XXII Evento Internacional
"La Matemática, la Estadística y la Computación: enseñanza y aplicaciones"
MATECOMPU 2021
Del 16 al 18 de noviembre de 2021

# Más allá de los avances en las TIC, el papel del diálogo en la enseñanza de la Matemática


Dr. Cs. Paul Antonio Torres Fernández
Profesor e Investigador Titular. ICCP. Cuba


La Habana, 5 de noviembre de 2021

# Introducción

- En décadas recientes, lo **avances de las TIC** han favorecido notablemente la calidad de la enseñanza, incluyendo la de la Matemática.
  - No hay discusión; *Cabri*, *Geogebra*, *Matlab*, etc. dan fe de ello.
  - Más recientemente, el prolongado distanciamiento social generado por la pandemia de la Covid-19 ha fortalecido la creencia de que las TIC –ahora redimensionadas con las *redes sociales*– pueden suplir definitivamente al docente.

- Es momento de reflexionar críticamente sobre esa precipitada creencia y **sopesar el papel de la actuación del profesor** en las clases de Matemática.

Dr. Cs. Paul A. Torres Fernández orcid.org/0000-0002-7862-2737

# Introducción

- No debiera olvidarse que en la historia de la enseñanza de la Matemática ya se han vivido otras experiencias similares, de **prometedores '*recursos milagrosos*'**, que después tuvieron que ser declinados ante la evidencia (empírica y/o científica) de la 'tozuda' *práctica escolar*.

  - Posiblemente, el hecho más renombrado sea el del Movimiento de la '*Matemática Moderna*', de los años ´60 del pasado siglo en los EEUU y Europa, bajo el influjo del efecto competitivo del *Sputnik I*.

  - Así, las promesas del '*Grupo Bourbaki*' y de sus colineados colegas de Inglaterra y Estados Unidos (Kilpatrick *et al.*, 1994), se vieron truncadas por las evidencias reveladas en el texto: '*El fracaso de la Matemática Moderna. ¿Por qué Juanito no sabe sumar?*' (Kline, 1981).

Dr. Cs. Paul A. Torres Fernández orcid.org/0000-0002-7862-2737

# Introducción

- En esta conferencia defenderemos una **Tesis** diametralmente opuesta a esa tendencia: ***'El profesor de Matemática, con su experticia, su arte, su capacidad de instruir y de formar eficazmente, es insustituible; más aún, es cada día más necesario e importante, aún con las TIC'.***
  - Para desplegar el discurso argumentativo que la sustentará, comenzaremos con un breve recorrido por la historia de la Enseñanza de la Matemática, a manera de '*estado del arte*'.
  - Posteriormente, revelaremos las razones epistemológicas, pedagógicas y didácticas que sostienen esta posición.

Dr. Cs. Paul A. Torres Fernández orcid.org/0000-0002-7862-2737

# Desarrollo

- La **historia de la '*enseñanza de la Matemática*'** es, posiblemente, tan antigua como la Matemática misma.
  - En la *mayéutica* de Sócrates (470-399 a.n.e) hay ya una clara utilización de las nociones matemáticas para resaltar el papel del razonamiento lógico; especialmente, en el diálogo "Menón o la virtud" (Varona *et al.*, 1904), donde razona con un joven esclavo de Menón la relación de los lados duplicados de un cuadrado y la nueva área de la superficie así obtenida.
  - Es conocido también que Arquímedes describió en una carta a su amigo Eratóstenes las estrategias heurísticas de resolución de problemas matemáticos, que él denominó 'el método', y obtuvo diversas fórmulas geométricas (como el volumen de la esfera, de un elipsoide de revolución y de una sección de paraboloide de revolución) por analogía con su conocida ley mecánica de la palanca (Cantoral, 1988).

Dr. Cs. Paul A. Torres Fernández orcid.org/0000-0002-7862-2737

# Desarrollo

- Pero no fue hasta la aparición de los sistemas nacionales de educación que puede admitirse la expresión en un sentido didáctico.

- Llegado a este punto, pueden identificarse tres **fuentes** diferentes de *enfoques didácticos de la Matemática* escolar:
    - Los **psicólogos del aprendizaje** (J. Piaget, D. P. Ausubel, J. Dewey, etc.)
    - Los propios **matemáticos de profesión** (F. Klein, G. Polya, *N. Bourbaki*, etc.)
    - Los emergentes **educadores matemáticos** (A. Schoenfeld, W. Walsch & K. Weber, Y. Chevallard & G. Brousseau, M. De Guzmán, etc.)

Dr. Cs. Paul A. Torres Fernández orcid.org/0000-0002-7862-2737

# Desarrollo

- Desde cada una de esas ‘*fuentes*’ se han generado disímiles **propuestas didácticas de ‘*enseñanza de la Matemática*’** (Torres *et al.*, 1998), entre los que destacan:
  - Los psicólogos del aprendizaje: la *Pedagogía Operatoria* (o *Constructivismo*), el *Aprendizaje por descubrimiento*, etc.
  - Los matemáticos de profesión: la *Enseñanza por Problemas*, la *Enseñanza por Supercalculadoras*, la *Comunicación Matemática*, etc.
  - Los educadores matemáticos: el *Aprendizaje vivencial*, la *Ethomatemática* y la *Ingeniería Didáctica*.

- ¿Y qué tienen en común todas ellas?... Pues, buscar el ***protagonismo de los educandos*** durante el aprendizaje **y** el ***desarrollo de su pensamiento lógico***.

Dr. Cs. Paul A. Torres Fernández orcid.org/0000-0002-7862-2737

# Desarrollo

- Es lamentable el **desconocimiento de G. Polya como precursor de una Didáctica de la Matemática** con esas características.
  - Consciente de la elevadas exigencias que plantea la enseñanza de la Matemática, y tras analizar detenidamente las barreras que dificultaban su aprendizaje entre sus estudiantes, G. Polya (1887-1985) desplegó un grupo de herramientas para el 'descubrimiento' de los nuevos conocimientos matemáticos, que denominó ***procedimientos heurísticos*** (1944).
  - Antes, Polya estudió cómo muchos matemáticos habían empleado esos recursos en la obtención de sus *hallazgos*, como sucedió con: Pappus (300-?), Euclides (365-300 a.n.e.), Apolonio (262-190 a.n.e.), Arquímedes (287-212 a.n.e.), R. Descartes (1596-1650), W. Leibniz (1646-1716), B. Bolzano (1781-1848), Kepler (1571-1630), L. Euler (1707-1783) y P. S. Laplace (1749-1827).
  - Ello le permitió arribar a una conclusión importante: '***Las Matemáticas** presentan dos caras: por una lado **son la ciencia rigurosa de Euclides**, **pero también son algo más.** Las matemáticas presentadas a la manera euclidiana aparecen como una ciencia sistemática, deductiva; pero **las matemáticas en vía de formación aparecen como una ciencia experimental, inductiva***" (Polya, 1986, p.3). **Aprovechar esa dualidad es la clave de su propuesta.**

Dr. Cs. Paul A. Torres Fernández orcid.org/0000-0002-7862-2737

# Desarrollo

- Las ideas de G. Polya han sido posteriormente enriquecidas por otros didactas de la Matemática, entre los que destacan:
  - En Alemania: W. Jungk, W. Zillmer, K. Ron y H. Müller.
  - En España: M. De Guzmán y S. Fernández.
  - En México: R. Cantoral y L.M. Santos Trigo.
  - En los EEUU: A. Schoenfeld.
  - En Cuba: D. M. Escalona, R. Albo, y **S. Hernández Montes de Oca**.

- A partir de esta última se habla de ***instrucción heurística***, como:

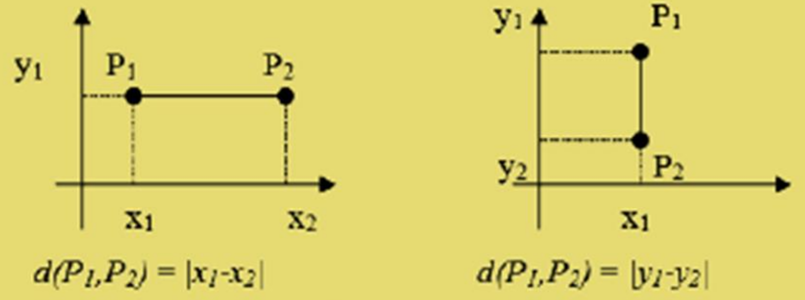
"(…) *la enseñanza consciente y planificada de reglas generales y especiales de la heurística para la solución de problemas, para lo cual es necesario que, cuando se declaren por primera vez las mismas explícitamente, se destaquen de un modo claro y firme, y se recalque su importancia en clases posteriores hasta que los alumnos las aprendan y utilicen independientemente de manera generalizada, por lo que debe ejercitarse su uso en numerosas y variadas tareas*" (Torres, 2013).

Dr. Cs. Paul A. Torres Fernández orcid.org/0000-0002-7862-2737

# Desarrollo

- Veamos las complejidades profesionales de una actuación como esa a través de un **ejemplo:**
  - Obtención de la **fórmula de distancia entre dos puntos** a través de una *conversación heurística* (Torres, 2011).
    - Como parte del ***Aseguramiento del nivel de partida***, deben repasarse las fórmulas de *distancia entre dos puntos* ($P_1$ y $P_2$), cuando el segmento que determinan es paralelo al eje de las abscisas (x) o al de las ordenadas (y); consisten en la diferencia de las abscisas de los puntos dados ($x_1$-$x_2$) o de sus ordenadas ($y_1$-$y_2$).

**Figura 3.** Representación de los casos especiales de distancia entre $P_1$ y $P_2$.



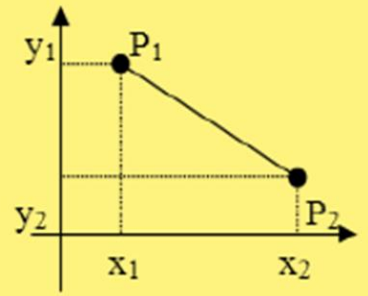

**Fuente:** Elaboración propia.

Dr. Cs. Paul A. Torres Fernández orcid.org/0000-0002-7862-2737

# Desarrollo

- Veamos las complejidades profesionales de una actuación como esa a través de un **ejemplo:**
  - Obtención de la **fórmula de distancia entre dos puntos** a través de una *conversación heurística* (Torres, 2011).
    - Para desarrollar la ***Motivación*** el docente puede acudir al hecho de que es muy poco frecuente que los puntos $P_1$ y $P_2$ queden dispuestos de una forma tan peculiar. Lo más común es que el segmento que determinan no sea paralelo a uno de los ejes de coordenadas.

**Figura 4.** Representación del caso general de distancia entre $P_1$ y $P_2$.




**Fuente:** Elaboración propia.

    - La *contradicción* puede acentuarse si se les recuerda que si ese segmento existe, tiene una medida de longitud; es decir, es medible, y si es medible existe una expresión algebraica que permite determinar con precisión su longitud.

Dr. Cs. Paul A. Torres Fernández orcid.org/0000-0002-7862-2737

# Desarrollo

- Veamos las complejidades profesionales de una actuación como esa a través de un **ejemplo:**
  - Obtención de la **fórmula de distancia entre dos puntos** a través de una *conversación heurística* (Torres, 2011).

– El *objetivo* queda así claramente determinado: obtener una fórmula que permita calcular, dadas las coordenadas de dos puntos en el plano, la longitud del segmento que ellos determinan, o sea la distancia entre ellos.

– Se recordará que la ***Orientación hacia el objetivo*** contempla, además, el análisis de las condiciones de partida y la delimitación de la vía por la que se intentará obtener la solución.

– De lo primero, los estudiantes concluirán, bajo la influencia de los *impulsos didácticos* del profesor, que de representar puntos en el plano –que es *lo dado*– se sabe cómo determinar sus coordenadas ($x_i$; $y_i$), trazando perpendiculares desde el punto hacia los ejes de coordenadas respectivos.

– En cuanto a lo segundo, puesto que de la fórmula de distancia entre dos puntos, no situados en una posición especial no se tiene ningún conocimiento anterior, se hace obvio avanzar desde los datos hacia *lo buscado*.

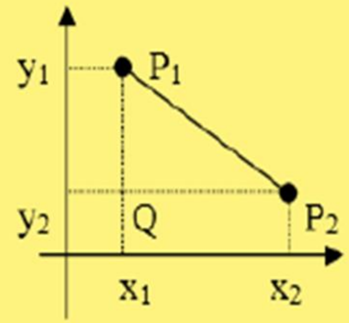
Dr. Cs. Paul A. Torres Fernández orcid.org/0000-0002-7862-2737

# Desarrollo

– Como parte del ***Tratamiento de la nueva materia***, se pone en práctica la estrategia diseñada en el paso anterior.

**Profesor:** *Bien, ya hemos concluido que lo conveniente para intentar avanzar es utilizar la información que contienen los datos. ¿Qué resulta de determinar las coordenadas de los puntos $P_1$ y $P_2$?" (Observen la representación, ¿qué figura geométrica pueden identificar?) (¿Qué figura geométrica forman los puntos $P_1$, Q y $P_2$?).*

**Figura 5.** Representación de las coordenadas de los $P_1$ y $P_2$.




**Fuente:** Elaboración propia.

**Estudiantes**: *Se obtiene un triángulo rectángulo.*

**Profesor:** *Bien, eso abre nuevas perspectivas. Tratemos ahora de aprovechar la información que nos puede proporcionar ese nuevo elemento. ¿Cuál pudiera ser?... (¿Qué teoremas sobre triángulos rectángulos hemos estudiado?... ¿Cuál de ellos debemos emplear aquí?) (¿Cuál de los teoremas sobre triángulos rectángulos nos relacionan la hipotenusa $P_1P_2$ con los catetos $P_1Q$ y $QP_2$?) (¿Qué plantea el de Pitágoras?...)*

Dr. Cs. Paul A. Torres Fernández orcid.org/0000-0002-7862-2737

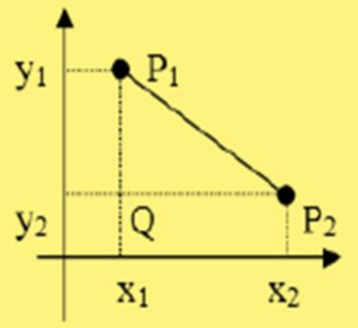
# Desarrollo

– Como parte del ***Tratamiento de la nueva materia***, se pone en práctica la estrategia diseñada en el paso anterior.

**Estudiantes:** *Puesto que se necesita obtener la longitud de la hipotenusa, parece conveniente utilizar el teorema de Pitágoras.*

**Profesor:** *¡Muy bien! Hemos avanzado, pero aún no hemos obtenido la fórmula que buscamos; necesitamos continuar trabajando... ¿Qué elementos del triángulo rectángulo podemos determinar a partir de los datos? (¿Podemos utilizar los casos conocidos de distancia entre dos puntos para casos especiales, repasados al inicio de la clase?...).*

**Figura 5.** Representación de las coordenadas de los $P_1$ y $P_2$.




**Fuente:** Elaboración propia.

**Estudiantes**: *Podemos calcular las longitudes* $d(P_1,Q)=|y_1-y_2|$ *y* $d(Q, P_2)=|x_1-x_2|$.

Dr. Cs. Paul A. Torres Fernández orcid.org/0000-0002-7862-2737

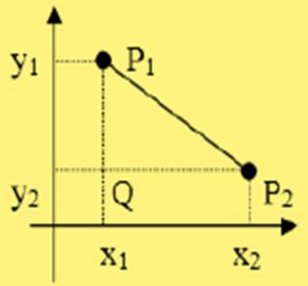
# Desarrollo

- Como parte del ***Tratamiento de la nueva materia***, se pone en práctica la estrategia diseñada en el paso anterior.

**Profesor:** *"¡Correcto!...Y, ¿cómo podemos con esa información alcanzar nuestra meta?... (¿Qué resultado obtenemos si combinamos el Teorema de Pitágoras y las longitudes de los catetos conocidas?...)*

**Estudiantes:** De acuerdo con el Teorema de Pitágoras, se tiene que:

**Figura 5.** Representación de las coordenadas de los $P_1$ y $P_2$.




**Fuente:** Elaboración propia.

$$P_1P_2^2 = P_1Q^2 + QP_1 \quad de\ donde: P_1P_2 = \sqrt{P_2Q^2 + QP_1^2} \quad luego: d(P_1,P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Dr. Cs. Paul A. Torres Fernández orcid.org/0000-0002-7862-2737

# Desarrollo

$$P_1P_2^2 = P_1Q^2 + QP_1 \quad de\ donde: P_1P_2 = \sqrt{P_2Q^2 + QP_1^2} \quad luego: d(P_1,P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

- Se trata de un extraordinario 'descubrimiento'. Además de ***felicitarlos por el resultado alcanzado***, el profesor debe razonar con los estudiantes acerca de los recursos que les permitieron encontrar la solución del problema planteado (*relacionar lo dado con lo buscado y tratar de reducir el problema a otro ya resuelto*). Esta ***reflexión meta cognitiva*** final es esencial (Torres, 1993), de modo que se busque transferir modos de actuación exitosos a la resolución de nuevos problemas y que cada situación de enseñanza no parezca ser algo totalmente nuevo para los estudiantes.
- Se ha estado utilizando también el ***'Principio de las exigencias decrecientes'***, que tiene fundamentación psicopedagógica en la concepción de L. S. Vigotsky de ***'zona del desarrollo próximo'*** (Torres, 1994), según la cual contribuye al desarrollo intelectual de los alumnos aquella enseñanza que se adelanta al desarrollo, que dirige sistemáticamente la actividad del alumno hacia su zona del desarrollo próximo. Vigotsky fue cuidadoso al señalar que ***sólo el buen aprendizaje, y no cualquiera, precede*** (*hala*) ***el desarrollo*** (personológico).

Dr. Cs. Paul A. Torres Fernández orcid.org/0000-0002-7862-2737

# Desarrollo

- Hasta aquí el *ejemplo*.
- Nótese que más allá de la utilización de *recursos heurísticos esenciales* (como los destacados por G. Polya, tras su 'reinterpretación' de la Matemática y, por tanto, de su enseñanza), así como de la organización de la clase de acuerdo con el *enfoque histórico-cultural* de L. S. Vigotsky (con su concepto clave de '*zona del desarrollo próximo*' y su criterio de '*buena enseñanza*'), destaca la necesidad de una conducción del proceso educativo apoyada en:
  - El trabajo con las ***funciones didácticas***, y
  - El manejo de la ***técnica de preguntar y formular impulsos didácticos***.
- Se trata de recursos de una notable naturaleza didáctica.

Dr. Cs. Paul A. Torres Fernández orcid.org/0000-0002-7862-2737

# Desarrollo

- Constituyen ***funciones didácticas*** las siguientes acciones concatenadas del docente en la clase:
  - *Aseguramiento del nivel de partida*.
  - *Motivación*.
  - *Orientación hacia el objetivo*.
  - *Tratamiento de la nueva materia*.
  - *Fijación de la nueva materia* (*ejercitación, profundización, sistematización, aplicación y repaso*).
  - *Evaluación y control del rendimiento de los estudiantes*.
- Y para la correcta concepción y concreción didáctica de cada una de ellas existen un grupo de **procedimientos de enseñanza** a tener en cuenta (Torres, 2011).

Dr. Cs. Paul A. Torres Fernández orcid.org/0000-0002-7862-2737

# Desarrollo

- Por su parte, forman parte de la ***técnica de preguntar y formular impulsos didácticos*** las siguientes consideraciones psicopedagógicas:
  - *Dar tiempo a los estudiantes a pensar, después de presentadas las preguntas e impulsos.*
  - *Emplear frecuentemente los porqué en las clases.*
  - *Evidenciar el carácter contradictorio de las respuestas incorrectas, como primer paso hacia la reconversión del error cognitivo.*
  - *Felicitar cualquier manifestación de logro en los educandos, por modesto que este sea.*
  - *Emplear frecuentemente el principio de las exigencias decrecientes*.
- Se trata, tanto aquellas como estas, de exigencias de elevado rigor técnico que **solo un docente bien entrenado las puede concretar eficazmente, por demás con la flexibilidad requerida** como para poder adaptarla rápidamente a las particularidades de cada colectivo escolar y a los disímiles niveles de complejidad del *contenido de enseñanza* (Torres, 2011).

Dr. Cs. Paul A. Torres Fernández orcid.org/0000-0002-7862-2737

# Desarrollo

- De modo que **las TIC**, aún con todo su avance vertiginoso de los últimos años, **no están en condiciones de suplantarlas**.
  - Las TIC forman parte de los ´medios de enseñanza', y ellos no son más que el 'soporte material de los métodos de enseñanza'; por tanto, didácticamente, se subordinan a estos últimos, apoyándolos (Torres, 1994).
- Por otra parte, no debe olvidarse que **la calidad del aprendizaje de la Matemática**, como el de cualquier otra asignatura escolar, **está impactada por el efecto de otras muchas variables socioeducativas**.
  - Entre las que resalta el poco visible, pero omnipresente, 'capital familiar' (Torres, 2019).

Dr. Cs. Paul A. Torres Fernández orcid.org/0000-0002-7862-2737

# Conclusiones

- La **actuación pedagógica del profesor de Matemática es fundamental** para alcanzar un aprendizaje efectivo, de calidad y a lo largo de la vida.
  - Ello es posible en la medida en que sus modos de actuación profesional tengan en cuenta el doble carácter de la Matemática, como ciencia deductiva pero a la vez inductiva, a la par de un eficiente y prolongado entrenamiento en el manejo de recursos didácticos de probada eficacia.
- **Las TIC**, como antes otros prometedores 'recursos milagrosos' y esperanzadoras reformas educativas de antaño, **no pueden** –por sí solas– **producir el salto cualitativo demandando** para la enseñanza de una disciplina tan compleja y difícil, como la Matemática.
  - El desempeño profesional del docente fue, es y será definitorio en ese empeño; claro está, sin olvidar el efecto de otras muchas variables socioeducativas de contexto, entrada y proceso, que lo impactan.

Dr. Cs. Paul A. Torres Fernández orcid.org/0000-0002-7862-2737

# Contactos

: http://paulantoniotorresfernandez.blogspot.com

: paulantoniotorresfernandez@gmail.com

: @Paintelectual

orcid.org orcid.org/0000-0002-7862-2737

# Bibliografía


1. Cantoral, R. (1988). La heurística y Arquímedes de Siracusa. *Revista Matemática Educativa No. 2, pp. 13-19.*
2. Kilpatrick, J. *et al*. (1994). *Educación Matemática e investigación*. Madrid, España: Editorial Síntesis.
3. Kline, M. (1981). *El fracaso de las Matemáticas Modernas. ¿Por qué Juanito no sabe sumar?* Ciudad de México, México: Siglo XXI Editores.
4. Polya, G. (1986). *¿Cómo resolver problemas?* Ciudad de México, México: Editorial Trillas.
5. Torres, P. A. (1993). *La Enseñanza Problémica de la Matemática del nivel medio general*. La Habana, Cuba: Instituto Superior Pedagógico Enrique José Varona. (Tesis Doctoral)
6. ___________ (1994). La Didáctica de la Matemática en la escuela cubana actual: origen, fundamentos, estructura, y proyecciones. *Educación Matemática 6 (3)*, 82-89.
7. ___________ (1997). Enseñanza Problémica: una perspectiva vigotskiana en la Educación Matemática. *Varona*, 56-63.
8. ___________ (2011). *El arte de enseñar científicamente. Consejos útiles para docentes noveles.* La Habana, Cuba: Editorial Pueblo y Educación.
9. ___________ (2013). La instrucción heurística en la formación de profesores de Matemáticas. En: Dolores, C., García, M. del S.; Hernández, J. A.  y Sosa, L. (Editores). *Matemática Educativa: la Formación de Profesores*. Madrid, España: Ediciones Díaz de Santos, S. A.



Dr. Cs. Paul A. Torres Fernández orcid.org/0000-0002-7862-2737

# Bibliografía

10. ___________ (2019). *Mejorando la investigación en Educación Matemática: del telescopio de Galileo Galilei al telescopio espacial Hubble*. Evento Internacional MATECOMPU 2019. Varadero, Matanzas: Universidad de Matanzas. (Conferencia inaugural) [Recuperable en: https://drive.google.com/file/d/1qL9b7gcg_khrjtRLLyEUecXRNDAAhCcd/view?usp=sharing]

11. Torres, P. A. *et al*. (2001). *Tendencias Iberoamericanas en Educación Matemática*. Sinaloa, México: Universidad Autónoma de Sinaloa.

12. Varona, E. J. *et al*. (1904). *Manual o Guía para los exámenes de maestros cubanos* (Tomo I). La Habana, Cuba: La Moderna Poesía.

Dr. Cs. Paul A. Torres Fernández orcid.org/0000-0002-7862-2737