

	MUNICIPIO DE MEDELLÍN GUÍA DE MATEMÁTICAS: GRÁFICAS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS Y SUS TRANSFORMACIONES		
	Grado:	10	Nivel:

Autor: Jorge Cardeño Espinosa
 Grupo ELIME CEID

LOGROS:

Dibujar las gráficas básicas de las seis funciones trigonométricas y hallar su dominio y rango.

Hallar la amplitud, el período y la magnitud del desfase de una función de la forma $y = A \operatorname{sen}(ax + \alpha)$ o $y = A \operatorname{cos}(ax + \alpha)$, mediante el manejo de programas como GeoGebra o Descartes.

ESTIRAMIENTO Y REFLEXIÓN VERTICALES Y HORIZONTALES

Supongamos que una constante $c \in R$ y $c > 1$. Entonces se puede presentar los siguientes casos:

1. $y = c \cdot f(x)$, la gráfica se estira verticalmente con respecto a $y = f(x)$, en un factor de c unidades.
2. $y = \left(\frac{1}{c}\right) \cdot f(x)$, la gráfica se contrae verticalmente con respecto a $y = f(x)$, en un factor de c .
3. $y = f(c \cdot x)$, la gráfica se contrae horizontalmente con respecto a $y = f(x)$, en un factor de c .
4. $y = f\left(\frac{x}{c}\right)$, la gráfica se estira horizontalmente con respecto a $y = f(x)$, en un factor de c .
5. $y = -f(x)$, la gráfica se refleja alrededor del eje x , con respecto a $y = f(x)$.
6. $y = f(-x)$, la gráfica se refleja alrededor del eje y , con respecto a $y = f(x)$.

DESPLAZAMIENTOS VERTICALES Y HORIZONTALES

Supongamos que $c \in R$ y $c > 0$. Entonces se pueden presentar los siguientes casos:

1. $y = f(x) + c$, la gráfica se desplaza una distancia de c unidades hacia arriba, con respecto a $y = f(x)$.
2. $y = f(x) - c$, la gráfica se desplaza una distancia de c unidades hacia abajo, con respecto a $y = f(x)$.
3. $y = f(x - c)$, la gráfica se desplaza una distancia de c unidades hacia la derecha, con respecto a $y = f(x)$.

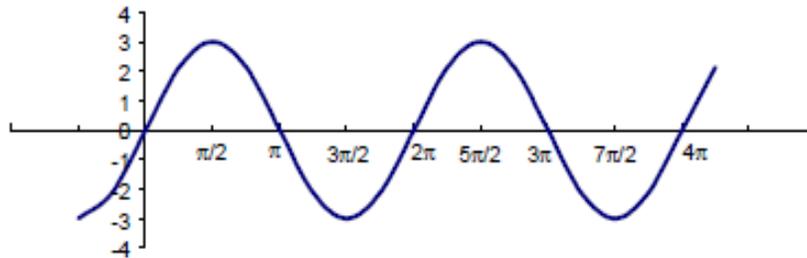
4. $y = f(x + c)$, la gráfica se desplaza una distancia de c unidades hacia la izquierda, con respecto a $y = f(x)$.

TALLER No. 1

1. Representa las siguientes funciones trigonométricas y haz un análisis de sus principales propiedades:

- $y = \text{sen}(x)$
- $y = \cos(x)$
- $y = \tan(x)$
- $y = \cot(x)$
- $y = \sec(x)$
- $y = \csc(x)$
- $y = -2 \cos(x)$
- $y = 2 \sin(2x) + 3$
- $y = 2 \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$
- $y = \tan\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$
- $y = -\text{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 1$
- $y = 2 \text{sen}x - 1$
- $y = \frac{1}{2} + \cos(x)$

2. Dada la gráfica siguiente, responde las preguntas:



- ¿Cuál es el periodo de esta función?
- ¿Cuál es la amplitud de esta función?
- ¿Es esta una función par o impar?
- ¿Cuál es el rango de esta función?
- ¿Cuál de las siguientes ecuaciones debe asociarse con la gráfica anterior?

$$y = \cos\left(3x - \frac{\pi}{2}\right)$$

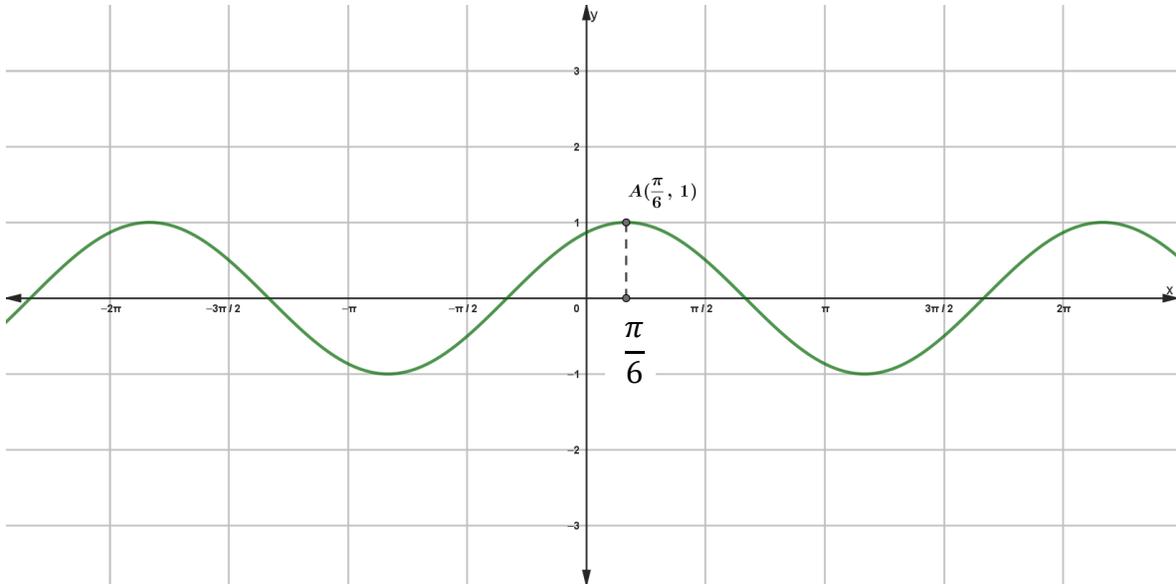
$$y = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 3$$

$$y = 3 \cos(x)$$

$$y = 3 \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$y = 3\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

3. Dada la gráfica a continuación, elige la función que representa:



- $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$
- $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$
- $y = \cos(x) + \frac{\pi}{6}$
- $y = \cos(x) - \frac{\pi}{6}$

4. Dada la función $y = 3\text{sen}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$ contesta las siguientes preguntas:

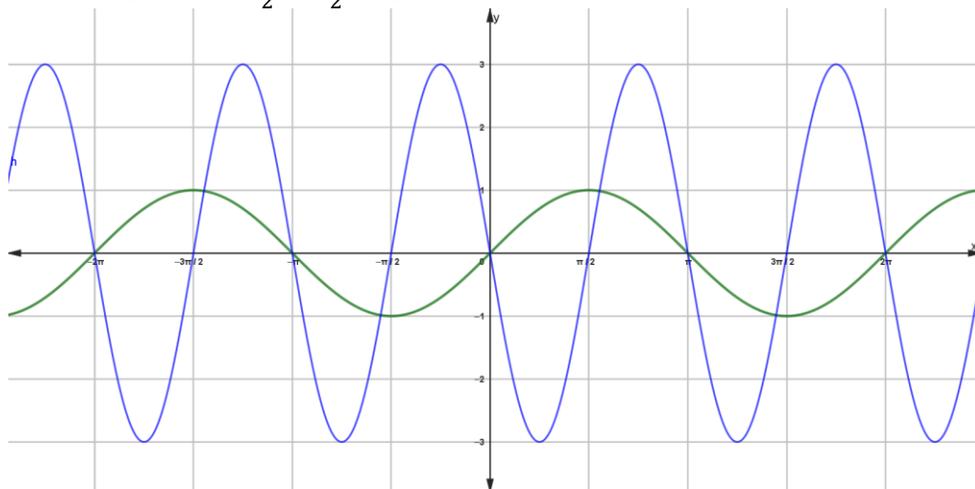
- ¿Cuál es la amplitud?
- ¿Cuál es el periodo?
- ¿Hay un deslizamiento horizontal? _____. Si es así, el deslizamiento está a _____ unidades a la _____.
- ¿Hay un deslizamiento vertical? _____. Si es así, el deslizamiento está a _____ unidades hacia _____.

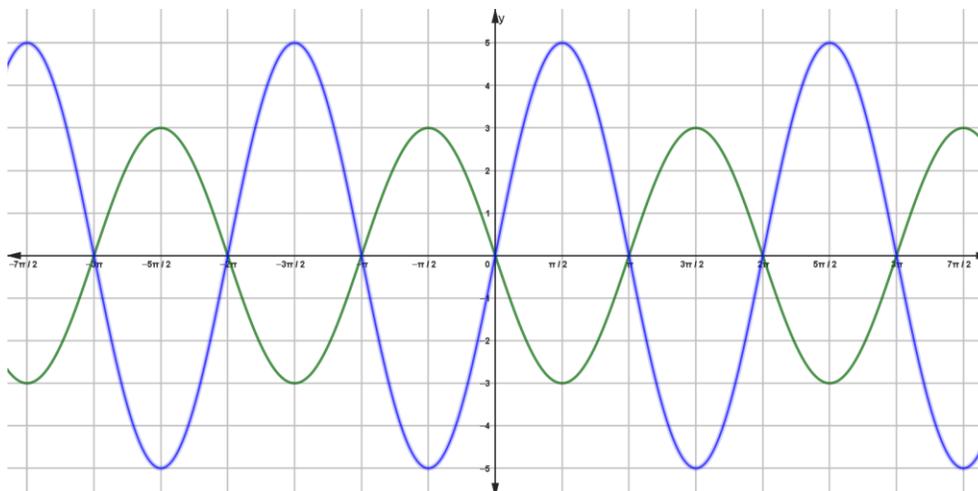
5. Sin trazar la gráfica de la función, ¿qué se puede decir de la gráfica que representa la ecuación $y = 3 + 2\cos 2\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ con la gráfica original de la función coseno? (Transformaciones).

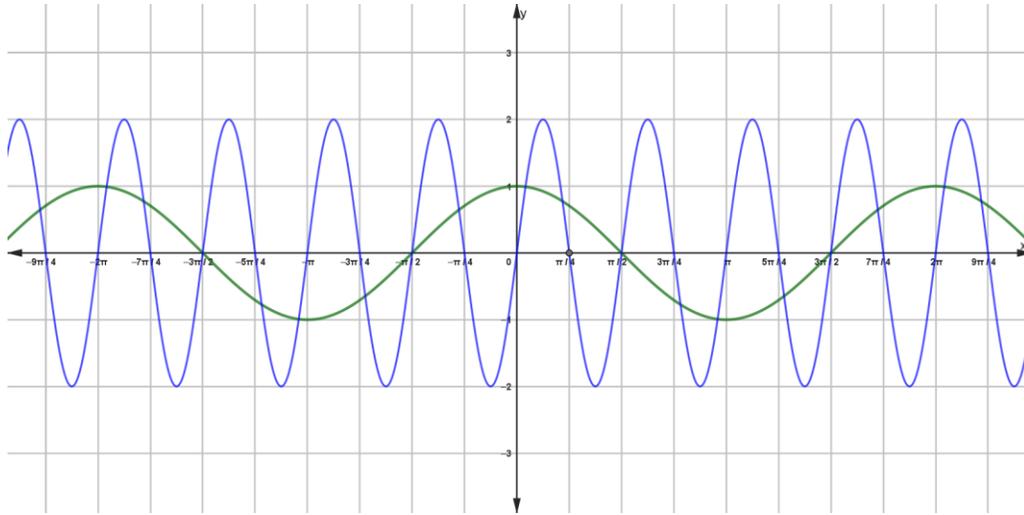
6. Determina el cuadrante o cuadrantes donde se dan las siguientes variaciones

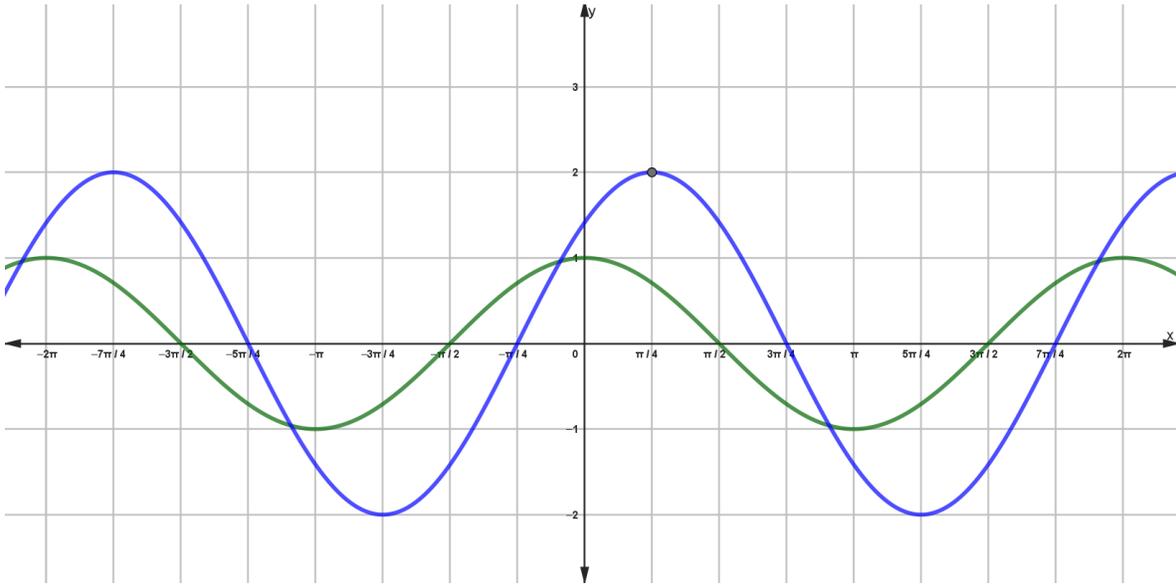
- El seno y la tangente crecen
- El seno crece y la cotangente decrece
- El coseno decrece y la tangente crece
- La tangente y la secante crecen
- La secante y cosecante crecen
- El coseno crece y la cosecante decrece
- La cotangente y el seno decrecen
- El seno crece y el coseno decrece

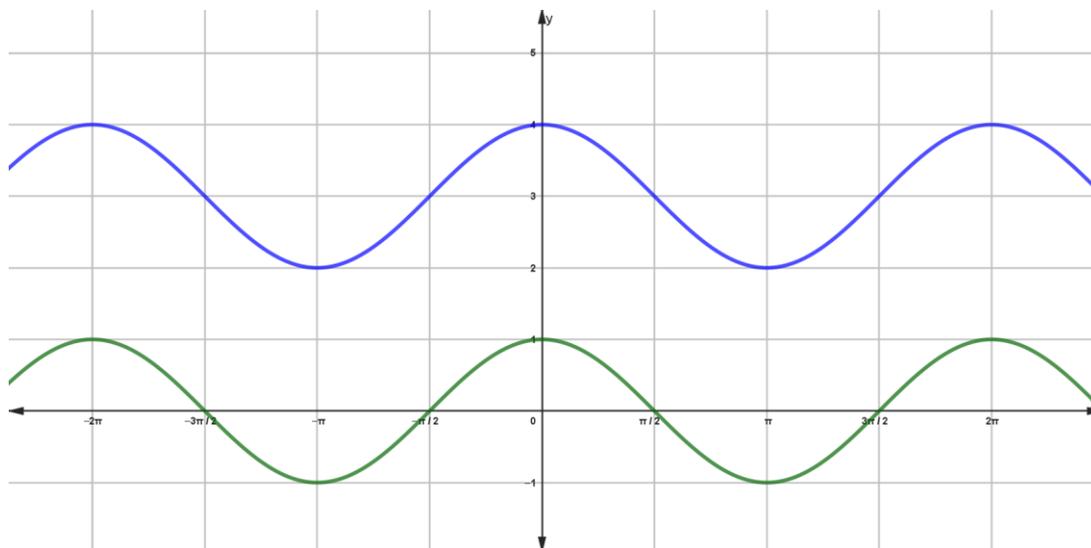
7. Las gráficas que aparecen a continuación que funciones representan, es decir, cuál es su ecuación (se graficó de $\frac{\pi}{2}$ en $\frac{\pi}{2}$ el eje x):





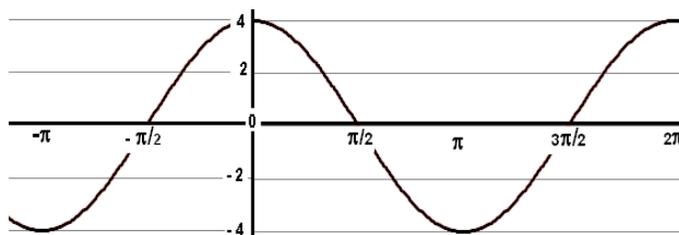






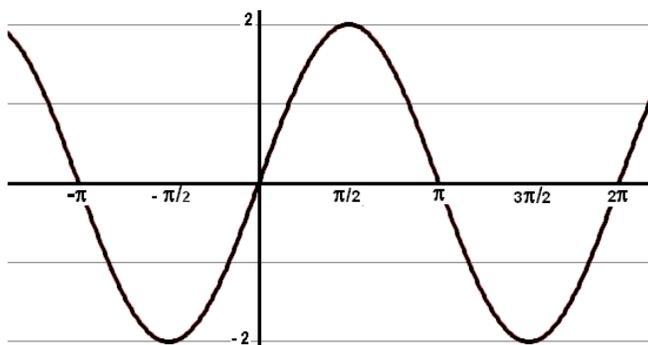
TALLER No. 2

1. La ecuación que describe la curva de la figura siguiente es:



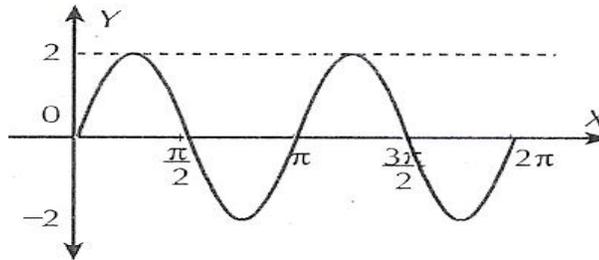
- A. $y = 4\text{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ B. $y = 4\text{sen}(x + \pi)$
 C. $y = 4\text{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ D. $y = 4\text{sen}(x - \pi)$

2. La ecuación que describe la curva de la figura siguiente es:



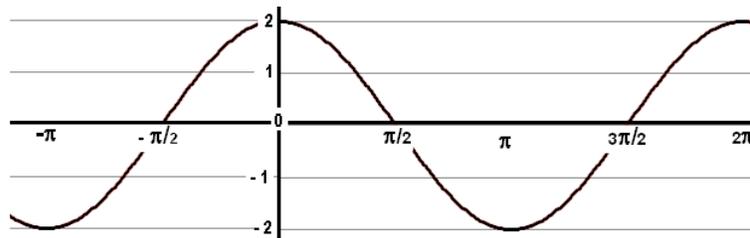
- A. $y = 2\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ B. $y = 2\text{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$
 C. $y = 2\cos(x)$ D. $y = 2\text{sen}(x)$

3. La ecuación que corresponde a la gráfica siguiente es:



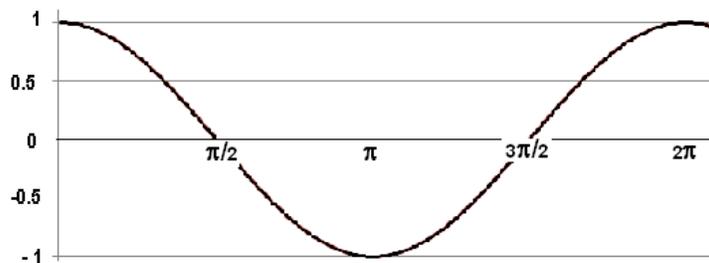
- A. $f(x) = -2\cos\left(\frac{x}{2}\right)$ B. $f(x) = \cos(2x)$
 C. $f(x) = 2\text{sen}(2x)$ D. $f(x) = \text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$

4. La ecuación que describe la curva de la figura siguiente es:



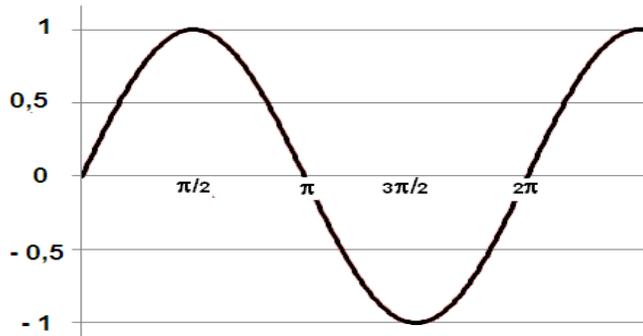
- A. $y = 2\text{sen}(x)$ B. $y = 2\cos(x + \pi)$
 C. $y = 2\text{Cos}(x)$ D. $y = 2\text{sen}(x - \pi)$

5. La ecuación que describe la curva de la figura siguientes es:



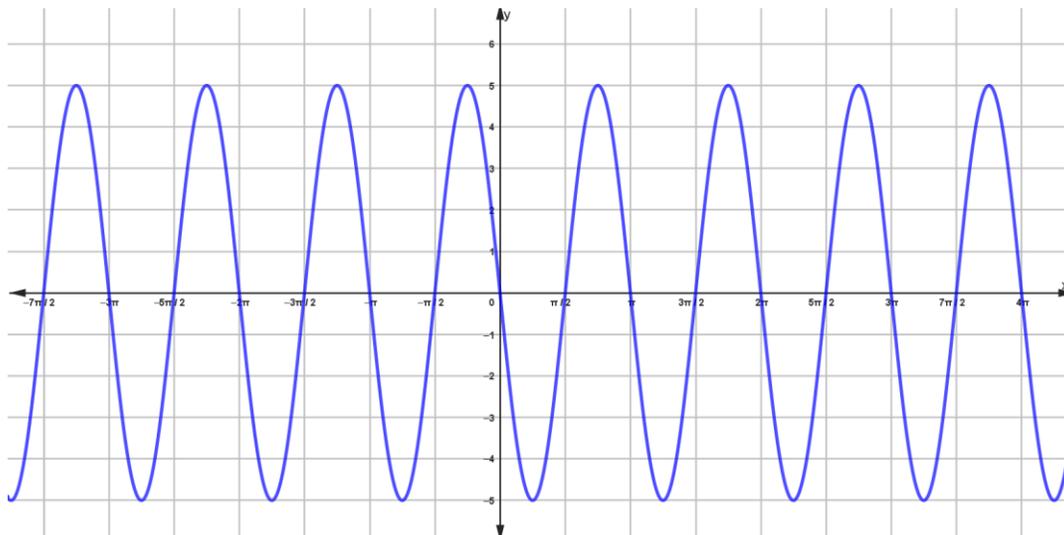
- A. $y = 2\text{sen}(x)$ B. $y = \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$
 C. $y = 2\cos(x)$ D. $y = \text{sen}(x - \pi)$

6. La ecuación que describe la curva de la figura siguiente es:



- A. $y = -\text{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ B. $y = \text{sen}(x + \pi)$
 C. $y = -\text{cos}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ D. $y = \text{sen}(x - 2\pi)$

7. La ecuación que describe la curva de la figura siguiente es:



- A. $y = 5\text{sen}\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$ B. $y = 5\text{sen}(x + \pi)$
 C. $y = -5\text{cos}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ D. $y = -5\text{sen}(2x)$

Graficar y determinar: dominio, rango, amplitud, máximo, mínimo, periodo y desplazamiento de las siguientes funciones:

8. $f(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

9. $f(x) = -2\text{sen}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$

10. $f(x) = 3\text{cos}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$

11. La gráfica de la función $y = 3\text{sen}\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$ aparece desplazada:

- A. $\frac{\pi}{4}$ hacia la derecha del origen, respecto a $y = \text{sen}(x)$
- B. $\frac{\pi}{4}$ hacia la izquierda del origen, respecto a $y = \text{sen}(x)$
- C. $\frac{\pi}{8}$ hacia la derecha del origen, respecto a $y = \text{sen}(x)$
- D. $\frac{\pi}{8}$ hacia la izquierda del origen, respecto a $y = \text{sen}(x)$

TALLER No. 3

ESTIRAMIENTO Y REFLEXIÓN VERTICALES Y HORIZONTALES

Supongamos que una constante $a \in R$ y $a > 1$

CASO 1

$y = a \cdot f(x)$, la gráfica se estira verticalmente con respecto a $y = f(x)$

Pasos:

1. Abre el programa *GeoGebra*: <https://www.geogebra.org/download?lang=es>
2. Aparecen dos vistas: una algebraica y otra geométrica
3. Da clic en el último icono de la parte superior que se llama Desplaza vista gráfica y ubica el plano cartesiano más o menos en la mitad.
4. Luego da clic con el mouse derecho en cualquier cuadrante y sale un cuadro de diálogo, en el cual te vas hasta la última opción que dice Vista Gráfica y sale otro cuadro de diálogo en el cual te aparece en la parte superior: Básico, eje x, eje y, cuadrícula.
5. Da clic en eje x y en la opción distancia cambia a la escala de $\frac{\pi}{2}$, en la opción distancia. Luego en la opción rótulo elije x
6. Da clic luego, en la opción Básico parte superior de este mismo cuadro de diálogo y da clic en negrilla (el programa pone un chulito) y en estilo de trazo elije el último para que quede con flecha en ambos extremos.
7. Luego en la parte superior da clic en cuadrícula y das clic en la opción Cuadrícula visible.
8. Da clic en eje y en la parte superior de este cuadro de diálogo y luego en la opción rótulo, despliega y elijes y.
9. Cierra esta primera ventana para que observes toda la programación hecha hasta ahora.
10. En la parte inferior de este programa aparece la palabra Entrada, escribe la primera función: $y = \text{sen}(x)$, el programa por defecto crea los paréntesis de manera

automática, entonces si quieres le puedes dar enter, pero después de escribir la x , porque el programa no te la escribe automáticamente.

11. Aparece la gráfica de la función $y = \text{sen}(x)$, luego te paras con el mouse encima de la curva y das clic derecho y aparece un cuadro de diálogo y le das clic en la opción propiedades y aparece otro cuadro de diálogo, con las opciones: Básico, color, estilo y otros
12. Da clic en la opción color y te sale una paleta de opciones.
13. Elige por ejemplo azul y luego da clic en la opción Estilo y te sale otro cuadro de diálogo con la opción grosor del trazo, súbelo hasta el cinco en la reglita que aparece allí.
14. Cierra y mira los efectos.
15. Esta gráfica representa la función estándar o principal
16. Ahora vamos a hacer la primera transformación y consistirá en multiplicar la función por un número real. ¿Qué sucede?
17. Nos vamos ahora al penúltimo icono del programa que dice Deslizador, da clic y salen cuatro opciones, da clic en la primera y el cursor se convierte en una cruz.
18. Da clic izquierdo en el segundo cuadrante y sale un cuadro de diálogo y vamos a poner en el cuadro de MIN (o sea mínimo) el valor de 1 y en el cuadro de MAX (o sea máximo) el valor de 5. Por defecto aparece señalado la opción número (déjalo ahí por favor). Ahora da clic en Aplicar.
19. Como puedes notar sale un segmento con el deslizador de nombre a y en la vista algebraica aparece la función $f(x) = \text{sen}(x)$ y el deslizador por defecto en el valor 1.
20. Puedes dar clic sostenido izquierdo sobre el punto “ a ” grueso que aparece en el segmento y verificar si corre de 1 hasta 5. Déjalo en el 1 por favor.
21. Ahora escribe en el cuadro de entrada inferior izquierdo $y = a * \text{sen}(x)$ y da enter.
22. Como puedes observar solo aparece una sola curva, es porque en realidad como el deslizador se encuentra en el punto mínimo o sea 1, coincide con la curva azul, pero si miras en la vista algebraica puedes observar que aparece una nueva función $g(x) = 1 \text{sen}(x)$.
23. Ahora mueve el punto grueso que se encuentra en la barra del deslizador y observa el efecto. ¿Qué sucede? _____

CASO 2:

$y = \frac{1}{a} \cdot f(x)$, la gráfica se contrae verticalmente con respecto a $y = f(x)$

1. Borra la gráfica anterior, no la principal $y = \text{sen}(x)$ y deja el deslizador “ a ”.
2. Ahora da clic encima del punto grueso que aparece en el deslizador, con mouse derecho y luego clic en la opción propiedades y cambia el intervalo poniendo en MIN el 1 y en MAX el 10, puedes también aumentar la velocidad que por defecto aparece en 1 y le puedes un valor superior y luego cierra este cuadro de diálogo.
3. Escribe en la entrada barra inferior $y = \frac{1}{a} * \text{sen}(x)$ y luego da enter.
4. Luego da clic en animación en el deslizador o en el botón pause que se encuentra en el margen inferior izquierdo de la pantalla.

5. ¿Qué puedes concluir? _____

Ahora saca la conclusión para los siguientes casos repitiendo el procedimiento anterior:

CASO 3:

$$y = f(a * x)$$

Conclusión: _____

CASO 4:

$$y = f\left(\frac{x}{a}\right)$$

Conclusión: _____

CASO 5:

$$y = -f(x)$$

Conclusión: _____

CASO 6:

$$y = f(-x)$$

¿Qué sucedió en este caso al graficar $y = -\text{sen}(x)$ con respecto a $y = \text{sen}(-x)$?

La conclusión es que la gráfica de $y = \text{sen}(x)$ no se refleja con respecto al eje y.
RECUERDA

CASO 7:

$$y = f(x) + a$$

Conclusión: _____

CASO 8:

$$y = f(x) - a$$

Conclusión: _____

CASO 9:

$$y = f(x - a)$$

Conclusión: _____

CASO 10:

$$y = f(x + a)$$

Conclusión: _____

RETO:

Deja la pantalla limpia y con la misma división del eje x en radianes, puedes dar clic en deshacer dando clic en el botón superior derecho, en la flechita que aparece de color.

Ahora escribe en la entrada la siguiente ecuación: $y = -5\text{sen}\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$ y a la vez escribe $y = \text{sen}(x)$. Póngale un color diferente a cada curva y responde:

1. ¿Cuál es el dominio? _____
2. ¿Cuál es el rango? _____
3. Calcular su período, es decir, cada cuanto se repite. Recuerda que su fórmula es:

$$P = \frac{2\pi}{a} =$$

4. Punto Máximo: _____
5. Punto Mínimo: _____

RETO:

Ahora escribe $y = x^2$ y luego enter.

¿Qué gráfica se observa? _____

Desplazar esta gráfica 4 unidades hacia la derecha, luego invierta la función y luego desplácela 3 unidades hacia abajo.

RETO:

Ahora escribe $y = |x|$ y luego enter.

No sabes cómo hacerlo. Entonces escribe $y = \text{abs}(x)$ y luego enter. Se le llama la función valor absoluto.

Por favor aplica las mismas transformaciones anteriores.

Referencias:

Uribe, J. (200). *Matemática Experimental 10*. Medellín: Uros Editores.

Stewart, J y et al. (2006). *Precálculo*. México: Thomson.