}$ , en términos de las coordenadas cartesianas de los vértices de un triángulo**

Sea el  $\triangle ABC$  en un sistema cartesiano con  $M_3$  punto medio de  $\overline{BC}$  y  $\{K''_3\} = \overleftrightarrow{AC} \cap \overleftrightarrow{M_3S_p}$  y  $T$  pie de la perpendicular trazada desde  $K''_3$  hasta  $\overline{BC}$  (figura 6.17.).

Como las coordenadas de  $K''_3$  respecto del vértice  $B$  y la recta de referencia  $\overleftrightarrow{BC}$  (sección 2.1.) corresponden a  $K''_3 = (BT, K''_3T)$ , entonces, de la ecuación 6.31 (sección 6.3.1.1.), se tiene que, para  $b \geq c$ ,  $BT = \frac{a(b-c) + c(b+c)\cos\theta}{2b}$  y  $K''_3T = \frac{c(b+c)\sin\theta}{2b}$ , con lo cual, de acuerdo con la figura 6.17., las coordenadas cartesianas de  $K''_3$  están dadas por  $K''_3 = (x_b + m - n, y_b + z + t)$ .

Figura 6.17. Mescintor en ángulo  $C$ ,  $\overline{M_3K''_3}$ , en un sistema cartesiano



Fuente: elaboración propia.

Al ser  $m = (BT)\cos\varphi$ ,  $n = (K_3''T)\sen\varphi$ ,  $z = (BT)\sen\varphi$  y  $t = (K_3''T)\cos\varphi$ , se tiene que,

$$m-n = \frac{a(b-c)\cos\varphi + c(b+c)\cos(\theta + \varphi)}{2b} \text{ y } z+t = \frac{a(b-c)\sen\varphi + c(b+c)\sen(\theta + \varphi)}{2b}.$$

Así,

$$K_3'' = \left( x_b + \frac{a(b-c)\cos\varphi + c(b+c)\cos(\theta + \varphi)}{2b}, \right. \\ \left. y_b + \frac{a(b-c)\sen\varphi + c(b+c)\sen(\theta + \varphi)}{2b} \right).$$

Luego, para  $b \geq c$ , se tiene que en términos de las coordenadas de los vértices de un triángulo (sección 2.3.1.):

$$M_3 = \left( \frac{x_b + x_c}{2}, \frac{y_b + y_c}{2} \right) \tag{6.43}$$

y

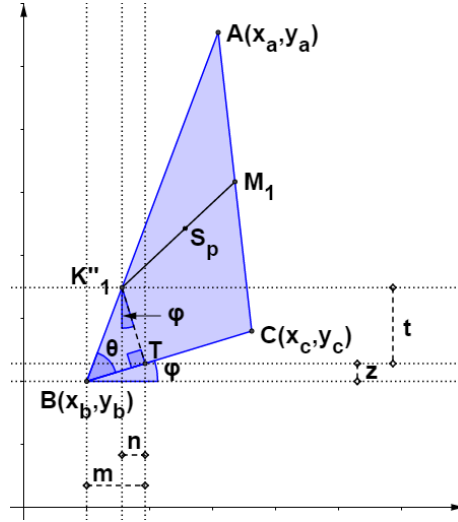
$$K_3'' = \left( \frac{(b+c)x_a + (b-c)x_c}{2b}, \frac{(b+c)y_a + (b-c)y_c}{2b} \right)$$

### 6.3.2.2. Coordenadas de los puntos extremos del mescintor en ángulo $A$ , $\overline{M_1K_1''}$ o $\overline{M_2K_2''}$ , en términos de las coordenadas cartesianas de los vértices de un triángulo

- **Coordenadas de los puntos extremos del mescintor en ángulo  $A$ ,  $\overline{M_1K_1''}$ , en términos de las coordenadas cartesianas de los vértices de un triángulo**

Sea el  $\triangle ABC$  en un sistema cartesiano con  $M_1$  punto medio de  $\overline{AC}$  y  $\{K_1''\} = \overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{M_1S_p}$  y  $T$  pie de la perpendicular trazada desde  $K_1''$  hasta  $\overline{BC}$  (figura 6.18.).

Figura 6.18. Mescintor en ángulo  $A$ ,  $\overline{M_1 K_1''}$ , en un sistema cartesiano



Fuente: elaboración propia.

Como las coordenadas de  $K_1''$  respecto del vértice  $B$  y la recta de referencia  $\overline{BC}$  (sección 2.1.) corresponden a  $K_1'' = (BT, K_1''T)$ , entonces, de la ecuación 6.33 (sección 6.3.1.2.), se tiene que, para  $c \geq a$ ,  $BT = \frac{(c-a)\cos\theta}{2}$  y  $K_1''T = \frac{(c-a)\text{sen}\theta}{2}$ , con lo cual, de acuerdo con la figura 6.18., las coordenadas cartesianas de  $K_1''$  están dadas por  $K_1'' = (x_b + m - n, y_b + z + t)$ .

Al ser  $t = (K_1''T)\cos\varphi$ ,  $z = (BT)\text{sen}\varphi$ ,  $m = (BT)\cos\varphi$  y  $n = (K_1''T)\text{sen}\varphi$ , se tiene que  $m - n = \frac{c-a}{2}\cos(\theta + \varphi)$  y  $z + t = \frac{c-a}{2}\text{sen}(\theta + \varphi)$ . Así:

$$K_1'' = \left( x_b + \frac{c-a}{2}\cos(\theta + \varphi), y_b + \frac{c-a}{2}\text{sen}(\theta + \varphi) \right)$$

Luego, para  $c \geq a$ , se tiene que en términos de las coordenadas de los vértices de un triángulo (sección 2.3.1.):

$$M_1 = \left( \frac{x_a + x_c}{2}, \frac{y_a + y_c}{2} \right) \tag{6.44}$$

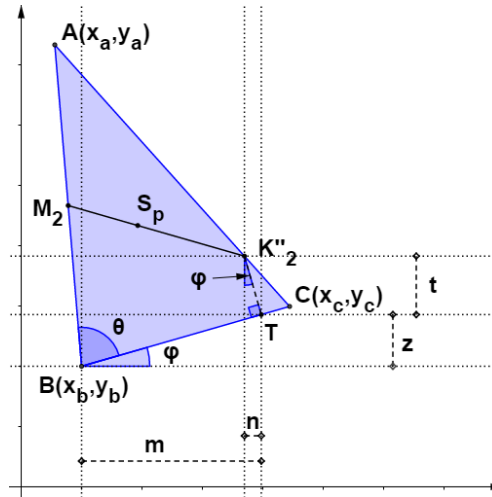
$$K_1'' = \left( \frac{(c-a)x_a + (c+a)x_b}{2c}, \frac{(c-a)y_a + (c+a)y_b}{2c} \right)$$

- **Coordenadas de los puntos extremos del mescintor en ángulo  $A$ ,  $\overline{M_2K_2''}$ , en términos de las coordenadas cartesianas de los vértices de un triángulo**

Sea el  $\triangle ABC$  en un sistema cartesiano con  $M_2$  punto medio de  $\overline{AB}$  y  $\{K_2''\} = \overleftrightarrow{AC} \cap \overleftrightarrow{M_2S_p}$  y  $T$  pie de la perpendicular trazada desde  $K_2''$  hasta  $\overline{BC}$  (figura 6.19.).

Como las coordenadas de  $K_2''$  respecto del vértice  $B$  y la recta de referencia  $\overleftrightarrow{BC}$  (sección 2.1.) corresponden a  $K_2'' = (BT, K_2''T)$ , entonces, de la ecuación 6.35 (sección 6.3.1.2.), se tiene que, para  $b \geq a$ ,  $BT = \frac{a(a+b) + c(b-a)\cos\theta}{2b}$  y  $K_2''T = \frac{c(b-a)\sen\theta}{2b}$ , con lo cual, de acuerdo con la figura 6.19., las coordenadas cartesianas de  $K_2''$  están dadas por  $K_2'' = (x_b + m - n, y_b + z + t)$ .

Figura 6.19. Mescintor en ángulo  $A$ ,  $\overline{M_2K_2''}$ , en un sistema cartesiano



Fuente: elaboración propia.

Al ser  $m = (BT)\cos\varphi$ ,  $n = (K_2''T)\sen\varphi$ ,  $t = (K_2''T)\cos\varphi$  y  $z = (BT)\sen\varphi$ , se tiene que  $m - n = \frac{a(a+b)\cos\varphi + c(b-a)\cos(\theta + \varphi)}{2b}$  y  $z + t = \frac{a(a+b)\sen\varphi + c(b-a)\sen(\theta + \varphi)}{2b}$ .



Así:

$$K_2'' = \left( x_b + \frac{a(a+b)\cos\varphi + c(b-a)\cos(\theta + \varphi)}{2b}, \right. \\ \left. y_b + \frac{a(a+b)\sen\varphi + c(b-a)\sen(\theta + \varphi)}{2b} \right)$$

Luego, para  $b \geq a$ , se tiene que en términos de las coordenadas de los vértices de un triángulo (sección 2.3.1.):

$$M_2 = \left( \frac{x_b + x_a}{2}, \frac{y_b + y_a}{2} \right) \tag{6.45}$$

y

$$K_2'' = \left( \frac{(b-a)x_a + (a+b)x_c}{2b}, \frac{(b-a)y_a + (a+b)y_c}{2b} \right)$$

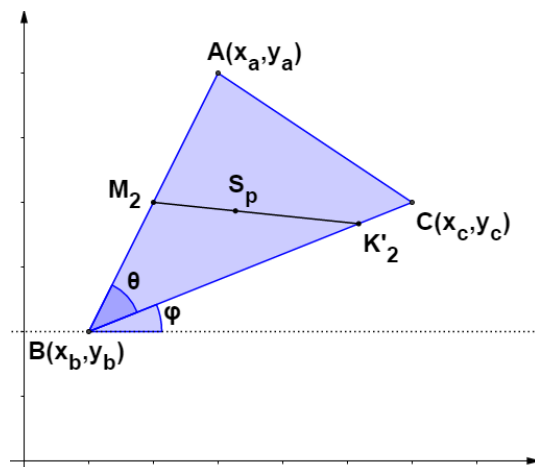
**6.3.2.3. Coordenadas de los puntos extremos del mescintor en ángulo  $B$ ,  $\overline{M_2K'_2}$  o  $\overline{M_3K'_3}$ , en términos de las coordenadas cartesianas de los vértices de un triángulo**

□ **Coordenadas de los puntos extremos del mescintor en ángulo  $B$ ,  $\overline{M_2K'_2}$ , en términos de las coordenadas cartesianas de los vértices de un triángulo**

Sea el  $\triangle ABC$  en un sistema cartesiano con  $M_2$  punto medio de  $\overline{AB}$  y  $\{K'_2\} = \overleftrightarrow{BC} \cap \overleftrightarrow{M_2S_p}$  (figura 6.20.).

Como las coordenadas de  $K'_2$  respecto del vértice  $B$  y la recta de referencia  $\overleftrightarrow{BC}$  (sección 2.1.) corresponden a  $K'_2 = (BK'_2, 0)$ , entonces, de la ecuación 6.38 (sección 6.3.1.3.), se tiene que, para  $a \geq b$ ,  $BK'_2 = \frac{a+b}{2}$ , con lo cual, de acuerdo con la figura 6.20., las coordenadas de  $K'_2$  están dadas por  $K'_2 = (x_b + (BK'_2)\cos\varphi, y_b + (BK'_2)\sen\varphi)$ . Así,  $K'_2 = \left( x_b + \frac{a+b}{2}\cos\varphi, y_b + \frac{a+b}{2}\sen\varphi \right)$ . Luego, para  $a \geq b$ , se tiene que en términos de las coordenadas de los vértices de un triángulo (sección 2.3.1.):

Figura 6.20. Mescintor en ángulo  $B$ ,  $\overline{M_2K'_2}$ , en un sistema cartesiano



Fuente: elaboración propia.

$$M_2 = \left( \frac{x_b + x_a}{2}, \frac{y_b + y_a}{2} \right) \tag{6.46}$$

y

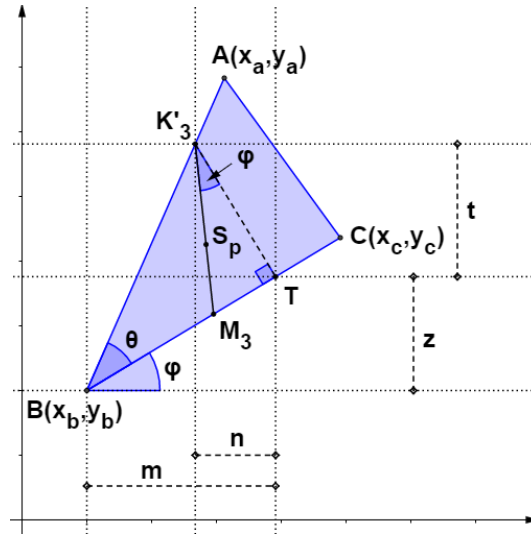
$$K'_2 = \left( \frac{(a-b)x_b + (a+b)x_c}{2a}, \frac{(a-b)y_b + (a+b)y_c}{2a} \right)$$

□ **Coordenadas de los puntos extremos del mescintor en ángulo  $B$ ,  $\overline{M_3K'_3}$ , en términos de las coordenadas cartesianas de los vértices de un triángulo**

Sea el  $\triangle ABC$  en un sistema cartesiano con  $M_3$  punto medio de  $\overline{BC}$  y  $\{K'_3\} = \overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{M_3S_p}$  y  $T$  pie de la perpendicular trazada desde  $K'_3$  hasta  $\overline{BC}$  (figura 6.21.).

Como las coordenadas de  $K'_3$  respecto del vértice  $B$  y la recta de referencia  $\overleftrightarrow{BC}$  (sección 2.1.) corresponden a  $K'_3 = (BT, K'_3T)$ , entonces, de la ecuación 6.39 (sección 6.3.1.3.), se tiene que, para  $c \geq b$ ,  $BT = \frac{(b+c)\cos\theta}{2}$  y  $K'_3T = \frac{(b+c)\sen\theta}{2}$ , con lo cual, de acuerdo con la figura 6.21., las coordenadas de  $K'_3$  están dadas  $K'_3 = (x_b + m - n, y_b + z + t)$ .

Figura 6.21. Mescintor en ángulo  $B$ ,  $\overline{M_3K'_3}$ , en un sistema cartesiano



Fuente: elaboración propia.

Al ser  $m = (BT)\cos\varphi$ ,  $n = (K'_3T)\sen\varphi$ ,  $z = (BT)\sen\varphi$  y  $t = (K'_3T)\cos\varphi$ , se tiene que,  $m - n = \frac{b+c}{2}\cos(\theta + \varphi)$  y  $z + t = \frac{b+c}{2}\sen(\theta + \varphi)$ . Así,  $K'_3 = \left( x_b + \frac{b+c}{2}\cos(\theta + \varphi), y_b + \frac{b+c}{2}\sen(\theta + \varphi) \right)$ . Luego, para  $c \geq b$ , se tiene que en términos de las coordenadas de los vértices de un triángulo (sección 2.3.1),

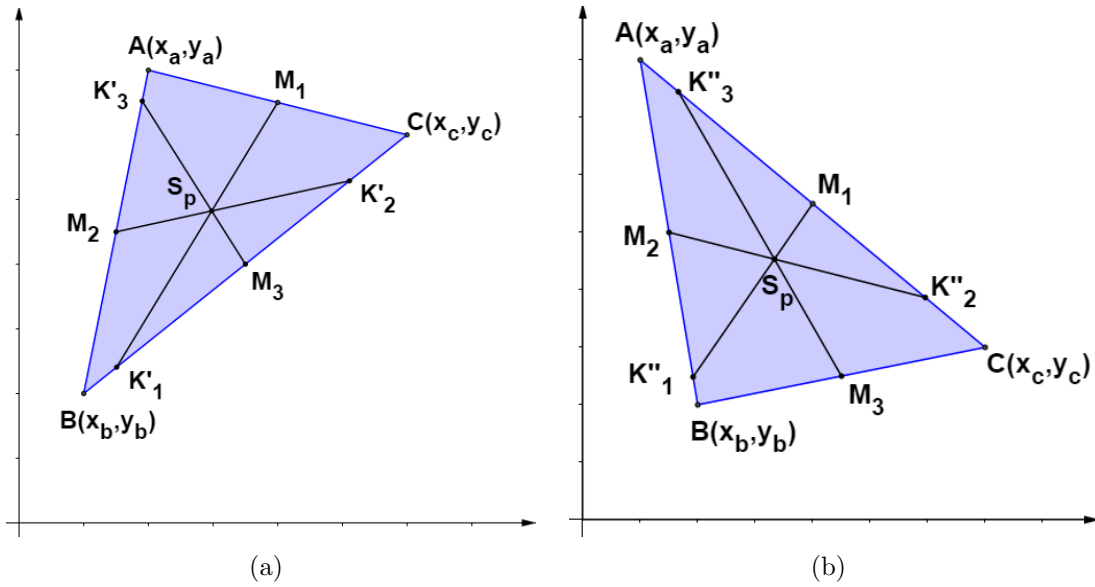
$$M_3 = \left( \frac{x_b + x_c}{2}, \frac{y_b + y_c}{2} \right) \tag{6.47}$$

y

$$K'_3 = \left( \frac{(c+b)x_a + (c-b)x_b}{2c}, \frac{(c+b)y_a + (c-b)y_b}{2c} \right)$$

En la figura 6.22. pueden verse los mescintores conjuntos, de acuerdo con las condiciones de existencia establecidas en las secciones 6.3.1.1., 6.3.1.2. y 6.3.1.3.

Figura 6.22. Mescintores de un triángulo en un sistema cartesiano



Fuente: elaboración propia.

En las tablas 6.1. a 6.6. puede verse el resumen de las fórmulas que se desarrollaron en el capítulo.

Tabla 6.1. Fórmulas para obtener las coordenadas de los puntos extremos de los escintores de un triángulo en términos de la distancia desde uno de ellos a un vértice de referencia y la longitud de los lados

Escintor del triángulo	Coordenadas de los puntos extremos en términos de la distancia desde uno de ellos a un vértice de referencia y la longitud de los lados
<p>En ángulo <math>C</math></p> <p><math>\overline{P_1Q_1}</math></p>	$P_1 = (d, 0)$ $Q_1 = \left( \frac{(S - a + d)\Omega + 2a^2(S - c - d)}{2ab}, \frac{(S - a + d)\sqrt{\Delta_0}}{2ab} \right)$ <p><math>d = BP_1</math>, con <math>P_1</math> sobre <math>\overline{BC}</math>, donde, <math>0 \leq d \leq S - c</math></p>
<p>En ángulo <math>B</math></p> <p><math>\overline{P'_1Q'_1}</math></p>	$P'_1 = (d, 0)$ $Q'_1 = \left( \frac{(S - d)\Omega}{2ac}, \frac{(S - d)\sqrt{\Delta_0}}{2ac} \right)$ <p><math>d = BP'_1</math>, con <math>P'_1</math> sobre <math>\overline{BC}</math>, donde, <math>S - c \leq d \leq a</math></p>
<p>En ángulo <math>A</math></p> <p><math>\overline{P''_1Q''_1}</math></p>	$P''_1 = \left( \frac{d\Omega}{2ac}, \frac{d\sqrt{\Delta_0}}{2ac} \right)$ $Q''_1 = \left( \frac{2a^2(S - c + d) + (S - a - d)\Omega}{2ab}, \frac{(S - a - d)\sqrt{\Delta_0}}{2ab} \right)$ <p><math>d = BP''_1</math>, con <math>P''_1</math> sobre <math>\overline{AB}</math>, donde, <math>0 \leq d \leq S - a</math></p>
<p><math>\triangle ABC</math>, con <math>B = (0, 0)</math>, <math>C = (a, 0)</math> y <math>A = \left( \frac{\Omega}{2a}, \frac{\sqrt{\Delta_0}}{2a} \right)</math>, donde, <math>a = BC</math>, <math>b = AC</math>, <math>c = AB</math>,</p> <p><math>S = (a + b + c)/2</math>; <math>\Omega = a^2 + c^2 - b^2</math>; <math>\Delta_0 = 4a^2c^2 - \Omega^2</math></p>	

Fuente: elaboración propia.

Tabla 6.2. Fórmulas para obtener las coordenadas de los puntos extremos de los escintores de un triángulo en términos de la distancia desde uno de ellos a un vértice de referencia y las coordenadas cartesianas de los vértices

Escintor del triángulo	Coordenadas de los puntos extremos en términos de la distancia desde uno de ellos a un vértice de referencia y las coordenadas cartesianas de los vértices
<p>En ángulo <math>C</math></p> <p><math>\overline{P_1Q_1}</math></p>	$P_1 = \left( \frac{(a-d)x_b + dx_c}{a}, \frac{(a-d)y_b + dy_c}{a} \right)$ $Q_1 = \left( \frac{(S-a+d)x_a + (S-c-d)x_c}{b}, \frac{(S-a+d)y_a + (S-c-d)y_c}{b} \right)$ <p><math>d = BP_1</math>, con <math>P_1</math> sobre <math>\overline{BC}</math>, donde, <math>0 \leq d \leq S-c</math></p>
<p>En ángulo <math>B</math></p> <p><math>\overline{P'_1Q'_1}</math></p>	$P'_1 = \left( \frac{(a-d)x_b + dx_c}{a}, \frac{(a-d)y_b + dy_c}{a} \right)$ $Q'_1 = \left( \frac{(S-d)x_a + (c+d-S)x_b}{c}, \frac{(S-d)y_a + (c+d-S)y_b}{c} \right)$ <p><math>d = BP'_1</math>, con <math>P'_1</math> sobre <math>\overline{BC}</math>, donde, <math>S-c \leq d \leq a</math></p>
<p>En ángulo <math>A</math></p> <p><math>\overline{P''_1Q''_1}</math></p>	$P''_1 = \left( \frac{dx_a + (c-d)x_b}{c}, \frac{dy_a + (c-d)y_b}{c} \right)$ $Q''_1 = \left( \frac{(S-a-d)x_a + (S-c+d)x_c}{b}, \frac{(S-a-d)y_a + (S-c+d)y_c}{b} \right)$ <p><math>d = BP''_1</math>, con <math>P''_1</math> sobre <math>\overline{AB}</math>, donde, <math>0 \leq d \leq S-a</math></p>
<p><math>\triangle ABC</math>, con <math>A = (x_a, y_a)</math>, <math>B = (x_b, y_b)</math> y <math>C = (x_c, y_c)</math>, donde, <math>a = BC</math>, <math>b = AC</math>, <math>c = AB</math>,</p> <p><math>a = \sqrt{(x_c - x_b)^2 + (y_c - y_b)^2}</math>; <math>b = \sqrt{(x_c - x_a)^2 + (y_c - y_a)^2}</math>; <math>c = \sqrt{(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2}</math></p> <p><math>S = (a + b + c)/2</math></p>	

Fuente: elaboración propia.

Tabla 6.3. Fórmulas para obtener las coordenadas de los puntos extremos de los vscintores de un triángulo en términos de la longitud de los lados

Vescintor del triángulo	Coordenadas de los puntos extremos en términos de la longitud de los lados
$\overline{AE_a}$	$A = \left( \frac{\Omega}{2a}, \frac{\sqrt{\Delta_0}}{2a} \right)$ $E_a = (S - c, 0)$
$\overline{BE_b}$	$B = (0, 0)$ $E_b = \left( \frac{2a^2(S - c) + (S - a)\Omega}{2ab}, \frac{(S - a)\sqrt{\Delta_0}}{2ab} \right)$
$\overline{CE_c}$	$C = (a, 0)$ $E_c = \left( \frac{(S - a)\Omega}{2ac}, \frac{(S - a)\sqrt{\Delta_0}}{2ac} \right)$
$\triangle ABC, \text{ con } B = (0, 0), C = (a, 0) \text{ y } A = \left( \frac{\Omega}{2a}, \frac{\sqrt{\Delta_0}}{2a} \right), \text{ donde, } a = BC, b = AC, c = AB,$ $S = (a + b + c)/2; \Omega = a^2 + c^2 - b^2; \Delta_0 = 4a^2c^2 - \Omega^2$	

Fuente: elaboración propia.

Tabla 6.4. Fórmulas para obtener las coordenadas de los puntos extremos de los vescintores de un triángulo en términos de las coordenadas cartesianas de los vértices

Vescintor del triángulo	Coordenadas de los puntos extremos en términos de las coordenadas cartesianas de los vértices
$\overline{AE_a}$	$A = (x_a, y_a)$ $E_c = \left( \frac{(S-b)x_b + (S-c)x_c}{a}, \frac{(S-b)y_b + (S-c)y_c}{a} \right)$
$\overline{BE_b}$	$B = (x_b, y_b)$ $E_b = \left( \frac{(S-a)x_a + (S-c)x_c}{b}, \frac{(S-a)y_a + (S-c)y_c}{b} \right)$
$\overline{CE_c}$	$C = (x_c, y_c)$ $E_c = \left( \frac{(S-a)x_a + (S-b)x_b}{c}, \frac{(S-a)y_a + (S-b)y_b}{c} \right)$
$\triangle ABC, \text{ con } A = (x_a, y_a), B = (x_b, y_b) \text{ y } C = (x_c, y_c), \text{ donde, } a = BC, b = AC, c = AB,$ $a = \sqrt{(x_c - x_b)^2 + (y_c - y_b)^2}; b = \sqrt{(x_c - x_a)^2 + (y_c - y_a)^2}; c = \sqrt{(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2}$ $S = (a + b + c)/2$	

Fuente: elaboración propia.



Tabla 6.5. Fórmulas para obtener las coordenadas de los puntos extremos de los mescintores de un triángulo en términos de la longitud de los lados

Mescintor del triángulo	Coordenadas de los puntos extremos en términos de la longitud de los lados
$\overline{M_1 K'_1}$ <p style="text-align: center;">•</p> $\overline{M_1 K''_1}$	$M_1 = \left( \frac{2a^2 + \Omega}{4a}, \frac{\sqrt{\Delta_0}}{4a} \right)$ $K'_1 = \left( \frac{a-c}{2}, 0 \right); a \geq c$ $K''_1 = \left( \frac{(c-a)\Omega}{4ac}, \frac{(c-a)\sqrt{\Delta_0}}{4ac} \right); c \geq a$
$\overline{M_2 K'_2}$ <p style="text-align: center;">•</p> $\overline{M_2 K''_2}$	$M_2 = \left( \frac{\Omega}{4a}, \frac{\sqrt{\Delta_0}}{4a} \right)$ $K'_2 = \left( \frac{a+b}{2}, 0 \right); a \geq b$ $K''_2 = \left( \frac{2a^2(a+b) + (b-a)\Omega}{4ab}, \frac{(b-a)\sqrt{\Delta_0}}{4ab} \right); b \geq a$
$\overline{M_3 K'_3}$ <p style="text-align: center;">•</p> $\overline{M_3 K''_3}$	$M_3 = \left( \frac{a}{2}, 0 \right)$ $K'_3 = \left( \frac{(b+c)\Omega}{4ac}, \frac{(b+c)\sqrt{\Delta_0}}{4ac} \right); c \geq b$ $K''_3 = \left( \frac{2a^2(b-c) + (b+c)\Omega}{4ab}, \frac{(b+c)\sqrt{\Delta_0}}{4ab} \right); b \geq c$
$\triangle ABC$ , con $B = (0, 0)$ , $C = (a, 0)$ y $A = \left( \frac{\Omega}{2a}, \frac{\sqrt{\Delta_0}}{2a} \right)$ , donde, $a = BC$ , $b = AC$ , $c = AB$ , $\Omega = a^2 + c^2 - b^2$ ; $\Delta_0 = 4a^2c^2 - \Omega^2$	

Fuente: elaboración propia.

Tabla 6.6. Fórmulas para obtener las coordenadas de los puntos extremos de los mescintores de un triángulo en términos de las coordenadas cartesianas de los vértices

Mescintor del triángulo	Coordenadas de los puntos extremos en términos de las coordenadas cartesianas de los vértices
$\overline{M_1 K'_1}$ <p style="text-align: center;">•</p> $\overline{M_1 K''_1}$	$M_1 = \left( \frac{x_a + x_c}{2}, \frac{y_a + y_c}{2} \right)$ $K'_1 = \left( \frac{(a+c)x_b + (a-c)x_c}{2a}, \frac{(a+c)y_b + (a-c)y_c}{2a} \right); a \geq c$ $K''_1 = \left( \frac{(c-a)x_a + (c+a)x_b}{2c}, \frac{(c-a)y_a + (c+a)y_b}{2c} \right); c \geq a$
$\overline{M_2 K'_2}$ <p style="text-align: center;">•</p> $\overline{M_2 K''_2}$	$M_2 = \left( \frac{x_b + x_a}{2}, \frac{y_b + y_a}{2} \right)$ $K'_2 = \left( \frac{(a-b)x_b + (a+b)x_c}{2a}, \frac{(a-b)y_b + (a+b)y_c}{2a} \right); a \geq b$ $K''_2 = \left( \frac{(b-a)x_a + (a+b)x_c}{2b}, \frac{(b-a)y_a + (a+b)y_c}{2b} \right); b \geq a$
$\overline{M_3 K'_3}$ <p style="text-align: center;">•</p> $\overline{M_3 K''_3}$	$M_3 = \left( \frac{x_b + x_c}{2}, \frac{y_b + y_c}{2} \right)$ $K'_3 = \left( \frac{(c+b)x_a + (c-b)x_b}{2c}, \frac{(c+b)y_a + (c-b)y_b}{2c} \right); c \geq b$ $K''_3 = \left( \frac{(b+c)x_a + (b-c)x_c}{2b}, \frac{(b+c)y_a + (b-c)y_c}{2b} \right); b \geq c$
<p style="text-align: center;"><math>\triangle ABC</math>, con <math>A = (x_a, y_a)</math>, <math>B = (x_b, y_b)</math> y <math>C = (x_c, y_c)</math>, donde, <math>a = BC</math>, <math>b = AC</math>, <math>c = AB</math>,  <math>a = \sqrt{(x_c - x_b)^2 + (y_c - y_b)^2}</math>; <math>b = \sqrt{(x_c - x_a)^2 + (y_c - y_a)^2}</math>; <math>c = \sqrt{(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2}</math></p>	

Fuente: elaboración propia.

## 6.4. Ejemplos capítulo 6

### Ejemplo 1

Para el  $\triangle ABC$  con  $a = BC$ ,  $b = AC$  y  $c = AB$ , donde  $a = 7$ ,  $b = 8$  y  $c = 9$ , hallar las coordenadas de los puntos extremos del escintor en ángulo  $A$  que pasa por el incentro (escintriz en ángulo  $A$ ).

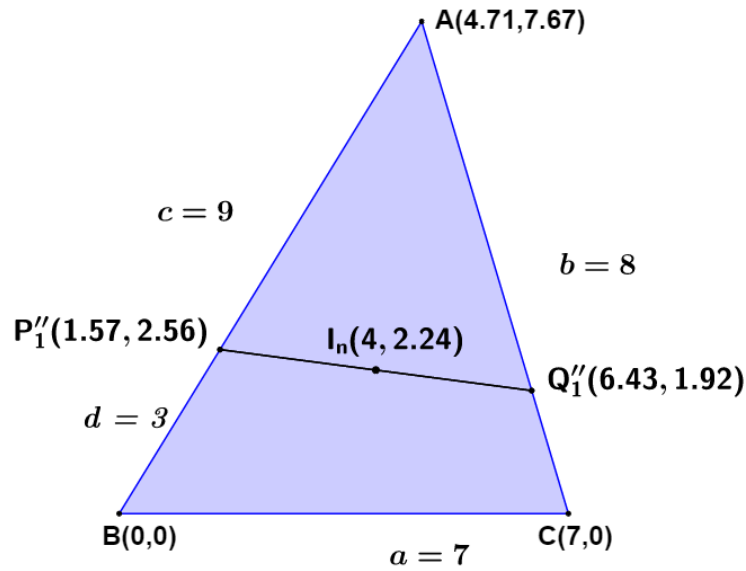
Solución:

Tomando el vértice  $B$  como punto de referencia y  $\overrightarrow{BC}$  como recta de referencia (sección 2.2.1.), se tiene que, al reemplazar para las longitudes de los lados,  $P = 24$ ,  $S = 12$ ,  $\Omega = 66$ ,  $\sqrt{\Delta_0} = 48\sqrt{5}$ ,  $B(0, 0)$ ,  $C(7, 0)$  y  $A = \left(\frac{33}{7}, \frac{24\sqrt{5}}{7}\right) \approx (4.71, 7.67)$ .

De acuerdo con la tabla 6.1., para los valores dados, las coordenadas de los puntos extremos del escintor en ángulo  $A$ ,  $\overline{P_1''Q_1''}$ , corresponden a  $P_1'' = \left(\frac{11d}{21}, \frac{8\sqrt{5}d}{21}\right)$  y  $Q_1'' = \left(\frac{39 + 2d}{7}, \frac{3(5 - d)\sqrt{5}}{7}\right)$ .

Por otro lado, de acuerdo con la tabla 2.1., el incentro  $I_n$  tiene por coordenadas a  $I_n = (4, \sqrt{5}) \approx (4, 2.24)$ , con lo cual, para que el escintor  $\overline{P_1''Q_1''}$  pase por el incentro se requiere que su pendiente sea equivalente a la de  $\overline{P_1''I_n}$ , donde  $m_{\overline{P_1''Q_1''}} = \frac{(45 - 17d)\sqrt{5}}{117 - 5d}$  y  $m_{\overline{P_1''I_n}} = \frac{(21 - 8d)\sqrt{5}}{84 - 11d}$ .

Así, al igualar las fórmulas para las pendientes se obtiene  $d^2 - 6d + 9 = 0$ , cuya solución es  $d = 3$ , luego, las coordenadas de los puntos extremos del escintor en ángulo  $A$ ,  $\overline{P_1''Q_1''}$  son:  $P_1'' = \left(\frac{11}{7}, \frac{8\sqrt{5}}{7}\right) \approx (1.57, 2.56)$  y  $Q_1'' = \left(\frac{45}{7}, \frac{6\sqrt{5}}{7}\right) \approx (6.43, 1.92)$ .



Ejemplo No. 1

Fuente: elaboración propia.

## Ejemplo 2

Para el  $\triangle ABC$  con  $a = BC$ ,  $b = AC$  y  $c = AB$ , donde  $a = 4$ ,  $b = 5$  y  $c = 7$ ,  $G$  gravicentro,  $\overline{P_1''Q_1''}$  el escintor en ángulo  $A$ , con  $P_1''$  sobre  $\overline{AB}$  y  $Q_1''$  sobre  $\overline{AC}$ , comprobar que cuando  $P_1''$  se encuentra a una distancia  $d = \frac{7}{3}$  desde el vértice  $B$ ,  $\overline{P_1''Q_1''}$  es paralelo al lado  $\overline{BC}$  y pasa por el gravicentro  $G$ .

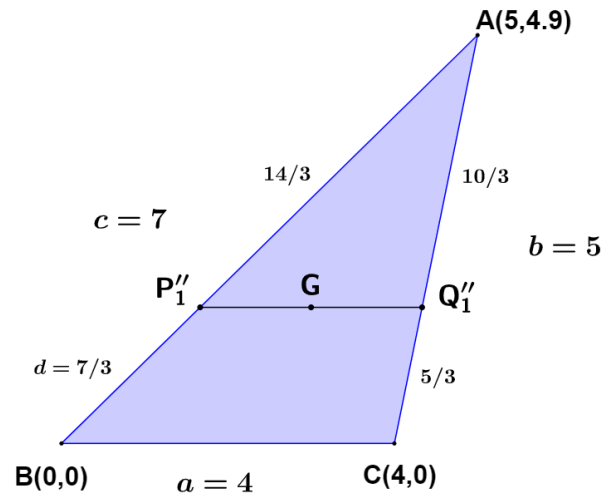
Solución:

Tomando el vértice  $B$  como punto de referencia y  $\overrightarrow{BC}$  como recta de referencia (sección 2.2.1.), se tiene que, al reemplazar para las longitudes de los lados,  $P = 16$ ,  $S = 8$ ,  $\Omega = 40$ ,  $\sqrt{\Delta_0} = 16\sqrt{6}$ ,  $B = (0, 0)$ ,  $C = (4, 0)$  y  $A = (5, 2\sqrt{6}) \approx (5, 4.9)$ .

De acuerdo con la tabla 2.1., para el gravicentro  $G$ , la ordenada es  $\frac{\sqrt{\Delta_0}}{6a} = \frac{16\sqrt{6}}{6(4)} = \frac{2\sqrt{6}}{3} \approx 1.63$  y, de acuerdo con la tabla 6.1., para  $d = \frac{7}{3}$ , la ordenada de  $P_1''$  es  $\frac{d\sqrt{\Delta_0}}{2ac} = \frac{\frac{7}{3}16\sqrt{6}}{2(4)(7)} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$  y la de  $Q_1''$  es  $\frac{(S - a - d)\sqrt{\Delta_0}}{2ab} = \frac{(8 - 4 - \frac{7}{3})16\sqrt{6}}{2(4)(5)} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$ .

Así, al ser iguales las ordenadas de  $P_1''$ ,  $Q_1''$  y  $G$  se comprueba que  $\overline{P_1''Q_1''}$  es paralelo al lado  $\overline{BC}$  y pasa por el gravicentro  $G$ .

Para comprobar que  $\overline{P_1''Q_1''}$  es un escintor, se considera que al ser  $d = BP_1'' = \frac{7}{3}$ , entonces,  $P_1''A = \frac{14}{3}$  y como  $\overline{P_1''Q_1''} \parallel \overline{BC}$ , al aplicar el teorema de Tales, se obtiene  $CQ_1'' = \frac{5}{3}$  y  $Q_1''A = \frac{10}{3}$ . Así,  $P_1''A + AQ_1'' = P_1''B + BC + CQ_1'' = 8$ , esto es,  $\overline{P_1''Q_1''}$  dimidia el perímetro del triángulo.



Ejemplo No. 2

Fuente: elaboración propia.

### 6.5. Ejercicios capítulo 6

1. Probar que para el  $\triangle ABC$  con  $a = BC$ ,  $b = AC$  y  $c = AB$ , donde  $S = \frac{a + b + c}{2}$ :
  - a) El escintor en ángulo  $A$ , cuyo punto extremo sobre  $\overline{AB}$  se encuentra a una distancia  $d = \frac{(S - a)c}{b + c}$  desde el vértice  $B$ , es paralelo al lado  $\overline{BC}$ .
  - b) El escintor en ángulo  $B$ , cuyo punto extremo sobre  $\overline{BC}$  se encuentra a una distancia  $d = \frac{aS}{a + c}$  desde el vértice  $B$ , es paralelo al lado  $\overline{AC}$ .
  - c) El escintor en ángulo  $C$ , cuyo punto extremo sobre  $\overline{BC}$  se encuentra a una distancia  $d = \frac{(S - c)a}{a + b}$  desde el vértice  $B$ , es paralelo al lado  $\overline{AB}$ .
2. Dado el  $\triangle ABC$  con  $a = BC$ ,  $b = AC$  y  $c = AB$ , donde  $3a = b + c$ , probar que el escintor en ángulo  $A$ , cuyo punto extremo sobre  $\overline{AB}$  se encuentra a una distancia  $d = \frac{c}{3}$  desde el vértice  $B$ , es paralelo a  $\overline{BC}$  y pasa por el gravicentro  $G$ .
3. Comprobar que para el  $\triangle ABC$  con  $a = BC$ ,  $b = AC$  y  $c = AB$ , donde  $a = 3$ ,  $b = 4$  y  $c = 5$ , el escintor en ángulo  $B$ , que pasa por el gravicentro  $G$ , es paralelo al lado menor.
4. Comprobar que para el  $\triangle ABC$  con  $a = BC$ ,  $b = AC$  y  $c = AB$ , donde  $a = 5$ ,  $b = 7$  y  $c = 8$ , el escintor en ángulo  $A$ , que pasa por el gravicentro  $G$ , es paralelo al lado menor.
5. Comprobar que para el  $\triangle ABC$  con  $a = BC$ ,  $b = AC$  y  $c = AB$ , donde  $a = 8$ ,  $b = 9$  y  $c = 10$ , el escintor en ángulo  $B$ , cuyo punto extremo sobre  $\overline{BC}$  se encuentra a una distancia  $d = 6$  desde el vértice  $B$ , es paralelo a  $\overline{AC}$  y al segmento inscrito que pasa por el incentro  $I_n$  y el gravicentro  $G$ .
6. Probar que para todo  $\triangle ABC$  con  $a = BC$ ,  $b = AC$  y  $c = AB$ , donde  $P = a + b + c$  y  $c$  es el lado mayor, el escintor en ángulo  $A$ , cuyo punto extremo se encuentra a una distancia  $d = c - \frac{P}{4}$  desde el vértice  $B$ , es perpendicular a la bisectriz del ángulo  $A$ .

7. Comprobar que para el  $\triangle ABC$  con  $a = BC$ ,  $b = AC$  y  $c = AB$ , donde  $a = 23$ ,  $b = 25$  y  $c = 32$ , el escintor en ángulo  $A$  es escintriz del triángulo y es perpendicular a la bisectriz del ángulo  $A$ .
8. Comprobar que para el  $\triangle ABC$  con  $a = BC$ ,  $b = AC$ ,  $c = AB$ , donde  $S = \frac{a+b+c}{2}$  y  $\Omega = a^2 + c^2 - b^2$ . Si  $a = 6$ ,  $c = 11$  y  $b < 11$ , el escintor en ángulo  $B$ , cuyo punto extremo sobre  $\overline{AB}$  distante  $d = \frac{S\Omega}{2ac + \Omega}$  desde el vértice  $B$ , es perpendicular a  $\overline{BC}$ .
9. Comprobar que para el  $\triangle ABC$  con  $a = BC$ ,  $b = AC$  y  $c = AB$ , donde  $a = 8$ ,  $b = 9$  y  $c = 11$ , el escintor en ángulo  $B$ , cuyo punto extremo sobre  $\overline{AB}$  distante  $d = 5.2$  desde el vértice  $B$ , es perpendicular a  $\overline{BC}$ .
10. Dado el  $\triangle ABC$  con  $a = BC$ ,  $b = AC$  y  $c = AB$ , donde  $a = 7$ ,  $b = 9$  y  $c = 12$ , hallar las coordenadas de los puntos extremos del escintor en ángulo  $A$  que es paralelo a  $\overline{BC}$ .
11. Dado el  $\triangle ABC$  con  $a = BC$ ,  $b = AC$  y  $c = AB$ , donde  $a = 7$ ,  $b = 6$  y  $c = 8$ , hallar las coordenadas de los puntos extremos de los escintores para los cuales uno de ellos se encuentra a una distancia  $d = 3.5$  desde el vértice  $B$ .
12. Dado el  $\triangle ABC$  con  $a = BC$ ,  $b = AC$  y  $c = AB$ , donde  $a = 7$ ,  $b = 12$  y  $c = 6$ , hallar las coordenadas de los puntos extremos del escintor para el cual uno de ellos se encuentra a una distancia  $d = 2 + \sqrt{3}$  desde el vértice  $B$ .
13. Dado el  $\triangle ABC$  con  $a = BC$ ,  $b = AC$  y  $c = AB$ , donde  $a = 5$ ,  $b = 4$  y  $c = 6$ , hallar las coordenadas de los puntos extremos de los escintores.
14. Dado el  $\triangle ABC$  con  $a = BC$ ,  $b = AC$  y  $c = AB$ , donde  $a = 9$ ,  $b = 7$  y  $c = 13$ , hallar las coordenadas de los puntos extremos de los escintores.
15. Dado el  $\triangle ABC$  con  $a = BC$ ,  $b = AC$  y  $c = AB$ , donde  $a = 8$ ,  $b = 5$  y  $c = 10$ , hallar las coordenadas de los puntos extremos de los escintores.

16. Dado el  $\triangle ABC$  con  $a = BC$ ,  $b = AC$  y  $c = AB$ , donde  $a = 4$ ,  $b = 9$  y  $c = 6$ , hallar las coordenadas de los puntos extremos de los escintores.
17. Dado el  $\triangle ABC$ , con  $A = (3, 6)$ ,  $B = (1, 1)$  y  $C = (7, 4)$ , hallar las coordenadas cartesianas de los puntos extremos de los escintores para los cuales uno de ellos se encuentra a una distancia  $d = \frac{4}{3}$  desde el vértice  $B$ .
18. Dado el  $\triangle ABC$ , con  $A = (0, 5)$ ,  $B = (-3, 2)$  y  $C = (4, 1)$ , hallar las coordenadas cartesianas de los puntos extremos de los escintores para los cuales uno de ellos se encuentra a una distancia  $d = \frac{5}{9} + \sqrt{5}$  desde el vértice  $B$ .
19. Dado el  $\triangle ABC$ , con  $A = (-4, 1)$ ,  $B = (5, 3)$  y  $C = (-2, 5)$ , hallar las coordenadas cartesianas de los puntos extremos de los escintores.
20. Dado el  $\triangle ABC$ , con  $A = (-4, 5)$ ,  $B = (-2, 1)$  y  $C = (5, 3)$ , hallar las coordenadas cartesianas de los puntos extremos de los escintores.



## CAPÍTULO 7

### Coordenadas de los puntos extremos de las escintrices de un triángulo

En este capítulo se hace un tratamiento especial de las escintrices de un triángulo, toda vez que la cantidad existente de ellas, según la relación métrica entre las longitudes de los lados, presenta ciertas particularidades que han sido objeto de estudio por varios autores, como se referencia al final del capítulo.

Se inicia el capítulo abordando la determinación de las coordenadas de los puntos extremos de las escintrices en términos de la longitud de los lados, a partir de lo cual se hace el análisis de su existencia. Posteriormente, se lleva a cabo la determinación de las coordenadas de los puntos extremos de las escintrices en términos de las coordenadas cartesianas de los vértices del triángulo. Al final del capítulo se expone una tabla resumen de las posibilidades de existencia de las escintrices de un triángulo teniendo en consideración la relación métrica entre las longitudes de los lados.

### 7.1. Coordenadas de los puntos extremos de las escintrices de un triángulo en términos de la longitud de los lados<sup>74</sup>

Sea el  $\triangle ABC$  con  $I_n$  incentro y  $\overline{HD}$  escintriz del triángulo.

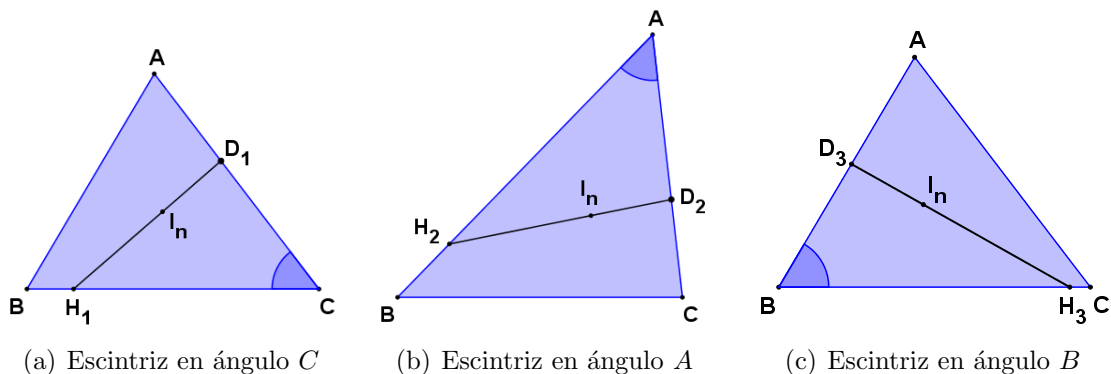
Para la determinación de las coordenadas de los puntos extremos de las escintrices se han de considerar las siguientes posibilidades (figura 7.1.):

Escintriz en ángulo  $C$ , <sup>75</sup>  $\overline{H_1D_1}$ , con  $H_1$  sobre  $\overline{BC}$  y  $D_1$  sobre  $\overline{AC}$ .

Escintriz en ángulo  $A$ ,  $\overline{H_2D_2}$ , con  $H_2$  sobre  $\overline{AB}$  y  $D_2$  sobre  $\overline{AC}$ .

Escintriz en ángulo  $B$ ,  $\overline{H_3D_3}$ , con  $H_3$  sobre  $\overline{BC}$  y  $D_3$  sobre  $\overline{AB}$ .

Figura 7.1. Casos posibles de la existencia de las escintrices de un triángulo



Fuente: elaboración propia.

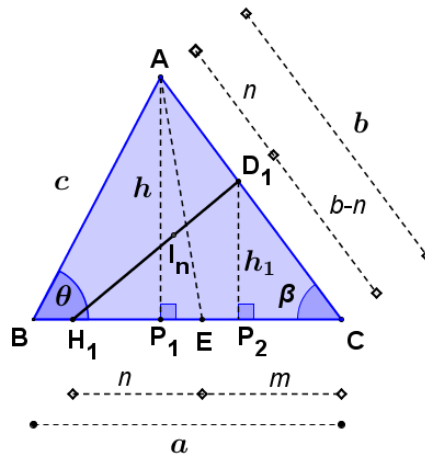
<sup>74</sup> Vardi, I. (2005, pp. 50-51) presenta una solución algebraica al problema referente a: «Dibujar una línea recta que reduce a la mitad el área y el perímetro de un triángulo», sin hacer referencia a la manera de obtener las expresiones algebraicas.

<sup>75</sup> Ver definición en sección 5.1.4.

7.1.1. Coordenadas de los puntos extremos de las escintrices en ángulo  $C$ ,  $\overline{H_1D_1}$ , en términos de la longitud de los lados

Sea el  $\triangle ABC$  con  $a = BC$ ,  $b = AC$  y  $c = AB$ , y  $E$  punto de extangencia sobre  $\overline{BC}$ . Sea  $\overline{H_1D_1}$  una escintriz en ángulo  $C$  del triángulo, con  $H_1$  sobre  $\overline{BC}$  y  $D_1$  sobre  $\overline{AC}$ , (figura 7.2.).

Figura 7.2. Escintriz en ángulo  $C$ ,  $\overline{H_1D_1}$



Fuente: elaboración propia.

De acuerdo con el teorema 16 (sección 5.2.3.) las coordenadas de  $E$  son  $E = (S - c, 0)$ , luego, al hacer  $n = H_1E$ , se tiene que  $H_1 = (S - c - n, 0)$ .

Al trazar la altura  $h$  respecto de  $\overline{BC}$  desde el vértice  $A$  del  $\triangle ABC$ , cuyo pie es  $P_1$ , y la altura  $h_1$  respecto de  $\overline{H_1C}$  desde el vértice  $D_1$  del  $\triangle H_1D_1C$ , cuyo pie es  $P_2$ , se obtiene  $\triangle AP_1C \sim \triangle D_1P_2C$  (criterio A. A., dado que  $\angle AP_1C \cong \angle D_1P_2C$  por ser ángulos rectos y  $\angle P_1CA \cong \angle P_2CD_1$  ángulo común), con lo cual  $\frac{b}{b-n} = \frac{h}{h_1}$  (1).

Como  $\overline{H_1D_1}$  es una escintriz, entonces,  $A(\triangle D_1H_1C) = \frac{A(\triangle ABC)}{2}$ , con lo cual, al hacer  $m = EC = S - b$  (teorema 16, sección 5.2.3.), se tiene que  $\frac{(n + S - b)h_1}{2} = \frac{ah}{4}$ , esto es,  $\frac{2(n + S - b)}{a} = \frac{h}{h_1}$  (2).

Así de (1) y (2) se obtiene  $2n^2 + (P - 4b)n + (b - c)b = 0$ , cuya solución es  $n = \frac{4b - P \pm \sqrt{P^2 - 8ab}}{4}$  (3), donde  $P$  es el perímetro del  $\triangle ABC$ . Luego, al hacer  $\Delta_1 = P^2 - 8ab$  y reemplazar en las coordenadas del punto  $H_1$ :

$$H_1 = \left( \frac{4a - P \pm \sqrt{\Delta_1}}{4}, 0 \right) \quad (7.1)$$

De acuerdo con figura 7.2. al hacer  $\angle BCA = \beta$ , se cumple que  $\text{sen}\beta = \frac{c\text{sen}\theta}{b}$ , con lo cual para el  $\triangle D_1H_1C$  se obtiene  $h_1 = \frac{(b - n)c\text{sen}\theta}{b}$  (4). Así, al reemplazar (3) en (4) se obtiene  $h_1 = \frac{P \pm \sqrt{P^2 - 8ab}}{4b}c\text{sen}\theta$  (5).

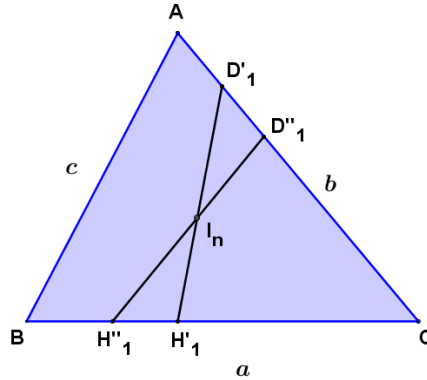
Por otro lado, de la sección 2.2.1. se tiene que la ecuación de  $\overleftrightarrow{AC}$  es  $y = \frac{c\text{sen}\theta}{c\cos\theta - a}(x - a)$  (6), así, como  $h_1$  es la ordenada  $y$  del punto  $D_1$  sobre  $\overleftrightarrow{AC}$  al igualar (5) y (6) se obtiene  $x = \frac{4ab + (P \pm \sqrt{P^2 - 8ab})(c\cos\theta - a)}{4b}$ , de donde, al hacer  $\Delta_1 = P^2 - 8ab$ , las coordenadas de  $D_1$  son:

$$D_1 = \left( \frac{4ab + (P \pm \sqrt{\Delta_1})(c\cos\theta - a)}{4b}, \frac{P \pm \sqrt{\Delta_1}}{4b}c\text{sen}\theta \right) \quad (7.2)$$

### 7.1.2. Análisis de existencia de las escintrices en ángulo $C$ , $\overline{H_1D_1}$

De las ecuaciones para las coordenadas de  $H_1$  y  $D_1$  (ecuaciones 7.1 y 7.2), se puede concluir que para la existencia de la escintriz en ángulo  $C$ ,  $\overline{H_1D_1}$ , se requiere que  $\Delta_1 \geq 0$ , que el menor valor de la abscisa de  $H_1$  sea mayor o igual a cero, esto es  $\frac{4a - P - \sqrt{\Delta_1}}{4} \geq 0$ , y que el mayor valor de la ordenada de  $D_1$  sea menor o igual a la altura del triángulo, es decir,  $\frac{P + \sqrt{\Delta_1}}{4b}c\text{sen}\theta \leq c\text{sen}\theta$ . Así, se obtienen a lo sumo dos escintrices en ángulo  $C$ ,  $\overline{H_1D_1}$  y  $\overline{H_1''D_1''}$ , que se encuentran o pasan por el incentro  $I_n$  (figura 7.3.).

Figura 7.3. Escintrices en ángulo  $C$ ,  $\overline{H'_1 D'_1}$  y  $\overline{H''_1 D''_1}$ , conjuntas, con  $b \geq c$ ,  $a \geq c$  y  $c \geq \sqrt{8ab} - a - b$



Fuente: elaboración propia.

La escintriz en ángulo  $C$ ,  $\overline{H'_1 D'_1}$ , existirá si  $\Delta_1 \geq 0$ , esto es cuando  $c \geq \sqrt{8ab} - a - b$ , y si el valor de la ordenada de  $D'_1$  es menor o igual que la altura del triángulo, es decir,  $\frac{P + \sqrt{\Delta_1}}{4b} c \sin \theta \leq c \sin \theta$ , con lo cual se requiere que  $b \geq c$ . Así, expresando la ecuación 7.2 en términos de la longitud de los lados (sección 2.2.1.), se obtiene:

$$H'_1 = \left( \frac{4a - P + \sqrt{\Delta_1}}{4}, 0 \right)$$

$y$  (7.3)

$$D'_1 = \left( \frac{8a^2b + (P + \sqrt{\Delta_1})(\Omega - 2a^2)}{8ab}, \frac{(P + \sqrt{\Delta_1})\sqrt{\Delta_0}}{8ab} \right)$$

La escintriz en ángulo  $C$ ,  $\overline{H''_1 D''_1}$ , existirá si  $\Delta_1 \geq 0$ , esto es para  $c \geq \sqrt{8ab} - a - b$ , y si el valor de la abscisa de  $H''_1$  es mayor o igual a cero, es decir,  $\frac{4a - P - \sqrt{\Delta_1}}{4} \geq 0$ , con lo cual se requiere que  $a \geq c$ . Luego, expresando la ecuación 7.2 en términos de la longitud de los lados (sección 2.2.1.), se obtiene:

$$H''_1 = \left( \frac{4a - P - \sqrt{\Delta_1}}{4}, 0 \right)$$

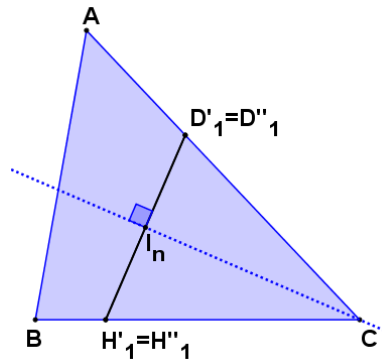
$y$  (7.4)

$$D''_1 = \left( \frac{8a^2b + (P - \sqrt{\Delta_1})(\Omega - 2a^2)}{8ab}, \frac{(P - \sqrt{\Delta_1})\sqrt{\Delta_0}}{8ab} \right)$$

□ Casos especiales

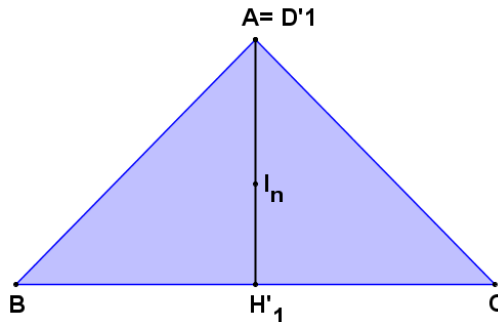
- Para el caso en que  $\Delta_1 = 0$ , esto es,  $c = \sqrt{8ab} - a - b$ , con  $a \geq c$  y  $b \geq c$  se tiene que  $\overline{H'_1 D'_1} \perp \overleftrightarrow{I_n C}$  y  $\overline{H''_1 D''_1} \perp \overleftrightarrow{I_n C}$ , así,  $\overline{H'_1 D'_1}$  es coincidente con  $\overline{H''_1 D''_1}$  (figura 7.4).
- Para el caso en que  $b = c$ , se tiene que  $\overline{H'_1 D'_1}$  es coincidente con  $\overleftrightarrow{I_n A}$ , esto es,  $\overline{H'_1 D'_1}$  es mediana del triángulo respecto de  $BC = a$  (figura 7.5).
- Para el caso en que  $a = c$ , se tiene que  $\overline{H''_1 D''_1}$  es coincidente con  $\overleftrightarrow{I_n B}$ , esto es,  $\overline{H''_1 D''_1}$  es mediana del triángulo respecto de  $AC = b$  (figura 7.6).

Figura 7.4. Escintriz en ángulo  $C$ ,  $\overline{H_1 D_1} \perp \overline{I_n C}$



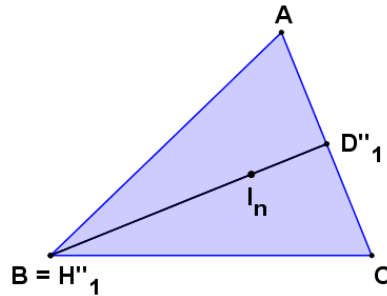
Fuente: elaboración propia.

Figura 7.5. Escintrices en ángulo  $C$ ,  $\overline{H'_1 D'_1}$  coincidente con  $\overline{I_n A}$ , donde  $b = c$



Fuente: elaboración propia.

Figura 7.6. Escintriz en ángulo  $C$ ,  $\overline{H_1''D_1''}$  coincidente con  $\overline{I_nB}$ , donde  $a = c$



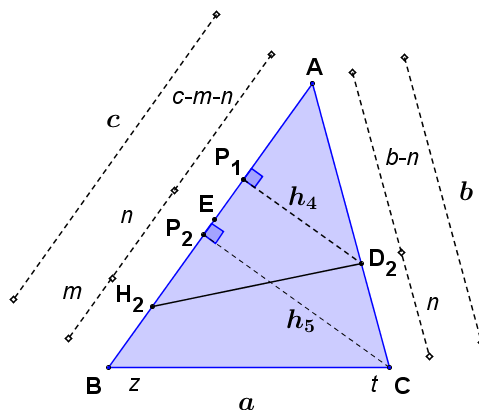
Fuente: elaboración propia.

### 7.1.3. Coordenadas de los puntos extremos de las escintrices en ángulo $A$ , $\overline{H_2D_2}$ , en términos de la longitud de los lados

Sea el  $\triangle ABC$  con  $a = BC$ ,  $b = AC$ ,  $c = AB$ , y  $E$  punto de extangencia sobre  $\overline{AB}$ . Sea  $\overline{H_2D_2}$  una escintriz en ángulo  $A$  del triángulo, con  $H_2$  sobre  $\overline{AB}$  y  $D_2$  sobre  $\overline{AC}$ , (figura 7.7.).

Al hacer  $m = BH_2$  y  $n = H_2E$  se tiene que  $m + n = s - a$  (teorema 16, sección 5.2.3.), luego,  $m = s - a - n$  (1).

Figura 7.7. Relación entre las áreas del  $\triangle ABC$  y del  $\triangle H_2D_2A$



Fuente: elaboración propia.

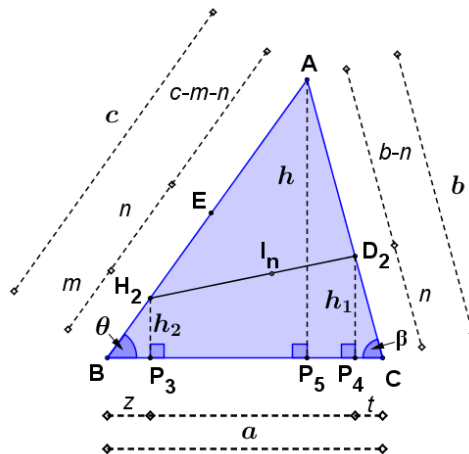
Al trazar desde el punto  $D_2$  sobre  $\overline{AC}$  y desde el vértice  $C$  las perpendiculares  $h_4$  y  $h_5$  respecto de  $\overline{AB}$ , cuyos pies son  $P_1$  y  $P_2$ , respectivamente, se obtiene  $\triangle CP_2A \sim \triangle D_2P_1A$  (criterio A. A., por ser  $\angle A$  ángulo común y  $\angle CP_2A \cong \angle D_2P_1A$  ángulos rectos por construcción), luego,  $\frac{b}{b-n} = \frac{h_5}{h_4}$  (2).

Como  $\overline{H_2D_2}$  es una escintriz entonces  $A(\triangle H_2D_2A) = \frac{A(\triangle ABC)}{2}$ , así se tiene que  $\frac{(c-m)h_4}{2} = \frac{ch_5}{4}$ , de donde  $\frac{2(c-m)}{c} = \frac{h_5}{h_4}$  (3).

A partir de (2) y (3) se tiene que  $m = \frac{c(b-2n)}{2(b-n)}$  (4), con lo cual al reemplazar (4) en (1) se obtiene  $2n^2 + (a+c-3b)n + (b-a)b = 0$ , donde  $n = \frac{4b-P \pm \sqrt{P^2-8bc}}{4}$  (5), con  $P$  perímetro del  $\triangle ABC$ . Luego, al hacer  $\Delta_2 = P^2 - 8bc$  y al reemplazar (5) en (1), se obtiene  $m = \frac{4c-P \pm \sqrt{\Delta_2}}{4}$  (6).

Al trazar desde los puntos  $D_2$  sobre  $\overline{AC}$  y  $H_2$  sobre  $\overline{AB}$ , las perpendiculares  $h_1$  y  $h_2$  respecto de  $\overline{BC}$ , cuyos pies son  $P_4$  y  $P_3$ , respectivamente, se obtienen los triángulos rectángulos  $\triangle BP_3H_2$  y  $\triangle CP_4D_2$ , donde  $z = BP_3$  y  $h_2 = P_3H_2$  (figura 7.8.), con lo cual las coordenadas del punto  $H_2$  corresponden a  $H_2 = (z, h_2)$ .

Figura 7.8. Escintriz en ángulo  $A$ ,  $\overline{H_2D_2}$



Fuente: elaboración propia.



Como  $z = m\cos\theta$  y  $h_2 = m\sen\theta$ , al reemplazar la expresión para  $m$  de (6), en estas dos ecuaciones, se tiene:

$$H_2 = \left( \frac{4c - P \pm \sqrt{\Delta_2}}{4} \cos\theta, \frac{4c - P \pm \sqrt{\Delta_2}}{4} \sen\theta \right) \quad (7.5)$$

Al hacer  $t = CP_4$  y  $h_1 = P_4D_2$ , se tiene que  $D_2 = (a - t, h_1)$ , donde  $t = n\cos\beta$  y  $h_1 = n\sen\beta$ . Además,  $BP_5 = c\cos\theta$  y  $P_5C = b\cos\beta$ . Así,  $BC = BP_5 + P_5C$ , y como  $a = BC$ , se tiene que  $a = c\cos\theta + b\cos\beta$ , de donde  $\cos\beta = \frac{a - c\cos\theta}{b}$  (7), luego, al reemplazar (5) y (7) en la ecuación para  $t$ , se tiene que  $t = \frac{(4b - P \pm \sqrt{\Delta_2})(a - c\cos\theta)}{4b}$ , con lo cual  $a - t = \frac{4ab - (4b - P \pm \sqrt{\Delta_2})(a - c\cos\theta)}{4b}$ .

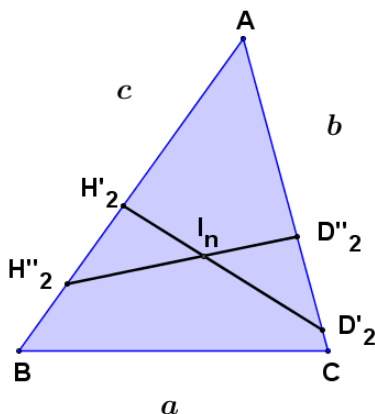
Como  $h = c\sen\theta = b\sen\beta$  entonces  $\sen\beta = \frac{c\sen\theta}{b}$  (8), así, al reemplazar (5) y (8) en la ecuación para  $h_1$ , se tiene que  $h_1 = \frac{(4b - P \pm \sqrt{\Delta_2})c\sen\theta}{4b}$ , de donde:

$$D_2 = \left( \frac{4ab - (4b - P \pm \sqrt{\Delta_2})(a - c\cos\theta)}{4b}, \frac{(4b - P \pm \sqrt{\Delta_2})c\sen\theta}{4b} \right) \quad (7.6)$$

#### 7.1.4. Análisis de existencia de las escintrices en ángulo $A$ , $\overline{H_2D_2}$

De las ecuaciones para las coordenadas de  $H_2$  y  $D_2$  (ecuaciones 7.5 y 7.6), se puede concluir que para la existencia de la escintriz en ángulo  $A$ ,  $\overline{H_2D_2}$ , se requiere que  $\Delta_2 \geq 0$ , que el menor valor de la ordenada de  $H_2$  sea mayor o igual a cero, esto es  $\frac{(4c - P - \sqrt{\Delta_2})\sen\theta}{4} \geq 0$ , y que el menor valor de la ordenada de  $D_2$  sea mayor o igual a cero, es decir,  $\frac{(4b - P - \sqrt{\Delta_2})c\sen\theta}{4b} \geq 0$ . Así, se obtienen a lo sumo dos escintrices en ángulo  $A$ ,  $\overline{H_2D_2}$  y  $\overline{H_2''D_2''}$ , que se encuentran o pasan por el incentro  $I_n$  (ver figura 7.9.).

Figura 7.9. Escintrices en ángulo  $A$ ,  $\overline{H'_2D'_2}$  y  $\overline{H''_2D''_2}$ , conjuntas



Fuente: elaboración propia.

La escintriz en ángulo  $A$ ,  $\overline{H'_2D'_2}$ , existirá si  $\Delta_2 \geq 0$ , esto es para  $a \geq \sqrt{8bc} - b - c$ , y si el valor de la ordenada de  $D'_2$  es mayor o igual a cero, es decir, cuando  $4b - P - \sqrt{\Delta_2} \geq 0$ , con lo cual se requiere que  $b \geq a$ . Así, expresando las ecuaciones 7.5 y 7.6 en términos de la longitud de los lados (sección 2.2.1.) se tiene que las coordenadas de los puntos extremos de la escintriz  $\overline{H'_2D'_2}$ , son:

$$H'_2 = \left( \frac{(4c - P + \sqrt{\Delta_2})\Omega}{8ac}, \frac{(4c - P + \sqrt{\Delta_2})\sqrt{\Delta_0}}{8ac} \right)$$

y (7.7)

$$D'_2 = \left( \frac{8a^2b - (4b - P - \sqrt{\Delta_2})(2a^2 - \Omega)}{8ab}, \frac{(4b - P - \sqrt{\Delta_2})\sqrt{\Delta_0}}{8ab} \right)$$

La escintriz en ángulo  $A$ ,  $\overline{H''_2D''_2}$ , existirá si  $\Delta_2 \geq 0$ , esto es para  $a \geq \sqrt{8bc} - b - c$ , y si el valor de la ordenada de  $H''_2$  es mayor o igual a cero, es decir, cuando  $\frac{4c - P - \sqrt{\Delta_2}}{4} \text{sen}\theta \geq 0$ , con lo cual se requiere que  $c \geq a$ . Luego, al expresar las ecuaciones 7.5 y 7.6 en términos de la longitud de los lados (sección 2.2.1.), se tiene que las coordenadas de los puntos extremos de la escintriz  $\overline{H''_2D''_2}$ , son:

$$H_2'' = \left( \frac{(4c - P - \sqrt{\Delta_2})\Omega}{8ac}, \frac{(4c - P - \sqrt{\Delta_2})\sqrt{\Delta_0}}{8ac} \right)$$

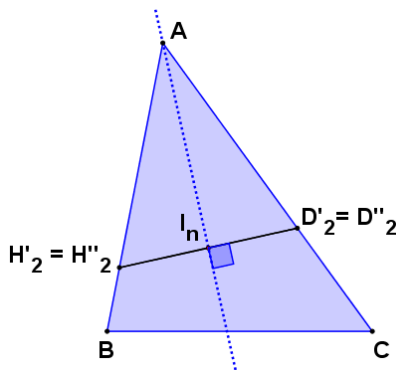
y

$$D_2'' = \left( \frac{8a^2b - (4b - P + \sqrt{\Delta_2})(2a^2 - \Omega)}{8ab}, \frac{(4b - P + \sqrt{\Delta_2})\sqrt{\Delta_0}}{8ab} \right)$$

□ Casos especiales

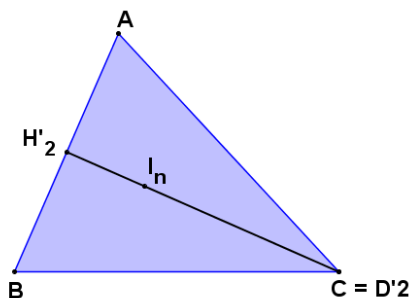
- Para el caso en que  $\Delta_2 = 0$ , esto es,  $a = \sqrt{8bc} - b - c$ , con  $b \geq a$  y  $c \geq a$  se tiene que  $\overline{H_2'D_2'} \perp \overleftrightarrow{I_nA}$  y  $\overline{H_2''D_2''} \perp \overleftrightarrow{I_nA}$ , con lo cual  $\overline{H_2'D_2'}$  es coincidente con  $\overline{H_2''D_2''}$  (figura 7.10.).
- Para el caso en que  $a = b$ , se tiene que  $\overline{H_2'D_2'}$  es coincidente con  $\overleftrightarrow{I_nC}$ , esto es,  $\overline{H_2'D_2'}$  es mediana del triángulo respecto de  $AB = c$  (figura 7.11.).
- Para el caso en que  $a = c$ , se tiene que  $\overline{H_2''D_2''}$  es coincidente con  $\overleftrightarrow{I_nB}$ , esto es,  $\overline{H_2''D_2''}$  es mediana del triángulo respecto de  $AC = b$  (figura 7.12.).

Figura 7.10. Escintriz en ángulo A,  $\overline{H_2D_2} \perp \overleftrightarrow{I_nA}$



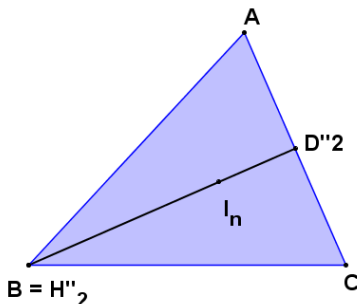
Fuente: elaboración propia.

Figura 7.11. Escintriz en ángulo  $A$ ,  $\overline{H'_2D'_2}$  coincidente con  $\overline{I_nC}$ , donde  $a = b$



Fuente: elaboración propia.

Figura 7.12. Escintriz en ángulo  $A$ ,  $\overline{H''_2D''_2}$  coincidente con  $\overline{I_nB}$ , donde  $a = c$

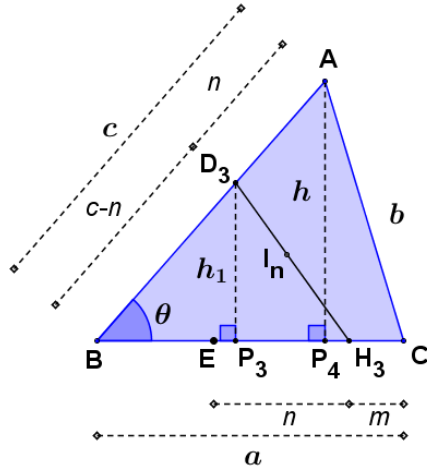


Fuente: elaboración propia.

### 7.1.5. Coordenadas de los puntos extremos de las escintrices en ángulo $B$ , $\overline{H_3D_3}$ , en términos de la longitud de los lados

Sea el  $\triangle ABC$  con  $a = BC$ ,  $b = AC$ ,  $c = AB$ , y  $E$  punto de extangencia sobre  $\overline{BC}$ . Sea  $\overline{H_3D_3}$  una escintriz en ángulo  $B$  del triángulo, con  $D_3$  sobre  $\overline{AB}$  y  $H_3$  sobre  $\overline{BC}$ , (figura 7.13.).

Figura 7.13. Coordenadas del punto  $H_3$  de la escintriz en ángulo  $B$ ,  $\overline{H_3D_3}$



Fuente: elaboración propia.

De acuerdo con el teorema 16 (sección 5.2.3.) las coordenadas de  $E$  son  $E = (S - c, 0)$ , luego, al hacer  $n = H_3E$ , se tiene que  $H_3 = (S - c + n, 0)$ .

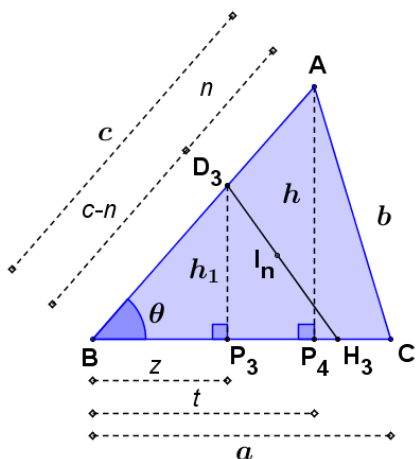
Al trazar la altura  $h$  respecto de  $\overline{BC}$  desde el vértice  $A$  del  $\triangle ABC$  cuyo pie es  $P_4$  y la altura  $h_1$  respecto de  $\overline{BH_3}$  desde el vértice  $D_3$  del  $\triangle BD_3H_3$  cuyo pie es  $P_3$ , se obtiene  $\triangle BAP_4 \sim \triangle BD_3P_3$  (criterio A. A., dado que  $\angle AP_4B \cong \angle D_3P_3B$  por ser ángulos rectos y  $\angle P_4BA \cong \angle P_3BD_3$  por ser ángulo común), con lo cual  $\frac{c}{c-n} = \frac{h}{h_1}$  (1).

Como  $\overline{H_3D_3}$  es una escintriz entonces  $A(\triangle BD_3H_3) = \frac{A(\triangle ABC)}{2}$ , con lo cual, al hacer  $m = H_3C$ , se tiene que  $\frac{(a-m)h_1}{2} = \frac{ah}{4}$ , esto es,  $\frac{2(a-m)}{a} = \frac{h}{h_1}$  (2). Luego, de (1) y (2), se obtiene  $m = \frac{ac - 2an}{2(c-n)}$  (3). Al ser  $m = S - b - n$  (4) (teorema 16, sección 5.2.3.), de (3) y (4), se obtiene  $2n^2 - (3c - a - b)n + (c^2 - bc) = 0$ , cuya solución es  $n = \frac{4c - P \pm \sqrt{P^2 - 8ac}}{4}$  (5), donde  $P$  es el perímetro del  $\triangle ABC$ . Luego, al hacer  $\Delta_3 = P^2 - 8ac$  y al reemplazar (5) en las coordenadas del punto  $H_3$ , se tiene que:

$$H_3 = \left( \frac{P \mp \sqrt{\Delta_3}}{4}, 0 \right) \quad (7.9)$$

Al hacer  $z = BP_3$  y  $t = BP_4$  (figura 7.14.), se tiene que las coordenadas del punto  $D_3$  corresponden a  $D_3 = (z, h_1)$ .

Figura 7.14. Coordenadas del punto  $D_3$  de la escintriz en ángulo  $B$ ,  $\overline{H_3D_3}$



Fuente: elaboración propia.

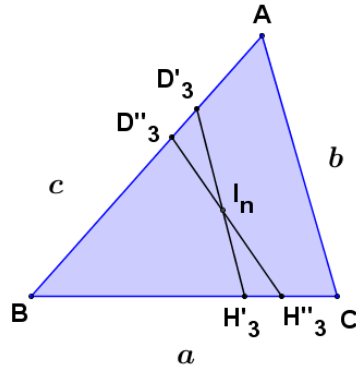
Como  $z = (c - n)\cos\theta$  y  $h_1 = (c - n)\sen\theta$ , al reemplazar la expresión para  $n$  de (5) se tiene que  $z = \frac{P \pm \sqrt{\Delta_3}}{4}\cos\theta$  y  $h_1 = \frac{P \pm \sqrt{\Delta_3}}{4}\sen\theta$ . Así:

$$D_3 = \left( \frac{P \pm \sqrt{\Delta_3}}{4}\cos\theta, \frac{P \pm \sqrt{\Delta_3}}{4}\sen\theta \right) \quad (7.10)$$

### 7.1.6. Análisis de existencia de las escintrices en ángulo $B$ , $\overline{H_3D_3}$

De las ecuaciones para las coordenadas de  $H_3$  y  $D_3$  (ecuaciones 7.9 y 7.10), se puede concluir que para la existencia de la escintriz en ángulo  $B$ ,  $\overline{H_3D_3}$ , se requiere que  $\Delta_3 \geq 0$ , que el mayor valor de la abscisa de  $H_3$  sea menor o igual que  $a$ , esto es  $\frac{P + \sqrt{\Delta_3}}{4} \leq a$ , y que el mayor valor de la ordenada de  $D_3$  sea menor o igual a la altura del triángulo, es decir,  $\frac{P + \sqrt{\Delta_3}}{4}\sen\theta \leq c\sen\theta$ . Así, se obtienen a lo sumo dos escintrices en ángulo  $B$ ,  $\overline{H_3D'_3}$  y  $\overline{H_3D''_3}$ , que se encuentran o pasan por el incentro  $I_n$  (ver figura 7.15.).

Figura 7.15. Escintrices en ángulo  $B$ ,  $\overline{H'_3D'_3}$  y  $\overline{H''_3D''_3}$ , conjuntas



Fuente: elaboración propia.

La escintriz en ángulo  $B$ ,  $\overline{H'_3D'_3}$ , existirá si  $\Delta_3 \geq 0$ , esto es para  $b \geq \sqrt{8ac} - a - c$ , y si la ordenada de  $D'_3$  es menor o igual que la altura del triángulo, es decir, cuando  $\frac{P + \sqrt{\Delta_3}}{4} \text{sen}\theta \leq c \text{sen}\theta$ , con lo cual se requiere que  $c \geq b$ . Así, al expresar la ecuación 7.10 en términos de la longitud de los lados (sección 2.2.1.), se tiene que las coordenadas de los puntos extremos de la escintriz  $\overline{H'_3D'_3}$ , son:

$$H'_3 = \left( \frac{P - \sqrt{\Delta_3}}{4}, 0 \right)$$

y (7.11)

$$D'_3 = \left( \frac{(P + \sqrt{\Delta_3})\Omega}{8ac}, \frac{(P + \sqrt{\Delta_3})\sqrt{\Delta_0}}{8ac} \right)$$

La escintriz en ángulo  $B$ ,  $\overline{H''_3D''_3}$ , existirá si  $\Delta_3 \geq 0$ , esto es para  $b \geq \sqrt{8ac} - a - c$ , y si la abscisa de  $H''_3$  es menor o igual que  $a$ , es decir, cuando  $\frac{P + \sqrt{\Delta_3}}{4} \leq a$ , con lo cual se requiere que  $a \geq b$ .

Luego, al expresar la ecuación 7.10 en términos de la longitud de los lados (sección 2.2.1.), se tiene que las coordenadas de los puntos extremos de la escintriz  $\overline{H''_3D''_3}$ , son:

$$H_3'' = \left( \frac{P + \sqrt{\Delta_3}}{4}, 0 \right)$$

y

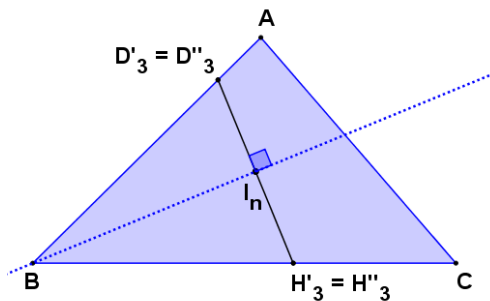
$$D_3'' = \left( \frac{(P - \sqrt{\Delta_3})\Omega}{8ac}, \frac{(P - \sqrt{\Delta_3})\sqrt{\Delta_0}}{8ac} \right)$$

(7.12)

□ Casos especiales

- Para el caso en que  $\Delta_3 = 0$ , esto es,  $b = \sqrt{8ac} - a - c$ , con  $a \geq b$  y  $c \geq b$  se tiene que  $\overline{H_3'D_3'} \perp \overleftrightarrow{I_n B}$  y  $\overline{H_3''D_3''} \perp \overleftrightarrow{I_n B}$ , con lo cual,  $\overline{H_3'D_3'}$  es coincidente con  $\overline{H_3''D_3''}$  (figura 7.16.).
- Para el caso en que  $b = c$ , se tiene que  $\overline{H_3'D_3'}$  es coincidente con  $\overleftrightarrow{I_n A}$ , esto es,  $\overline{H_3'D_3'}$  es mediana del triángulo respecto de  $BC = a$  (figura 7.17.).
- Para el caso en que  $a = b$ , se tiene que  $\overline{H_3''D_3''}$  es coincidente con  $\overleftrightarrow{I_n C}$ , esto es,  $\overline{H_3''D_3''}$  es mediana del triángulo respecto de  $AB = c$  (figura 7.18.).

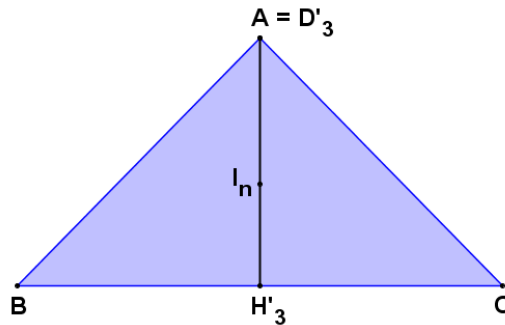
Figura 7.16. Escintriz en ángulo B,  $\overline{H_3'D_3'} \perp \overleftrightarrow{I_n B}$



Fuente: elaboración propia.

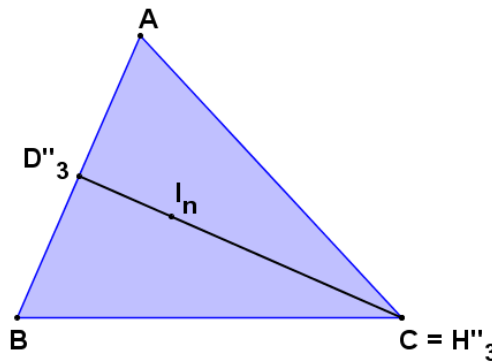


Figura 7.17. Escintriz en ángulo  $B$ ,  $\overline{H'_3 D'_3}$  coincidente con  $\overline{I_n A}$ ,  
donde  $b = c$



Fuente: elaboración propia.

Figura 7.18. Escintriz en ángulo  $B$ ,  $\overline{H''_3 D''_3}$  coincidente con  $\overline{I_n C}$ ,  
donde  $a = b$



Fuente: elaboración propia.

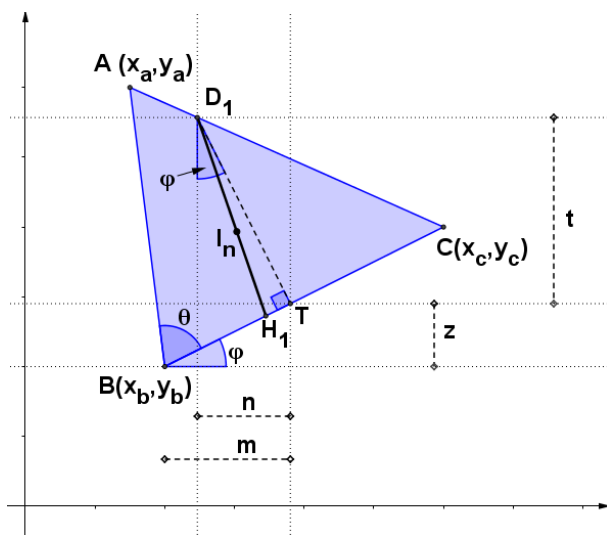
## 7.2. Coordenadas de los puntos extremos de las escintrices en términos de las coordenadas cartesianas de los vértices de un triángulo

Para la determinación de las coordenadas cartesianas de los puntos extremos de las escintrices se hará uso de las fórmulas para los elementos de un triángulo en términos de las coordenadas de los vértices, dadas en la sección 2.3.1.

### 7.2.1. Coordenadas de los puntos extremos de las escintrices en ángulo $C$ , $\overline{H_1D_1}$ , en términos de las coordenadas cartesianas de los vértices de un triángulo

Sea el  $\triangle ABC$  en un sistema cartesiano con  $a = BC$ ,  $b = AC$ ,  $c = AB$  y sea  $\overline{H_1D_1}$  una escintriz en ángulo  $C$  del triángulo, con  $H_1$  sobre  $\overline{BC}$  y  $D_1$  sobre  $\overline{CA}$ , donde  $T$  es el pie de la perpendicular trazada desde el punto  $D_1$  hasta  $\overline{BC}$  (figura 7.19.).

Figura 7.19. Escintriz en ángulo  $C$ ,  $\overline{H_1D_1}$ , en un sistema cartesiano



Fuente: elaboración propia.

De acuerdo con la figura 7.19. las coordenadas cartesianas de  $H_1$  están dadas por  $H_1 = (x_b + (BH_1)\cos\varphi, y_b + (BH_1)\sen\varphi)$ .

Como las coordenadas de  $H_1$  respecto del vértice  $B$  y la recta de referencia  $\overrightarrow{BC}$  (sección 2.1.) corresponden a  $H_1 = (BH_1, 0)$ , entonces, a partir de la ecuación 7.1 (sección 7.1.1.), se tiene que:

$$H_1 = \left( x_b + \frac{4a - P \pm \sqrt{\Delta_1}}{4} \cos\varphi, y_b + \frac{4a - P \pm \sqrt{\Delta_1}}{4} \sen\varphi \right) \quad (7.13)$$

Las coordenadas cartesianas de  $D_1$  están dadas por  $D_1 = (x_b + m - n, y_b + z + t)$ , donde  $t = (D_1T)\cos\varphi$ ,  $z = (BT)\sen\varphi$ ,  $m = (BT)\cos\varphi$  y  $n = (D_1T)\sen\varphi$ .

Como las coordenadas de  $D_1$  respecto del vértice  $B$  y la recta de referencia  $\overleftrightarrow{BC}$  (sección 2.1.) corresponden a  $D_1 = (BT, D_1T)$ , entonces, a partir de la ecuación 7.2 (sección 7.1.1.), se tiene que:

$$m - n = a\cos\varphi - \left(\frac{P \pm \sqrt{\Delta_1}}{4b}\right) (a\cos\varphi - c\cos(\theta + \varphi))$$

$$z + t = a\sen\varphi - \left(\frac{P \pm \sqrt{\Delta_1}}{4b}\right) (a\sen\varphi - c\sen(\theta + \varphi))$$

con lo cual:

$$D_1 = \left( x_b + a\cos\varphi - \left(\frac{P \pm \sqrt{\Delta_1}}{4b}\right) (a\cos\varphi - c\cos(\theta + \varphi)), \right. \\ \left. y_b + a\sen\varphi - \left(\frac{P \pm \sqrt{\Delta_1}}{4b}\right) (a\sen\varphi - c\sen(\theta + \varphi)) \right) \quad (7.14)$$

donde, en términos de las coordenadas cartesianas de los vértices de un triángulo (sección 2.3.1.), se obtiene:

$$H_1 = \left( x_b + \frac{(4a - P \pm \sqrt{\Delta_1})(x_c - x_b)}{4a}, y_b + \frac{(4a - P \pm \sqrt{\Delta_1})(y_c - y_b)}{4a} \right) \quad (7.15)$$

y

$$D_1 = \left( x_c - \frac{(P \pm \sqrt{\Delta_1})(x_c - x_a)}{4b}, y_c - \frac{(P \pm \sqrt{\Delta_1})(y_c - y_a)}{4b} \right)$$

Por lo tanto, para el  $\triangle ABC$  a lo sumo se presentan dos escintrices en ángulo  $C$ ,  $\overline{H_1'D_1'}$  y  $\overline{H_1''D_1''}$ , que cortan a  $\overline{AC}$  y  $\overline{BC}$  (figura 7.20.), donde, de acuerdo con el análisis de existencia presentado en la sección 7.1.2., se tiene que para  $c \geq \sqrt{8ab} - a - b$ :

- Si  $b \geq c$

$$H'_1 = \left( x_b + \frac{(4a - P + \sqrt{\Delta_1})(x_c - x_b)}{4a}, y_b + \frac{(4a - P + \sqrt{\Delta_1})(y_c - y_b)}{4a} \right)$$

(7.16)

y

$$D'_1 = \left( x_c - \frac{(P + \sqrt{\Delta_1})(x_c - x_a)}{4b}, y_c - \frac{(P + \sqrt{\Delta_1})(y_c - y_a)}{4b} \right)$$

- Si  $a \geq c$

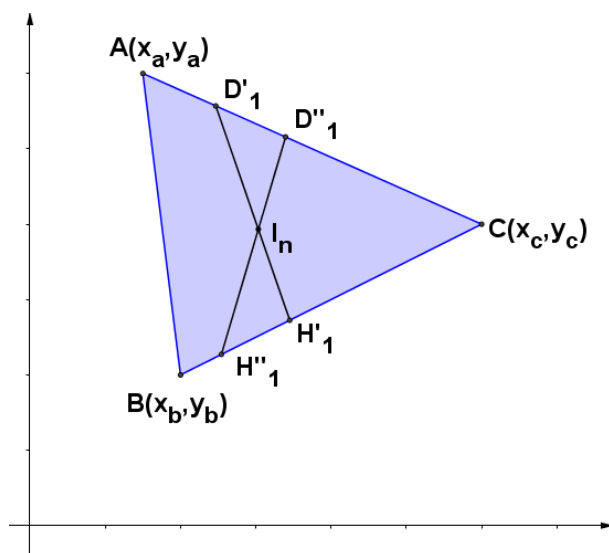
$$H''_1 = \left( x_b + \frac{(4a - P - \sqrt{\Delta_1})(x_c - x_b)}{4a}, y_b + \frac{(4a - P - \sqrt{\Delta_1})(y_c - y_b)}{4a} \right)$$

(7.17)

y

$$D''_1 = \left( x_c - \frac{(P - \sqrt{\Delta_1})(x_c - x_a)}{4b}, y_c - \frac{(P - \sqrt{\Delta_1})(y_c - y_a)}{4b} \right)$$

Figura 7.20. Escintrices en ángulo  $C$ ,  $\overline{H'_1 D'_1}$  y  $\overline{H''_1 D''_1}$  en un sistema cartesiano

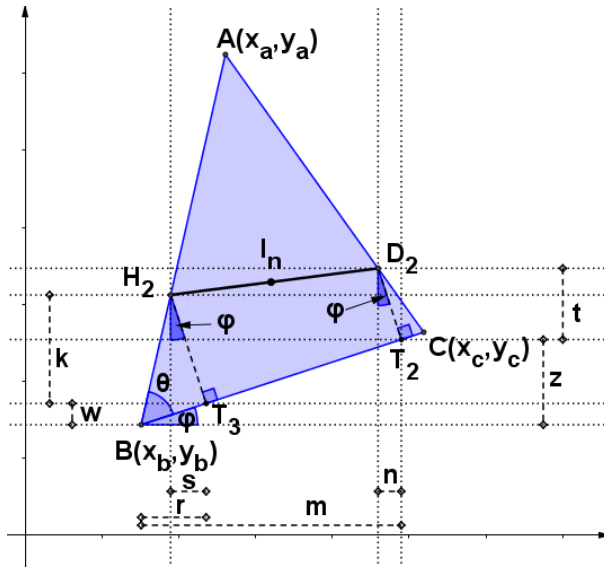


Fuente: elaboración propia.

**7.2.2. Coordenadas de los puntos extremos de las escintrices en ángulo  $A$ ,  $\overline{H_2D_2}$ , en términos de las coordenadas cartesianas de los vértices de un triángulo**

Sea el  $\triangle ABC$  en un sistema cartesiano con  $a = BC$ ,  $b = AC$ ,  $c = AB$  y sea  $\overline{H_2D_2}$  una escintriz en ángulo  $A$  del triángulo, con  $H_2$  sobre  $\overline{AB}$  y  $D_2$  sobre  $\overline{AC}$ , donde  $T_2$  y  $T_3$  son los pies de las perpendiculares trazadas desde los puntos  $D_2$  y  $H_2$  hasta  $\overline{BC}$ , respectivamente (figura 7.21.).

Figura 7.21. Escintriz en ángulo  $A$ ,  $\overline{H_2D_2}$ , en un sistema cartesiano



Fuente: elaboración propia.

De acuerdo con la figura 7.21. las coordenadas cartesianas de  $H_2$  están dadas por  $H_2 = (x_b + r - s, y_b + w + k)$ , con  $r = (BT_3)\cos\varphi$ ,  $s = (H_2T_3)\sen\varphi$ ,  $w = (BT_3)\sen\varphi$  y  $k = (H_2T_3)\cos\varphi$ .

Como las coordenadas de  $H_2$  respecto del vértice  $B$  y la recta de referencia  $\overleftrightarrow{BC}$  (sección 2.1.) corresponden a  $H_2 = (BT_3, H_2T_3)$ , entonces, a partir de la ecuación 7.5 (sección 7.1.3.), se tiene que  $r - s = \frac{4c - P \pm \sqrt{\Delta_2}}{4}\cos(\theta + \varphi)$  y  $w + k = \frac{4c - P \pm \sqrt{\Delta_2}}{4}\sen(\theta + \varphi)$ ,

con lo cual:

$$H_2 = \left( x_b + \frac{4c - P \pm \sqrt{\Delta_2}}{4} \cos(\theta + \varphi), y_b + \frac{4c - P \pm \sqrt{\Delta_2}}{4} \operatorname{sen}(\theta + \varphi) \right) \quad (7.18)$$

Las coordenadas cartesianas de  $D_2$  están dadas por  $D_2 = (x_b + m - n, y_b + z + t)$ , donde  $m = (BT_2)\cos\varphi$ ,  $n = (D_2T_2)\operatorname{sen}\varphi$ ,  $t = (D_2T_2)\cos\varphi$  y  $z = (BT_2)\operatorname{sen}\varphi$ .

Como las coordenadas de  $D_2$  respecto del vértice  $B$  y la recta de referencia  $\overleftrightarrow{BC}$  (sección 2.1.) corresponden a  $D_2 = (BT_2, D_2T_2)$ , entonces, a partir de la ecuación 7.6 (sección 7.1.3.), se tiene que:

$$m - n = a\cos\varphi - \left( \frac{4b - P \pm \sqrt{\Delta_2}}{4b} \right) (a\cos\varphi - c\cos(\theta + \varphi))$$

$$z + t = a\operatorname{sen}\varphi - \left( \frac{4b - P \pm \sqrt{\Delta_2}}{4b} \right) (a\operatorname{sen}\varphi - c\operatorname{sen}(\theta + \varphi))$$

Así:

$$D_2 = \left( x_b + a\cos\varphi - \left( \frac{4b - P \pm \sqrt{\Delta_2}}{4b} \right) (a\cos\varphi - c\cos(\theta + \varphi)), \right. \\ \left. y_b + a\operatorname{sen}\varphi - \left( \frac{4b - P \pm \sqrt{\Delta_2}}{4b} \right) (a\operatorname{sen}\varphi - c\operatorname{sen}(\theta + \varphi)) \right) \quad (7.19)$$

donde, en términos de las coordenadas cartesianas de los vértices de un triángulo (sección 2.3.1.), se obtiene:

$$H_2 = \left( x_b + \frac{(4c - P \pm \sqrt{\Delta_2})(x_a - x_b)}{4c}, y_b + \frac{(4c - P \pm \sqrt{\Delta_2})(y_a - y_b)}{4c} \right) \\ y \quad (7.20)$$

$$D_2 = \left( x_c - \frac{(4b - P \mp \sqrt{\Delta_2})(x_c - x_a)}{4b}, y_c - \frac{(4b - P \mp \sqrt{\Delta_2})(y_c - y_a)}{4b} \right)$$

Por lo tanto, para el  $\triangle ABC$  a lo sumo se presentan dos escintrices en ángulo  $A$ ,  $\overline{H'_2D'_2}$  y  $\overline{H''_2D''_2}$ , que cortan a  $\overline{AB}$  y  $\overline{AC}$  (figura 7.22.), donde, de acuerdo con el análisis de existencia presentado en la sección 7.1.4., se tiene que para  $a \geq \sqrt{8bc} - b - c$ :

- Si  $b \geq a$

$$H'_2 = \left( x_b + \frac{(4c - P + \sqrt{\Delta_2})(x_a - x_b)}{4c}, y_b + \frac{(4c - P + \sqrt{\Delta_2})(y_a - y_b)}{4c} \right)$$

(7.21)

y

$$D'_2 = \left( x_c - \frac{(4b - P - \sqrt{\Delta_2})(x_c - x_a)}{4b}, y_c - \frac{(4b - P - \sqrt{\Delta_2})(y_c - y_a)}{4b} \right)$$

- Si  $c \geq a$

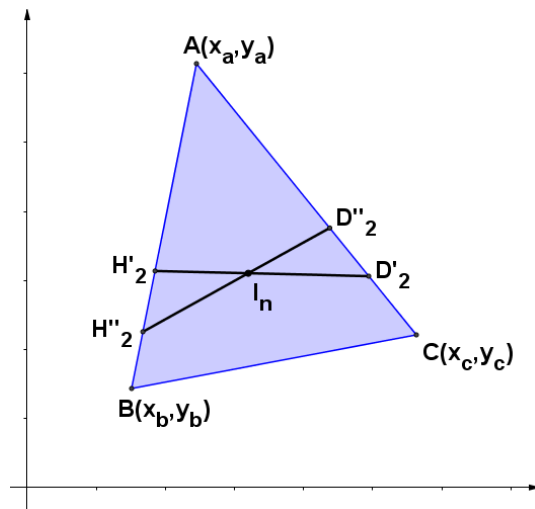
$$H''_2 = \left( x_b + \frac{(4c - P - \sqrt{\Delta_2})(x_a - x_b)}{4c}, y_b + \frac{(4c - P - \sqrt{\Delta_2})(y_a - y_b)}{4c} \right)$$

(7.22)

y

$$D''_2 = \left( x_c - \frac{(4b - P + \sqrt{\Delta_2})(x_c - x_a)}{4b}, y_c - \frac{(4b - P + \sqrt{\Delta_2})(y_c - y_a)}{4b} \right)$$

Figura 7.22. Escintrices en ángulo  $A$ ,  $\overline{H'_2D'_2}$  y  $\overline{H''_2D''_2}$  en un sistema cartesiano

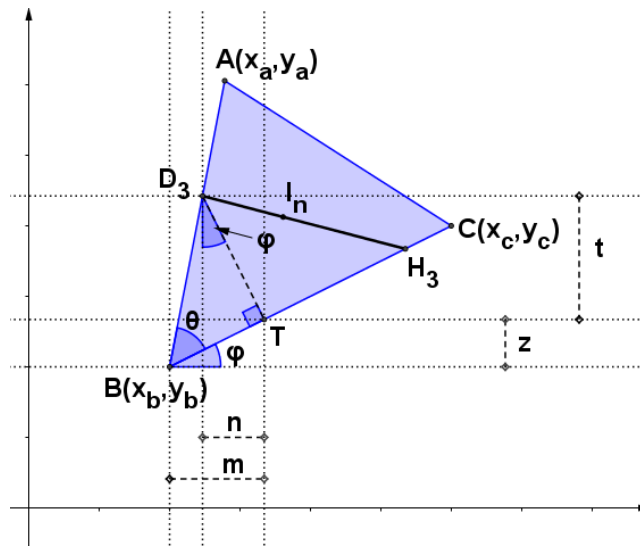


Fuente: elaboración propia.

**7.2.3. Coordenadas de los puntos extremos de las escintrices en ángulo  $B$ ,  $\overline{H_3D_3}$ , en términos de las coordenadas cartesianas de los vértices de un triángulo**

Sea el  $\triangle ABC$  en un sistema cartesiano con  $a = BC$ ,  $b = AC$ ,  $c = AB$  y sea  $\overline{H_3D_3}$  una escintriz en ángulo  $B$  del triángulo, con  $H_3$  sobre  $\overline{BC}$  y  $D_3$  sobre  $\overline{AB}$ , donde  $T$  es el pie de la perpendicular trazada desde el punto  $D_3$  hasta  $\overline{BC}$  (figura 7.23.).

Figura 7.23. Escintriz en ángulo  $B$ ,  $\overline{H_3D_3}$ , en un sistema cartesiano



Fuente: elaboración propia.

De acuerdo con la figura 7.23. las coordenadas cartesianas de  $H_3$  están dadas por  $H_3 = (x_b + (BH_3)\cos\phi, y_b + (BH_3)\sen\phi)$  y como las coordenadas de  $H_3$  respecto del vértice  $B$  y la recta de referencia  $\overleftrightarrow{BC}$  (sección 2.1.) corresponden a  $H_3 = (BH_3, 0)$ , entonces, a partir de la ecuación 7.9 (sección 7.1.5.), se tiene:

$$H_3 = \left( x_b + \frac{P \mp \sqrt{\Delta_3}}{4} \cos\phi, y_b + \frac{P \mp \sqrt{\Delta_3}}{4} \sen\phi \right) \quad (7.23)$$

Las coordenadas cartesianas de  $D_3$  están dadas por  $D_3 = (x_b + m - n, y_b + z + t)$ , donde  $t = (D_3T)\cos\phi$ ,  $z = (BT)\sen\phi$ ,  $m = (BT)\cos\phi$  y  $n = (D_3T)\sen\phi$ .



Como las coordenadas de  $D_3$  respecto del vértice  $B$  y la recta de referencia  $\overleftrightarrow{BC}$  (sección 2.1.) corresponden a  $D_3 = (BT, D_3T)$ , entonces, a partir de la ecuación 7.10 (sección 7.1.5.), se tiene que  $m-n = \frac{P \pm \sqrt{\Delta_3}}{4} \cos(\theta + \varphi)$  y  $z+t = \frac{P \pm \sqrt{\Delta_3}}{4} \text{sen}(\theta + \varphi)$ , así:

$$D_3 = \left( x_b + \frac{P \pm \sqrt{\Delta_3}}{4} \cos(\theta + \varphi), y_b + \frac{P \pm \sqrt{\Delta_3}}{4} \text{sen}(\theta + \varphi) \right) \quad (7.24)$$

donde, en términos de las coordenadas cartesianas de los vértices de un triángulo (sección 2.3.1.), se obtiene:

$$H_3 = \left( x_b + \frac{(P \mp \sqrt{\Delta_3})(x_c - x_b)}{4a}, y_b + \frac{(P \mp \sqrt{\Delta_3})(y_c - y_b)}{4a} \right) \quad (7.25)$$

$y$

$$D_3 = \left( x_b + \frac{(P \pm \sqrt{\Delta_3})(x_a - x_b)}{4c}, y_b + \frac{(P \pm \sqrt{\Delta_3})(y_a - y_b)}{4c} \right)$$

Por lo tanto, para el  $\triangle ABC$  a lo sumo se presentan dos escintrices en ángulo  $B$ ,  $\overline{H'_3 D'_3}$  y  $\overline{H''_3 D''_3}$ , que cortan a  $\overline{AB}$  y  $\overline{BC}$  (figura 7.24.), donde, de acuerdo con el análisis de existencia presentado en la sección 7.1.6., se tiene que para  $b \geq \sqrt{8ac} - a - c$ :

- Si  $c \geq b$

$$H'_3 = \left( x_b + \frac{(P - \sqrt{\Delta_3})(x_c - x_b)}{4a}, y_b + \frac{(P - \sqrt{\Delta_3})(y_c - y_b)}{4a} \right) \quad (7.26)$$

$y$

$$D'_3 = \left( x_b + \frac{(P + \sqrt{\Delta_3})(x_a - x_b)}{4c}, y_b + \frac{(P + \sqrt{\Delta_3})(y_a - y_b)}{4c} \right)$$

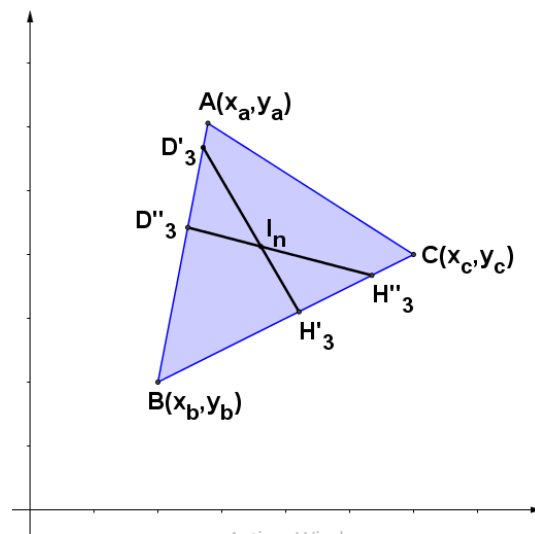
- Si  $a \geq b$

$$H_3'' = \left( x_b + \frac{(P + \sqrt{\Delta_3})(x_c - x_b)}{4a}, y_b + \frac{(P + \sqrt{\Delta_3})(y_c - y_b)}{4a} \right)$$

$y$

$$D_3'' = \left( x_b + \frac{(P - \sqrt{\Delta_3})(x_a - x_b)}{4c}, y_b + \frac{(P - \sqrt{\Delta_3})(y_a - y_b)}{4c} \right)$$
(7.27)

Figura 7.24. Escintrices en ángulo  $B$ ,  $\overline{H_3'D_3'}$  y  $\overline{H_3''D_3''}$  en un sistema cartesiano



Fuente: elaboración propia.

### 7.3. Cantidad de escintrices existentes en un triángulo de acuerdo con la longitud de los lados<sup>76</sup>

En la tabla 7.1. se relacionan las condiciones para la existencia de las escintrices planteadas de forma aislada en las secciones 7.1.2., 7.1.4. y 7.1.6.

Así, con base en la tabla 7.1. y de acuerdo con la relación métrica entre la longitud de los lados de un triángulo puede establecerse, sin pérdida de generalidad, la existencia de 1, 2 o 3 escintrices como se muestra en la tabla 7.2.

<sup>76</sup> En Berzsenyi (1997), Kodokostas (2010), Sfikas (2014), Shirali (2014), Ντρυζος Δ.; Ριζος Γ. (2014) y Yiu (2016) pueden verse diferentes posibilidades de análisis de la presentación de las escintrices en un triángulo, de acuerdo con la medida de la longitud de los lados.

Tabla 7.1. Condiciones para la existencia de las escintrices de un triángulo, de acuerdo con la longitud de los lados.

Escintriz de un triángulo		Relación entre lados						Condición de existencia
		$a \geq b$	$a \geq c$	$b \geq a$	$b \geq c$	$c \geq a$	$c \geq b$	
En ángulo $C$	$\overline{H'_1 D'_1}$				$x$			$c \geq \sqrt{8ab} - a - b$
	$\overline{H''_1 D''_1}$		$x$					
En ángulo $A$	$\overline{H'_2 D'_2}$			$x$				$a \geq \sqrt{8bc} - b - c$
	$\overline{H''_2 D''_2}$					$x$		
En ángulo $B$	$\overline{H'_3 D'_3}$						$x$	$b \geq \sqrt{8ac} - a - c$
	$\overline{H''_3 D''_3}$	$x$						

$x$ : existencia de la escintriz

Fuente: elaboración propia.

Tabla 7.2. Cantidad de escintrices existentes en un triángulo de acuerdo con la longitud de los lados.

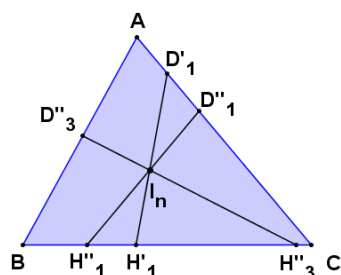
Relación entre lados de un triángulo	Condición lado menor	Existencia de la escintriz						Total
		En ángulo $C$		En ángulo $A$		En ángulo $B$		
		$\overline{H'_1 D'_1}$	$\overline{H''_1 D''_1}$	$\overline{H'_2 D'_2}$	$\overline{H''_2 D''_2}$	$\overline{H'_3 D'_3}$	$\overline{H''_3 D''_3}$	
$a > b > c$	$c > \sqrt{8ab} - a - b$	$x$	$x$				$x$	3
	$c = \sqrt{8ab} - a - b$	$n_c$	$n_c$				$x$	2
	$c < \sqrt{8ab} - a - b$						$x$	1
$a = b > c$	$c > 2(\sqrt{2} - 1)a$	$x$	$x$	$m_c$			$m_c$	3
	$c = 2(\sqrt{2} - 1)a$	$n_c$	$n_c$	$m_c$			$m_c$	2
	$c < 2(\sqrt{2} - 1)a$			$m_c$			$m_c$	1
$a > b = c$	$c > a/2$	$m_a$	$x$			$m_a$	$x$	3
$a = b = c$		$m_a$	$m_b$	$m_c$	$m_b$	$m_a$	$m_c$	3

$x$ : existencia de la escintriz  
 $m_k$ : existencia de la escintriz como mediana respecto del lado  $k$   
 $n_c$ : existencia de la escintriz normal a la bisectriz en ángulo  $C$

Fuente: elaboración propia.

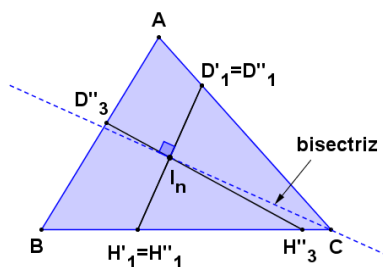
En las figuras 7.25. a 7.32. se muestran ejemplos de las distintas posibilidades de existencia de las escintrices.

Figura 7.25. Escintrices en ángulo  $C$  ( $\overline{H'_1 D'_1}$  y  $\overline{H''_1 D''_1}$ ) y en ángulo  $B$  ( $\overline{H''_3 D''_3}$ ), conjuntas, para la relación entre los lados  $a > b > c$ , con  $c > \sqrt{8ab} - a - b$ . Caso particular  $a = 8.5$ ,  $b = 8$  y  $c = 7$



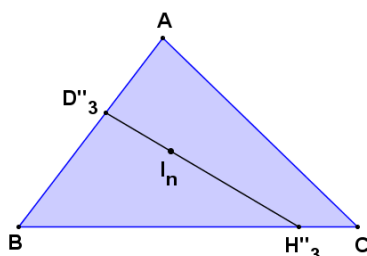
Fuente: elaboración propia.

Figura 7.26. Escintrices en ángulo  $C$  ( $\overline{H'_1 D'_1}$  coincidente con  $\overline{H''_1 D''_1}$ , normales a la bisectriz del ángulo  $C$ ) y en ángulo  $B$  ( $\overline{H''_3 D''_3}$ ), conjuntas, para la relación entre los lados  $a > b > c$ , con  $c = \sqrt{8ab} - a - b$ . Caso particular  $a = 9$ ,  $b = 8$  y  $c = 7$



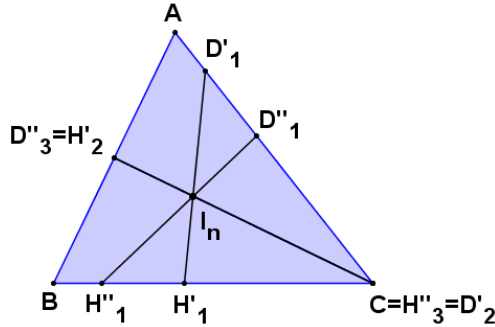
Fuente: elaboración propia.

Figura 7.27. Escintriz en ángulo  $B$  ( $\overline{H''_3 D''_3}$ ), para la relación entre los lados  $a > b > c$ , con  $c < \sqrt{8ab} - a - b$ . Caso particular  $a = 10$ ,  $b = 8$  y  $c = 7$



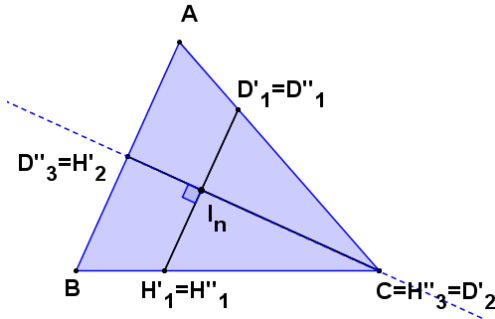
Fuente: elaboración propia.

Figura 7.28. Escintrices en ángulo  $C$  ( $\overline{H'_1 D'_1}$  y  $\overline{H''_1 D''_1}$ ) y como mediana respecto del lado  $c$  ( $\overline{H''_3 D''_3}$  coincidente con  $\overline{H'_2 D'_2}$ ), conjuntas, para la relación entre los lados  $a = b > c$ , con  $c > 2(\sqrt{2} - 1)a$ . Caso particular  $a = 8$ ,  $b = 8$  y  $c = 7$



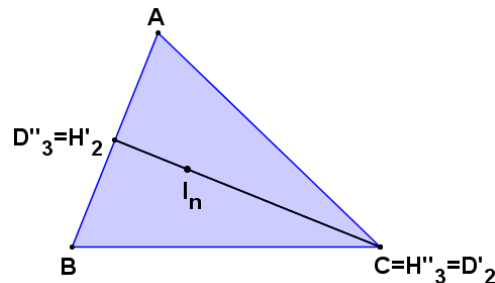
Fuente: elaboración propia.

Figura 7.29. Escintrices en ángulo  $C$  ( $\overline{H'_1 D'_1}$  coincidente con  $\overline{H''_1 D''_1}$ , normales a la bisectriz del ángulo  $C$ ) y como medianas respecto del lado  $c$  ( $\overline{H''_3 D''_3}$  coincidente con  $\overline{H'_2 D'_2}$ ), conjuntas, para la relación entre los lados  $a = b > c$ , con  $c = 2(\sqrt{2} - 1)a$ . Caso particular  $a = 8$ ,  $b = 8$  y  $c = 16(\sqrt{2} - 1)$



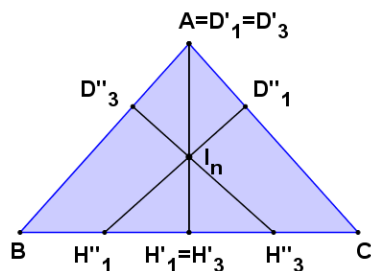
Fuente: elaboración propia.

Figura 7.30. Escintrices como medianas respecto del lado  $c$  ( $\overline{H''_3 D''_3}$  coincidente con  $\overline{H'_2 D'_2}$ ), conjuntas, para la relación entre los lados  $a = b > c$ , con  $c < 2(\sqrt{2} - 1)a$ . Caso particular  $a = 8$ ,  $b = 8$  y  $c = 6$



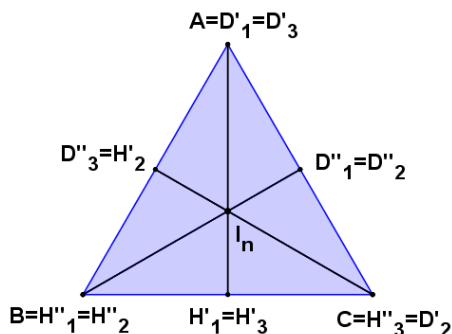
Fuente: elaboración propia.

Figura 7.31. Escintrices en ángulo  $C$  ( $\overline{H''_1 D'_1}$ ), en ángulo  $B$  ( $\overline{H''_3 D'_3}$ ) y como mediana respecto del lado  $a$  ( $\overline{H'_1 D'_1}$  coincidente con  $\overline{H'_3 D'_3}$ ), conjuntas, para la relación entre los lados  $a > b = c$ , con  $c > a/2$ . Caso particular  $a = 8, b = 6$  y  $c = 6$



Fuente: elaboración propia.

Figura 7.32. Escintrices como medianas respecto del lado  $a$  ( $\overline{H'_1 D'_1}$  coincidente con  $\overline{H'_3 D'_3}$ ), del lado  $b$  ( $\overline{H''_1 D'_1}$  coincidente con  $\overline{H''_2 D'_2}$ ) y del lado  $c$  ( $\overline{H''_3 D'_3}$  coincidente con  $\overline{H'_2 D'_2}$ ), conjuntas, para la relación entre los lados  $a = b = c$ . Caso particular  $a = 8, b = 8$  y  $c = 8$



Fuente: elaboración propia.

#### 7.4. Análisis de la existencia de las escintrices de un triángulo según otros autores

Dunn, J.; Pretty, J. (1972) plantean que el área de un triángulo es bisectado por cada línea que es paralela a uno de los lados y que divide a los otros en la razón  $\sqrt{2} + 1 : 1$  las cuales denomina *b-lines*. Líneas que sugieren la existencia de tres envolventes hiperbólicas (tangentes a las *b-lines*) y que le permiten concluir que no hay un punto singular a través del cual pasen todas las líneas que bisectan el área de un triángulo.

Todd (1999) presenta un análisis gráfico de la cantidad de escintrices (*b-lines*) que existen para un triángulo dado, dependiendo de la ubicación del incentro en relación con las envolventes hiperbólicas, y concluye que un triángulo puede tener una, dos o tres escintrices.

García Capitán (2002) hace un análisis de las condiciones para la existencia de las escintrices (sin asignarle un nombre específico) en términos de la longitud de los lados del triángulo. A partir de este análisis elabora una representación gráfica en la cual se establecen regiones en donde se puede determinar la existencia de una o dos escintrices. Adicionalmente, presenta un método sintético para la construcción geométrica de las escintrices de un triángulo.

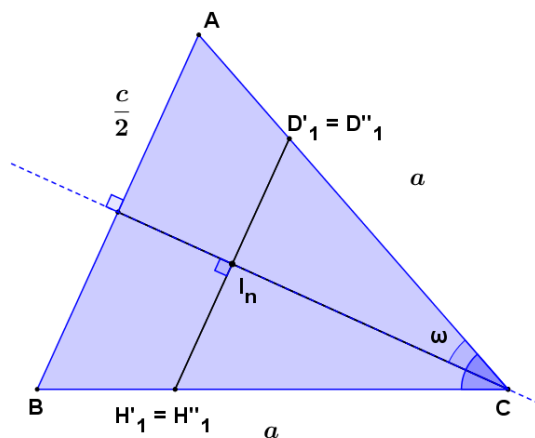
Kodokostas (2010) hace un análisis de la cantidad de escintrices (*equalizers*) existentes en un triángulo de acuerdo con la medida de los lados y de los ángulos interiores, esto en relación con las bisectrices y las líneas normales a ellas que pasan por el incentro. En su análisis el autor establece que la línea normal a la bisectriz del ángulo  $C$ , que pasa por el incentro, puede ser una escintriz solo cuando  $\angle C \leq 2\arcsen(\sqrt{2} - 1) \approx 48^\circ 56' 23''$ .

Al respecto se tiene que este valor angular es relevante para los triángulos isósceles donde  $a = b > c$  y  $c = 2(\sqrt{2} - 1)a$  (tabla 7.2.), dado que la escintriz en ángulo  $C$  será perpendicular a la bisectriz del ángulo  $C$  (figura 7.33.). Así, al hacer  $w = \frac{\angle C}{2}$  se obtiene  $\text{sen}w = \frac{c}{2a} = \frac{2(\sqrt{2} - 1)a}{2a} = (\sqrt{2} - 1)$ , esto es  $w = \arcsen(\sqrt{2} - 1)$ , de donde  $\angle C = 2w = 2\arcsen(\sqrt{2} - 1) \approx 48^\circ 56' 23'' \approx 48.94^\circ$ .

Por su parte, Ντριζος Δ.; Ριζος Γ. (2014) presentan un análisis de la cantidad de escintrices en un triángulo, de acuerdo a su clasificación como equilátero, isósceles y escaleno.

Sfikas (2014) presenta un estudio analítico respecto de la cantidad de escintrices (*equalizers*) existentes en triángulos rectángulos para diferentes valores de los lados, haciendo uso de ecuaciones paramétricas. El autor manifiesta que los triángulos rectángulos con dos escintrices parecen ser una rara categoría.

Figura 7.33. Escintriz en ángulo  $C$ ,  $\overline{H'_1 D'_1}$  coincidente con  $\overline{H''_1 D''_1}$ , perpendicular a la bisectriz del ángulo  $C$ , donde  $a = b > c$  y  $c = 2(\sqrt{2} - 1)a$ , para el cual  $\angle C = 2\arcsen(\sqrt{2} - 1) \approx 48^\circ 56' 23''$



Fuente: elaboración propia.

Yiu (2016) hace un análisis de la cantidad de escintrices (*perimeter-area bisectors*) presentes en un triángulo donde plantea que hay un único triángulo rectángulo que satisface que la escintriz en ángulo  $A$  es perpendicular a la bisectriz interior del ángulo  $A$  y cuyo  $\angle A \approx 43,2674^\circ$ . Para la determinación de la longitud de los lados de dicho triángulo el autor asume la terna pitagórica  $a : b : c = 2t : 1 - t^2 : 1 + t^2$ , con  $t = \tan \frac{A}{2}$ , lo cual lleva a la ecuación  $2t^4 + t^2 + 2t - 1 = 0$ , cuya solución es<sup>77</sup>  $t = 0,396608 \dots$

Al respecto, de acuerdo con la tabla 7.2., para el triángulo rectángulo  $ABC$  con  $a = BC$ ,  $b = AC$  y  $c = AB$ , donde  $c > b > a$ , se obtiene la escintriz normal a la bisectriz en ángulo  $A$  (figura 7.34.) cuando  $a = \sqrt{8bc} - b - c$  y  $a = \sqrt{c^2 - b^2}$ . Así, igualando ambas expresiones se obtiene la ecuación  $8c^3 - 9bc^2 - 2b^2c - b^3 = 0$ , con lo cual, al hacer  $b = ct$  se llega a la ecuación  $t^3 + 2t^2 + 9t - 8 = 0$ , cuya solución es<sup>78</sup>  $t \approx 0,72816$  y donde  $\angle A \approx 43,2674^\circ$ , lo cual corrobora lo planteado por Yiu (2016).

$$^{77} t = \frac{1}{3} \left( 1 + \frac{\sqrt[3]{4 + 3\sqrt{78}}}{2^{\frac{2}{3}}} - \frac{7}{\sqrt[3]{8 + 6\sqrt{78}}} \right)$$

<https://www.wolframalpha.com>

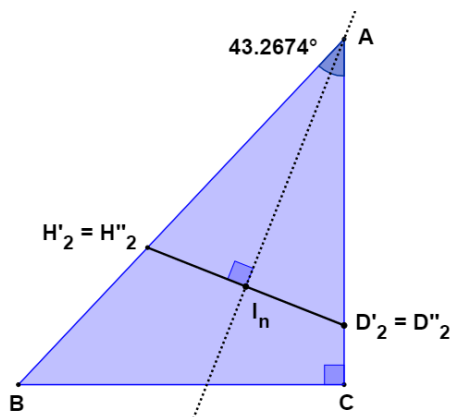
$$^{78} t = \frac{1}{3} \left( -2 - \frac{23}{\sqrt[3]{181 + 24\sqrt{78}}} + \sqrt[3]{181 + 24\sqrt{78}} \right)$$

<https://www.wolframalpha.com>



Adicionalmente, Yiu (2016) presenta un interesante análisis para la determinación de escintrices (*perimeter-area bisectors*) en triángulos con lados enteros a partir de ternas pitagóricas enteras.

Figura 7.34. Escintriz del triángulo rectángulo  $ABC$  en ángulo  $A$ ,  $\overline{H'_2D'_2}$  coincidente con  $\overline{H''_2D''_2}$ , perpendicular a la bisectriz interior del ángulo  $A$ , donde  $\angle A \approx 43,2674^\circ$



Fuente: elaboración propia.

Berele, A.; Catoiu, S. (2016) presentan un análisis de la existencia de las escintrices (*AP-bisecting lines*) de un  $\triangle ABC$  de área  $k$  y semiperímetro  $s$ . Los autores parten de considerar las posibilidades para el discriminante  $\Delta_v = s^2 - \frac{2abc}{v}$  de la ecuación cuadrática  $x^2 - sx + \frac{abc}{2v} = 0$ , donde  $v$  es el lado opuesto al vértice  $V$  del triángulo y las raíces  $x_1$  y  $x_2$  corresponden a las longitudes de dos segmentos adyacentes que parten desde el vértice  $V$  y cuyos extremos  $M$  y  $N$ , que están sobre los lados del triángulo o sus prolongaciones, son tales que la línea que los une genera el  $\triangle VMN$ , donde  $VM + VN = s$  y  $A(\triangle VMN) = k/2$ , línea denominada *generalized AP-bisecting line*. Concluyen los autores que, de acuerdo con la relación métrica entre la longitud de los lados del triángulo, la cantidad de *generalized AP-bisecting lines* respecto del vértice  $V$  es cero, una o dos, dependiendo de si el discriminante  $\Delta_v$  es negativo, cero o positivo, respectivamente. Para el caso en que ambos puntos  $M$  y  $N$  estén sobre los lados del triángulo la línea que los une recibe el nombre específico de *AP-bisecting line* (escintriz), de las cuales el  $\triangle ABC$  tendrá una, dos o tres.

En las tablas 7.3. y 7.4. puede verse las fórmulas desarrolladas en el capítulo.

Tabla 7.3. Fórmulas para obtener las coordenadas de los puntos extremos de las escintrices de un triángulo en términos de la longitud de los lados

Escintriz del triángulo	Coordenadas de los puntos extremos en términos de la longitud de los lados
<b>En ángulo C</b>  $\overline{H_1 D_1}$	$b \geq c$ $H'_1 = \left( \frac{4a - P + \sqrt{\Delta_1}}{4}, 0 \right)$ $D'_1 = \left( \frac{8a^2 b + (P + \sqrt{\Delta_1})(\Omega - 2a^2)}{8ab}, \frac{(P + \sqrt{\Delta_1})\sqrt{\Delta_0}}{8ab} \right)$
	$c \geq \sqrt{8ab} - a - b$ $a \geq c$ $H''_1 = \left( \frac{4a - P - \sqrt{\Delta_1}}{4}, 0 \right)$ $D''_1 = \left( \frac{8a^2 b + (P - \sqrt{\Delta_1})(\Omega - 2a^2)}{8ab}, \frac{(P - \sqrt{\Delta_1})\sqrt{\Delta_0}}{8ab} \right)$
<b>En ángulo A</b>  $\overline{H_2 D_2}$	$b \geq a$ $H'_2 = \left( \frac{(4c - P + \sqrt{\Delta_2})\Omega}{8ac}, \frac{(4c - P + \sqrt{\Delta_2})\sqrt{\Delta_0}}{8ac} \right)$ $D'_2 = \left( \frac{8a^2 b - (4b - P - \sqrt{\Delta_2})(2a^2 - \Omega)}{8ab}, \frac{(4b - P - \sqrt{\Delta_2})\sqrt{\Delta_0}}{8ab} \right)$
	$a \geq \sqrt{8bc} - b - c$ $c \geq a$ $H''_2 = \left( \frac{(4c - P - \sqrt{\Delta_2})\Omega}{8ac}, \frac{(4c - P - \sqrt{\Delta_2})\sqrt{\Delta_0}}{8ac} \right)$ $D''_2 = \left( \frac{8a^2 b - (4b - P + \sqrt{\Delta_2})(2a^2 - \Omega)}{8ab}, \frac{(4b - P + \sqrt{\Delta_2})\sqrt{\Delta_0}}{8ab} \right)$
<b>En ángulo B</b>  $\overline{H_3 D_3}$	$c \geq b$ $H'_3 = \left( \frac{P - \sqrt{\Delta_3}}{4}, 0 \right)$ $D'_3 = \left( \frac{(P + \sqrt{\Delta_3})\Omega}{8ac}, \frac{(P + \sqrt{\Delta_3})\sqrt{\Delta_0}}{8ac} \right)$
	$b \geq \sqrt{8ac} - a - c$ $a \geq b$ $H''_3 = \left( \frac{P + \sqrt{\Delta_3}}{4}, 0 \right)$ $D''_3 = \left( \frac{(P - \sqrt{\Delta_3})\Omega}{8ac}, \frac{(P - \sqrt{\Delta_3})\sqrt{\Delta_0}}{8ac} \right)$
$\triangle ABC$ , con $B = (0, 0)$ , $C = (a, 0)$ y $A = \left( \frac{\Omega}{2a}, \frac{\sqrt{\Delta_0}}{2a} \right)$ , donde, $a = BC$ , $b = AC$ , $c = AB$ , $\Omega = a^2 + c^2 - b^2$ ; $\Delta_0 = 4a^2 c^2 - \Omega^2$ $P = a + b + c$ ; $\Delta_1 = P^2 - 8ab$ ; $\Delta_2 = P^2 - 8bc$ ; $\Delta_3 = P^2 - 8ac$	

Fuente: elaboración propia.

Tabla 7.4. Fórmulas para obtener las coordenadas de los puntos extremos de las escintrices de un triángulo en términos de las coordenadas cartesianas de los vértices

Escintriz del triángulo	Coordenadas de los puntos extremos en términos de las coordenadas cartesianas de los vértices
<b>En ángulo C</b>  $\overline{H_1 D_1}$	$b \geq c$ $H'_1 = \left( x_b + \frac{(4a - P + \sqrt{\Delta_1})(x_c - x_b)}{4a}, y_b + \frac{(4a - P + \sqrt{\Delta_1})(y_c - y_b)}{4a} \right)$ $D'_1 = \left( x_c - \frac{(P + \sqrt{\Delta_1})(x_c - x_a)}{4b}, y_c - \frac{(P + \sqrt{\Delta_1})(y_c - y_a)}{4b} \right)$
	$c \geq \sqrt{8ab} - a - b$ $a \geq c$ $H''_1 = \left( x_b + \frac{(4a - P - \sqrt{\Delta_1})(x_c - x_b)}{4a}, y_b + \frac{(4a - P - \sqrt{\Delta_1})(y_c - y_b)}{4a} \right)$ $D''_1 = \left( x_c - \frac{(P - \sqrt{\Delta_1})(x_c - x_a)}{4b}, y_c - \frac{(P - \sqrt{\Delta_1})(y_c - y_a)}{4b} \right)$
<b>En ángulo A</b>  $\overline{H_2 D_2}$	$b \geq a$ $H'_2 = \left( x_b + \frac{(4c - P + \sqrt{\Delta_2})(x_a - x_b)}{4c}, y_b + \frac{(4c - P + \sqrt{\Delta_2})(y_a - y_b)}{4c} \right)$ $D'_2 = \left( x_c - \frac{(4b - P - \sqrt{\Delta_2})(x_c - x_a)}{4b}, y_c - \frac{(4b - P - \sqrt{\Delta_2})(y_c - y_a)}{4b} \right)$
	$a \geq \sqrt{8bc} - b - c$ $c \geq a$ $H''_2 = \left( x_b + \frac{(4c - P - \sqrt{\Delta_2})(x_a - x_b)}{4c}, y_b + \frac{(4c - P - \sqrt{\Delta_2})(y_a - y_b)}{4c} \right)$ $D''_2 = \left( x_c - \frac{(4b - P + \sqrt{\Delta_2})(x_c - x_a)}{4b}, y_c - \frac{(4b - P + \sqrt{\Delta_2})(y_c - y_a)}{4b} \right)$
<b>En ángulo B</b>  $\overline{H_3 D_3}$	$c \geq b$ $H'_3 = \left( x_b + \frac{(P - \sqrt{\Delta_3})(x_c - x_b)}{4a}, y_b + \frac{(P - \sqrt{\Delta_3})(y_c - y_b)}{4a} \right)$ $D'_3 = \left( x_b + \frac{(P + \sqrt{\Delta_3})(x_a - x_b)}{4c}, y_b + \frac{(P + \sqrt{\Delta_3})(y_a - y_b)}{4c} \right)$
	$b \geq \sqrt{8ac} - a - c$ $a \geq b$ $H''_3 = \left( x_b + \frac{(P + \sqrt{\Delta_3})(x_c - x_b)}{4a}, y_b + \frac{(P + \sqrt{\Delta_3})(y_c - y_b)}{4a} \right)$ $D''_3 = \left( x_b + \frac{(P - \sqrt{\Delta_3})(x_a - x_b)}{4c}, y_b + \frac{(P - \sqrt{\Delta_3})(y_a - y_b)}{4c} \right)$
<p><math>\triangle ABC</math>, con <math>A = (x_a, y_a)</math>, <math>B = (x_b, y_b)</math> y <math>C = (x_c, y_c)</math>, donde, <math>a = BC</math>, <math>b = AC</math>, <math>c = AB</math>,  <math>a = \sqrt{(x_c - x_b)^2 + (y_c - y_b)^2}</math>; <math>b = \sqrt{(x_c - x_a)^2 + (y_c - y_a)^2}</math>; <math>c = \sqrt{(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2}</math>  <math>P = a + b + c</math>; <math>\Delta_1 = P^2 - 8ab</math>; <math>\Delta_2 = P^2 - 8bc</math>; <math>\Delta_3 = P^2 - 8ac</math></p>	

Fuente: elaboración propia.

## 7.5. Ejemplos capítulo 7

### Ejemplo 1

Hallar las coordenadas de los puntos extremos de las escintrices del  $\triangle ABC$  con  $a = BC$ ,  $b = AC$  y  $c = AB$ , donde  $a = 9$ ,  $b = 7$  y  $c = 5$ . Comprobar que una escintriz divide al triángulo en dos regiones de igual área.

Solución:

Al hacer el análisis de existencia de las escintrices a partir de la tabla 7.2., siendo  $a > b > c$ , se compara  $c = 5$ , lado menor, con el discriminante  $\sqrt{8ab} - a - b = 6\sqrt{14} - 16 \approx 6.4$ , donde se tiene que  $c < \sqrt{8ab} - a - b$ . Así, se establece que para el  $\triangle ABC$  solo existe la escintriz en ángulo  $B$ ,  $\overline{H_3''D_3''}$ ,<sup>79</sup> con  $H_3''$  sobre  $\overline{BC}$  y  $D_3''$  sobre  $\overline{AB}$ .

Tomando el vértice  $B$  como punto de referencia y  $\overleftrightarrow{BC}$  como recta de referencia (sección 2.2.1.), se tiene que, al reemplazar para las longitudes de los lados,  $\Omega = 57$ ,  $\sqrt{\Delta_0} = 21\sqrt{11}$ ,  $B(0, 0)$ ,  $C(9, 0)$  y  $A = \left(\frac{19}{6}, \frac{7\sqrt{11}}{6}\right) \approx (3.17, 3.87)$ .

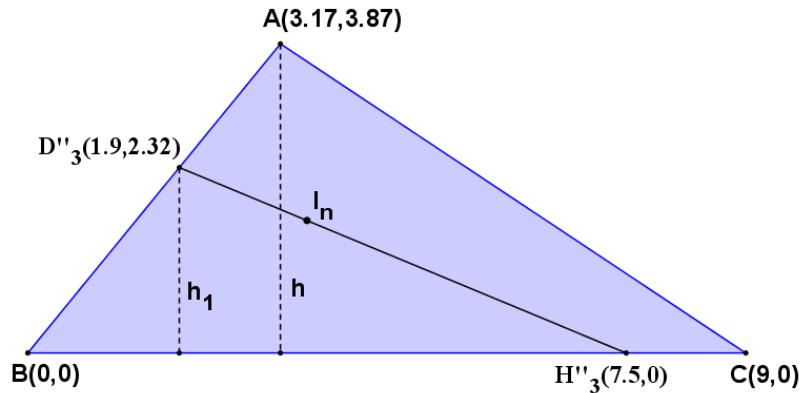
De acuerdo con la tabla 7.3., las coordenadas de los puntos extremos para la escintriz en ángulo  $B$ ,  $\overline{H_3''D_3''}$ , donde  $P = 21$  y  $\sqrt{\Delta_3} = \sqrt{P^2 - 8ac} = 9$ , son:

- para  $H_3''$  la abscisa es  $\frac{P + \sqrt{\Delta_3}}{4} = \frac{21 + 9}{4} = 7.5$  y la ordenada es 0. Luego,  $H_3'' = (7.5, 0)$ .

<sup>79</sup> Para hacer el análisis a partir de la tabla 7.3. se debe verificar el cumplimiento de las relaciones  $c \geq \sqrt{8ab} - a - b$ , con  $b \geq c$  ó  $a \geq c$ ;  $a \geq \sqrt{8bc} - b - c$ , con  $b \geq a$  ó  $c \geq a$ ;  $b \geq \sqrt{8ac} - a - c$ , con  $c \geq b$  ó  $a \geq b$ , encontrándose que la única que se cumple es  $b \geq \sqrt{8ac} - a - c$ , esto es,  $b \geq 6\sqrt{10} - 14$ , donde  $a > b$ , con lo cual se concluye que la única escintriz existente es  $\overline{H_3''D_3''}$ .

- para  $D''_3$  la abscisa es  $\frac{(P - \sqrt{\Delta_3})\Omega}{8ac} = \frac{(21 - 9)(57)}{8(9)(5)} = 1.9$  y la ordenada es  $\frac{(P - \sqrt{\Delta_3})\sqrt{\Delta_0}}{8ac} = \frac{(21 - 9)(21\sqrt{11})}{360} = \frac{7\sqrt{11}}{10} \approx 2.32$ . Por lo tanto,  $D''_3 = \left(1.9, \frac{7\sqrt{11}}{10}\right) \approx (1.9, 2.32)$ .

Al ser la ordenada del vértice  $A$  la altura  $h$  del  $\triangle ABC$  y la ordenada del punto  $D''_3$  la altura  $h_1$  del  $\triangle D''_3BH''_3$ , se tiene que  $h = \frac{7\sqrt{11}}{6} \approx 3.87$  y  $h_1 = \frac{7\sqrt{11}}{10} \approx 2.32$ . Así, al ser  $BH''_3 = 7.5$  la base del  $\triangle D''_3BH''_3$ , se tiene que  $A(\triangle D''_3BH''_3) = \frac{(7.5) \left(\frac{7\sqrt{11}}{10}\right)}{2} = \frac{21\sqrt{11}}{8}$  y  $A(\triangle ABC) = \frac{(9) \left(\frac{7\sqrt{11}}{6}\right)}{2} = \frac{21\sqrt{11}}{4}$ . Así, se comprueba que  $A(\triangle D''_3BH''_3) = \frac{A(\triangle ABC)}{2}$  y por lo tanto,  $A(\triangle D''_3BH''_3) = A(\triangle AD''_3H''_3C)$ .



Ejemplo No. 1

Fuente: elaboración propia.

## Ejemplo 2

Para el  $\triangle ABC$  con  $a = BC$ ,  $b = AC$  y  $c = AB$ , donde  $a = v + w$ ,  $b = u + w$  y  $c = u + v$ , hallar las coordenadas de los puntos extremos de las escintrices asociadas a la terna pitagórica  $u = 3$ ,  $v = 4$  y  $w = 5$  y comprobar que la escintriz en ángulo  $C$  es perpendicular a la bisectriz del ángulo  $C$ .

Solución:

Al reemplazar los valores para  $u$ ,  $v$  y  $w$  se tiene que  $a = 9$ ,  $b = 8$  y  $c = 7$ , con lo cual, al hacer el análisis de existencia de las escintrices a partir de la tabla 7.2., siendo  $a > b > c$ , se compara  $c = 7$ , lado menor, con el discriminante  $\sqrt{8ab} - a - b = 24 - 17 = 7$ , donde se tiene que  $c = \sqrt{8ab} - a - b$ . Así, se establece que para el  $\triangle ABC$  existen dos escintrices, una en ángulo  $B$ ,  $\overline{H_3''D_3''}$ , con  $H_3''$  sobre  $\overline{BC}$  y  $D_3''$  sobre  $\overline{AB}$ , y otra en ángulo  $C$ ,  $\overline{H_1'D_1'} \cong \overline{H_1''D_1''}$ , con  $H_1'$  sobre  $\overline{BC}$  y  $D_1'$  sobre  $\overline{AC}$ .

Tomando el vértice  $B$  como punto de referencia y  $\overleftrightarrow{BC}$  como recta de referencia (sección 2.2.1.), se tiene que, al reemplazar para las longitudes de los lados,  $\Omega = 66$ ,  $\sqrt{\Delta_0} = 48\sqrt{5}$ ,  $B(0, 0)$ ,  $C(9, 0)$  y  $A = \left(\frac{11}{3}, \frac{8\sqrt{5}}{3}\right) \approx (3.67, 5.96)$ .

De acuerdo con la tabla 7.3., las coordenadas de los puntos extremos para la escintriz en ángulo  $B$ ,  $\overline{H_3''D_3''}$ , donde  $P = 24$  y  $\sqrt{\Delta_3} = \sqrt{P^2 - 8ac} = 6\sqrt{2}$ , son:

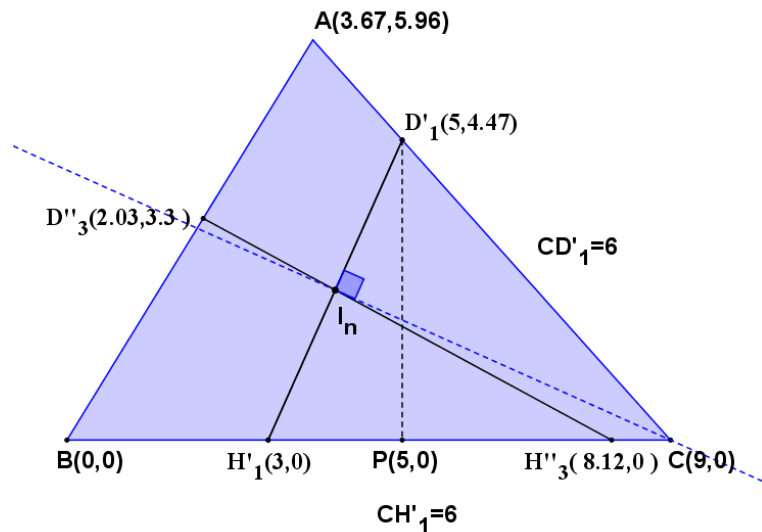
- para  $H_3''$  la abscisa es  $\frac{P + \sqrt{\Delta_3}}{4} = \frac{24 + 6\sqrt{2}}{4} = \frac{3(4 + \sqrt{2})}{2}$  y la ordenada es 0. Luego,  $H_3'' = \left(\frac{3(4 + \sqrt{2})}{2}, 0\right) \approx (8.12, 0)$ .
- para  $D_3''$  la abscisa es  $\frac{(P - \sqrt{\Delta_3})\Omega}{8ac} = \frac{(24 - 6\sqrt{2})(66)}{8(9)(7)} = \frac{11(4 - \sqrt{2})}{14}$  y la ordenada es  $\frac{(P - \sqrt{\Delta_3})\sqrt{\Delta_0}}{8ac} = \frac{(24 - 6\sqrt{2})(48\sqrt{5})}{8(9)(7)} = \frac{4(4 - \sqrt{2})\sqrt{5}}{7} \approx 3.3$ . Por lo tanto,  $D_3'' = \left(\frac{11(4 - \sqrt{2})}{14}, \frac{4(4 - \sqrt{2})\sqrt{5}}{7}\right) \approx (2.03, 3.3)$ .

Las coordenadas de los puntos extremos para la escintriz en ángulo  $C$ ,  $\overline{H_1'D_1'}$ , donde  $\sqrt{\Delta_1} = \sqrt{P^2 - 8ab} = 0$ , son:

- para  $H_1'$  la abscisa es  $\frac{4a - P + \sqrt{\Delta_1}}{4} = \frac{4(9) - 24 + 0}{4} = 3$  y la ordenada es 0. Así,  $H_1' = (3, 0)$ .

- para  $D'_1$  la abscisa es  $\frac{8a^2b + (P + \sqrt{\Delta_1})(\Omega - 2a^2)}{8ab} =$   
 $\frac{8(9)^2(8) + (24 + 0)[66 - 2(9)^2]}{8(9)(8)} = 5$  y la ordenada es  $\frac{(P + \sqrt{\Delta_1})\sqrt{\Delta_0}}{8ab} =$   
 $\frac{(24 + 0)(48\sqrt{5})}{8(9)(8)} = 2\sqrt{5} \approx 4.47$ . Luego,  $D'_1 = (5, 2\sqrt{5}) \approx (5, 4.47)$ .

Al trazar la perpendicular desde el punto  $D'_1$  hasta  $\overline{BC}$ , cuyo pie es  $P$ , se forma el triángulo rectángulo  $D'_1PC$  de catetos  $D'_1P = 2\sqrt{5}$  y  $PC = 4$  e hipotenusa  $CD'_1 = 6$ . Luego, como  $CH'_1 = 6$ , el  $\triangle D'_1H'_1C$  es isósceles, para el cual la bisectriz del ángulo  $C$  es a su vez altura, por lo tanto, se comprueba que la escintriz en ángulo  $C$ ,  $\overline{H'_1D'_1}$ , es perpendicular a la bisectriz del ángulo  $C$ .



Ejemplo No. 2

Fuente: elaboración propia.

## 7.6. Ejercicios capítulo 7

1. Para el  $\triangle ABC$ , con  $a = BC$ ,  $b = AC$  y  $c = AB$ , probar que si  $a = (b+c)(\sqrt{2}-1)$ :
  - a) La escintriz en ángulo  $A$  es paralela a  $\overline{BC}$ .
  - b) El punto extremo de la escintriz en ángulo  $A$  sobre  $\overline{AB}$  se encuentra a una distancia  $d = \frac{(2-\sqrt{2})c}{2}$  desde el vértice  $B$ .
  - c) Los puntos extremos de la escintriz en ángulo  $A$  divide a cada uno de los lados  $b$  y  $c$  en partes cuya razón es  $\sqrt{2} + 1 : 1$ .
  
2. Para el  $\triangle ABC$ , con  $a = BC$ ,  $b = AC$  y  $c = AB$ , donde  $a = b$  y  $c \geq a$ , probar que:
  - a) La escintriz en ángulo  $B$  es perpendicular a  $\overline{BC}$ .
  - b) La escintriz en ángulo  $A$  es perpendicular a  $\overline{AC}$ .
  
3. Para el  $\triangle ABC$ , con  $a = BC$ ,  $b = AC$  y  $c = AB$ , donde  $a = b$  y  $c = \sqrt{2}a$ , probar que:
  - a) La escintriz en ángulo  $B$  es perpendicular a  $\overline{BC}$ .
  - b) La escintriz en ángulo  $A$  es paralela a  $\overline{BC}$ .
  
4. Para el  $\triangle ABC$ , con  $a = BC$ ,  $b = AC$  y  $c = AB$ , donde  $a = v + w$ ,  $b = u + w$  y  $c = u + v$ , siendo  $(u, v, w)$  una terna pitagórica entera con  $u < v < w$ , probar que:
  - a) La escintriz en ángulo  $C$ ,  $\overline{H_1D_1}$ , es perpendicular a la bisectriz del ángulo  $C$ .
  - b) La distancia desde el vértice  $C$  hasta el punto extremo de la escintriz en ángulo  $C$  sobre  $\overline{BC}$  es  $d = a - \frac{P}{4}$ .
  
5. Para el  $\triangle ABC$ , con  $a = BC$ ,  $b = AC$  y  $c = AB$ , donde  $a = v + w$ ,  $b = u + w$  y  $c = u + v$ :
  - a) Hallar las coordenadas de los puntos extremos de la escintriz en ángulo  $C$ , asociada a la terna pitagórica  $u = 5$ ,  $v = 12$  y  $w = 13$ .
  - b) Comprobar que la escintriz en ángulo  $C$  es perpendicular a la bisectriz del ángulo  $C$ .



6. Hallar las coordenadas de los puntos extremos de las escintrices del  $\triangle ABC$ , de lados  $a = 5$ ,  $b = 7$  y  $c = 6$ .
7. Hallar las coordenadas de los puntos extremos de las escintrices del  $\triangle ABC$ , de lados  $a = 6$ ,  $b = 6$  y  $c = 9$ .
8. Hallar las coordenadas de los puntos extremos de las escintrices del  $\triangle ABC$ , de lados  $a = 11$ ,  $b = 14$  y  $c = 12$ .
9. Para el  $\triangle ABC$  cuyas coordenadas de sus vértices son  $A = (3, 6)$ ,  $B = (1, 1)$  y  $C = (7, 4)$ :
- Hallar las coordenadas cartesianas de los puntos extremos de la escintriz en ángulo  $C$ ,  $\overline{H_1D_1}$ .
  - Comprobar<sup>80</sup> que el área del  $\triangle H_1CD_1$  es igual a  $6u^2$ .
10. Hallar las coordenadas cartesianas de los puntos extremos de las escintrices del  $\triangle ABC$ , cuyas coordenadas de sus vértices son  $A = (0, 6)$ ,  $B = (1, 0)$  y  $C = (7, 3)$ .
11. Para el  $\triangle ABC$  cuyas coordenadas de sus vértices son  $A = (1, 7)$ ,  $B = (3, 1)$  y  $C = (9, 3)$ :
- Hallar las coordenadas cartesianas de los puntos extremos de las escintrices en ángulo  $A$  y en ángulo  $C$ .
  - Comprobar que las escintrices en ángulo  $A$  y en ángulo  $C$  son perpendiculares.
12. Hallar las coordenadas cartesianas de los puntos extremos de las escintrices del  $\triangle ABC$ , cuyas coordenadas de sus vértices son  $A = (3, 6)$ ,  $B = (0, 0)$  y  $C = (5, 1)$ .

<sup>80</sup> Fórmula para el cálculo del área del triángulo en función de los vértices

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} = \frac{(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1) - (x_1y_3 + x_3y_2 + x_2y_1)}{2}$$

## Índice de figuras

1.1. Bisectrices interior y exterior respecto de un vértice de un triángulo . . .	23
1.2. Mediatriz de un lado de un triángulo . . . . .	23
1.3. Mediana de un triángulo . . . . .	24
1.4. Altura de un triángulo . . . . .	24
1.5. Concurrencia de las mediatrices de los lados de un triángulo y circuncentro	25
1.6. Circuncentro de un triángulo y circunferencia circunscrita . . . . .	25
1.7. Concurrencia de las rectas que contienen las alturas de un triángulo y ortocentro . . . . .	26
1.8. Concurrencia de las bisectrices de los ángulos interiores de un triángulo e incentro . . . . .	27
1.9. Incentro de un triángulo y circunferencia inscrita . . . . .	27
1.10. Concurrencia de las medianas de un triángulo y gravicentro . . . . .	29
1.11. División de un triángulo en regiones triangulares de igual área a partir del gravicentro . . . . .	29
1.12. Colinealidad del ortocentro, el gravicentro y el circuncentro de un triángulo	31
1.13. Recta de Euler . . . . .	32
1.14. Razón proporcional en el segmento de Euler . . . . .	33
1.15. Ceviana y punto de Ceva . . . . .	34
1.16. Caso en que el punto de Ceva está al interior de un triángulo . . . . .	35
1.17. Caso en que el punto de Ceva está al exterior de un triángulo . . . . .	36

1.18. Puntos de intersección de las cevianas que contienen las alturas de un triángulo . . . . .	38
1.19. Puntos de intersección de las medianas de un triángulo . . . . .	39
1.20. Puntos de intersección de las bisectrices de un triángulo . . . . .	41
2.1. Coordenadas de un punto notable respecto del vértice $B$ del $\triangle ABC$ y la recta $BC$ . . . . .	48
2.2. Coordenadas de los vértices del $\triangle ABC$ en términos del ángulo base $\theta$	49
2.3. Incentro y radio de la circunferencia inscrita . . . . .	50
2.4. Coordenadas del incentro respecto del vértice $B$ del $\triangle ABC$ y la recta $BC$	50
2.5. Coordenadas del gravicentro respecto del vértice $B$ del $\triangle ABC$ y la recta $BC$ . . . . .	51
2.6. Coordenadas del circuncentro respecto del vértice $B$ del $\triangle ABC$ y la recta $BC$ . . . . .	53
2.7. Coordenadas del ortocentro respecto del vértice $B$ del $\triangle ABC$ y la recta $BC$ . . . . .	54
2.8. Coordenadas cartesianas de los vértices de un triángulo . . . . .	56
2.9. Coordenadas del incentro en un sistema cartesiano . . . . .	57
2.10. Coordenadas del gravicentro en un sistema cartesiano . . . . .	58
2.11. Coordenadas del circuncentro en un sistema cartesiano . . . . .	59
2.12. Coordenadas del ortocentro en un sistema cartesiano . . . . .	60
3.1. Circunferencia de los nueve puntos . . . . .	74
3.2. Relación geométrica entre puntos de la circunferencia de los nueve puntos	75
3.3. Punto medio del segmento de Euler como centro de la circunferencia de los nueve puntos . . . . .	77
3.4. Coordenadas del centro de la circunferencia de los nueve puntos en un sistema cartesiano . . . . .	79

4.1. Punto de Nagel del $\triangle ABC$ . . . . .	89
4.2. Relación homotética entre las circunferencias inscrita y exinscrita respecto de un lado de un triángulo . . . . .	90
4.3. Puntos de tangencia de las circunferencias inscrita y exinscrita respecto del lado de un triángulo . . . . .	91
4.4. Punto medio de un segmento de Nagel de un triángulo . . . . .	93
4.5. Colinealidad y relación métrica entre el punto de Nagel, el gravicentro y el incentro . . . . .	95
4.6. Relación proporcional entre las coordenadas cartesianas de los puntos incentro, gravicentro y de Nagel . . . . .	96
4.7. Coordenadas del punto de Nagel en un sistema cartesiano . . . . .	97
4.8. Punto de Spieker del $\triangle ABC$ . . . . .	98
4.9. Relación homotética entre el incentro de un triángulo y el punto de Spieker de su triángulo medial . . . . .	99
4.10. Relación proporcional entre las coordenadas cartesianas de los puntos incentro, de Spieker y de Nagel . . . . .	100
4.11. Coordenadas del punto de Spieker en un sistema cartesiano . . . . .	101
5.1. Clasificación de los escintores de un triángulo . . . . .	114
5.2. Construcción sintética de un escintor general de un triángulo . . . . .	115
5.3. Escintriz en ángulo $A$ del $\triangle ABC$ . . . . .	117
5.4. Rectas tangentes a una circunferencia desde un punto exterior . . . . .	118
5.5. Cuerdas de una circunferencia, tangentes a otra circunferencia concéntrica interior . . . . .	118
5.6. Producto entre los segmentos de cuerdas secantes en una circunferencia	118
5.7. Construcción sintética de una escintriz general de un triángulo con $c > a > b$ . . . . .	120

5.8. Caso 1 de existencia de escintrices en ángulo $A$ en proceso constructivo sintético . . . . .	122
5.9. Caso 2 de existencia de escintrices en ángulo $A$ en proceso constructivo sintético . . . . .	122
5.10. Caso 3 de existencia de escintrices en ángulo $A$ en proceso constructivo sintético . . . . .	122
5.11. Segmento de Nagel como un vescintor de un triángulo . . . . .	123
5.12. Equivalencia de la longitud entre el punto de corte de un escintor de un triángulo y el punto de extangencia sobre uno de los lados, con la longitud entre el vértice opuesto a ese lado y el otro punto de corte del escintor . . . . .	125
5.13. Segmentos de los lados de un triángulo que pueden contener los puntos extremos de un escintor . . . . .	125
5.14. Relación métrica entre las longitudes de los segmentos generados por un punto de extangencia sobre un lado de un triángulo y el semiperímetro . . . . .	126
5.15. Segmento de Spieker como un mescintor de un triángulo . . . . .	127
5.16. Escintor incentral como escintriz de un triángulo . . . . .	129
6.1. Escintor en ángulo $C$ , $\overline{P_1Q_1}$ . . . . .	133
6.2. Escintor en ángulo $B$ , $\overline{P'_1Q'_1}$ . . . . .	134
6.3. Escintor en ángulo $A$ , $\overline{P''_1Q''_1}$ . . . . .	135
6.4. Escintor en ángulo $C$ , $\overline{P_1Q_1}$ , en un sistema cartesiano . . . . .	137
6.5. Escintor en ángulo $B$ , $\overline{P'_1Q'_1}$ , en un sistema cartesiano . . . . .	139
6.6. Escintor en ángulo $A$ , $\overline{P''_1Q''_1}$ , en un sistema cartesiano . . . . .	141
6.7. Vescintores de un triángulo . . . . .	142
6.8. Vescintores de un triángulo en un sistema cartesiano . . . . .	147
6.9. Mescintores de un triángulo . . . . .	147

6.10. Mescintor en ángulo $C$ , $\overline{M_1K'_1}$ . . . . .	149
6.11. Mescintor en ángulo $C$ , $\overline{M_3K''_3}$ . . . . .	150
6.12. Mescintor en ángulo $A$ , $\overline{M_1K''_1}$ . . . . .	152
6.13. Mescintor en ángulo $A$ , $\overline{M_2K''_2}$ . . . . .	153
6.14. Mescintor en ángulo $B$ , $\overline{M_2K'_2}$ . . . . .	154
6.15. Mescintor en ángulo $B$ , $\overline{M_3K'_3}$ . . . . .	155
6.16. Mescintor en ángulo $C$ , $\overline{M_1K'_1}$ , en un sistema cartesiano . . . . .	156
6.17. Mescintor en ángulo $C$ , $\overline{M_3K''_3}$ , en un sistema cartesiano . . . . .	157
6.18. Mescintor en ángulo $A$ , $\overline{M_1K''_1}$ , en un sistema cartesiano . . . . .	159
6.19. Mescintor en ángulo $A$ , $\overline{M_2K''_2}$ , en un sistema cartesiano . . . . .	160
6.20. Mescintor en ángulo $B$ , $\overline{M_2K'_2}$ , en un sistema cartesiano . . . . .	162
6.21. Mescintor en ángulo $B$ , $\overline{M_3K'_3}$ , en un sistema cartesiano . . . . .	163
6.22. Mescintores de un triángulo en un sistema cartesiano . . . . .	164
7.1. Casos posibles de la existencia de las escintrices de un triángulo . . . . .	178
7.2. Escintriz en ángulo $C$ , $\overline{H_1D_1}$ . . . . .	179
7.3. Escintrices en ángulo $C$ , $\overline{H'_1D'_1}$ y $\overline{H''_1D''_1}$ , conjuntas, con $b \geq c$ , $a \geq c$ y $c \geq \sqrt{8ab} - a - b$ . . . . .	181
7.4. Escintriz en ángulo $C$ , $\overline{H_1D_1} \perp \overline{I_nC}$ . . . . .	182
7.5. Escintrices en ángulo $C$ , $\overline{H'_1D'_1}$ coincidente con $\overline{I_nA}$ , donde $b = c$ . . . . .	182
7.6. Escintriz en ángulo $C$ , $\overline{H''_1D''_1}$ coincidente con $\overline{I_nB}$ , donde $a = c$ . . . . .	183
7.7. Relación entre las áreas del $\triangle ABC$ y del $\triangle H_2D_2A$ . . . . .	183
7.8. Escintriz en ángulo $A$ , $\overline{H_2D_2}$ . . . . .	184

7.9. Escintrices en ángulo $A$ , $\overline{H'_2D'_2}$ y $\overline{H''_2D''_2}$ , conjuntas . . . . .	186
7.10. Escintriz en ángulo $A$ , $\overline{H_2D_2} \perp \overline{I_nA}$ . . . . .	187
7.11. Escintriz en ángulo $A$ , $\overline{H'_2D'_2}$ coincidente con $\overline{I_nC}$ , donde $a = b$ . . . . .	188
7.12. Escintriz en ángulo $A$ , $\overline{H''_2D''_2}$ coincidente con $\overline{I_nB}$ , donde $a = c$ . . . . .	188
7.13. Coordenadas del punto $H_3$ de la escintriz en ángulo $B$ , $\overline{H_3D_3}$ . . . . .	189
7.14. Coordenadas del punto $D_3$ de la escintriz en ángulo $B$ , $\overline{H_3D_3}$ . . . . .	190
7.15. Escintrices en ángulo $B$ , $\overline{H'_3D'_3}$ y $\overline{H''_3D''_3}$ , conjuntas . . . . .	191
7.16. Escintriz en ángulo $B$ , $\overline{H_3D_3} \perp \overline{I_nB}$ . . . . .	192
7.17. Escintriz en ángulo $B$ , $\overline{H'_3D'_3}$ coincidente con $\overline{I_nA}$ , donde $b = c$ . . . . .	193
7.18. Escintriz en ángulo $B$ , $\overline{H''_3D''_3}$ coincidente con $\overline{I_nC}$ , donde $a = b$ . . . . .	193
7.19. Escintriz en ángulo $C$ , $\overline{H_1D_1}$ , en un sistema cartesiano . . . . .	194
7.20. Escintrices en ángulo $C$ , $\overline{H'_1D'_1}$ y $\overline{H''_1D''_1}$ en un sistema cartesiano . . . . .	196
7.21. Escintriz en ángulo $A$ , $\overline{H_2D_2}$ , en un sistema cartesiano . . . . .	197
7.22. Escintrices en ángulo $A$ , $\overline{H'_2D'_2}$ y $\overline{H''_2D''_2}$ en un sistema cartesiano . . . . .	199
7.23. Escintriz en ángulo $B$ , $\overline{H_3D_3}$ , en un sistema cartesiano . . . . .	200
7.24. Escintrices en ángulo $B$ , $\overline{H'_3D'_3}$ y $\overline{H''_3D''_3}$ en un sistema cartesiano . . . . .	202
7.25. Escintrices en ángulo $C$ ( $\overline{H'_1D'_1}$ y $\overline{H''_1D''_1}$ ) y en ángulo $B$ ( $\overline{H'_3D'_3}$ ), conjuntas, para la relación entre los lados $a > b > c$ , con $c > \sqrt{8ab} - a - b$ . Caso particular $a = 8.5$ , $b = 8$ y $c = 7$ . . . . .	204
7.26. Escintrices en ángulo $C$ ( $\overline{H'_1D'_1}$ coincidente con $\overline{H''_1D''_1}$ , normales a la bisectriz del ángulo $C$ ) y en ángulo $B$ ( $\overline{H'_3D'_3}$ ), conjuntas, para la relación entre los lados $a > b > c$ , con $c = \sqrt{8ab} - a - b$ . Caso particular $a = 9$ , $b = 8$ y $c = 7$ . . . . .	204
7.27. Escintriz en ángulo $B$ ( $\overline{H''_3D''_3}$ ), para la relación entre los lados $a > b > c$ , con $c < \sqrt{8ab} - a - b$ . Caso particular $a = 10$ , $b = 8$ y $c = 7$ . . . . .	204

7.28. Escintrices en ángulo  $C$  ( $\overline{H_1'D_1'}$  y  $\overline{H_1''D_1''}$ ) y como mediana respecto del lado  $c$  ( $\overline{H_3''D_3''}$  coincidente con  $\overline{H_2'D_2'}$ ), conjuntas, para la relación entre los lados  $a = b > c$ , con  $c > 2(\sqrt{2} - 1)a$ .  
Caso particular  $a = 8, b = 8$  y  $c = 7$  . . . . . 205

7.29. Escintrices en ángulo  $C$  ( $\overline{H_1'D_1'}$  coincidente con  $\overline{H_1''D_1''}$ , normales a la bisectriz del ángulo  $C$ ) y como medianas respecto del lado  $c$  ( $\overline{H_3''D_3''}$  coincidente con  $\overline{H_2'D_2'}$ ), conjuntas, para la relación entre los lados  $a = b > c$ , con  $c = 2(\sqrt{2} - 1)a$ .  
Caso particular  $a = 8, b = 8$  y  $c = 16(\sqrt{2} - 1)$  . . . . . 205

7.30. Escintrices como medianas respecto del lado  $c$  ( $\overline{H_3''D_3''}$  coincidente con  $\overline{H_2'D_2'}$ ), conjuntas, para la relación entre los lados  $a = b > c$ , con  $c < 2(\sqrt{2} - 1)a$ . Caso particular  $a = 8, b = 8$  y  $c = 6$  . . . . . 205

7.31. Escintrices en ángulo  $C$  ( $\overline{H_1''D_1''}$ ), en ángulo  $B$  ( $\overline{H_3''D_3''}$ ) y como mediana respecto del lado  $a$  ( $\overline{H_1'D_1'}$  coincidente con  $\overline{H_3'D_3'}$ ), conjuntas, para la relación entre los lados  $a > b = c$ , con  $c > a/2$ .  
Caso particular  $a = 8, b = 6$  y  $c = 6$  . . . . . 206

7.32. Escintrices como medianas respecto del lado  $a$  ( $\overline{H_1'D_1'}$  coincidente con  $\overline{H_3'D_3'}$ ), del lado  $b$  ( $\overline{H_1''D_1''}$  coincidente con  $\overline{H_2''D_2''}$ ) y del lado  $c$  ( $\overline{H_3''D_3''}$  coincidente con  $\overline{H_2'D_2'}$ ), conjuntas, para la relación entre los lados  $a = b = c$ . Caso particular  $a = 8, b = 8$  y  $c = 8$  . . . . . 206

7.33. Escintriz en ángulo  $C$ ,  $\overline{H_1'D_1'}$  coincidente con  $\overline{H_1''D_1''}$ , perpendicular a la bisectriz del ángulo  $C$ , donde  $a = b > c$  y  $c = 2(\sqrt{2} - 1)a$ , para el cual  $\angle C = 2\arcsen(\sqrt{2} - 1) \approx 48^\circ 56' 23''$  . . . . . 208

7.34. Escintriz del triángulo rectángulo  $ABC$  en ángulo  $A$ ,  $\overline{H_2'D_2'}$  coincidente con  $\overline{H_2''D_2''}$ , perpendicular a la bisectriz interior del ángulo  $A$ , donde  $\angle A \approx 43,2674^\circ$  . . . . . 209



## Índice de tablas

2.1.	Fórmulas para obtener las coordenadas de los puntos notables de un triángulo en términos de la longitud de los lados . . . . .	65
2.2.	Fórmulas para el cálculo de la distancia entre puntos notables de un triángulo en términos de la longitud de los lados . . . . .	66
2.3.	Fórmulas para obtener las coordenadas de los puntos notables de un triángulo en términos de las coordenadas cartesianas de los vértices . .	67
3.1.	Fórmulas para obtener las coordenadas del centro de la circunferencia de los nueve puntos respecto de un triángulo y la determinación de su radio	80
4.1.	Fórmulas para obtener las coordenadas de los puntos de Nagel y de Spieker en términos de la longitud de los lados y de las coordenadas cartesianas de los vértices de un triángulo . . . . .	102
6.1.	Fórmulas para obtener las coordenadas de los puntos extremos de los escintores de un triángulo en términos de la distancia desde uno de ellos a un vértice de referencia y la longitud de los lados . . . . .	165
6.2.	Fórmulas para obtener las coordenadas de los puntos extremos de los escintores de un triángulo en términos de la distancia desde uno de ellos a un vértice de referencia y las coordenadas cartesianas de los vértices .	166
6.3.	Fórmulas para obtener las coordenadas de los puntos extremos de los vescintores de un triángulo en términos de la longitud de los lados . . .	167
6.4.	Fórmulas para obtener las coordenadas de los puntos extremos de los vescintores de un triángulo en términos de las coordenadas cartesianas de los vértices . . . . .	168
6.5.	Fórmulas para obtener las coordenadas de los puntos extremos de los mescintores de un triángulo en términos de la longitud de los lados . .	169
6.6.	Fórmulas para obtener las coordenadas de los puntos extremos de los mescintores de un triángulo en términos de las coordenadas cartesianas de los vértices . . . . .	170

7.1. Condiciones para la existencia de las escintrices de un triángulo, de acuerdo con la longitud de los lados. . . . .	203
7.2. Cantidad de escintrices existentes en un triángulo de acuerdo con la longitud de los lados. . . . .	203
7.3. Fórmulas para obtener las coordenadas de los puntos extremos de las escintrices de un triángulo en términos de la longitud de los lados . . .	210
7.4. Fórmulas para obtener las coordenadas de los puntos extremos de las escintrices de un triángulo en términos de las coordenadas cartesianas de los vértices . . . . .	211

## Bibliografía

- Abrate, R. S.; Delgado, G. I.; Pochulu, M. D. (2006). Caracterización de las actividades de geometría que proponen los textos de matemática. *Revista Iberoamericana de Educación*, v. 39, n. 1, 1-9. <https://rieoei.org/RIE/article/view/2598>.
- Acosta Gempeler, M. E.; Fiallo Leal, J. E (2017). *Enseñando geometría con tecnología digital: una propuesta desde la Teoría de las Situaciones Didácticas*. Universidad Distrital Francisco José de Caldas.
- Álvarez, M. (2014). *Relación entre geometría sintética y analítica y TIC: análisis matemático - didáctico de una actividad*. [Tesis de especialización, Universidad Nacional de General Sarmiento]. RIDAA-UNGS. [Tesis UNGS de Acceso Público - Didáctica de las Ciencias - UNGS](#).
- Álvarez C., E. (2003). *Elementos de Geometría con numerosos ejercicios y geometría del compás*. Universidad de Medellín.
- Avishalom, D. (1963). The Perimetric Bisection of Triangles. *Mathematics Magazine*, v. 36, n. 1, 60-62. <https://doi.org/10.2307/2688140>.
- Barroso, R. (2016). Laboratorio virtual de triángulos con Cabri. [Laboratorio virtual](#).
- Bellot, F. (2005). Triángulos especiales (3). *Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática*, v. 19.
- Berele, A.; Catoiu, S. (2016). Area and Perimeter Bisecting Lines of a Triangle. *The College Mathematics Journal*, v. 47, n. 1, 19-28. <https://doi.org/10.4169/college.math.j.47.1.19>.
- Berele, A.; Catoiu, S. (2018a). Bisecting the Perimeter of a Triangle. *Mathematics Magazine*, v. 91, n. 2, 121-133. <https://doi.org/10.1080/0025570X.2017.1418589>.
- Berele, A.; Catoiu, S. (2018b). The Centroid as a Nontrivial Area Bisecting Center of a Triangle. *The College Mathematics Journal*, v. 49, n. 1, 27-34. <https://doi.org/10.1080/07468342.2017.1395659>.
- Berzsenyi, G. (1997). The Equalizer of Triangle. A Clever Line that does Double Duty. *Quantum: The Magazine of Math and Science*, v. 7, n. 4, 51. [Quantum: The Magazine of Math and Science | NSTA](#).
- Cárdenas, S. (2004). El punto de Fermat. *Miscelánea Matemática*, n. 40, 77-85. [Miscelanea Matematica](#).

- Castro, J. J. (2010). *Geometría en olimpiadas de matemáticas*. Universidad Autónoma de Guerrero.
- De Oteyza, E.; Lam, E.; Hernández, C.; Carrillo, A.; Ramírez, A. (2001). *Geometría analítica y trigonometría*. Pearson.
- De Oteyza, E.; Lam, E.; Hernández, C.; Carrillo, A.; Ramírez, A. (2011). *Geometría analítica*. (3<sup>ra</sup> edición). Pearson.
- Dunn, J.; Pretty, J. (1972). Halving a triangle. *The Mathematical Gazette*, v. 56, n. 396, 105-108. <https://doi.org/10.2307/3615256>.
- García Capitán, F. J. (2002). *Un problema difícil*.
- García Mangas, M. T. (2011). *La geometría dinámica como herramienta didáctica para el dibujo*. [Tesis de maestría, Universidad de Cantabria]. Instituto Geogebra de Cantabria. [Microsoft Word - TFM\\_M.TERESA GARCIA MANGAS \(geogebra.es\)](https://www.geogebra.org/m/TFM_M.TERESA_GARCIA_MANGAS).
- Gascón, J. (2002). Geometría sintética en la ESO y analítica en el bachillerato. ¿Dos mundos completamente separados? *Suma*, v. 39, 13-26. [SUMA\\_39.pdf](https://www.geogebra.org/m/SUMA_39.pdf).
- Honsberger, R. (1995). *Episodes in Nineteenth and Twentieth Century Euclidean Geometry*. (3<sup>rd</sup> edición). The Mathematical Association of America. <https://doi.org/10.5948/UPO9780883859513>.
- Hueso Pagoaga, J. L. (2011). *Puntos notables del triángulo*. <http://hdl.handle.net/10251/9293>.
- Kodokostas, D. (2010). Triangle Equalizers. *Mathematics Magazine*, v. 83, n. 2, 141-146. <https://doi.org/10.4169/002557010X482916>.
- Kondratieva, M. (2013). Geometrical Constructions in Dynamic and Interactive Mathematics Learning Environment. *Mevlana International Journal of Education (MIJE)*, v. 3, n. 3, 50-63. <http://dx.doi.org/10.13054/mije.si.2013.06>.
- Kung, S. H. (2002). Proof Without Words: A Line through the Incenter of a Triangle. *Mathematics Magazine*, v. 75, n. 3, 214. <https://doi.org/10.1080/0025570X.2002.11953131>.
- Londoño, J. (2005). *Geometría Euclidiana*. Universidad de Antioquia.
- Marques, R. (2008). *Cleavers and Splitters*. 2007/2008.
- Montesdeoca, A. (2017). *Geometría métrica y proyectiva en el plano con coordenadas baricéntricas*. *Ejercicios*. [TriangulosCabri \(Ricardo Barroso\) \(ull.es\)](https://www.geogebra.org/m/TriangulosCabri).
- Ντριζος Δ.; Ριζος Γ. (2014). Το πρόβλημα των Εξισωτων Τριγωνου: πληρης μελετη για καθε ειδος τριγωνου. *EYKΛEΙΔHΣ*, v. 81, 1-20. [problhma\\_eksisoton.pdf](https://www.geogebra.org/m/problhma_eksisoton.pdf).

- 
- Ortiz Alzate, H. D. (2010). *Determinación de los puntos notables de un triángulo en términos de sus lados*. 3150777429 (ning.com).
- Ortiz Alzate, H. D. (2013a). Determinación de los puntos notables de un triángulo y la recta de Euler a partir del conocimiento de la longitud de los lados. En J. Cardeno Espinosa; F. J. Córdoba Gómez (compiladores). *Innovación en la Enseñanza de las matemáticas: uso de GeoGebra*, pp. 154-171. Fondo Editorial ITM. <https://doi.org/10.22430/9789588743455>.
- Ortiz Alzate, H. D. (2013b). Uso de GeoGebra para la determinación de los puntos notables respecto de un triángulo, a partir del conocimiento de sus lados. En F. J. Córdoba Gómez; J. Cardeno Espinosa (compiladores). *Desarrollo y uso didáctico de GeoGebra*, pp. 164-176. Fondo Editorial ITM. <https://doi.org/10.22430/9789588743301>.
- Ortiz Alzate, H. D. (2016). Escintores del triángulo y su relación con algunos puntos notables. En J. A. Rúa Vásquez (director). *VIII Congreso Internacional de Formación y Modelación de Ciencias Básicas*, p. 43. Universidad de Medellín, Medellín. Ponencia PEM053.
- Ortiz Alzate, H. D. (2018). Determinación de los escintores del triángulo y su relación con algunos puntos notables. En F. J. Córdoba Gómez; L. A. Ciro López; J. C. Molina García (compiladores). *Avances en la integración de tecnologías para la innovación en educación. Congreso Latinoamericano de GeoGebra 2016*, pp. 244-247. Universidad La Gran Colombia, Bogotá D.C. [geogebra\\_2016.pdf](#) (ugc.edu.co).
- Rangel-Mondragón, J. (2013a). *Bisecting a Triangle*. [Bisecting a Triangle - Wolfram Demonstrations Project](#).
- Rangel-Mondragón, J. (2013b). *Bisecting the Area and Perimeter of a Triangle*. [Bisecting the Area and Perimeter of a Triangle - Wolfram Demonstrations Project](#).
- Sánchez, A. R. (2008). Nuevos puntos y rectas notables de un triángulo. En L. Vásquez, *Memorias XVIII Encuentro de Geometría y VI Encuentro de Aritmética. Junio 2007*, pp. 397-403. Bogotá. <http://funes.uniandes.edu.co/5685/1/S%C3%A1nchezNuevosGeometr%C3%ADa2008.PDF>.
- Sfikas, I. (2014). Equalizers in Right Triangles. *Global Journal of Advanced Research on Classical and Modern Geometries*, v. 3, n. 1, 38-43. [Paper7.pdf](#) (geometry-math-journal.ro).
- Shawyer, B. (2010). *Explorations in Geometry*. World Scientific. <https://doi.org/10.1142/7654>.
- Shirali, S. (2014). Equalizers of a Triangle. *At Right Angles*, v. 3, n. 2, 14-17. [At-Right-Angles-Vol-3-No-2-july-2014.pdf](#) (azimpremjiuniversity.edu.in).
- Smith, D. E. (1929). *A Source Book in Mathematics*. Mc Graw Hill.

- Therán Palacio, E. y Falcón Dorado, F. (2006). *Exploración de algunos conceptos no convencionales del triángulo con Cabri..* En VIII Congreso colombiano de Informática Educativa. Universidad ICESI.
- Todd, A. (1999). Bisecting a Triangle. *Pi Mu Epsilon*, v. 11, n. 1, 31-37. <http://www.jstor.org/stable/24340489>.
- Une réunion de professeurs. (1949). *Cours de géométrie*. Paris.
- University of Regina. (2016). *Problem of the Month. Solution for April 2012. Solution for April 2012 - Math Central (uregina.ca)*.
- Vardi, I. (2005). Mekh-Mat Entrance Examinations Problems. In M. Shifman (editor), *You failed your math test, Comrade Einstein*, pp. 50-51. World Scientific.
- Vásquez, A. (2002). *Geometría analítica*. Thomsom Learning.
- Velasco, G. (1983). *Tratado de geometría*. Limusa.
- Vershik, A.; Shen, A. (1994). Opinion. *The Mathematical Intelligencer*, v. 16, n. 4, 6-10. <https://doi.org/10.1007/BF03024695>.
- Xambó, S. (2000). *Geometría*. Alfaomega.
- Yiu, P. (2016). Lines Simultaneously Bisecting the Perimeter and Area of a Triangle. *Global Journal of Advanced Research on Classical and Modern Geometries*, v. 5, n. 1, 7-14. [YIU2015areaperimeterbisectorsRevised1114.dvi \(geometry-math-journal.ro\)](https://www.geometry-math-journal.ro).

## Bibliografía recomendada

Berele, A.; Catoiu, S. (2017). The Perimeter Sixpartite Center of a Triangle. *Journal of Geometry*, v. 108, n. 3, 861-868. <https://doi.org/10.1007/s00022-017-0380-4>

Eberhart, C. (2016). *Revisiting the Quadrisection Problem of Jacob Bernoulli*. <https://arxiv.org/pdf/1611.06658>

Liébana Rísquez, E. Ramírez Uclés, R.; Moreno Verdejo, A. (2018). Identificación de otros puntos notables de un triángulo a partir de la resolución de problemas. *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, v. 23, n. 3, 589-607. [abrir.php \(rsme.es\)](http://rsme.es)

Whitty, R. (2021). *Bisecting a Triangle in a Given Direction*. <https://arxiv.org/abs/2101.07657>

## Glosario

<b>Ángulo base</b>	Ángulo formado por los lados de un triángulo que parten de un vértice que se toma como punto de referencia. (48)
<b>Altura</b>	Segmento de recta que va desde un vértice de un triángulo hasta el lado opuesto o su prolongación y es perpendicular a este. (24)
<b>Baricentro</b>	Gravicentro. (29)
<b>Bisectriz</b>	Recta que divide a un ángulo dado en otros dos, congruentes entre sí. (23)
<b>Centroide</b>	Gravicentro. (29)
<b>Ceviana</b>	Recta que partiendo de un vértice de un triángulo corta al lado opuesto o su prolongación en un punto distinto a los otros vértices. (34)
<b>Ceviana de Nagel</b>	Recta que une un vértice de un triángulo con el punto de extangencia del lado opuesto. (89)
<b>Circuncentro</b>	Punto donde concurren las mediatrices de un triángulo. (25)
<b>Circunferencia circunscrita</b>	Circunferencia que pasa por los vértices de un triángulo. (25)
<b>Circunferencia de Feuerbach</b>	Circunferencia de los nueve puntos (denominación dada por los geómetras alemanes). (74)
<b>Circunferencia de los nueve puntos</b>	Circunferencia que pasa por los puntos medios de los lados de un triángulo cualquiera, por los pies de las alturas respecto de sus lados y por los puntos medios de los segmentos que unen el ortocentro con los vértices. (74)
<b>Circunferencia exinscrita</b>	Circunferencia exterior a un triángulo, tangente a uno de sus lados y a la prolongación de los otros dos. (90)
<b>Circunferencia inscrita</b>	Circunferencia interior de un triángulo que es tangente a sus tres lados. (28)



---

<b>Cleaver</b>	Mescintor. (114)
<b>Círculo de Euler</b>	Circunferencia de los nueve puntos (denominación dada por los geómetras franceses). (74)
<b>Equalizer</b>	Escintriz. (114)
<b>Escintor</b>	Segmento de recta inscrito en un triángulo que divide el perímetro del mismo en dos partes iguales. (114)
<b>Escintor en ángulo <math>\gamma</math></b>	Escintor cuyos puntos extremos hacen parte de los lados que forman el ángulo $\gamma$ . (115)
<b>Escintriz</b>	Escintor que divide a un triángulo en dos regiones poligonales de igual área. (114)
<b>Escintriz en ángulo <math>\gamma</math></b>	Escintriz cuyos puntos extremos hacen parte de los lados que forman el ángulo $\gamma$ . (116)
<b>Geometría analítica</b>	Geometría en la cual se hace uso de sistemas coordenados y fórmulas. (17)
<b>Geometría dinámica</b>	Geometría en la cual se hace uso de herramientas digitales que permiten la visualización de objetos geométricos y sus transformaciones en tiempo real. (18)
<b>Geometría sintética</b>	Geometría en la cual se hace uso de regla y compás, sin referencia a sistemas coordenados y fórmulas. (17)
<b>Gravicentro</b>	Punto donde concurren las medianas de un triángulo. (29)
<b>Homotecia</b>	Transformación geométrica en la cual, dado un punto $O$ , denominado centro de homotecia, y una razón $k \neq 0$ , denominada razón de homotecia, se hace corresponder a un punto $A$ con otro punto $A'$ , denominado punto homotético, tal que $OA' = k \cdot OA$ . Se representa $H(O, k)$ . (77)
<b>Incentro</b>	Punto donde concurren las bisectrices de un triángulo. (28)
<b>Mediana</b>	Segmento de recta que une un vértice de un triángulo con el punto medio del lado opuesto. (24)
<b>Mediatriz</b>	Recta que pasa por el punto medio de un segmento y es perpendicular a este. (23)

<b>Mescintor</b>	Escintor que tiene como uno de sus puntos extremos el punto medio de un lado de un triángulo. (114)
<b>Ortocentro</b>	Punto donde concurren las alturas de un triángulo. (26)
<b>Punto de Ceva</b>	Punto donde concurren las cevianas de un triángulo. (34)
<b>Punto de extangencia</b>	Punto de tangencia entre los lados de un triángulo y las circunferencias exinscritas (círculos exinscritos). (89)
<b>Punto de Fermat</b>	Punto donde concurren las circunferencias circunscritas de los triángulos equiláteros construidos exteriormente sobre los tres lados de un triángulo dado. (45)
<b>Punto de Feuerbach</b>	Punto de tangencia entre la circunferencia inscrita de un triángulo y la circunferencia de los nueve puntos. (81)
<b>Punto de Nagel</b>	Incentro de un triángulo antimedial. Punto donde concurren los segmentos de Nagel. (89)
<b>Punto de Spieker</b>	Incentro de un triángulo medial. Punto donde concurren los segmentos de Spieker. (98)
<b>QED</b>	Quod erat demonstrandum. Es una locución latina que significa 'lo que se quería demostrar'. (25)
<b>Recta de Euler</b>	Recta que une el ortocentro, el gravicentro y el circuncentro. (32)
<b>Segmento de Euler</b>	Segmento de la recta de Euler comprendida entre el circuncentro y el ortocentro de un triángulo. (32)
<b>Segmento de Nagel</b>	Segmento de recta que une un vértice de un triángulo con el punto de extangencia del lado opuesto. Forma parte de la ceviana de Nagel. (89)
<b>Segmento de Spieker</b>	Segmento de recta que va desde el punto medio de uno de los lados de un triángulo hasta su lado opuesto, pasando por el punto de Spieker. (98)
<b>Splitter</b>	Vescintor. (114)
<b>Triángulo antimedial</b>	Triángulo formado por las rectas trazadas por cada uno de los vértices de un triángulo dado, paralelas a los lados opuestos. (89)

<b>Triángulo de Nagel</b>	Triángulo inscrito formado por la unión de los puntos de extangencia de un triángulo dado. (89)
<b>Triángulo medial</b>	Triángulo formado por la unión de los puntos medios de un triángulo dado. (98)
<b>Triángulo pedal</b>	Triángulo formado al unir los pies de las perpendiculares trazadas desde un punto interior de un triángulo dado hasta cada uno de sus lados. (45)
<b>Triángulo órtico</b>	Triángulo formado al unir los pies de las alturas de un triángulo no rectángulo dado. (43)
<b>Vescintor</b>	Escintor que tiene como uno de sus puntos extremos a un vértice de un triángulo.(114)

# Hernán Darío Ortiz Alzate

herdaror@hotmail.com

Ingeniero Geólogo de la Universidad Nacional de Colombia, Especialista en la Enseñanza de las Matemáticas de la Universidad de Antioquia. Docente de educación secundaria adscrito a la Secretaría de Educación de Medellín. Desarrollador de Objetos de Aprendizaje Interactivos mediante el software DescartesJS. Miembro de la Red Educativa Digital Descartes Colombia, COLDESCARTES, y del grupo ELIME-ADIDA.

*Geological Engineer from Universidad Nacional de Colombia, Educational Specialist in Mathematics Education from Universidad de Antioquia. High school teacher in the public sector. Developer of Interactive Learning Objects through DescartesJS software. Member of the Digital Educational Network Descartes Colombia, COLDESCARTES, and the ELIME-ADIDA group.*



***Naturae***

Ciencias Naturales

Fuentes tipográficas: LaTeX roman para texto corrido en 12 puntos, para títulos en LaTeX roman en 14 puntos y subtítulos en LaTeX roman en 12 puntos.

Este texto trata del desarrollo de fórmulas algebraicas que permiten localizar directamente las coordenadas de algunos puntos notables de un triángulo, como el incentro, el gravicentro, el ortocentro, el circuncentro, el punto de Nagel y el punto de Spieker, en función de la longitud de sus lados o de las coordenadas cartesianas de sus vértices. De igual manera, se refiere al desarrollo de las fórmulas algebraicas que permiten ubicar directamente las coordenadas de los puntos extremos de los escintores de un triángulo, a saber, mescintor (cleaver), vescintor (splitter) y escintriz (equalizer), en términos de la longitud de sus lados o de las coordenadas cartesianas de sus vértices. Este es un texto divulgativo, dirigido a docentes de Matemáticas, con el cual se procura una transición del simple trato sintético de los puntos y las rectas notables respecto de un triángulo, hacia su tratamiento analítico. Adicionalmente, pretende motivar la inclusión del tema de escintores como parte de la geometría escolar.

*In this text we develop algebraic formulas that allow us to directly find the coordinates of some notable points of a triangle, such as the incenter, barycenter, orthocenter, circumcenter, Nagel's point and Spieker's point, according to the length of their sides or the Cartesian coordinates of their vertices. It also refers to the development of algebraic formulas that allow to directly find the coordinates of the extreme points of triangle splitters, namely cleaver, splitter and equalizer, according to the length of their sides or the Cartesian coordinates of their vertices. Aimed at Mathematics teachers, this informative text seeks a transition from the simple synthetic treatment of remarkable points and lines, relative to a triangle, to its analytical treatment. Additionally, it intends to include the topic of splitters as part of school geometry.*