	MUNICIPIO DE MEDELLÍN **GUÍA DE MATEMÁTICAS:** **RAZONES TRIGONOMÉTRICAS Y TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS**		
Grado:	10	Nivel:	Educación Media

Autor: Jorge Cardeño Espinosa
Grupo ELIME CEID

LOGROS:

Construye y define las funciones trigonométricas en circunferencias de radio distinto de uno y en el triángulo rectángulo.

Determina el signo de las funciones trigonométricas de un ángulo dado en posición normal.

Halla las funciones trigonométricas de un ángulo dado en posición normal.

Determina geométricamente las funciones trigonométricas de los ángulos notables y aplicarlos en la solución de ejercicios de valor numérico.

Aplica las funciones trigonométricas en la solución de problemas que originan triángulos rectángulos.

RAZONES TRIGOMOMÉTRICAS:

Dada una circunferencia de radio $r = 1$ (circunferencia unitaria), si tomamos un arco AP, donde A es un punto del semieje positivo de las x y $P(x, y)$, el punto del extremo, se definen las razones trigonométricas del ángulo en la forma:

$$seno\ \theta = sen\ \theta = \frac{ordenada}{radio} = \frac{y}{r}$$

$$coseno\ \theta = \cos\theta = \frac{abscisa}{radio} = \frac{x}{r}$$

$$\text{tangente}\,\theta = \tan\theta = \frac{ordenada}{abscisa} = \frac{sen\ \theta}{\cos\theta} = \frac{y}{x}$$

$$cotangente\ \theta = \cot\theta = \frac{abscisa}{ordenada} = \frac{x}{y}$$

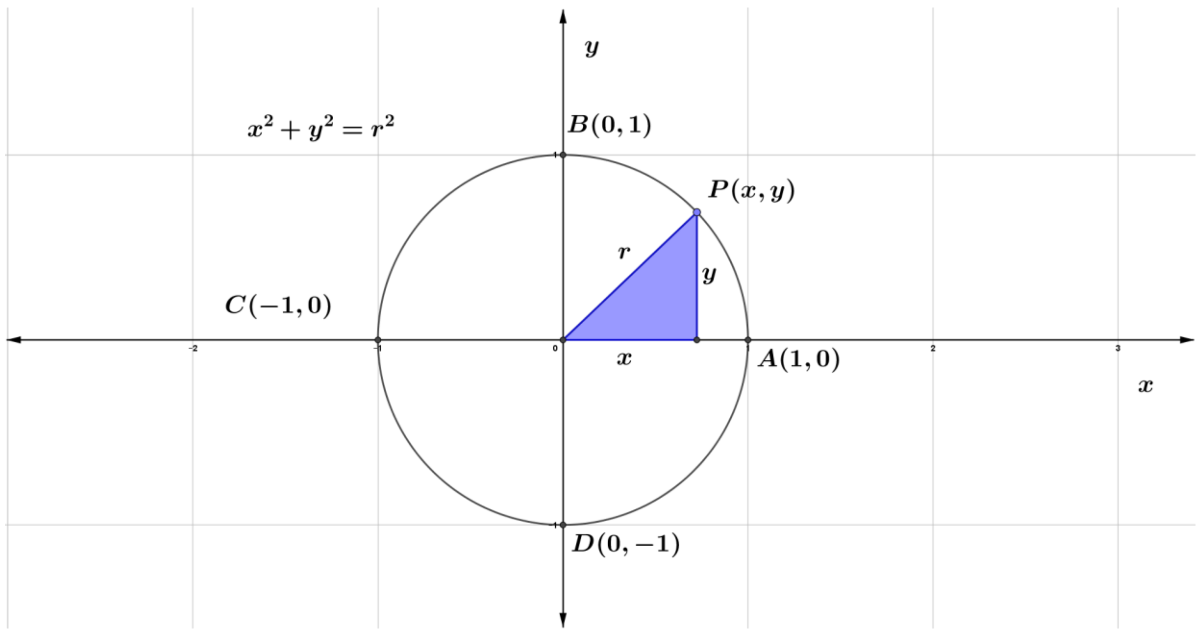
$$secante\ \theta = \sec\theta = \frac{radio}{abscisa} = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{r}{x}$$

$$cosecante\ \theta = \csc\theta = \frac{radio}{ordenada} = \frac{1}{sen\ \theta} = \frac{r}{y}$$

Como $r = 1, sen\ \theta = \frac{y}{r} = \frac{y}{1} = y$, entonces $sen\ \theta = y$
Además, $\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{1} = x$, entonces $\cos\theta = x$

NOTA: Como en el círculo unitario a cada ángulo le corresponde uno y solo un punto trigonométrico, se dice también que estas razones son funciones trigonométricas.

Figura 1: Círculo unitario



Fuente: Diseño propio

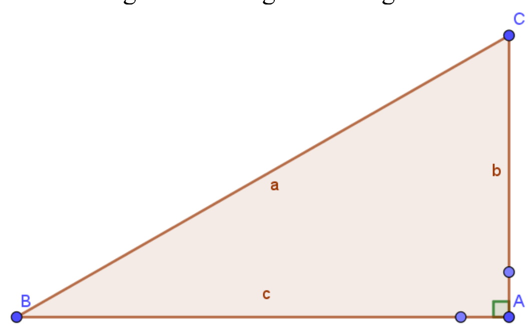
De igual forma, Se puede calcular las razones trigonométricas entre los lados de un triángulo rectángulo, pero exterior a la circunferencia, donde se tiene la posibilidad de nombrar el cateto opuesto y el cateto adyacente dependiendo del ángulo elegido y diferente de 90°, puesto que opuesto a este ángulo se tendrá la hipotenusa.

HIPOTENUSA: es la recta que une el punto trigonométrico y el origen de las coordenadas. Es el lado que se opone al ángulo recto en un triángulo rectángulo.

CATETO OPUESTO: segmento de recta perpendicular que une el punto trigonométrico y el eje de las x.

CATETO ADYACENTE: segmento de recta perpendicular que une el cateto opuesto y el origen de coordenadas.

Figura 2: Triángulo rectángulo



Fuente: Diseño propio

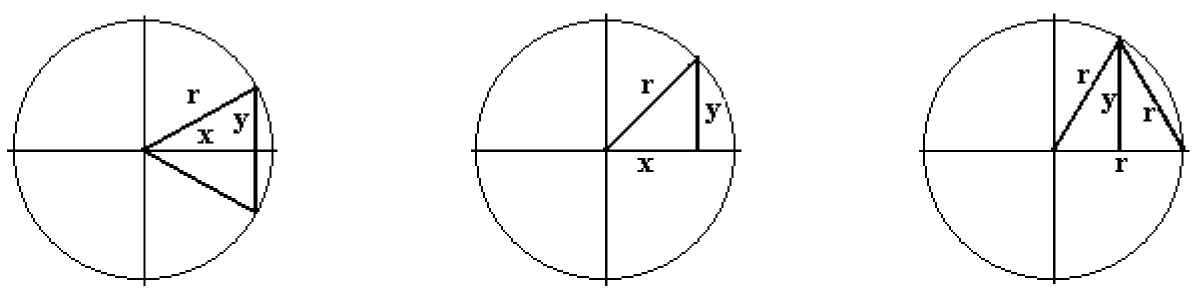
$\Delta ABC, rectángulo\ en\ A.\ \sphericalangle B\ y\ \sphericalangle C$: $ángulos\ agudos$
a: $hipotenusa$
b: $cateto\ opuesto\ al\ \sphericalangle B\ y\ adyacente\ al\ \sphericalangle C$
c: $cateto\ opuesto\ al\ \sphericalangle C\ y\ adyacente\ al\ \sphericalangle B$

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE 30°, 45° Y 60°

Propiedades Geométricas:

1. En todo triángulo rectángulo isósceles, la longitud de la hipotenusa es $\sqrt{2}$ veces la longitud de cualquiera de los catetos.
2. En cualquier triángulo rectángulo cuyos ángulos agudos miden 30° y 60°, se cumple que el cateto opuesto al ángulo de 30° mide la mitad de la hipotenusa.
3. En cualquier triángulo rectángulo cuyos ángulos miden 30° y 60°, se cumple que el cateto opuesto al ángulo de 60° mide $\frac{\sqrt{3}}{2}$ veces la longitud de la hipotenusa.

Figura 3: Ángulos notables de 30°, 45° y 60°



Fuente: Diseño propio

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS NEGATIVOS:

1. El Seno de un ángulo negativo y el Seno de un ángulo positivo tienen igual valor numérico pero distinto signo; es decir: $sen\ (-\theta) = -sen\ \theta$

2. El coseno de un ángulo negativo y el coseno del mismo ángulo positivo tienen igual valor numérico e igual signo; es decir: $\cos(-\theta) = \cos\theta$

3. La tangente de un ángulo negativo y la tangente del mismo ángulo positivo tienen igual valor numérico pero distinto signo; es decir: $\tan(-\theta) = -\tan\theta$

ÁNGULOS DE ELEVACIÓN Y DE DEPRESIÓN

Se llama línea de visión a la recta imaginaria que une el ojo de un observador con el lugar observado. Llamamos ángulo de elevación al que forman la horizontal del observador y el lugar observado cuando éste está situado arriba del observador. Cuando el observador está más alto lo llamaremos ángulo de depresión.

Figura 4: ángulo de elevación y de depresión

Fuente: https://matevolucion.blogspot.com/2012/01/calculo-de-distancias-inaccesibles.html

RESOLVER UN TRIÁNGULO RECTÁNGULO

Resolver un triángulo cualquiera consiste en calcular todos sus elementos: sus tres lados y sus tres ángulos. Además, en un triángulo se debe conocer, al menos, tres de sus elementos, uno de los cuales necesariamente debe ser un lado.

En todo triángulo, un lado es menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia.

1. CONOCIDOS DOS LADOS

   El tercer lado se calcula aplicando el teorema de Pitágoras.
   Uno de los ángulos agudos aplicando la razón trigonométrica que relacione los dos lados conocidos.

   Para calcular el otro ángulo agudo basta considerar que la suma de los ángulos agudos es 90°.

2. CONOCIDOS UN LADO Y UN ÁNGULO

   El proceso es similar al caso anterior.
   Se calcula otro lado mediante la razón trigonométrica adecuada del ángulo conocido.
   El tercer lado mediante el teorema de Pitágoras; o bien, mediante otra razón trigonométrica.
   El otro ángulo es 90°, ángulo conocido.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS DE APLICACIÓN:

1. En los siguientes ejercicios, θ es la medida de un ángulo en posición normal, cuyo lado final se encuentra en el cuadrante indicado para cada caso. En cada ejercicio se da el valor de una función; encontrar los valores de las funciones restantes y simplificar la respuesta, si es posible:

   a) $sen\,\theta = -\frac{4}{5}$, en el III cuadrante
   b) $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, en el IV cuadrante
   c) $\cos\theta = \frac{12}{13}$, en el I cuadrante

2. Encontrar los valores de las funciones trigonométricas de un ángulo θ en posición normal, si el punto dado *P (x, y)* está sobre el lado terminal del mismo. Construir la gráfica.

   a) $(3,-\sqrt{3})$
   b) (-6, -8)
   c) $(-5, -\sqrt{144})$
   d). (-8, 3)

3. Encontrar los valores de las funciones trigonométricas del ángulo θ, en posición normal, si para cada punto P sobre su lado terminal se cumple la condición dada:

   a) $r = 8, y = -2$
   b) $x = 6, r = 3y$
   c) $y = -x, r = 1$
   d) $y = -2x, r = 1$

4. Encuentre los valores de las restantes funciones trigonométricas:

   a) $\tan\theta = \frac{3}{2}$ y $\cos\theta$ es positivo
   b) $\sec\theta = 2$ y $sen\,\theta$ es positivo
   c) $\cot\theta = -\frac{4}{3}$ y $\sec\theta$ es negativa
   d) $sen\,\theta = \frac{1}{2}$ (existen 2 soluciones)
   e) $\cos\theta = -\frac{5}{3}$ en III cuadrante

5. Completar los siguientes cuadros:

VALOR DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS PARA ÁNGULOS NOTABLES

$\boldsymbol{\theta}$	$\boldsymbol{rad}$	$\boldsymbol{sen\,\theta}$	$\boldsymbol{\cos\theta}$	$\boldsymbol{\tan\theta}$	$\boldsymbol{\cot\theta}$	$\boldsymbol{\sec\theta}$	$\boldsymbol{\csc\theta}$
0°	0	0	1	0	N.E	1	N.E
30°	$\boldsymbol{\frac{\pi}{6}}$	$\boldsymbol{\frac{1}{2}}$	$\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{2}}$	$\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{3}}$	$\boldsymbol{\sqrt{3}}$	$\boldsymbol{\frac{2\sqrt{3}}{3}}$	2
45°							
60°							
90°							
120°							
135°							
150°							
180°							
210°							
225°							
240°							
270°							
300°							
315°							
330°							
360°							

SIGNOS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Cuadrante	F.T. / θ	$\boldsymbol{Sen\ (\theta)}$	$\boldsymbol{Cos\ (\theta)}$	$\boldsymbol{Tan\ (\theta)}$	$\boldsymbol{Cot\ (\theta)}$	$\boldsymbol{Sec\ (\theta)}$	$\boldsymbol{Csc\ (\theta)}$
I	$0° < \theta < 90°$	+	+	+	+	+	+
II	$90° < \theta < 180°$						
III	$180° < \theta < 270°$						
IV	$270° < \theta < 360°$						

6. Sin usar calculadora, hallar el resultado de las siguientes expresiones:

$a)\, Sen\,30° - \,Cos\,30° =$ $\qquad$ $b)\ Sen\,45° + \tan\ 60° =$

$c)\, \dfrac{Tan\ 60° + Cos\,30°}{Tan\,45°} + \dfrac{Tan\,30° - Sen\,30°}{Cos\ 60°} =$ $\qquad$ $d)\, Tan\,45° + \dfrac{(Sen\,60°).(Cos\ 60°)}{Tan\,30°} =$

7. Comprobar si las siguientes igualdades son verdaderas o falsas, reemplazando θ por 30°. No use calculadora.

$a)\ \dfrac{1}{Sen\,\theta} + \dfrac{Cos\,\theta}{Sen\,\theta} = \dfrac{Sen\,\theta}{1 - Cos\,\theta}$ $\qquad$ $b)\ Tan\,\theta . Sen\ \theta = \dfrac{1}{Cos\ \theta} - Cos\,\theta$

$c)\ 4\,Sen\,\theta = 2$ $\qquad$ $d)\ \dfrac{1 - Tan\ \theta}{1 + Tan\,\theta} = \dfrac{Cos\,\theta - Sen\theta}{Cos\,\theta + Sen\theta}$

$e)\ Sen^2\theta + Cos^2\theta = 1$ $\qquad$ $f)\ 1 + Tan^2\theta = Sec^2\theta$

8. Reducir el valor del ángulo a grados y determinar el valor de la función:

$a)\ Sen\left(\dfrac{5\pi}{4} rad\right) =$ $\qquad$ $b)\ Cos\left(\dfrac{13\pi}{3} rad\right) =$ $\qquad$ $c) Tan\left(\dfrac{23\pi}{6} rad\right) =$

$d)\ Sen\left(\dfrac{43\pi}{6} rad\right) =$ $\qquad$ $e)\ Cos\left(\dfrac{57\pi}{4} rad\right) =$ $\qquad$ $f) Tan\left(\dfrac{35\pi}{3} rad\right) =$

9. Hallar el valor numérico de las siguientes expresiones trigonométricas:

a) 4 Sen^2 210°+ 3 Sec^2 135°- 2 Cot^2 150°= $\qquad$ Respuesta: 1
b) 2 Csc^2 30°+ 2 Cot^2 240°- 6 Sen^2 225°= $\qquad$ Respuesta: $\frac{17}{3}$
c) Sen 150°. Cos 240°+ Cos 150°. Sen 240°= $\qquad$ Respuesta: $\frac{1}{2}$
d) Cos^2 120° - Sen^2 120°= $\qquad$ Respuesta: $-\frac{1}{2}$
e) 2 Sen^2 150° -3 = $\qquad$ Respuesta: $-\frac{5}{2}$
f) Sen 120°. Cos 60° + Sen 60°. Cos 120°= $\qquad$ Respuesta: 0
g) 4 Sen 300°. Cos 300°= $\qquad$ Respuesta: $-\sqrt{3}$
h) $\dfrac{Tan\ 120° + Tan\ (\text{-}60°)}{1 - Tan\ 120°. Tan\ (-60°)} =$ $\qquad$ Respuesta: $\sqrt{3}$
i) Sen 30°. Cos (-120°) + Sen (-120°). Cos 30°= $\qquad$ Respuesta: -1

10. Comprueba que:

a) $\dfrac{2}{Cos\ 45°} + \dfrac{3\ Cos\ 30°.Cos\ 60°}{Sen\ 60°} = \dfrac{4\sqrt{2}+3}{2}$

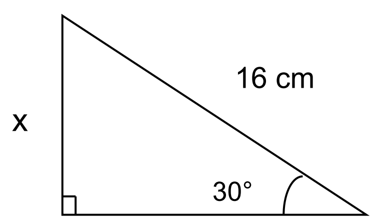
b) $2\ sen\ 30° + 3\dfrac{\cos 45°}{sen\ 45} - \dfrac{1}{\cos^2 30°} = \dfrac{19}{6}$

c) $\sqrt{\dfrac{\cos^2 0° + 3\tan 30°.\ sen 90°}{1+3\ \tan 30°}} = 1$

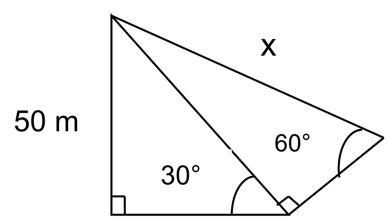
11. Una fuerza de 50 N forma un ángulo de 60° con la horizontal. Calcula sus componentes horizontal y vertical.

12. Una fuerza forma un ángulo de 30° con la horizontal y su proyección vertical es 15,3 N. Determina la fuerza y su proyección horizontal.

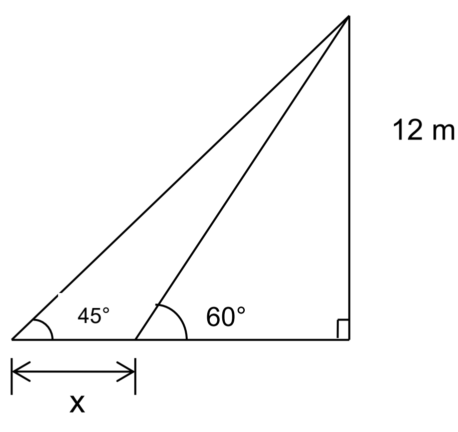
13. En los triángulos rectángulos de las siguientes figuras, halla la longitud del lado designado por x, el perímetro, el área y nombra los vértices con letras mayúsculas:



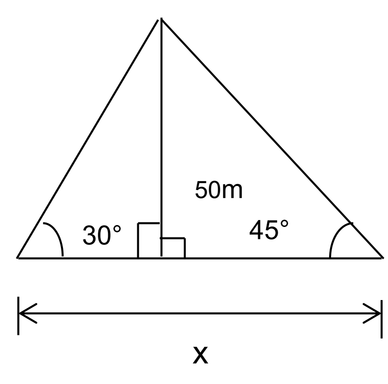
a)



b)

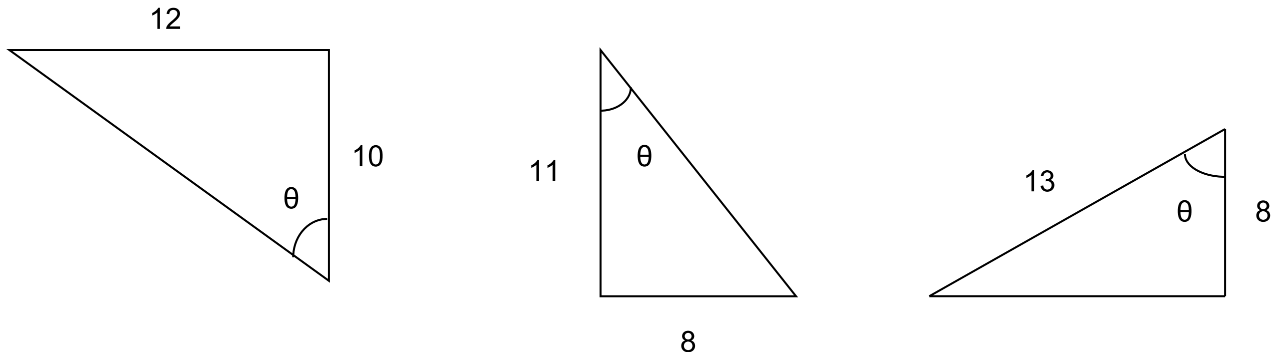


c)



d)

14. Halla la medida, en grados, del ángulo designado por la letra θ:



a) b) c)

15. Sabiendo que la torre Eiffel mide 300 m de altura ¿cuánto hay que alejarse para que su extremo se vea, desde el suelo, 36º por encima de la horizontal?

16. Se sabe que el aro de baloncesto está a 3,3 metros del piso. Los ojos de un jugador de baloncesto están a 1,98 metros del piso. Si el jugador se encuentra en la línea de tiro libre a 5 metros del centro del aro de la canasta. ¿Cuál es el ángulo de elevación de los ojos del jugador al centro del aro?

17. Una torre de agua se localiza a 325 pies de un edificio. Desde una ventaja en el edificio, un observador percibe que el ángulo de elevación de la parte superior de la torre en de 39° y que el ángulo de depresión respecto a la base de la torre es de 25°. ¿Qué tan alta es la torre? ¿A qué altura está la ventana?

18. Cuando la Luna se encuentra exactamente en la fase de media luna, la Tierra, la Luna y el Sol forman un ángulo recto. En ese momento el ángulo que forman el Sol, la Tierra y la Luna es de 89.85°. Si la distancia de la Tierra a la Luna es de 240000 millas, estime la distancia de la Tierra al Sol.

19. Un aeroplano vuela a una altura de 5150 pies directamente arriba de una carretera recta. Dos automovilistas conducen en la carretera en lados opuestos del avión, y el ángulo de depresión respecto a un automóvil en 35° y respecto al otro es 52°. ¿Cuál es la distancia que separa a los automóviles?

20. A veces, necesitamos usar triángulos superpuestos, sobre todo, si hay regiones inaccesibles. Desde un patio vemos el extremo superior de una antena de televisión levantando la vista un ángulo de 40°. Si nos alejamos en la línea recta 30 m, solo hay que levantar la vista 30º para ver la punta de la antena. ¿Cuál es la altura de la antena?

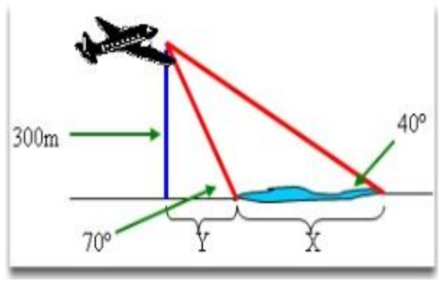
21. Un tramo de carretera forma un ángulo de 15° con la horizontal. Al recorrer 200 m por la carretera, ¿Cuántos metros se ha ascendido en vertical?

22. De un rombo se conoce una diagonal, 24 cm, y el lado, 13 cm. Encontrar la medida de la otra diagonal.

23. En un viaje por una carretera horizontal y recta nos dirigimos hacia el punto más alto de una montaña. En un instante dado medimos el ángulo de elevación y es de 30°, Recorremos 2 kilómetros y al

medir éste es de 45°. ¿Cuál es la altura de la montaña respecto de la carretera donde hemos hecho las mediciones?

24. Desde un avión situado a 300 metros sobre el nivel del suelo se hacen observaciones de un lago obteniendo los resultados que se muestran en la figura. Calcule la longitud del lago.



25. Demuestre que el área de un triángulo rectángulo de hipotenusa a y catetos b y c está dada por cualquiera de las siguientes expresiones:

$$A = \frac{1}{2}a.b.SenC,\ \ A = \frac{1}{2}a.c.CosC,\ \ A = \frac{1}{2}a^2.SenC.CosC$$

26. Desde la ventana de un edificio, a 56 m de altura, se observa un automóvil con un ángulo de 55°. Calcula la distancia que hay desde el automóvil hasta la base del edificio.

27. La pita de una cometa se encuentra tensa y forma un ángulo de 60º con la horizontal. Hallar la altura aproximada de la cometa respecto al suelo, si la pita mide 85 m y su extremo se sostiene a 1.5 m del suelo.

28. Calcular el lado del pentágono regular inscrito en una circunferencia de radio 10 m.

29. En una circunferencia de 100 m de radio se unen dos puntos con una cuerda de 50 m. ¿Cuánto vale el ángulo central correspondiente?

30. Una barca puede navegar en agua tranquila a 8 km/h. Si la corriente del río lleva una velocidad de 6 km/h. ¿bajo qué ángulo cortará la barca a la corriente para que la dirección de su movimiento sea perpendicular a la corriente? ¿Cuál es la velocidad real de la barca?

31. Demostrar que el área de un triángulo equilátero de lado L y un ángulo θ es $A = \dfrac{l^2 sen\theta}{2}$

32. Dos personas de 1.8 m de estatura están situadas en el mismo plano horizontal de un edificio de 60 m de altura. Los ángulos de elevación de las personas a la parte más alta del edificio son de 30° y 45°. Determinar la distancia entre las dos personas.

33. Un trabajador de las empresas publicas recuesta su escalera de 4m de longitud contra un poste de energía. Si el pie de la escalera está 1,20 m del pie del poste, ¿cuál es el ángulo de elevación de la escalera?

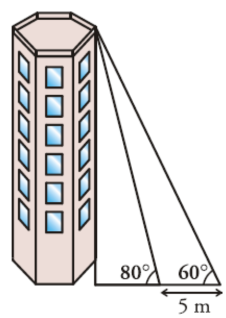
34. Un cable que sostiene un poste de energía tiene un ángulo de elevación de 75° y está fijo en la tierra a 4m del pie del poste. El punto de apoyo en el poste está a $\frac{3}{4}$ de altura de éste a partir de la base. ¿Cuánto mide el poste?

35. Desde un punto el ángulo de elevación a la cima de una montaña es de 30° y el ángulo de elevación al extremo superior de una antena de altura 15m. situada sobre la cima de la montaña de 45°. ¿Cuál es la altura de la montaña?

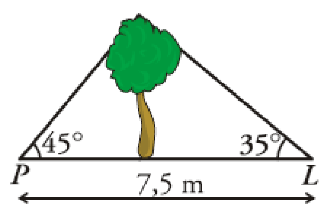
36. Juan y Luis parten simultáneamente de un punto A. Juan camina hacia el norte con una velocidad de 4km/h y Luis lo hace hacia el oeste con una velocidad de 5km/h. ¿Al cabo de dos horas qué distancia los separa y cuál es el rumbo de Juan con respecto a Luis? R/ 12.81 km.; N51°20'25"E.

37. Una torre de 135 pies de altura se localiza en la orilla de un lago. Desde la punta de la torre, el ángulo de depresión de un objeto en la orilla opuesta del lago es 30°. ¿Cuál es la distancia a través del lago?

38. Para medir la altura de una torre nos situamos en un punto del suelo y vemos el punto más alto de la torre bajo un ángulo de 60°. Nos acercamos 5 metros a la torre en línea recta y el ángulo es de 80°. Halla la altura de la torre.



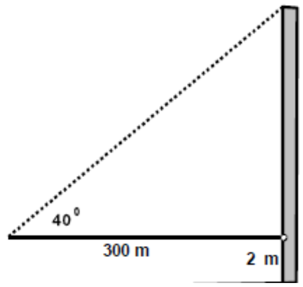
39. Pablo y Luis están situados cada uno a un lado de un árbol, como indica la figura:

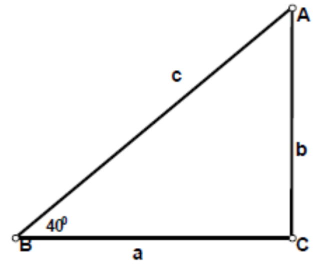


a) Calcula la altura del árbol.
b) ¿A qué distancia está Pablo del árbol?

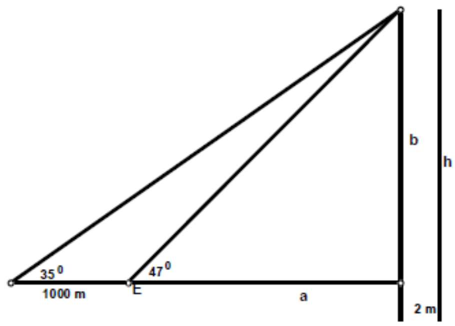
40. Los lados de un paralelogramo miden 12 y 20 cm, respectivamente, y forman un ángulo de 60°. ¿Cuánto mide la altura del paralelogramo? ¿Y su área?

41. Para determinar la altura de una torre de transmisión de televisión, un agrimensor camina alejándose 300 metros de la base de la torre. Luego mide el ángulo de elevación y encuentra que es de 40°. Si el teodolito está a 2 metros del piso cuando la observación se realiza, ¿cuál es la altura de la torre?





42. Para medir la altura de una montaña, un topógrafo toma dos observaciones de la cima desde dos puntos separados una distancia de 1000 metros en línea recta hacia la montaña. La primera observación tiene como resultado un ángulo de elevación de 47°, la segunda tiene un ángulo de elevación de 35°. Si el teodolito está dos metros del piso, ¿cuál es la altura de la montaña?



43. Una antena de banda civil está puesta encima de un garaje que mide 16 pies de altura. Desde un punto al nivel del suelo que está a 100 pies de un punto directamente debajo de la antena, esta subtiende un ángulo de 12°. Calcula la longitud de la antena.

44. Un avión despega a un ángulo de 10° y vuela a razón de 250 pies/s. ¿Aproximadamente cuánto tarda el avión en alcanzar una altitud de 15000 pies? Respuesta: 5,76 min.

Referencias:

Cardeño, Jorge et al. (2009). *Geometría Interactiva*. Medellín: ITM. Facultad de Ciencias Básicas.

Uribe, J. (2007). *Matemática Experimental 10*. Medellín: Uros Editores.

Muñoz, F y et al. (1996). *Matemática Noveno Grado*. La Habana: Pueblo y Educación.

Resolución de triángulos rectángulos. Recuperado el 9 de agosto de 2025 de: https://es.khanacademy.org/math/geometry/hs-geo-trig/hs-geo-solve-for-a-side/a/unknown-side-in-right-triangle-w-trig

Stewart, J y et al. (2006). *Precálculo*. México: Thomson.