

	MUNICIPIO DE MEDELLÍN GUÍA DE MATEMÁTICAS: LEY DE SENOS Y DE COSENOS		
Grado:	10	Nivel:	Educación Media

Autor: Jorge Cardeno Espinosa
 Grupo ELIME CEID

LOGROS:

Enunciar y demostrar la Ley de los Senos, Ley de los Cosenos y Tangentes y aplicarlas en la solución de problemas que originan triángulos no rectángulos.

Aplicar las funciones trigonométricas en triángulos rectángulos y oblicuángulos.

CONCEPTOS BÁSICOS

TEOREMA DEL SENO:

En todo triángulo se cumple que las longitudes de los lados son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos.

$$\frac{a}{\text{Sen } a} = \frac{b}{\text{Sen } B} = \frac{c}{\text{Sen } C}$$

La ley de los senos se aplica cuando los datos que se conocen son:

1. Dos ángulos y un lado (**A-L-A**)
 Se halla la medida de tercer ángulo aplicando el teorema de la suma de los ángulos internos de un triángulo y los datos que faltan aplicando la ley de los senos.
2. Dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos (**L-L-A**)
 Se utiliza la ley de senos para encontrar uno de los dos ángulos que faltan y determinar si tiene una, dos o ninguna solución.

TEOREMA DEL COSENO:

En un triángulo el cuadrado de cada lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos menos el doble producto del producto de ambos por el coseno del ángulo que forman.

$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C \end{cases}$$

Recordar que esta ley se aplica cuando los datos conocidos son:

1. Dos lados y el ángulo entre ellos (**L-A-L**)
2. Los tres lados (**L-L-L**)

Para hallar la medida de los ángulos internos en el caso de conocer la medida de los tres lados (L-L-L), se despeja del Teorema de Cosenos, así:

$$\begin{aligned}
 a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A \leftrightarrow b^2 + c^2 - 2bc \cos A = a^2 \\
 \therefore -2bc \cos A &= a^2 - b^2 - c^2 \\
 2bc \cos A &= -a^2 + b^2 + c^2 \\
 \cos A &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}. \text{ Por lo tanto, } \cos^{-1} \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right) = \angle A
 \end{aligned}$$

De igual manera,

$$\begin{aligned}
 \cos B &= \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \\
 \cos C &= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}
 \end{aligned}$$

TALLER:

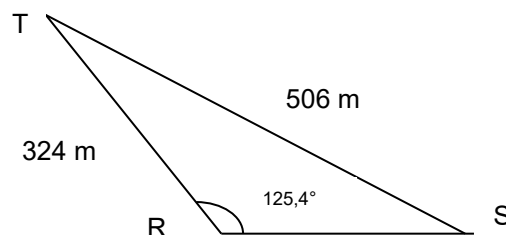
PROBLEMAS DE APLICACIÓN SOBRE TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS

1. Los puntos A y B se encuentran en la misma línea horizontal con la base de una colina y los ángulos de depresión desde la cima de la colina son: 30.2° y 22.5° respectivamente. Si la distancia entre A y B es 75 m, ¿Cuál es la altura de la colina?

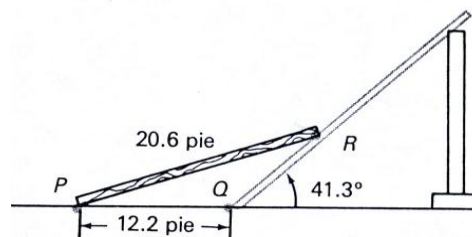
En los siguientes ejercicios resuelva el triángulo. Exprese los resultados con el número de dígitos significativos que requiera la información proporcionada.

2. $\alpha = 34^\circ$ y $\beta = 71^\circ$, $a = 24$
3. $\alpha = 73.2^\circ$, $\gamma = 23.8^\circ$, $b = 2.30$
4. $a = 5.2$, $b = 7.1$, $c = 3.5$
5. $a = 408$, $b = 256$, $c = 283$
6. $\beta = 48.6^\circ$, $\gamma = 61.4^\circ$, $c = 53.2$
7. $\alpha = 52^\circ 42'$, $\beta = 75^\circ 36'$, $b = 408$
8. $a = 20.7$, $b = 10.2$, $c = 24.3$

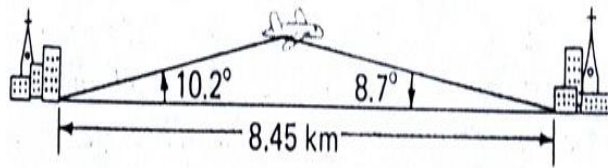
9. Un edificio se localiza al final de una calle que está inclinada en un ángulo de 8.4° con respecto a la horizontal. En un punto P que está a 210 m calle abajo del edificio, el ángulo subtendido por el edificio es de 15.6° . ¿Cuál es la altura del edificio?
10. Una asta está situada en la parte superior de un edificio de 115 pie de altura. Desde un punto en el mismo plano horizontal de la base del edificio los ángulos de elevación de los extremos superior e inferior del asta son 63.2° y 58.6° , respectivamente. ¿Cuál es la longitud del asta?
11. Para determinar la distancia a través de un río recto, un topógrafo elige los puntos P y Q en la rivera, donde la distancia entre P y Q es 200m. En cada uno de los puntos se observa el punto R en la rivera opuesta. El ángulo que tiene lados PQ y PR mide 63.1° y el ángulo cuyos lados son PQ y QR mide 80.4° . ¿Cuál es la distancia a través del río?
12. Una parcela triangular con vértices R, S y T se delimita por una cerca, pero se advierte la ausencia de la marca del lindero en S del título de propiedad, se sabe que la distancia de T a R es 324 m, la distancia de T a S es 506 m y el ángulo en R del triángulo mide 125.4° . Determine la ubicación de S calculando la distancia de R a S.



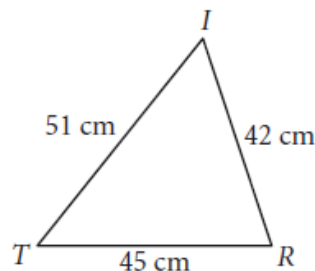
13. Una rampa está inclinada en un ángulo de 41.3° con respecto del suelo. Un extremo de una tabla de 20.6 pie de longitud se localiza en el suelo en un punto P que está a 12.2 pie de la base Q de la rampa, y el otro extremo reposa sobre la rampa en un Punto R. Determine la distancia desde el punto Q hacia arriba de la rampa hasta el punto R.



14. En un momento determinado cuando un avión voló sobre un camino recto que une a dos ciudades pequeñas, los ángulos de depresión de ambas fueron de 10.2° y 8.7° :
 - a) Determine las distancias rectas desde el avión a cada una de las ciudades en ese momento si la separación entre ambas es de 8.45 Km.
 - b) determine la altura del avión en ese momento.



15. Un punto P está a 1.4 Km. de la orilla de un lago y 2.2 Km. de la otra orilla. Si en P el lago subtende un ángulo de 54° , ¿Cuál es la longitud del lago?
16. Dos caminos rectos se cortan en un punto P y ahí forman un ángulo de 42.6° . En un punto R sobre un camino está un edificio a 368m de P y en un punto S, en el otro camino está un edificio a 426 m de P. Determine la distancia directa de R a S.
17. De un triángulo sabemos que: $a = 6$ m, $B = 45^\circ$ y $C = 105^\circ$. Determina los restantes elementos.
18. Dos embarcaciones salen de la bahía de Boston. El ángulo entre sus rutas es 43° . Una embarcación está viajando a un ritmo de 35 millas por hora, y la otra embarcación está viajando a un ritmo de 25 millas por hora. Al cabo de dos horas, ¿cuál es la distancia entre las dos embarcaciones?
19. Roland y Laura se encuentran separados 500 pies observando un globo en el cielo que está entre ellos y en el mismo plano vertical con ellos. Roland estima que el globo, visto desde donde él se encuentra, forma un ángulo de 75° con el suelo. Desde donde ella se encuentra, Laura estima que el globo forma un ángulo de 50° con el suelo. Estima la altura del globo.
20. Encuentra la medida del ángulo I en el triángulo TRI .



Referencias:

- Uribe, J. (2000). *Matemática Experimental 10*. Medellín: Uros Editores.
- Romero, L. (2003). *Inteligencia lógico matemática 10*. Bogotá: Voluntad.
- Muñoz, F. et ál. (1996). *Matemática Décimo Grado*. La Habana: Pueblo y Educación.