	MUNICIPIO DE MEDELLÍN GUÍA DE MATEMÁTICAS: CONCEPTOS BÁSICOS DE TRIGONOMETRÍA		
Grado:	10	Nivel:	Educación Media

Autor: Jorge Cardeño Espinosa
Grupo ELIME CEID

LOGROS:

Construir y clasificar los diferentes tipos de ángulos, expresando su medida en grados o en radianes.

Resolver problemas de aplicación sobre ángulos, longitud de un arco, área de un sector circular y de un círculo.

Dibujar la circunferencia unitaria, el ángulo o arco correspondiente y determinar el punto trigonométrico asociado a éste.

CONCEPTOS BÁSICOS DE TRIGONOMETRÍA

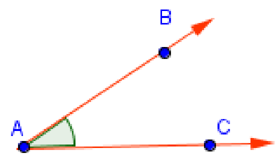
Tabla 1: Alfabeto Griego

Mayúscula	Minúscula	Nombre	Mayúscula	Minúscula	Nombre
Α	α	Alfa	Ν	ν	nu
Β	β	beta	Ξ	ξ	xi
Γ	γ	gamma	Ο	o	ómicron
Δ	δ	delta	Π	π	pi
Ε	ε	épsilon	Ρ	ρ	rho
Ζ	ζ	zeta	Σ	σ	sigma
Η	η	eta	Τ	τ	tau
Θ	θ	theta	Υ	υ	ipsilon
Ι	ι	iota	Φ	φ	fi
Κ	κ	kappa	Χ	χ	chi
Λ	λ	lambda	Ψ	ψ	psi
Μ	μ	mu	Ω	ω	omega

Fuente: http://www.blogitravel.com/2009/07/alfabeto-griego-escritura-de-grecia/

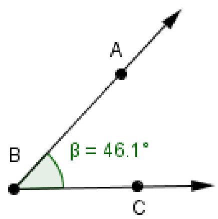
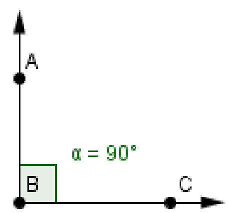
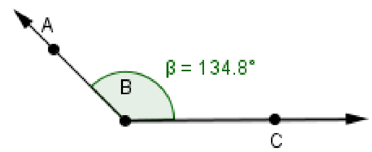
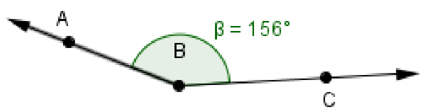
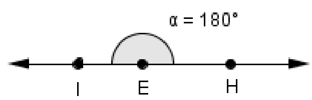
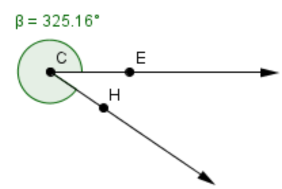
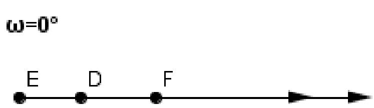
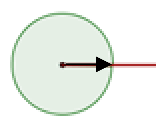
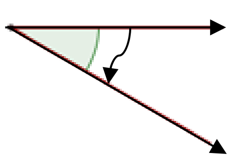
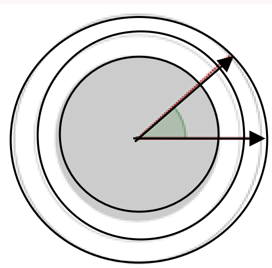
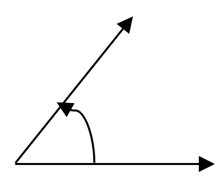
ÁNGULO:

Un ángulo se forma por la rotación de una semirrecta alrededor de su origen. La posición inicial de la semirrecta se llama Lado Inicial $\left(\overrightarrow{AB}\right)$ del ángulo y la posición final de la semirrecta se llama Lado Final $\left(\overrightarrow{AC}\right)$. El punto de rotación es el Vértice (A)del ángulo. Se puede leer $\measuredangle BAC$ o $\measuredangle CAB$.



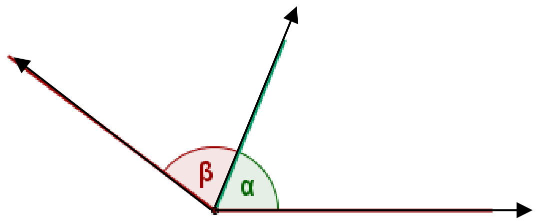
CLASIFICACIÓN DE ÁNGULOS SEGÚN SU MEDIDA

Recordar que la medida del ángulo beta por ejemplo se representa como: $m\measuredangle ABC = m\measuredangle\beta = \measuredangle\beta = \beta$

Agudo: $0° < \beta < 90°$	Recto = 90°	Obtuso: $90° < \beta < 180°$
		
		
Convexo: $0° < \beta < 180°$	Llano = 180°	Cóncavo: $180° < \beta < 360°$
		
Nulo: 0°	Completo: 360°	
		
Negativo: < 0°	Mayor de 360°	Positivo: > 0°

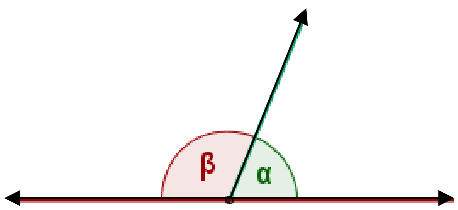
TIPOS DE ÁNGULOS SEGÚN SU POSICIÓN

Ángulos consecutivos:



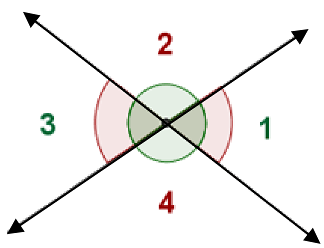
Ángulos consecutivos son aquellos que tienen el vértice y un lado común.

Ángulos adyacentes:



Ángulos adyacentes son aquellos que tienen el vértice y un lado común, y los otros lados situados uno en prolongación del otro. Forman un ángulo llano.

Ángulos opuestos por el vértice:

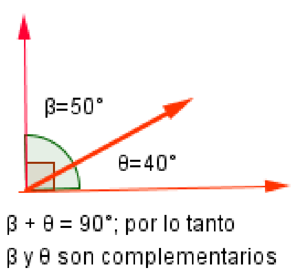


Son los que teniendo el vértice común, los lados de uno son prolongación de los lados del otro.

Los ángulos 1 y 3 son congruentes.
Los ángulos 2 y 4 son congruentes.

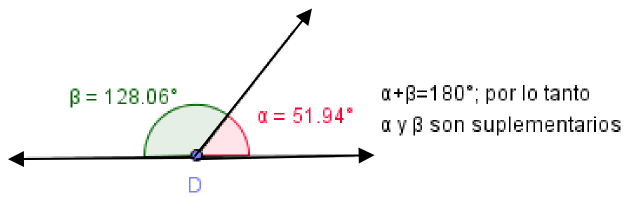
CLASES DE ÁNGULOS SEGÚN SU SUMA

Ángulos complementarios



Dos ángulos son complementarios si suman 90°.

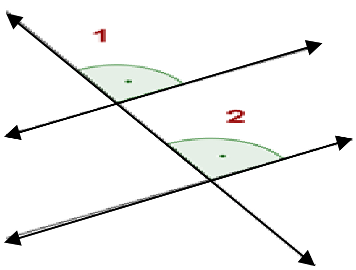
Ángulos suplementarios



Dos ángulos son suplementarios si suman 180°.

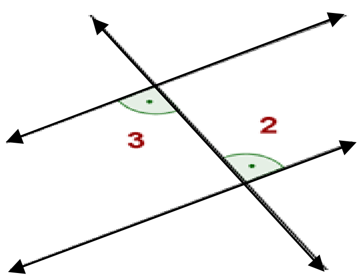
ÁNGULOS ENTRE PARALELAS Y UNA RECTA TRANSVERSAL

Ángulos correspondientes



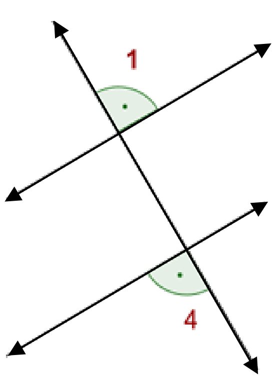
Los ángulos 1 y 2 son congruentes.

Ángulos alternos internos



Los ángulos 2 y 3 son congruentes.

Ángulos alternos externos



Los ángulos 1 y 4 son congruentes.

Ejemplos de conversión:

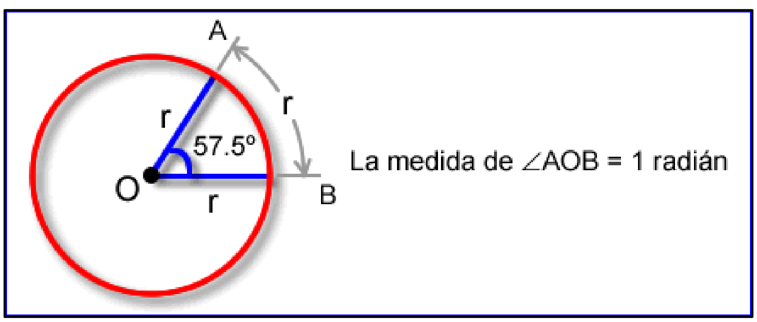
1. Expresar 45º en minutos
   Solución: $45° = 45° * \frac{60'}{1°} = 2\,700'$

2. Convertir 43, 63º a grados, minutos y segundos.
   Solución: $43{,}63° = 43° + 0{,}63° * \frac{60'}{1°} = 43° + 37{,}8'$
   $$43° + 37' + 0{,}8' = 43° + 37' + 0{,}8' * \frac{60''}{1'} = 43° + 37' + 48'' \rightarrow 43°37'48''$$
3. Convertir 47º 32′ 42″ en grados.
   Solución: $47°32'42'' = 47°32'42'' * \frac{1'}{60''} = 47°32'0{,}7' = 47°32{,}7'$
   $$47°32{,}7' * \frac{1°}{60'} = 47°0{,}545° \rightarrow 47{,}545°$$

RADIAN

Un radian es la medida de un ángulo central que intercepta un arco de circunferencia cuya longitud es igual al radio de la circunferencia.

Figura 1: un Radian



Fuente: Diseño propio

En toda circunferencia hay aproximadamente 2π radianes, es decir, 6.28 radianes. ¿Por qué?

L_c = Longitud de la circunferencia
r = Radio
D = Diámetro
$D = 2r$

$$\frac{L_c}{D} = Constante = \pi = 3{,}1416\ aproximadamente.$$

LONGITUD DE LA CIRCUNFERENCIA

$$\frac{L_c}{D} = \pi \;\therefore\; L_c = D.\pi$$

$$L_c = 2r\pi$$

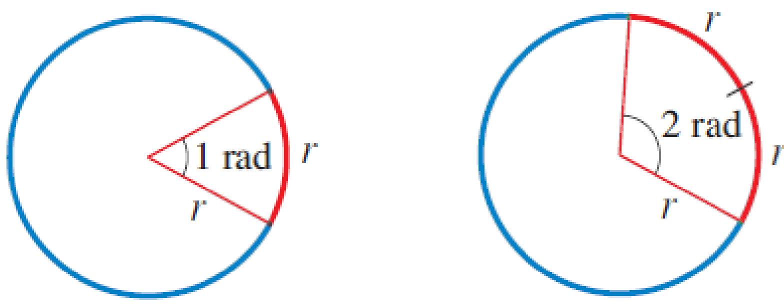
$$L_c = 2\pi r$$

Para saber cuántos radianes hay en una circunferencia de longitud L_c, basta con determinar cuántos radios caben en L_c , es decir:

$$\text{Radianes de una circunferencia} = \frac{L_c}{r} = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi$$

Un radián es $\frac{180}{\pi}$ grados, aproximadamente 57,295779°. Aplicando la regla de tres simple, se puede comprobar.

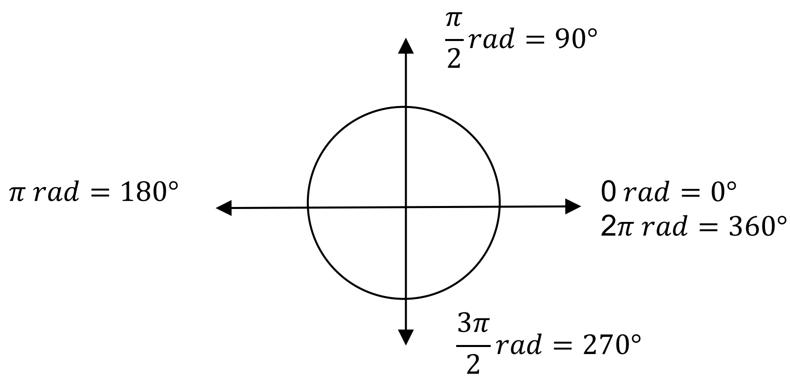
La medida en radianes de θ es el número de «radios» que se pueden ajustar en el arco que subtiende θ; de ahí el término *radián*.



Se puede concluir entonces que:

$$360^\circ = 2\pi\, rad$$
$$180^\circ = \pi\, rad$$
$$90^\circ = \frac{\pi}{2} rad$$
$$45^\circ = \frac{\pi}{4} rad$$
$$22{,}5^\circ = \frac{\pi}{8} rad$$

Igualmente, una vuelta o revolución es equivalente a 360° o a 2π rad.



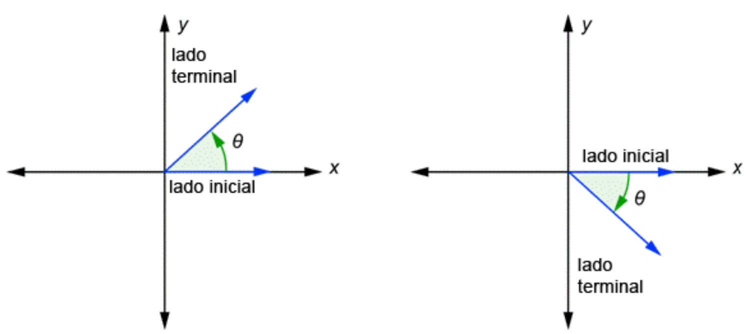
Ejemplo:

Expresar en radianes un ángulo de 240º.

Solución: $240° = 240° \cdot \frac{\pi rad}{180°} = \frac{24}{18}\pi rad = \frac{12}{9}\pi\, rad = \frac{4}{3}\pi\, rad$

ÁNGULOS EN POSICIÓN NORMAL

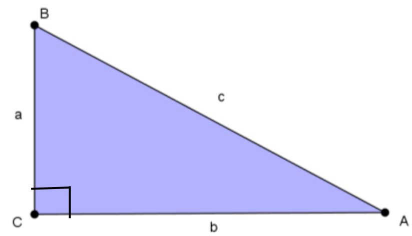
Un ángulo está en posición normal o estándar si se dibuja en el plano xy con su vértice en el origen y su lado inicial en el eje positivo.



Dos ángulos en posición estándar son coterminales si coinciden sus lados.

TEOREMA DE PITÁGORAS

En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.



$$a^2 = b^2 + c^2 \therefore \ a = \sqrt{b^2 + c^2}$$
$$b = \sqrt{a^2 - c^2} \text{ y } c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

PUNTO TRIGONOMÉTRICO

En adelante, los puntos que pertenecen a la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$, se llamarán Puntos Trigonométricos.

NOTA: Si el ángulo es mayor de 360°, entonces seguimos dando vueltas hasta completar el ángulo deseado; sin embargo, cuando esto ocurre los puntos trigonométricos asociados se repiten. Por lo tanto, $F(\theta) = F\ (\theta + 360°. n)$

ÁNGULO DE REFERENCIA

Para todo ángulo θ en posición normal, el ángulo de referencia de θ, denotado θ_R, es el ángulo positivo, menor de 90°, formado por el lado final de θ y el eje x.

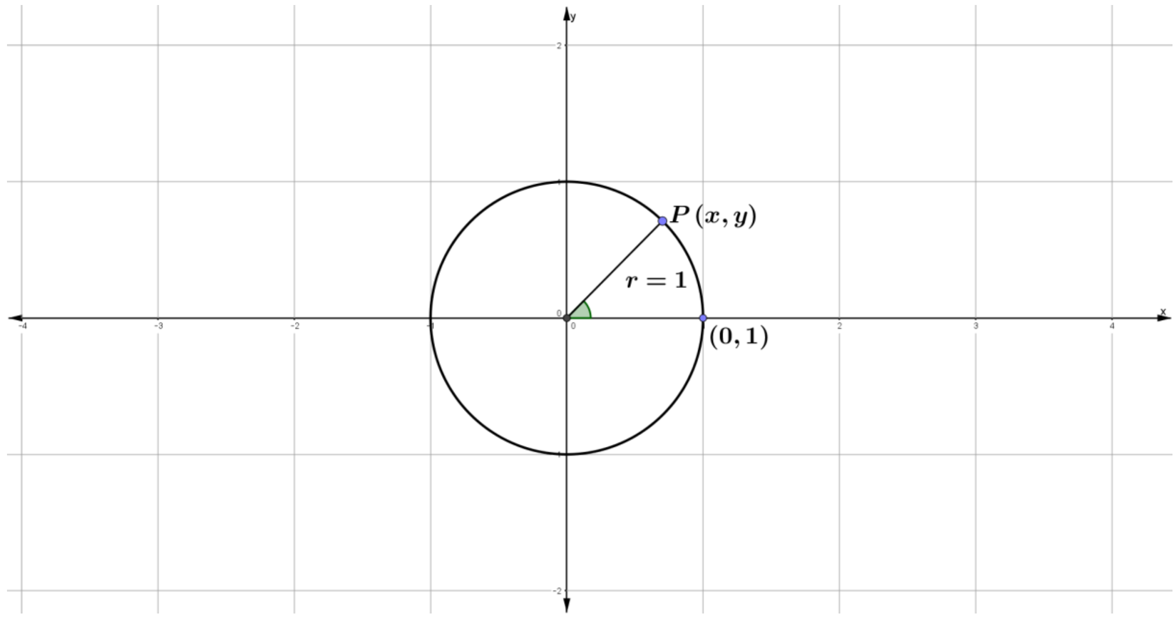
CUADRANTE	ÁNGULO DADO	ÁNGULO DE REFERENCIA
I	$0° < \theta < 90°$	$\theta_R = \theta$
II	$90° < \theta < 180°$	$\theta_R = 180° - \theta$
III	$180° < \theta < 270°$	$\theta_R = \theta - 180°$
IV	$270° < \theta < 360°$	$\theta_R = 360° - \theta$

ÁNGULOS COTERMINALES

Ángulos en posición normal con el mismo lado final, se denominan coterminales. Por ejemplo, los ángulos de 45°, 405° y -315°. Se obtienen al sumar o restar al ángulo dado $360°. n$ y donde n representa el número de vueltas.

LA FUNCIÓN CIRCULAR

La base para construirla es una circunferencia de centro (0, 0) y radio igual a 1.



Conjunto de partida: (dominio)

Formado por todos los ángulos centrales en posición normal de la circunferencia unitaria o también por los arcos de la misma circunferencia que parten del punto (1,0)

Conjunto de llegada: (rango)

Está formado por todos los puntos de la circunferencia unitaria; es decir, por todas aquellas parejas ordenadas (x, y) que satisfacen la ecuación: $x^2 + y^2 = 1$

APLICACIONES

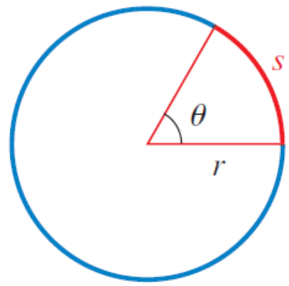
LONGITUD DE UN ARCO CIRCULAR

Un ángulo cuya medida en radianes es θ está subtendido por un arco que es la fracción $\frac{\theta}{2\pi}$ de la circunferencia de un círculo. Así, un círculo de radio *r*, la longitud *s* de un arco que subtiende el ángulo θ es:

$s = \frac{\theta}{2\pi}$ x longitud de la circunferencia $= \frac{\theta}{2\pi}\,(2\pi r) = \theta\, r$. Por lo tanto:

$s = \theta\, r$

Ahora si $\theta r = s$, entonces $\theta = \frac{s}{r}$



También se puede obtener su fórmula, aplicando regla de tres simple:

$$360° \rightarrow 2\pi r$$
$$\theta \rightarrow s$$

$$s\ x\ 360° = \theta\ x\ 2\pi r$$

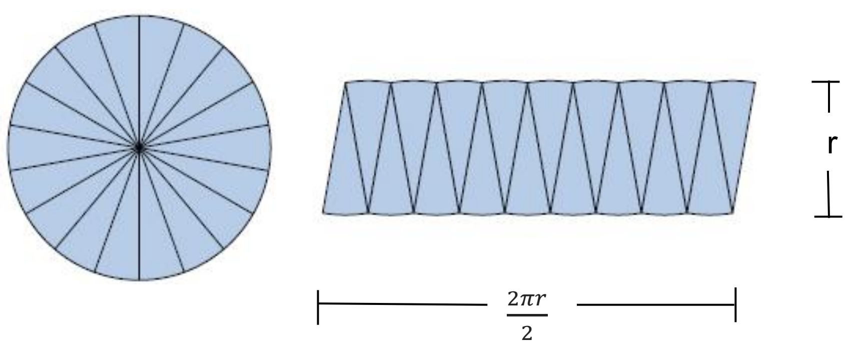
$$s = \frac{\theta\ rad\ x\ 2\pi r}{360°} = \frac{\theta\ rad\ x\ 2\pi r}{2\pi\ rad} = \theta\ r$$

Ejemplo:

Encuentre la longitud de un arco de un círculo con radio 10 m que subtiende un ángulo central de 30°

Como $30° = \frac{\pi}{6}$, entonces $s = r\,\theta = (10\ m)\frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{3}\ m$

ÁREA DE UN CÍRCULO



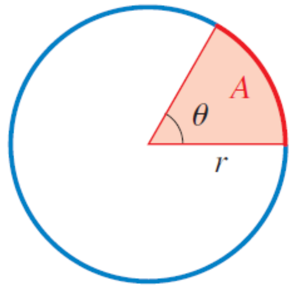
El área de un circulo es igual al valor de su radio elevado al cuadrado multiplicado por π. Es decir:

$$A = \pi\, r^2$$

Ejemplo:

Si $r = 3\ m$, entonces el $A = \pi\ (3\ m)^2 = 9\pi m^2$

ÁREA DE UN SECTOR CIRCULAR



El área de un círculo de radio r es $A = \pi\, r^2$. Un sector de este círculo con ángulo central θ tiene un área que es la fracción $\frac{\theta}{2\pi}$ del área del círculo entero. Por lo tanto, el área de este sector es:

$A = \frac{\theta}{2\pi}$ x área del círculo

$$A = \frac{\theta}{2\pi}\,(\pi\, r^2) = \frac{1}{2}\, r^2\, \theta$$

También se puede obtener por medio de regla de tres simple, considerando que $360°$ representa el área total de un círculo. Luego se calcula el área que representa θ.

Ejemplo:

Encuentre el área de un sector de un círculo con ángulo central 60° si el radio del círculo es 3 m.

$$60° = \frac{\pi}{3}$$

$$A = \frac{1}{2}\, r^2\, \theta = \frac{1}{2}\,(3)^2\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\pi}{2}\, m^2$$

MOVIMIENTO CIRCULAR

Suponga que un punto se mueve a lo largo de una circunferencia. Hay dos formas de describir el movimiento del punto: velocidad lineal y velocidad angular.

La velocidad lineal es la razón a la que está cambiando la distancia recorrida, de modo que la velocidad lineal es la distancia recorrida dividida entre el tiempo transcurrido.

La velocidad angular es la razón a la cual cambia el ángulo central θ, así que la velocidad angular es el número de radianes que cambia este ángulo dividido entre el tiempo transcurrido.

Velocidad lineal $v = \frac{s}{t}$
Velocidad angular $w = \frac{\theta}{t}$

RELACIÓN ENTRE VELOCIDAD LINEAL Y ANGULAR

Si un punto se mueve a lo largo de una circunferencia de radio r con velocidad angular w, entonces su velocidad lineal v está dada por

$$v = \frac{s}{t} = \frac{r\theta}{t} = r\frac{\theta}{t} = rw$$

Ejemplo:

Un estudiante hace girar una piedra en una honda de 4 pies de largo a una velocidad de 15 revoluciones cada 10 segundos. Encontrar las velocidades angular y lineal de la piedra.

Solución:

La distancia recorrida por la piedra en un tiempo de 10 segundos es $s = 15(2\pi r) = 30\pi r = 30\pi(4\,pies) = 120\pi\ pies$

$$v = \frac{s}{t} = \frac{120\pi\ pies}{10\ seg} = 12\pi\ pies/s$$

Las vueltas dadas por la piedra durante 10 seg es $\theta = 15(2\pi\ rad) = 30\pi\ rad$

$$w = \frac{\theta}{t} = \frac{30\pi\ rad}{10\ seg} = 3\pi\ rad/s$$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS DE APLICACIÓN

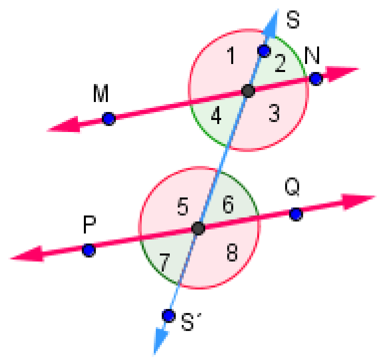
1. Determina el complemento de 52°.
2. ¿Cuál es el suplemento de 127°?
3. Determina el complemento de 37° 65'.
4. Determina el suplemento de 134° 57' 62".
5. Si m = 150° 25' 54" y n = 37° 13' 42", ¿cuánto es $m - n$?
6. Expresar en grados, minutos y segundos 1256, 92°
7. Encuentra dos ángulos suplementarios tales que el mayor sea cuatro veces el menor.
8. Encuentra dos ángulos consecutivos que formen un ángulo de 84° y donde uno de ellos es 26° mayor que el otro. Construye la gráfica.

9. Dos ángulos son complementarios y el mayor es 5 veces el menor. ¿Cuánto mide el ángulo menor? Construye la gráfica.

10. Si tres ángulos suman 322°, y el mayor es el triple del menor menos 70°, y el del medio es el doble del menor menos 10°. ¿Cuánto mide cada ángulo? Construye la gráfica.

11. Si tres ángulos suman 290°, y el mayor mide el triple del menor más 50°, y el del medio mide el doble que el menor. ¿Cuánto mide cada ángulo?

12. Si $\overleftrightarrow{MN} \parallel \overleftrightarrow{PQ}$ y $\overleftrightarrow{SS'}$ es una transversal; y $\sphericalangle 7 = \frac{\sphericalangle 8}{2}$. Hallar los valores de todos los ángulos.



13. Encuentra el complemento de los siguientes ángulos:

a) 93° 20’ 57” b) 47° c) 32° 67’ 73” d) 65° 85’ e) 39° 52’

14. Encuentra el suplemento de los siguientes ángulos:

a) -215° b) 67° c) 121° 68’ 130’’ d) 154° 59’ 18’’ e) 76° 189’

15. Halla la medida del ángulo para la rotación indicada (en grados) y dibújalo en posición normal:

a) $\frac{2}{3}$ de rotación completa en sentido negativo
b) $\frac{7}{3}$ de rotación completa en sentido positivo
c) $2\frac{1}{4}$ de rotación completa en el mismo sentido de las manecillas de un reloj
d) $\frac{3}{5}$ de una rotación completa en sentido contrario al movimiento de las manecillas de un reloj

16. Convierte a radianes y a revoluciones cada uno de los siguientes ángulos:

a) 90° b) 225° c) 130° d) 150° e) 120°
f) 160° g) 47° 180’ h) 1950º i) 45° j) 240°
k) 1000° l) 71° 59.5’ 30’’ m) $\frac{1}{4}$(84° 240’) n) $\frac{1}{3}$(36° 57’ 180’’)

o) 315°　　　p)-3660°

17. Expresa en grados y en revoluciones cada uno de los siguientes ángulos:

a) $\frac{2}{3}\pi$ rad　　b) $\frac{3}{4}\pi$ rad　　c) - $\frac{\pi}{4}$ rad　　d) $\frac{9}{3}\pi$ rad　　e) $-\frac{21}{3}\pi$ rad

f) $\frac{5}{3}\pi$ rad　　g) $\frac{11}{6}\pi$ rad　　h) $\frac{12}{3}\pi$ rad　　i) -3π rad　　j) - $\frac{5\pi}{6}$

18. Completa el siguiente cuadro y dibuja el ángulo en posición normal:

Ángulo	Cuadrante	Grados	Revoluciones	Ángulo complementario	Ángulo suplementario	Ángulo coterminal
$\frac{5\pi}{3} rad$						
$\frac{7\pi}{4}\ rad$						

19. Ubica en un sistema de coordenadas cartesianas los siguientes puntos. Tomar como unidad el cm y calcular la distancia del origen a cada uno de estos puntos, aplicando la expresión: $r^2 = x^2 + y^2$

a) (6,8)　　b) (-3,-4)　　c) (-2,5)　　d) (5,-3)　　e) (7,-5)

f) (-5, 0)　　g) (0, 4)　　h) $\left(\frac{1}{2}, \frac{12}{3}\right)$

20. Demuestre que el punto dado a continuación, está en el perímetro del círculo unitario (recuerda que: $x^2 + y^2 = r^2$, donde $r = 1$).

a) $\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$　　b) $\left(\frac{40}{41},\frac{9}{41}\right)$　　c) $\left(-\frac{1}{3},\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$　　d) $\left(-\frac{5}{13},-\frac{12}{13}\right)$

21. El punto P está en el perímetro del círculo unitario. A partir de la información dada a continuación, determine el valor de la coordenada P (x, y):

a) La coordenada x de P es $\frac{3}{7}$ y P está en el cuadrante I.

b) La coordenada y de P es - $\frac{1}{4}$ y P está en el cuadrante III.

c) La coordenada x de P es $\frac{\sqrt{2}}{3}$ y P está en el cuadrante IV.

22. Calcula la cantidad x, y, r que no esté dada y graficar el punto correspondiente en el plano cartesiano. (r es la distancia del origen hasta el punto, según el caso):

a) x = 4   r = 5   P en IV   b) $r = 2\sqrt{13}$ y = 6 P en II   c) x =7   y = -5

d) r = $\sqrt{10}$ y = $\sqrt{6}$ P en I   e) x = y = 1   f) x = 2   y = - 4   g) x = - 6   y = 3

23. Para cada uno de los siguientes ángulos, dibujarlos en posición normal, decir el cuadrante a que pertenece; señalar en la gráfica el ángulo de referencia con respecto a X y con respecto a Y.

ÁNGULO	CUADRANTE	ÁNGULO DE REFERENCIA CON X	ÁNGULO DE REFERENCIA CON Y	ÁNGULO COTERMINAL
2235°				
150°				
35°				
-65°				
270°				
330°				
-1400°				
-52°				
290°				
315°				
$-\frac{30\pi}{6}$ rad				
$\frac{11\pi}{10}$ rad				
300°				
240°				
120°				

24. Hallar las imágenes indicadas de acuerdo con la función circular:

a) F (-π)=

b) F (1080°) =

c) F (450°) =

d) F (-90°) =

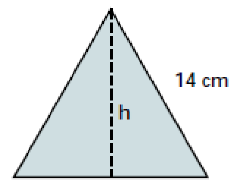
e) F (-1440°) =

f) F (360º) =

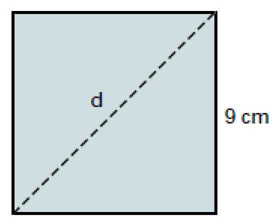
g) F (90º) =

PROBLEMAS DE APLICACIÓN

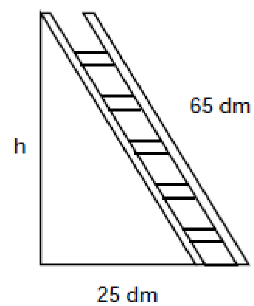
25. Calcula la altura de un triángulo equilátero de 14 cm de lado.



26. Calcula la diagonal de un cuadrado de 9 cm de lado.



27. Una escalera de 65 dm (decímetros) de longitud está apoyada sobre la pared. El pie de la escalera dista 25 dm de la pared. ¿A qué altura h se encuentra la escalera en m? Expresar la respuesta en metros.



28. Una persona camina 4 km hacia el norte y 3 km al oeste. Luego cambia hacia el norte y camina 8 km, por último, camina 6 km más hacia el oeste. ¿A qué distancia se encuentra del origen? ¿Cuánto camino recorrió esa persona? Respuesta: 15 y 21 km.

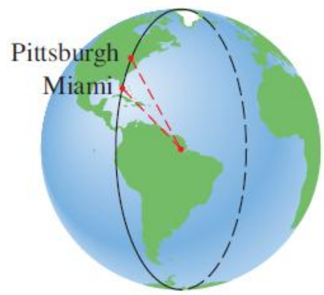
29. Una cancha de fútbol olímpica es un rectángulo de 100 metros de largo y 70 metros de ancho. ¿Qué longitud tiene la diagonal de la cancha?

30. Encuentra la longitud de un arco que subtiende un ángulo central de 45° en un círculo de radio 10 m.

31. Un sector de un círculo tiene un ángulo central de 60°. Encuentra el área del sector si el radio del círculo es 3 millas.

32. Las ruedas de un automóvil miden 28 pulgadas de diámetro. ¿Qué tan lejos viajará el automóvil (en millas) si sus ruedas giran 10.000 veces sin deslizamiento?

33. Pittsburgh (Pennsylvania) y Miami (Florida), se encuentran aproximadamente sobre el mismo meridiano. Pittsburgh tiene una latitud de 40.5° N y Miami, 25.5° N. Encuentra la distancia entre estas dos ciudades. (El radio de la tierra es de 3960 millas aproximadamente).
Solución:



Como $s = r\theta$, entonces $\theta = \frac{s}{r}$
$r = 3960\ mi$

Distancia = P – M

Pittsburgh: $40.5° = 40.5° \left(\frac{\pi}{180°}\right) = \frac{40.5}{180}\pi = 0.225\pi$

$$0.225\pi = \frac{s}{3960\ mi} \ \therefore s = 0.225\pi\ (3960\ mi) = 891\pi\ mi$$

Miami: $25.5° = 25.5° \left(\frac{\pi}{180°}\right) = \frac{25.5}{180}\pi = 0.141\hat{6}\,\pi$

$$0.1416\pi = \frac{s}{3960\ mi} \ \therefore s = 0.1416\pi\ (3960\ mi) = 560.73\pi\ mi$$

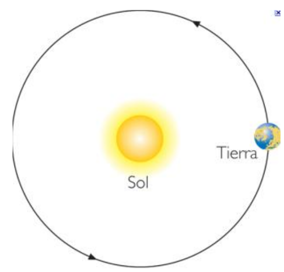
Por lo tanto, la distancia sería $d = 891\pi\ mi - 560{,}73\pi\ mi = 330.26\pi\ mi \approx 1037.54\ mi$

34. Memphis, Tennessee y Nueva Orleans, Luisiana, se encuentran aproximadamente en el mismo meridiano. Memphis tiene latitud 35° N y Nueva Orleans, 30° N. Encuentre la distancia entre estas dos ciudades. (El radio de la Tierra es de 3960 millas.)

35. Un ventilador de techo con aspas de 16 pulg gira a 45 rpm. Determina la velocidad angular del ventilador en rad/min y la velocidad lineal de las puntas de las aspas en pulg/min.

36. Las ruedas de un automóvil tienen un radio de 11 pulg y giran a 600 rpm. Determina la velocidad del automóvil en millas/h.

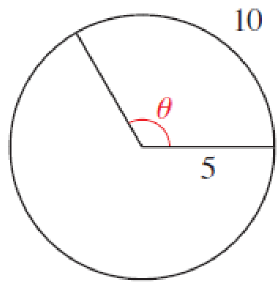
37. Encuentre la distancia que viaja la tierra en un día y su trayectoria alrededor del Sol. Suponga que un año tiene 365 días y que la trayectoria de la Tierra alrededor del Sol es un círculo de radio 93 millones de millas. (En realidad la trayectoria de la Tierra alrededor del Sol es una elipse con el Sol en un foco – más adelante sabremos que es una elipse-. Esta elipse, sin embargo, tiene excentricidad muy pequeña, así que es aproximadamente circular).



38. Si un arco circular de longitud s subtiende el ángulo central θ en un círculo, halla el radio del círculo de acuerdo con los siguientes datos.

a) $s=10$ cm, $\theta=4°$ b) $s=3$ m, $\theta=20°$

39. Encuentre el ángulo θ en la figura siguiente. El arco se mide en m.



Autor: MsC. Jorge Cardeño Espinosa

BIBLIOGRAFÍA:

Cardeño, Jorge et al. (2009). *Geometría Interactiva*. Facultad de Ciencias Exactas y Aplicadas. Medellín: Sello Editorial ITM.

Movimiento circular. Recuperado el 16 de agosto de 2025 de: https://edu.gcfglobal.org/es/movimiento/movimiento-circular-/1

Stewart, J y et al. (2006). *Precálculo*. México: Thomson.

Teorema de Pitágoras. Recuperado el 15 de agosto de 2025 de: https://content.nroc.org/Algebra.HTML5/U07L2T1/TopicText/es/text.html

Uribe Calad, Julio Alberto. (2007). *Matemática Experimental 10*. Medellín: Uros Editores.